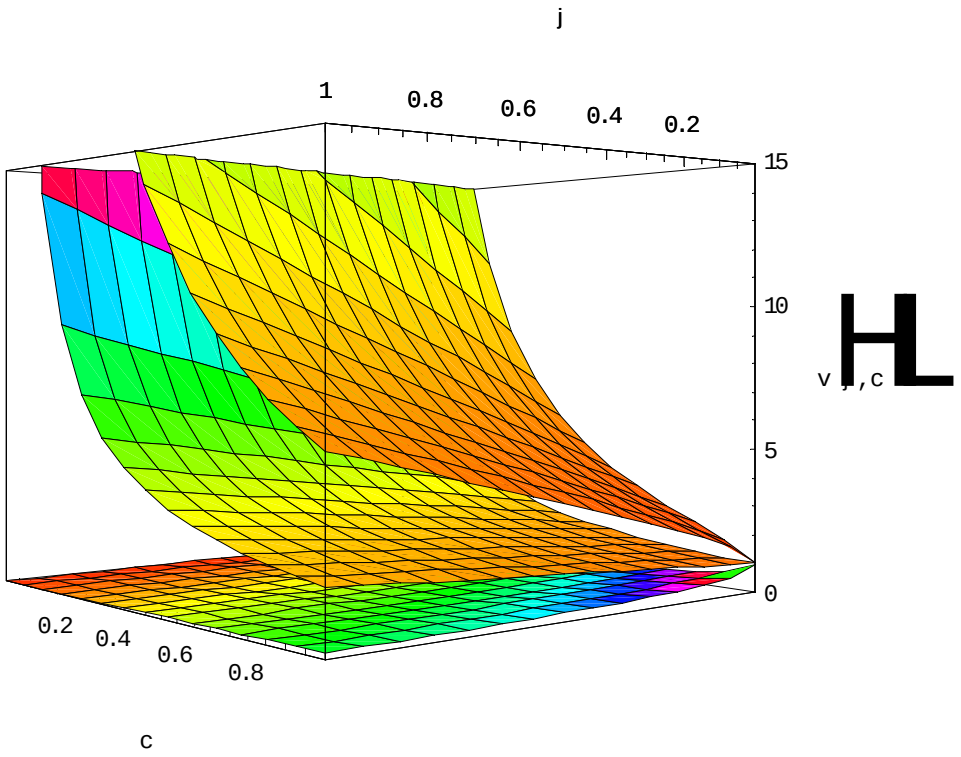
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤ/ΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΥΠ. ΔΙΔΑΚΤΟΡΑΣ: ΚΑΡΠΕΤΗΣ ΧΡΗΣΤΟΣ
ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ : ΑΝ. ΚΑΘ. ΒΑΡΕΛΑΣ ΕΡΩΤΟΚΡΙΤΟΣ
ΘΕΜΑ ΔΙΑΤΡΙΒΗΣ :

ΧΡΗΜΑ, ΕΙΣΟΔΗΜΑ, ΠΡΟΣΔΟΚΙΕΣ ΚΑΙ Η ΑΡΧΗ ΤΟΥ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΤΗ – ΕΠΙΤΑΧΥΝΤΗ



ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ

11/1/2005

Πίνακας Συμβόλων	
b_0	Το ύψος των κρατικών δαπανών
b_2	Ο συντελεστής επηρεασμού των επενδύσεων από την προσδοκώμενη επιτοκιακή μεταβολή
$C(t)$	Η ορίζουσα Casorati.
C_t	Το ύψος της ιδιωτικής κατανάλωσης
c_1	Η οριακή και μέση ροπή προς κατανάλωση
γ	Ο συντελεστής προσαρμογής στα πλαίσια του μηχανισμού των αναθεωρούμενων προσδοκιών
d_1	Ο συντελεστής επηρεασμού της ζήτησης χρήματος από μεταβολές του εισοδήματος
d_2	Ο συντελεστής επηρεασμού της ζήτησης χρήματος από την προσδοκώμενη επιτοκιακή μεταβολή
ΔR_t^e	Η προσδοκώμενη επιτοκιακή μεταβολή μεταξύ της τρέχουσας και της προηγούμενης περιόδου
$\overline{\Delta R}$	Η επιτοκιακή διαφορά που προσδιορίζεται στα πλαίσια του μηχανισμού των παλινδρομικών προσδοκιών, όταν η οικονομία βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας
$\overline{\Delta R}_t^j$	Η επιτοκιακή διαφορά που προσδιορίζεται όταν η οικονομία βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας και οι προσδοκίες διαμορφώνονται βάσει του μηχανισμού j (όπου j = ae , se , ra)
e_t	Το σφάλμα πρόβλεψης στα πλαίσια του μηχανισμού των ορθολογικών προσδοκιών
θ_i	Ο συντελεστής προσαρμογής στα πλαίσια του μηχανισμού των παλινδρομικών προσδοκιών (i = 1 , 2)
I_t	Το ύψος των ιδιωτικών επενδύσεων
k_j	Το πραγματικό μέρος των χαρακτηριστικών ριζών στα πλαίσια των αναπτυχθέντων υποδειγμάτων (j = ae , se , re , ra)
λ_i	Οι ρίζες των χαρακτηριστικών εξισώσεων στα πλαίσια των αναπτυχθέντων υποδειγμάτων (i = 1 , 2 , 3)
m	Ο διαχρονικά σταθερός ρυθμός αύξησης της προσφοράς χρήματος
M_0	Η ποσότητα του χρήματος κατά την περίοδο t = 0
M_t^s	Το ύψος της προσφοράς χρήματος
M_t^d	Το ύψος της ζήτησης χρήματος
$\left(M_{tr}^d\right)_t$	Η ζήτηση χρήματος για συναλλακτικούς σκοπούς και σκοπούς προφύλαξης
$\left(M_{sp}^d\right)_t$	Η ζήτηση χρήματος για κερδοσκοπία

Πίνακας Συμβόλων – Συνέχεια	
n_j	Το φανταστικό μέρος των χαρακτηριστικών ριζών στα πλαίσια των αναπτυχθέντων υποδειγμάτων (j = ae , se , re , ra)
Π_t	Το σύνολο των διαθέσιμων πληροφοριών κατά την περίοδο t
R_j	Η απόλυτη τιμή των μιγαδικών χαρακτηριστικών ριζών στα πλαίσια των αναπτυχθέντων υποδειγμάτων (j = ae , se , re , ra)
R_t	Το ύψος του επιτοκίου
$\Re_+^*$	Το σύνολο των πραγματικών θετικών και μη μηδενικών αριθμών
v	Ο επιταχυντής
Y_t	Το ύψος του εισοδήματος και η γενική λύση μίας εξίσωσης διαφορών
Y_t^c	Η συμπληρωματική λύση μίας εξίσωσης διαφορών
Y_t^p	Η μερική λύση μίας εξίσωσης διαφορών
$\widetilde{Y}_t^j$	Το εισόδημα ισορροπίας που εξειδικεύεται στα πλαίσια των διαφορετικών υποδειγμάτων (j = ae , se , re , ra)
$\widetilde{Y}$	Το εισόδημα ισορροπίας στο αρχικό υπόδειγμα του Samuelson
$\overline{Y}_t$	Το εισόδημα ισορροπίας στα πλαίσια του μηχανισμού των παλινδρομικών προσδοκιών, όταν η επιτοκιακή διαφορά ισορροπίας είναι συνάρτηση του χρόνου

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Σελίδα

1. Εισαγωγή……..... 5

2. Το υπόδειγμα οικονομικών κύκλων του Samuelson……..…. 8

3. Η διαρθρωτική μορφή του διευρυμένου υποδείγματος……..... 12

4. Οι μηχανισμοί διαμόρφωσης των προσδοκιών……... 16

5. Η επίδραση του μηχανισμού διαμόρφωσης των προσδοκιών στη λύση του υποδείγματος……..... 20

5.1 Εξαγωγή της βασικής εξίσωσης διαφορών του υποδείγματος στα πλαίσια του μηχανισμού των αναθεωρούμενων προσδοκιών…. 20

5.1.1 Προσδιορισμός της συμπληρωματικής λύσης υπό καθεστώς αναθεωρούμενων προσδοκιών…… 24

5.1.2 Προσδιορισμός της μερικής λύσης υπό καθεστώς αναθεωρού-μενων προσδοκιών ……. 36

5.1.3 Συνθήκες ευστάθειας και προσδιορισμός της γενικής λύσης υπό καθεστώς αναθεωρούμενων προσδοκιών……... 42

5.1.4 Η διαχρονική πορεία του εισοδήματος……... 52

5.1.5 Επηρεασμός του επιπέδου του εισοδήματος ισορροπίας από μεταβολές των σταθερών που το συνιστούν……... 53

5.1.6 Επηρεασμός των δυναμικών ιδιοτήτων του υποδείγματος από μεταβολές των τιμών των παραμέτρων του…… 86

5.2 Εξαγωγή της βασικής εξίσωσης διαφορών του υποδείγματος στα πλαίσια του μηχανισμού των στατικών προσδοκιών…….. 92

5.2.1 Προσδιορισμός της συμπληρωματικής λύσης υπό καθεστώς στατικών προσδοκιών……. 94

5.2.2 Προσδιορισμός της μερικής λύσης στα πλαίσια του μηχανισμού των στατικών προσδοκιών……. 102

5.2.3 Επηρεασμός του επιπέδου του εισοδήματος ισορροπίας από μεταβολές των συνιστωσών παραμέτρων του…… 106

5.2.4 Συνθήκες ευστάθειας και προσδιορισμός της γενικής λύσης υπό καθεστώς στατικών προσδοκιών……. 124

5.3 Εξαγωγή της βασικής εξίσωσης διαφορών του υποδείγματος στα πλαίσια του μηχανισμού των παλινδρομικών προσδοκιών……. 127

5.3.1 Προσδιορισμός της συμπληρωματικής λύσης στα πλαίσια του μηχανισμού των παλινδρομικών προσδοκιών……..……. 129

5.3.2 Προσδιορισμός της μερικής λύσης στα πλαίσια του μηχανισμού των παλινδρομικών προσδοκιών……... 142

Σελίδα

5.3.3 Επηρεασμός του εισοδήματος ισορροπίας από μεταβολές των συνιστωσών παραμέτρων του……..…… 151
5.3.4 Προσδιορισμός της γενικής λύσης του υποδείγματος υπό καθεστώς παλινδρομικών προσδοκιών και διερεύνηση της ευστάθειάς του……. 170

5.4 Εξαγωγή της βασικής εξίσωσης διαφορών του υποδείγματος στα πλαίσια του μηχανισμού των ορθολογικών προσδοκιών…….. 177

5.4.1 Προσδιορισμός της γενικής λύσης και διερεύνηση των δυναμικών ιδιοτήτων του υποδείγματος στα πλαίσια του μηχανισμού των ορθολογικών προσδοκιών……. 180

6. Θεμελίωση των θεωρητικών συμπερασμάτων της ανάλυσής μας με τη χρήση της μεθόδου της προσομοίωσης…… 183

6.1 Αποτελέσματα της διαδικασίας προσομοίωσης στα πλαίσια του μηχανισμού των αναθεωρούμενων προσδοκιών……... 183
6.2 Αποτελέσματα της διαδικασίας προσομοίωσης στα πλαίσια του μηχανισμού των στατικών προσδοκιών……..... 191
6.3 Αποτελέσματα της διαδικασίας προσομοίωσης στα πλαίσια του μηχανισμού των ορθολογικών προσδοκιών……..... 198
6.4 Αποτελέσματα της διαδικασίας προσομοίωσης στα πλαίσια του μηχανισμού των παλινδρομικών προσδοκιών……..... 214

7. Συμπεράσματα…… 222

Παράρτημα Α…….. 228

Παράρτημα Β…….. 231

Παράρτημα Γ…….. 235

Παράρτημα Δ…….. 239

Παράρτημα Ε…….. 240

Παράρτημα ΣΤ……..... 249

Παράρτημα Ζ……... 258

Παράρτημα Η…….. 262

Παράρτημα Θ…….. 266

Βιβλιογραφία…….. 272

1. Εισαγωγή

Η ταλάντωση της τιμής του πραγματικού εισοδήματος γύρω από την τάση του, γύρω δηλαδή από την τιμή ισορροπίας του, αποτέλεσε από πολύ νωρίς αντικείμενο έρευνας. Εάν επιχειρούσε κανείς μία σύντομη ιστορική αναδρομή[1], θα διαπίστωνε ότι η έννοια της δυναμικής προσέγγισης της οικονομίας προς την κατάσταση ισορροπίας της, εισήχθη για πρώτη φορά το 1776 από τον Adam Smith στο βιβλίο του «Ο Πλούτος των Εθνών».

Η θεωρία των κυκλικών διακυμάνσεων θεμελιώθηκε την περίοδο 1790 ~ 1870. Μεγάλη ήταν η συμβολή των Tooke και Overstone οι οποίοι και εισήγαγαν για πρώτη φορά στην οικονομική ορολογία τις έννοιες του «κύκλου» και της «περιόδου του κύκλου», ενώ στην ανάλυσή τους δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στο ρόλο των πιστώσεων στη δημιουργία των φάσεων των κύκλων.

Ο Karl Marx ίσως ήταν ο πρώτος που διατύπωσε μια ολοκληρωμένη θεωρία οικονομικής μεγέθυνσης και κυκλικών διακυμάνσεων. Στα πλαίσια της θεωρίας του διατυπώνεται η έννοια της πτωτικής τάσης του ποσοστού του κέρδους, η οποία και αποτελεί κεντρικό στοιχείο της ανάλυσής του. Επιπροσθέτως, η καπιταλιστική εξέλιξη περιγράφεται ως μία ημιτονοειδή διαδικασία, στα πλαίσια της οποίας οι οικονομικές υφέσεις γίνονται διαχρονικά εντονότερες και οδηγούν στην οικονομική κατάρρευση.

Μία σημαντική περίοδος για την ανάλυση των οικονομικών διακυμάνσεων είναι και εκείνη που εκτείνεται μεταξύ των ετών 1870 και 1930. Ενδεικτικά αναφέρεται η εξειδίκευση της περιοδικότητας του κύκλου από τον Juglar (1862), μέσα από την οπτική ανάλυση του γραφήματος των χρονοσειρών, η διαπίστωση από τους Tugan – Baranovsky και από τον A. Spiethoff ότι οι κύκλοι λαμβάνουν σχεδόν αποκλειστικά χώρα στα πλαίσια των επενδύσεων σε πάγιο και μηχανολογικό εξοπλισμό, καθώς και η έμφαση που δόθηκε από τους A. Aftelion και J.M. Clark στην αρχή του επιταχυντή ως μηχανισμού εξήγησης των πάγιων επενδύσεων. Στην ίδια περίοδο τοποθετείται και η διαμόρφωση νομισματικών θεωριών στα πλαίσια των οποίων πραγματοποιείται μία διάκριση ανάμεσα στις έννοιες του «πραγματικού» επιτοκίου, δηλαδή της αμοιβής του φυσικού κεφαλαίου, και του «νομισματικού» επιτοκίου των χρηματοοικονομικών στοιχείων, μέσω της οποίας επιχειρείται η δικαιολόγηση του φαινομένου των κυκλικών διακυμάνσεων στις επενδύσεις.

Η δημοσίευση το 1936 από τον J.M. Keynes του βιβλίου με τίτλο "General Theory of Employment, Interest and Money", σηματοδοτεί την έναρξη μίας νέας περιόδου για την Μακροοικονομική Ανάλυση. Στα πλαίσια του συγκεκριμένου έργου ο Keynes δομεί ένα υπόδειγμα ανισορροπίας (*disequilibrium model*) διαιρώντας, για πρώτη φορά, την οικονομία σε δύο τομείς. Στην προσπάθειά του να εξηγήσει το φαινόμενο των οικονομικών κύκλων, ο Keynes κινείται στα πλαίσια της παράδοσης των θεωριών των επιχειρηματικών κύκλων και θεωρεί ότι οι επιχειρήσεις λαμβάνουν υπόψη το ύψος των αποθεμάτων τους και τις βραχυχρόνιες προσδοκίες τους αναφορικά με το ύψος της ζήτησης, προκειμένου να καθορίσουν το ύψος της παραγωγής

---

[1] Για μία αναλυτικότερη παρουσίαση της ιστορικής διαδρομής της θεωρίας των Επιχειρηματικών Κύκλων, ο αναγνώστης παραπέμπεται στο βιβλίο του Hillinger C. (1992), *CYCLICAL GROWTH in Market and Planned Economies*, Oxford – Clarendon Press, pp. 5 ~ 42 καθώς και στα άρθρα των Fisher S. (1988), "Recent Development in Macroeconomics", *The Economic Journal*, 98 , 391 , pp. 294 ~ 339, Fischer S.; Greenwald B.C.; Hall R.E. & Stiglitz J.E. (1988), "Examining Alternative Macroeconomic Theories", *Brooking Papers on Economic Activity*, vol. 1988 , No 1 , pp. 207 ~ 270 και Zarnowitz V. (1985), "Recent Work on Business Cycles in Historical Perspective: A Review of Theories and Evidence", *Journal of Economic Literature*, 23 , 2 , pp. 523 ~ 580.

τους. Επιπρόσθετα ο Keynes θεωρεί ότι οι επιχειρηματικές αποφάσεις αναφορικά με το ύψος των πάγιων επενδύσεων, εξαρτώνται από τη σχέση μεταξύ του κόστους και της μακροπρόθεσμης προσδοκώμενης απόδοσης του κεφαλαίου, με το κόστος του κεφαλαίου να εξαρτάται από την τιμή των κεφαλαιουχικών αγαθών και το ύψος του επιτοκίου.

Στα πλαίσια του υποδείγματος IS – LM που θεμελίωσε ο Hicks χρησιμοποιήθηκαν νέες οικονομικές έννοιες, όπως εκείνες της παγίδας ρευστότητας, της ψευδαίσθησης του χρήματος, της ακαμψίας των μισθών και της ανελαστικότητας των επενδύσεων ως προς το επιτόκιο, βάσει των οποίων διατυπώθηκαν οι βασικές οικονομικές κεϋνσιανές θέσεις. Οι θέσεις αυτές, όπως η αποτελεσματικότητα (αναποτελεσματικότητα) της δημοσιονομικής (νομισματικής) πολιτικής, η απόδοση των πληθωριστικών φαινομένων στην μονοπωλιακή διάρθρωση των αγορών και όχι στην ραγδαία νομισματική επέκταση και τέλος η χρήση της καμπύλης Phillips για την περιγραφή της ευσταθούς μακροχρόνιας σχέσης μεταξύ ανεργίας και πληθωρισμού, αποτέλεσαν τη βάση των σταθεροποιητικών προγραμμάτων που υιοθετήθηκαν και εφαρμόστηκαν κατά τη μεταπολεμική περίοδο μέχρι και τη δεκαετία του 1960.

Ο P. Samuelson, μαθητής του Keynes, διατύπωσε το 1939 ένα μαθηματικό υπόδειγμα επιχειρηματικών κύκλων στα πλαίσια του οποίου εισήχθη μία χρονική υστέρηση στις συναρτήσεις της κατανάλωσης και των επενδύσεων και γινόταν χρήση της αρχής του πολλαπλασιαστή – επιταχυντή. Το υπόδειγμα αποθεμάτων του Metzler (1941) καθώς και το υπόδειγμα επιχειρηματικών κύκλων του Hicks (1950) είναι δύο ακόμη υποδείγματα τα οποία βασίζονται επίσης στην αλληλεπίδραση μεταξύ πολλαπλασιαστή – επιταχυντή.

Η στροφή του ενδιαφέροντος κατά τη δεκαετία του 1960 στη θεωρία της οικονομικής μεγέθυνσης είχε ως συνέπεια να ατονήσει το ενδιαφέρον των οικονομολόγων για τη θεωρία των επιχειρηματικών κύκλων. Επιπροσθέτως, η εμφάνιση του φαινομένου του στασιμοπληθωρισμού στα τέλη της δεκαετίας του 1960 και στις αρχές της δεκαετίας του 1970, οδήγησε στην κατάρρευση της καμπύλης Phillips ως εργαλείου περιγραφής της σχέσης μεταξύ ανεργίας και πληθωρισμού, στον κλονισμό της Κεϋνσιανής Θεωρίας και στην ανάδειξη της Μονεταριστικής Θεωρίας.

Θεμελιωτής της Μονεταριστικής Θεωρίας θεωρείται ο Milton Friedman[2] και στα πλαίσια αυτής γίνεται αποδεκτή η ποσοτική θεωρία του χρήματος, εισάγονται οι έννοιες του φυσικού ποσοστού της ανεργίας και των αναθεωρούμενων προσδοκιών, ως μηχανισμού διαμόρφωσης των προσδοκιών και διατυπώνεται η αρχή της σταθερής διαχρονικά νομισματικής επέκτασης. Η παραδοχή ότι τα οικονομούντα άτομα δεν πραγματοποιούν συστηματικά λάθη στις προβλέψεις τους είχε ως συνέπεια η ισχύς της καμπύλη Phillips να περιοριστεί μόνο στη βραχυχρόνια περίοδο καθώς μακροχρόνια η ανεργία προσεγγίζει την τιμή ισορροπίας της, το μέγεθος της οποίας προσδιορίζεται από τις πραγματικές δυνάμεις της οικονομίας. Επιπροσθέτως στα πλαίσια της Μονεταριστικής Θεωρίας διατυπώνεται η θέση ότι οι οικονομικές διακυμάνσεις οφείλονται κυρίως σε διαταραχές που λαμβάνουν χώρα στην αγορά χρήματος και οι οποίες επηρεάζουν την πραγματική οικονομία.

Η Νέα Κλασική Θεωρία ήταν εκείνη που διαδέχτηκε την Μονεταριστική Θεωρία και αποτελεί ουσιαστικά μία πιο ακραία μορφή της τελευταίας. Στα πλαίσια της Νέας Κλασικής Θεωρίας γίνεται η παραδοχή ότι η οικονομία βρίσκεται πάντα σε κατάσταση ισορροπίας, ενώ επιχειρείται η εξήγηση των οικονομικών κύκλων διατηρώντας

---

[2] Μία προσπάθεια θεμελίωσης των μονεταριστικών θέσεων πραγματοποιείται από τους Friedman M. & Schwarz A. J. (1963), *A Monetary History of the United States 1867 ~ 1960*, Princeton University Press.

συγχρόνως και τις δύο βασικές αρχές της Γενικής Θεωρίας Ισορροπίας, δηλαδή της ορθολογικής συμπεριφοράς και της ισορροπίας των αγορών.

Η παραδοχή της Νέας Κλασικής Θεωρίας ότι οι αγορές βρίσκονται πάντα σε κατάσταση ισορροπίας υιοθετείται και από τη Θεωρία των Πραγματικών Επιχειρηματικών Κύκλων, στα πλαίσια της οποίας γίνεται αποδεκτό ότι οι τεχνολογικές διαταραχές παίζουν σημαντικό ρόλο στην οικονομία. Θα πρέπει ωστόσο να σημειωθεί ότι ο Mankiw (1989) ασκεί κριτική στη συγκεκριμένη θεωρία διότι παρά τη μεγάλη σημασία των τεχνολογικών διαταραχών, καμία εξ αυτών δεν έχει εξειδικευθεί ενώ δεν έχει προσδιοριστεί και κάποια τεχνολογική διαταραχή που να εξηγεί τη βραχυχρόνια διακύμανση του εισοδήματος. Κριτική στη Νέα Κλασική Θεωρία άσκησαν οι Νεοκεϋνσιανοί οικονομολόγοι, οι οποίοι επιχείρησαν να γεφυρώσουν το χάσμα ανάμεσα στη Μονεταριστική και την Κεϋνσιανή Θεωρία, συμβιβάζοντας τις υποθέσεις της ανισορροπίας και της ορθολογικής συμπεριφοράς.

Κατά το παρελθόν, προσπάθειες για την εισαγωγή του νομισματικού παράγοντα και της έννοιας των προσδοκιών στα πλαίσια υποδειγμάτων πολλαπλασιαστή – επιταχυντή πραγματοποιήθηκαν από τους Minsky (1957), Wright (1958), Smyth (1963) και Waud (1967), οι οποίοι όμως κινήθηκαν στα πλαίσια του υποδείγματος του Hicks (1950), στα πλαίσια δηλαδή ενός υποδείγματος που βρίσκεται αρκετά κοντά στο υπόδειγμα του Samuelson (1939), καθώς επίσης και από τους Laidler (1968), Sargent T.J. (1971), Biederman (1993) και Kaskarelis I. & Varelas E. (1996). Η ανάλυσή μας κινείται στο πνεύμα της ανάλυσης των Βαρελά Ε. & Καρπέτη Χ. (2004) και σε γενικές γραμμές, η διαφοροποίηση έγκειται στην εισαγωγή της προσδοκώμενης επιτοκιακής μεταβολής ως ερμηνευτικής μεταβλητής στις συναρτήσεις των επενδύσεων και της ζήτησης χρήματος.

Στα πλαίσια της διατριβής αναπτύσσεται ένα υπόδειγμα οικονομικών κύκλων, το οποίο κινείται στα πλαίσια της Κεϋνσιανής οικονομικής ανάλυσης και αποτελεί επέκταση του υποδείγματος οικονομικών κύκλων του Samuelson (1939). Οι βασικές υποθέσεις που πραγματοποιούνται και στις οποίες στηρίζεται η ανάλυσή μας, σχετίζονται πρώτον, με τη σταθερότητα των τιμών, δεύτερον, με τον επηρεασμό των επενδύσεων και της ζήτησης χρήματος όχι από την τιμή του επιτοκίου αλλά από την προσδοκώμενη μεταβολή του και τρίτον με την παραδοχή ότι η Κεντρική Τράπεζα αυξάνει διαχρονικά την ποσότητα του χρήματος με ένα σταθερό ρυθμό, το ύψος του οποίου προσδιορίζεται εξωγενώς από την ίδια. Αναφορικά με τον τρόπο διαμόρφωσης των προσδοκιών, θα χρησιμοποιήσουμε το μηχανισμό των αναθεωρούμενων, των στατικών, των ορθολογικών και των παλινδρομικών προσδοκιών.

Μέσω του αναπτυχθέντος υποδείγματος θα επιχειρήσουμε να παρουσιάσουμε την βραχυχρόνια επίδραση της ασκούμενης νομισματικής πολιτικής και του μηχανισμού που χρησιμοποιούν τα οικονομούντα άτομα για τη διαμόρφωση των προσδοκιών τους, πάνω στο εισόδημα ισορροπίας μίας υποθετικής κλειστής οικονομίας και θα διερευνήσουμε την κατεύθυνση της σχέσης μεταξύ του εισοδήματος ισορροπίας και των συνιστωσών παραμέτρων του. Θα συνεχίσουμε την ανάλυσή μας διερευνώντας τις δυναμικές ιδιότητες του υποδείγματος και διατυπώνοντας τις προϋποθέσεις υπό τις οποίες το εισόδημα θα συγκλίνει προς την τιμή ισορροπίας του. Τέλος θα επιχειρήσουμε να επιβεβαιώσουμε τα θεωρητικά συμπεράσματα της ανάλυσής μας, πραγματοποιώντας προσομοιώσεις για κάθε μία από τις αναπτυσσόμενες, βάσει των διαφορετικών μηχανισμών διαμόρφωσης των προσδοκιών, περιπτώσεις.

2. Το υπόδειγμα οικονομικών κύκλων του Samuelson

Η διαρθρωτική μορφή του υποδείγματος του Samuelson[3] περιγράφεται μέσω των ακολούθων σχέσεων[4]:

$$Y_t = C_t + I_t \qquad (2.1) \quad , \quad C_t = c_1 Y_{t-1} \qquad (2.2)$$

$$I_t = b_0 + v\,\Delta C_t \qquad (2.3)$$

όπου $c_1 \in (0,1)$: η οριακή ροπή προς κατανάλωση (*marginal propensity to consumption*) , $v > 0$: ο συντελεστής επιτάχυνσης (*accelerator*), $b_0 > 0$: οι αυτόνομες επενδύσεις (*autonomous investments*), C_t : η κατανάλωση της τρέχουσας περιόδου (*consumption*), I_t : οι τρέχουσες επενδύσεις (*investments*) , Y_t : το εισόδημα της τρέχουσας περιόδου (*Gross Domestic Product*) και $\Delta C_t = C_t - C_{t-1}$.

Όπως προκύπτει από τη σχέση (2.2) η τρέχουσα κατανάλωση (C_t) είναι μία θετική συνάρτηση του εισοδήματος της προηγούμενης περιόδου (Y_{t-1}), ενώ βάσει της σχέσης (2.3) οι τρέχουσες επενδύσεις (I_t) αποτελούν μία θετική συνάρτηση της διαφοράς των επιπέδων κατανάλωσης μεταξύ της τρέχουσας και της προηγούμενης περιόδου ($\Delta C_t = C_t - C_{t-1}$), καθώς και των αυτόνομων επενδύσεων.

Από το συνδυασμό των σχέσεων (2.1) ~ (2.3) προκύπτει ως ακολούθως η βασική εξίσωση διαφορών του υποδείγματος του Samuelson:

$$Y_t = C_t + I_t \overset{(2.3)}{\Rightarrow} Y_t = C_t + b_0 + v\,\Delta C_t \Rightarrow Y_t = C_t + b_0 + v\left(C_t - C_{t-1}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y_t = b_0 + (1+v)C_t - v\,C_{t-1} \overset{(2.2)}{\Rightarrow} Y_t = b_0 + (1+v)c_1 Y_{t-1} - vc_1 Y_{t-2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y_t - (1+v)c_1 Y_{t-1} + vc_1 Y_{t-2} = b_0 \xrightarrow{\text{2 περιόδους μπροστά}}$$

$$\rightarrow \qquad Y_{t+2} - (1+v)c_1 Y_{t+1} + vc_1 Y_t = b_0 \qquad (2.4)$$

Η σχέση (2.4) αποτελεί μία εξίσωση διαφορών (*difference equation*) δεύτερης τάξης και η γενική της λύση (*general solution*) αποτελεί το άθροισμα μίας μερικής λύση (*partial solution*) της (2.4) με τη συμπληρωματική λύση (*complementary solution*) της εν λόγω εξίσωσης διαφορών.

---

[3] Paul A. Samuelson (1939), "Interactions between the Multiplier Analysis and the Principles of Acceleration", *Review of Economic Statistics*, pp. 75 ~ 78; reprinted in American Economic Association, *Readings in Business Cycle Theory*, Richard D. Irwin, Inc., Homewood I11., 1944, pp. 261 ~ 269.

[4] Στο αρχικό υπόδειγμα του Samuelson η συνολική ζήτηση αποτελούσε το άθροισμα της κατανάλωσης, των επενδύσεων και των αυτόνομων κρατικών δαπανών, το μέγεθος των οποίων ταυτίζεται με εκείνο των αυτόνομων επενδύσεων του διευρυμένου υποδείγματος.

Η μερική λύση $\left(Y_t^p\right)$ μας δίνει το επίπεδο του εισοδήματος ισορροπίας και θα μπορούσαμε να υποθέσουμε ότι αυτή είναι της μορφής:

$$Y_t^p\left(= Y_{t+1}^p = Y_{t+2}^p\right) = \widetilde{Y} \qquad \textbf{\textit{(2.5)}}$$

όπου $\widetilde{Y}$: ένας σταθερός αριθμός

Από το συνδυασμό των σχέσεων (2.4) και (2.5) προκύπτει ότι:

$$\widetilde{Y} - (1+v)c_1\,\widetilde{Y} + vc_1\widetilde{Y} = b_0 \Rightarrow \left(1 - c_1 - vc_1 + vc_1\right)\widetilde{Y} = b_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \widetilde{Y} = \frac{b_0}{1-c_1} \qquad \textbf{\textit{(2.6)}}$$

Όπως προκύπτει από τη σχέση (2.6), το εισόδημα ισορροπίας αποτελεί θετική συνάρτηση τόσο του επιπέδου των αυτόνομων επενδύσεων [καθώς ισχύει ότι $\partial\widetilde{Y}/\partial b_0 = 1/(1-c_1) > 0$], όσο και της οριακής ροπής προς κατανάλωση [δεδομένου ότι $\partial\widetilde{Y}/\partial c_1 = b_0/(1-c_1)^2 > 0$].

Το εισόδημα θα συγκλίνει προς την τιμή ισορροπίας του [όπως αυτή περιγράφεται από τη σχέση (2.6)] εφόσον ικανοποιείται το ακόλουθο σύστημα ανισοτήτων:

$$\left.\begin{aligned} 1+\alpha_1+\alpha_0 &> 0 \\ 1-\alpha_1+\alpha_0 &> 0 \\ 1-\alpha_0 &> 0 \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{\textit{(Σ – 2.1)}}$$

όπου $\alpha_0 = vc_1 > 0$ και $\alpha_1 = -(1+v)\,c_1 < 0$

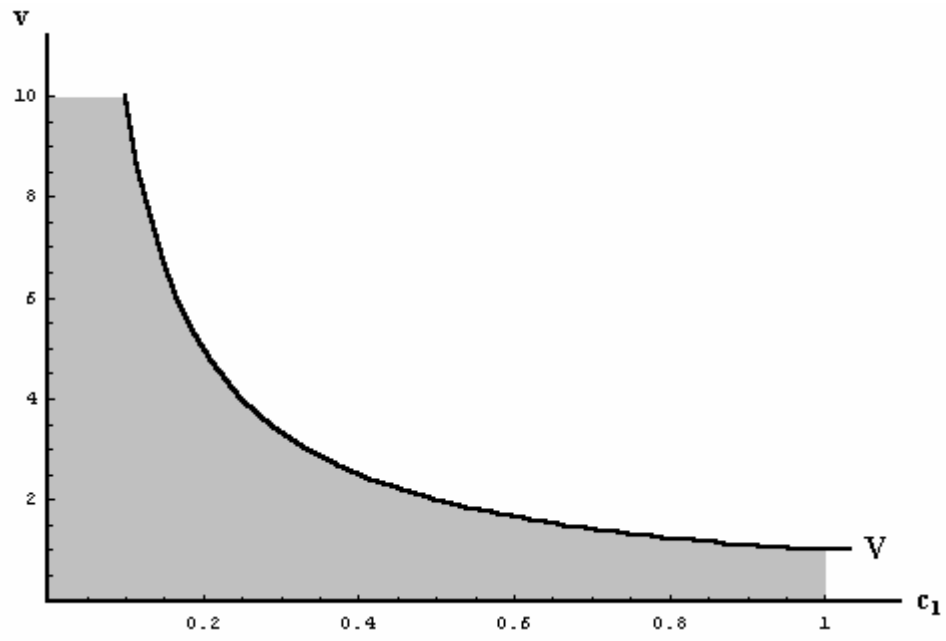
Δεδομένου ότι $1 + \alpha_1 + \alpha_0 = 1 - c_1 > 0$ και $1 - \alpha_1 + \alpha_0 = 1 + (1+2v)\,c_1 > 0$, η ευστάθεια της γενικής λύσης της μη ομογενούς εξίσωσης διαφορών με σταθερούς συντελεστές (2.4) εξαρτάται από την ικανοποίηση της ακόλουθης ανισότητας:

$$1 - \alpha_0 > 0 \Rightarrow 1 - vc_1 > 0 \Rightarrow \qquad v < v_{sn}^s = \frac{1}{c_1} \qquad \textbf{\textit{(2.7)}}$$

Σε γεωμετρικούς όρους, οι συνδυασμοί (c_1,v) για τους οποίους επιτυγχάνεται σύγκλιση του εισοδήματος προς τη μακροχρόνια τιμή ισορροπίας του ($\widetilde{Y}$), εντοπίζονται στη σκιαγραφημένη περιοχή του γραφήματος Δ – 2.1. Στο εν λόγω διάγραμμα και μέσω της καμπύλης V παρουσιάζεται γραφικά η συνάρτηση $v_{sn}^s = 1/c_1$.

Η μορφή της διαχρονικής πορείας του εισοδήματος, εξαρτάται από το πρόσημο της διακρίνουσας της χαρακτηριστικής εξίσωσης της εξίσωσης διαφορών (2.4). Η μορφή της χαρακτηριστικής εξίσωσης [όπως αυτή προκύπτει από την εξίσωση διαφορών (2.4)] έχει ως ακολούθως:

$$\lambda^2 - (1+v)c_1\,\lambda + vc_1 = 0 \qquad \textbf{\textit{(2.8)}}$$



Δ – 2.1

Η διακρίνουσα της χαρακτηριστικής εξίσωσης (2.8) έχει την ακόλουθη μορφή:

$$\Delta_{sn} = \left[-(1+v)c_1\right]^2 - 4\,vc_1 = (1+v)^2 c_1^2 - 4\,vc_1 = c_1^2\,v^2 + 2(c_1-2)c_1\,v + c_1^2 \qquad \textit{(2.9)}$$

και όπως διαπιστώνουμε αποτελεί ένα πολυώνυμο δευτέρου βαθμού ως προς τον επιταχυντή v. Ως εκ τούτου, θα μπορούσαμε να προσδιορίσουμε ένα διάστημα τιμών της παραμέτρου v εντός του οποίου η διακρίνουσα θα αποτελεί ένα θετικό ή αρνητικό μέγεθος. Προκειμένου να προσδιορίσουμε αυτό το διάστημα τιμών, θα προσδιορίσουμε τις ρίζες της ακόλουθης εξίσωσης:

$$\Delta_{sn} = c_1^2\,v^2 + 2(c_1-2)c_1\,v + c_1^2 = 0 \qquad \textit{(2.10)}$$

Η διακρίνουσα (Δ_{sn}^*) της παραπάνω εξίσωσης έχει ως ακολούθως:

$$\Delta_{sn}^* = 4(c_1-2)^2 c_1^2 - 4\,c_1^4 = 4\,c_1^2\left[(c_1-2)^2 - c_1^2\right] = 4\,c_1^2\left[(c_1-2)-c_1\right]\left[(c_1-2)+c_1\right] =$$

$$= 4\,c_1^2\left[-2\right]\left[2(c_1-1)\right] = 16\,c_1^2\,(1-c_1) > 0 \qquad \textit{(2.11)}$$

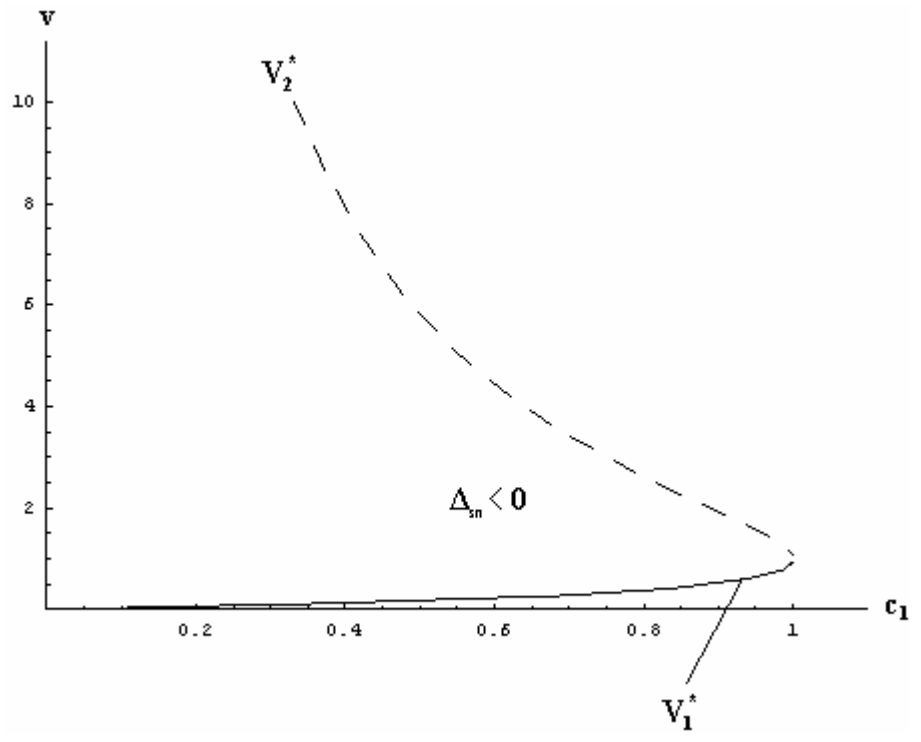
Δεδομένου ότι $\Delta_{sn}^* > 0$, η εξίσωση (2.10) θα έχει δύο πραγματικές και διακριτές ρίζες το μέγεθος των οποίων έχει ως ακολούθως:

$$v_{2,1}^{sn} = \frac{-2(c_1-2)c_1 \pm \sqrt{\Delta_{sn}^*}}{2c_1^2} \overset{(2.11)}{=} \frac{2(2-c_1)c_1 \pm \sqrt{16c_1^2(1-c_1)}}{2c_1^2} =$$

$$= \frac{2(2-c_1)c_1 \pm 4c_1\sqrt{1-c_1}}{2c_1^2} = \frac{(2-c_1) \pm 2\sqrt{1-c_1}}{c_1} = \frac{1}{c_1}\left[1 \pm 2\sqrt{1-c_1} + (1-c_1)\right] =$$

$$= \frac{\left(1 \pm \sqrt{1-c_1}\right)^2}{c_1} \Rightarrow \quad \begin{cases} v_1^{sn} = \dfrac{\left(1-\sqrt{1-c_1}\right)^2}{c_1} > 0 & \textbf{\textit{(2.12.1)}} \\ v_2^{sn} = \dfrac{\left(1+\sqrt{1-c_1}\right)^2}{c_1} > 0 & \textbf{\textit{(2.12.2)}} \end{cases}$$

Βάσει των παραπάνω ριζών οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι εάν $v \in \left(v_1^{sn}, v_2^{sn}\right)$, $v = v_1^{sn}, v_2^{sn}$ και $v \in \left(0, v_1^{sn}\right) \cup \left(v_2^{sn}, +\infty\right)$ θα ισχύει αντιστοίχως ότι $\Delta_{sn} <, =, > 0$.



Δ – 2.2

Στο παραπάνω διάγραμμα και μέσω των καμπυλών V_1^* και V_2^* παρουσιάζονται γραφικά οι σχέσεις (2.12.1) και (2.12.2) αντιστοίχως. Όλα τα σημεία τα οποία εντοπίζονται μεταξύ των δύο καμπυλών περιγράφουν εκείνους τους συνδυασμούς (c_1,v) για τους οποίους ισχύει ότι $\Delta_{sn} < 0$, για τους οποίους δηλαδή η διαχρονική πορεία του

εισοδήματος θα χαρακτηρίζεται από ταλαντώσεις. Η διαχρονική πορεία του εισοδήματος θα είναι μονοτονικής μορφής στην περίπτωση εκείνων των σημείων του δισδιάστατου χώρου τα οποία εντοπίζονται είτε πάνω από την καμπύλη V_2^*, είτε κάτω από την καμπύλη V_1^*, είτε τέλος επί των δύο αυτών καμπυλών[5].

Από την ανάλυση που προηγήθηκε γίνεται φανερό ότι μπορούμε να διακρίνουμε μεταξύ τεσσάρων περιπτώσεων αναφορικά με την πορεία του εισοδήματος έπειτα από μία διατάραξη :

I. $\mathbf{v < 1/c_1}$ **&** $\mathbf{\Delta_{sn} \geq 0}$. Στην περίπτωση αυτή θα έχουμε εκθετική σύγκλιση του εισοδήματος προς τη μακροχρόνια τιμή ισορροπίας του.

II. $\mathbf{v < 1/c_1}$ **&** $\mathbf{\Delta_{sn} < 0}$. Στην περίπτωση αυτή το εισόδημα θα συγκλίνει προς τη μακροχρόνια τιμή ισορροπίας του μέσω ταλαντώσεων.

III. $\mathbf{v > 1/c_1}$ **&** $\mathbf{\Delta_{sn} \geq 0}$. Στην περίπτωση αυτή το εισόδημα θα αποκλίνει εκθετικά από τη μακροχρόνια τιμή ισορροπίας του.

IV. $\mathbf{v > 1/c_1}$ **&** $\mathbf{\Delta_{sn} < 0}$. Στην περίπτωση αυτή το εισόδημα θα αποκλίνει από τη μακροχρόνια τιμή ισορροπίας του μέσω ταλαντώσεων.

3. Διαρθρωτική μορφή του διευρυμένου υποδείγματος

Στα πλαίσια της ανάλυσης που ακολουθεί θα θεωρήσουμε μία κλειστή οικονομία χωρίς δημόσιο τομέα, στα πλαίσια της οποίας οι τιμές είναι σταθερές. Η διαρθρωτική μορφή της εν λόγω οικονομίας περιγράφεται μέσω των ακόλουθων σχέσεων :

Αγορά Προϊόντος

$$Y_t = C_t + I_t \qquad (3.1) \qquad , \qquad C_t = c_1 Y_{t-1} \quad , \quad 0 < c_1 < 1 \qquad (3.2)$$

$$I_t = b_0 + v(C_t - C_{t-1}) + b_2\, \Delta R_t^e \quad , \quad v, b_0 > 0 \,\&\, b_2 < 0 \qquad (3.3)$$

Αγορά Χρήματος

$$M_t^s = M_t^d \qquad (3.4) \qquad , \qquad M_t^s = (1+m) M_{t-1}^s \quad , \quad 0 < m < 1 \qquad (3.5)$$

$$M_t^d = d_1 Y_t + d_2 \Delta R_t^e \quad , \quad d_1 > 0 \,\&\, d_2 < 0 \qquad (3.6)$$

[5] Θα πρέπει να σημειωθεί ότι αυτή η μορφή της διαχρονικής πορείας του εισοδήματος είναι δυνατό να παρατηρηθεί μόνο εν απουσία αρνητικών χαρακτηριστικών ριζών.

όπου c_1 : η οριακή και μέση ροπή προς κατανάλωση, b_0: οι αυτόνομες επενδύσεις, v: ο επιταχυντής, b_2: ο συντελεστής επηρεασμού των σχεδιαζόμενων επενδύσεων (*planned investments*) στις προσδοκώμενες μεταβολές του επιτοκίου, d_1: ο συντελεστής επηρεασμού της ζήτησης χρήματος από μεταβολές του εισοδήματος, d_2: η ελαστικότητα της ζήτησης χρήματος στις προσδοκώμενες μεταβολές του επιτοκίου και t = 0 , 1 , 2 , ...

Από τη μαθηματική μορφή του υποδείγματος γίνεται αμέσως αντιληπτό ότι η ροή του χρόνου δεν είναι συνεχής (*continuous*) αλλά διακριτή (*discrete*). Το γεγονός αυτό σε συνδυασμό με το δυναμικό χαρακτήρα του υποδείγματος, όπως αυτός υποδηλώνεται από την ύπαρξη χρονικών υστερήσεων κυρίως στις συναρτήσεις της κατανάλωσης και των επενδύσεων, θα μας επιτρέψει στη συνέχεια της ανάλυσής μας να εξειδικεύσουμε μία εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές ως προς το εισόδημα.

Όπως διαπιστώνουμε από τη διαρθρωτική μορφή του υποδείγματος, η ***αγορά προϊόντος*** περιγράφεται από τις σχέσεις (3.1), (3.2) και (3.3). Σύμφωνα με τη σχέση (3.2) η κατανάλωση (*consumption*) της τρέχουσας περιόδου (C_t) αποτελεί θετική συνάρτηση του εισοδήματος της προηγούμενης περιόδου (Y_{t-1}).

Η σχέση (3.3) περιγράφει τις σχεδιαζόμενες επενδύσεις ως μία θετική συνάρτηση της μεταβολής του επιπέδου της κατανάλωσης μεταξύ της τρέχουσας και της προηγούμενης περιόδου (ΔC_t ή $C_t - C_{t-1}$) και ως μία αρνητική συνάρτηση της προσδοκώμενης μεταβολής του επιτοκίου μεταξύ της τρέχουσας και της προηγούμενης περιόδου (ΔR_t ή $R_t - R_{t-1}$) με τις προσδοκίες (*expectations*) να διαμορφώνονται στην περίοδο t – 1. Το τρέχον επίπεδο των σχεδιαζόμενων επενδύσεων (I_t) θεωρείται ότι αποτελεί αρνητική συνάρτηση της προσδοκώμενης μεταβολής του επιτοκίου $\left(\Delta R_t^e\right)$, καθώς αν στην περίοδο t – 1 οι επενδυτές αναμένουν πτώση των επιτοκίων κατά την περίοδο t [εάν δηλαδή ισχύει ότι $\Delta R_t^e < 0$] τότε θα πραγματοποιήσουν τα επενδυτικά τους σχέδια στην περίοδο t, κάτι που θα προκαλέσει την αύξηση των επενδύσεων κατά τη συγκεκριμένη χρονική περίοδο. Εάν αντιθέτως κατά την περίοδο t – 1 αναμένεται αύξηση των επιτοκίων [εάν δηλαδή έχουμε ότι $\Delta R_t^e > 0$] τότε οι επενδυτές θα επισπεύσουν την πραγματοποίηση των επενδυτικών τους σχεδίων, κάτι που θα έχει ως αποτέλεσμα οι επενδύσεις κατά την περίοδο t – 1 να παρουσιάζονται αυξημένες, σε αντίθεση με το επίπεδο των επενδύσεων της περιόδου t το οποίο θα εμφανίζεται μειωμένο.

Η αγορά προϊόντος βρίσκεται σε ισορροπία όταν ικανοποιείται η σχέση (3.1), όταν δηλαδή η συνολική προσφορά (*aggregate supply*) ισούται με τη συνολική ζήτηση (*aggregate demand*) του προϊόντος. Από το συνδυασμό των σχέσεων (3.1), (3.2) και (3.3) προκύπτει η συνθήκη που θα πρέπει να ικανοποιείται προκειμένου η αγορά προϊόντος να βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας και η οποία έχει ως ακολούθως :

$$\left.\begin{array}{l} Y_t = C_t + I_t \\ \left.\begin{array}{l} C_t = c_1 Y_{t-1} \\ I_t = b_0 + v\left(C_t - C_{t-1}\right) + b_2\,\Delta R_t^e \end{array}\right\} \Rightarrow I_t = b_0 + v\left(c_1 Y_{t-1} - c_1 Y_{t-2}\right) + b_2\,\Delta R_t^e \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad Y_t = c_1 Y_{t-1} + b_0 + v\left(c_1 Y_{t-1} - c_1 Y_{t-2}\right) + b_2\, \Delta R_t^e \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad Y_t = c_1\left(1+v\right) Y_{t-1} - v c_1 Y_{t-2} + b_0 + b_2\, \Delta R_t^e \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad Y_t - c_1\left(1+v\right) Y_{t-1} + v c_1 Y_{t-2} = b_0 + b_2\, \Delta R_t^e \qquad \textit{(3.7)}$$

Η ***αγορά χρήματος*** περιγράφεται μέσω των σχέσεων (3.4) , (3.5) και (3.6). Σύμφωνα με τη σχέση (3.5) η προσφορά χρήματος, η οποία θεωρούμε ότι είναι απολύτως ελεγχόμενη από τις νομισματικές αρχές (Κεντρική Τράπεζα), αυξάνεται διαχρονικά με σταθερό ρυθμό m. Και αυτό διότι από τη σχέση (3.5) προκύπτει ότι :

$$M_t^s = \left(1+m\right) M_{t-1}^s \Rightarrow M_t^s - M_{t-1}^s = m\, M_{t-1}^s \Rightarrow g_m = \frac{M_t^s - M_{t-1}^s}{M_{t-1}^s} = m \qquad \textit{(3.8)}$$

Από τη σχέση (3.5) και κινούμενοι μία περίοδο μπροστά οδηγούμαστε στην ακόλουθη εξίσωση :

$$M_{t+1}^s - \left(1+m\right) M_t^s = 0 \qquad \textit{(3.9)}$$

Η παραπάνω σχέση αποτελεί μία ομογενή εξίσωση διαφορών πρώτης τάξης με σταθερούς συντελεστές, η γενική λύση της οποίας θα περιγράφει τη διαχρονική εξέλιξη του μεγέθους της προσφοράς χρήματος. Εάν υποθέσουμε ότι αυτή είναι της μορφής :

$$M_t^s = A\, \lambda^t \qquad \textit{(3.10)}$$

(κάτι που υπονοεί ότι $M_{t+1}^s = A\, \lambda^{t+1}$), τότε από τη σχέση (3.10) προκύπτει ότι :

$$M_{t+1}^s - \left(1+m\right) M_t^s = 0 \Rightarrow A\, \lambda^{t+1} - \left(1+m\right) A\, \lambda^t = 0 \Rightarrow A\, \lambda^t \left[\, \lambda - \left(1+m\right) \right] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \lambda = 1 + m \qquad \textit{(3.11)}$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (3.11) στην (3.10) προκύπτει η ακόλουθη συνάρτηση:

$$M_t^s = A\left(1+m\right)^t \qquad \textit{(3.10.1)}$$

όπου A μία σταθερά το μέγεθος της οποίας θα προσδιοριστεί με τη βοήθεια μίας αρχικής συνθήκης. Πιο συγκεκριμένα εάν υποθέσουμε ότι κατά τη χρονική στιγμή t = 0 η προσφορά χρήματος ισούται με M_0, τότε από τη σχέση (3.10.1) προκύπτει ότι:

$$M_0^s = A\left(1+m\right)^0 \Rightarrow A = M_0$$

Αντικαθιστώντας την τιμή της σταθεράς Α που μόλις προσδιορίσαμε στη σχέση (3.10.1) παίρνουμε την τελική μορφή του ακολουθούμενου από την Κεντρική Τράπεζα νομισματικού κανόνα (*monetary rule*) η οποία και έχει ως εξής :

$$M_t^s = M_0 \left(1+m\right)^t \qquad \textbf{\textit{(3.12)}}$$

Σύμφωνα με την παραπάνω σχέση η προσφορά χρήματος αυξάνεται διαχρονικά με ρυθμό σταθερό και ίσο με m.

Βάσει τώρα της σχέσης (3.7), η συνολική ζήτηση χρήματος (*aggregate money demand*) της τρέχουσας περιόδου (M_t^d) αποτελεί το άθροισμα της τρέχουσας ζήτησης χρήματος για συναλλακτικούς σκοπούς και σκοπούς προφύλαξης $\left[(M_{tr}^d)_t\right]$ και της τρέχουσας ζήτησης χρήματος για κερδοσκοπία $\left[(M_{sp}^d)_t\right]$.

Η ζήτηση χρήματος για συναλλακτικούς σκοπούς της τρέχουσας περιόδου $\left[(M_{tr}^d)_t\right]$ αποτελεί θετική συνάρτηση του εισοδήματος της ίδιας περιόδου, ισχύει δηλαδή ότι:

$$\left(M_{tr}^d\right)_t = d_1 Y_t \quad , \quad d_1 > 0 \qquad \textbf{\textit{(3.13)}}$$

Η τρέχουσα ζήτηση χρήματος για κερδοσκοπία $\left[(M_{sp}^d)_t\right]$ θεωρείται αρνητική συνάρτηση της προσδοκώμενης μεταβολής του επιτοκίου μεταξύ της τρέχουσας και της προηγούμενης περιόδου (ΔR_t ή $R_t - R_{t-1}$) με τις προσδοκίες να διαμορφώνονται στην περίοδο t – 1, δηλαδή:

$$\left(M_{sp}^d\right)_t = d_2 \Delta R_t^e \quad , \quad d_2 < 0 \qquad \textbf{\textit{(3.14)}}$$

Το αρνητικό πρόσημο του συντελεστή d_2 σημαίνει ότι εάν οι κερδοσκόποι κατά την περίοδο t – 1, κατά την περίοδο δηλαδή διαμόρφωσης των προσδοκιών τους, αναμένουν ότι το επιτόκιο της επόμενης περιόδου θα είναι μικρότερο από εκείνο της περιόδου t – 1 [εάν δηλαδή ισχύει ότι $\Delta R_t^e < 0$] θα ζητήσουν χρήμα για την άσκηση κερδοσκοπίας όχι στην περίοδο t – 1 αλλά στην περίοδο t. Ως εκ τούτου, με δεδομένη τη ζήτηση χρήματος για συναλλακτικούς σκοπούς, θα οδηγηθούμε στην αύξηση κατά την περίοδο t της συνολικής ζήτησης χρήματος. Η συνολική ζήτηση χρήματος κατά την τρέχουσα περίοδο θα είναι μειωμένη στην περίπτωση που ισχύει ότι $\Delta R_t^e > 0$. Και αυτό διότι αν κατά την περίοδο t – 1 οι κερδοσκόποι αναμένουν την αύξηση των επιτοκίων κατά την επόμενη περίοδο, θα ζητήσουν χρήμα για την άσκηση κερδοσκοπίας όχι στην περίοδο t αλλά στην περίοδο t – 1.

Η αγορά χρήματος θα βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας όταν ικανοποιείται η σχέση (3.4), όταν δηλαδή η συνολική προσφοράς χρήματος $\left(M_t^s\right)$ ισούται με τη συνολική ζήτηση χρήματος $\left(M_t^d\right)$. Η συνθήκη ισορροπίας στην αγορά χρήματος, όπως αυτή διαμορφώνεται έπειτα από την αντικατάσταση των σχέσεων (3.6) και (3.12) στη σχέση (3.4), έχει ως εξής:

$$M_0 \left(1+m\right)^t = d_1 Y_t + d_2 \Delta R_t^e \qquad \textbf{\textit{(3.15)}}$$

4. Μηχανισμοί διαμόρφωσης των προσδοκιών

Όπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο, οι συνθήκες ισορροπίας της αγοράς αγαθών και της αγοράς χρήματος [όπως αυτές περιγράφονται από τις σχέσεις (3.7) και (3.15)] περιέχουν μία μεταβλητή, την ΔR_t^e, η οποία είναι μη παρατηρήσιμη. Για να προσδιορίσουμε ωστόσο τη συγκεκριμένη μορφή της βασικής εξίσωσης διαφορών θα πρέπει να απαλλαγούμε από αυτή τη μη παρατηρήσιμη μεταβλητή. Με άλλα λόγια θα πρέπει να διατυπώσουμε τον μηχανισμό βάσει του οποίου τα οικονομούντα άτομα διαμορφώνουν τις προσδοκίες τους.

Μεταξύ των μηχανισμών που συχνά συναντούμε στην οικονομική βιβλιογραφία είναι εκείνοι των αναθεωρούμενων προσδοκιών (*adaptive expectations mechanism*), των στατικών προσδοκιών (*static or naive expectations mechanism*), των παλινδρομικών προσδοκιών (*regressive expectation mechanism*) και τέλος των ορθολογικών προσδοκιών (*rational expectation mechanism*). Ας δούμε τον τρόπο διαμόρφωσης των προσδοκιών βάσει των παραπάνω μηχανισμών, ξεκινώντας από εκείνον των αναθεωρούμενων προσδοκιών.

Σύμφωνα με τον *μηχανισμό των αναθεωρούμενων προσδοκιών*[6] η προσδοκώμενη τιμή μίας οποιασδήποτε μεταβλητής διαμορφώνεται από την προσδοκώμενη τιμή της κατά την περίοδο t – 1 και από ένα μέρος της απόκλισης που πραγματοποιείται ανάμεσα στην πραγματοποιηθείσα και την προσδοκώμενη τιμή της μεταβλητής κατά την περίοδο t – 1. Σε μαθηματικούς όρους ο εν λόγω μηχανισμός περιγράφεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\Delta R_t^e - \Delta R_{t-1}^e = \gamma\left(\Delta R_{t-1} - \Delta R_{t-1}^e\right) \qquad \textbf{\textit{(4.1)}}$$

όπου $\gamma \in (0,1)$ ο συντελεστής προσαρμογής (*adjustment coefficient*) ο οποίος μας δείχνει την ταχύτητα προσαρμογής με την οποία αφομοιώνονται τα λάθη του παρελθόντος μέσα στην προσδοκώμενη τιμή της τρέχουσας περιόδου.

Όπως προκύπτει από την παραπάνω σχέση, ένα από τα πλεονεκτήματα του μηχανισμού των αναθεωρούμενων προσδοκιών είναι ότι μας παρέχει τη δυνατότητα σύνδεσης παρατηρούμενων και μη παρατηρούμενων οικονομικών μεταβλητών.

Αναδιατάσσοντας τη σχέση (4.1) προκύπτει η ακόλουθη εξίσωση:

$$\Delta R_t^e = \gamma\,\Delta R_{t-1} + (1-\gamma)\Delta R_{t-1}^e \qquad \textbf{\textit{(4.2)}}$$

Από την παραπάνω σχέση και παίρνοντας διαδοχικές χρονικές υστερήσεις προκύπτει ότι:

$$\Delta R_{t-1}^e = \gamma\,\Delta R_{t-2} + (1-\gamma)\Delta R_{t-2}^e \qquad \textbf{\textit{(4.3.1)}}$$

$$\Delta R_{t-2}^e = \gamma\,\Delta R_{t-3} + (1-\gamma)\Delta R_{t-3}^e \qquad \textbf{\textit{(4.3.2)}}$$

$$\Delta R_{t-3}^e = \gamma\,\Delta R_{t-4} + (1-\gamma)\Delta R_{t-4}^e \qquad \textbf{\textit{(4.3.3)}}$$

.....

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις στη σχέση (4.2) παίρνουμε:

---

[6] P. Cagan (1956), "The Monetary Dynamics of Hyper Inflation", in M. Friedman (ed.) *Studies of Quantity Theory of Money*, University of Chicago Press, Chicago, pp. 25 ~117.

$$\Delta R_t^e = \gamma\,\Delta R_{t-1} + (1-\gamma)\Delta R_{t-1}^e \overset{(4.3.1)}{=}$$

$$= \gamma\,\Delta R_{t-1} + \gamma\,(1-\gamma)\Delta R_{t-2} + (1-\gamma)^2\,\Delta R_{t-2}^e \overset{(4.3.2)}{=}$$

$$= \gamma\,\Delta R_{t-1} + \gamma\,(1-\gamma)\Delta R_{t-2} + \gamma\,(1-\gamma)^2\,\Delta R_{t-3} + (1-\gamma)^3\,\Delta R_{t-3}^e \overset{(4.3.3)}{=}$$

$$= \gamma\,\Delta R_{t-1} + \gamma\,(1-\gamma)\Delta R_{t-2} + \gamma\,(1-\gamma)^2\,\Delta R_{t-3} + \gamma\,(1-\gamma)^3\,\Delta R_{t-4} + (1-\gamma)^4\,\Delta R_{t-4}^e =$$

.....

$$\Rightarrow \Delta R_t^e = \gamma\,\Delta R_{t-1} + \gamma\,(1-\gamma)\Delta R_{t-2} + \gamma\,(1-\gamma)^2\,\Delta R_{t-3} + \gamma\,(1-\gamma)^3\,\Delta R_{t-4} + \ldots +$$

$$+ \gamma\,(1-\gamma)^{i-1}\,\Delta R_{t-i} + (1-\gamma)^i\,\Delta R_{t-i}^e \qquad \textbf{\textit{(4.4)}}$$

Δεδομένου ότι $\gamma \in (0,1)$ από την (4.4) προκύπτει η ακόλουθη σχέση[7]:

$$\Delta R_t^e = \gamma \sum_{i=2}^{\infty} (1-\gamma)^{i-1}\,\Delta R_{t-i} \qquad \textbf{\textit{(4.5)}}$$

Όπως διαπιστώνουμε, η προσδοκώμενη μεταβολή των επιτοκίων (με τις προσδοκίες να διαμορφώνονται στην περίοδο t – 1) αποτελεί ένα σταθμικό μέσο των παρελθουσών επιτοκιακών μεταβολών (με γεωμετρικώς φθίνοντες συντελεστές στάθμισης). Εφόσον ο συντελεστής $\gamma \in (0,1)$ θα ισχύει ότι $\lim_{i\to\infty} \gamma\,(1-\gamma)^{i-1} = 0$. Με άλλα λόγια η προσδοκώμενη τιμή της επιτοκιακής μεταβολής επηρεάζεται από τις παρελθούσες πραγματοποιηθείσες τιμές της τόσο λιγότερο όσο περισσότερο μετακινούμαστε πίσω στο χρόνο. Ως εκ τούτου, η σύνδεση της μη παρατηρούμενης μεταβλητής ΔR_t^e με μόνο π.χ. τέσσερις υστερήσεις της παρατηρούμενης μεταβλητής ΔR_t δεν θα συνιστούσε και πολύ μεγάλο λάθος.

Οι συντελεστές στάθμισης w_i (*weights*) δίνονται από την ακόλουθη σχέση :

$$w_i = \gamma\,(1-\gamma)^{i-1} \quad , \quad i = 1, 2, \ldots \qquad \textbf{\textit{(4.6)}}$$

και ο κάθε ένας από αυτούς δίνει τη σχετική βαρύτητα και σημασία της επιτοκιακής διαφοράς της i περιόδου του παρελθόντος πάνω στην προσδοκώμενη τρέχουσα επιτοκιακή μεταβολή.

Βάσει της παραπάνω σχέσης οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι η βαρύτητα των παρελθουσών τιμών ΔR_{t-i}, i = 1 , 2 , …. , στη διαμόρφωση των προσδοκιών μας αναφορικά με το μέγεθος της επιτοκιακής διαφοράς της τρέχουσας περιόδου, εξαρτάται και από το μέγεθος του συντελεστή προσαρμογής γ. Πιο συγκεκριμένα στην περίπτωση που η τιμή του συντελεστή προσαρμογής τείνει προς το μηδέν ($\gamma \to 0$), από τη σχέση (4.5) προκύπτει ότι όχι μόνο οι σχετικά πρόσφατες αλλά και οι παλαιότερες τιμές της επιτοκιακής διαφοράς παίζουν ρόλο στη διαμόρφωση των προσδοκιών μας.

---

[7] Το γεγονός ότι $0 < \gamma < 1 \Rightarrow 0 < 1-\gamma < 1 \Rightarrow (1-\gamma)^i \to 0$ καθώς $i \to \infty$ και ως εκ τούτου θα έχουμε ότι $(1-\gamma)^i\,\Delta R_{t-i}^e \to 0$. Βλέπε σχετικά Μπένος Θ. (1993), *Θεωρία Χρήματος*, 2η έκδοση, σελ. 227 ~ 233

Όσο η τιμή του συντελεστή προσαρμογής τείνει προς τη μονάδα ($\gamma \to 1$) τόσο μεγαλύτερη είναι η βαρύτητα των πιο πρόσφατων παρελθουσών τιμών της επιτοκιακής διαφοράς στη διαμόρφωση των προσδοκιών μας. Στην ειδική μάλιστα περίπτωση που $\gamma = 1$, από τη σχέση (4.5) προκύπτει ότι:

$$\Delta R_t^e = \gamma\, \Delta R_{t-1} + \gamma \sum_{i=2}^{\infty} (1-\gamma)^{i-1}\, \Delta R_{t-i} \xrightarrow{\gamma=1} \qquad \Delta R_t^e = \Delta R_{t-1} \qquad \textit{(4.7)}$$

Η παραπάνω σχέση περιγράφει *το μηχανισμό των στατικών προσδοκιών*, σύμφωνα με τον οποίο η προσδοκώμενη μεταβολή του επιτοκίου (με τις προσδοκίες να διαμορφώνονται στην περίοδο t – 1) είναι ακριβώς ίση με την πραγματοποιηθείσα επιτοκιακή διαφορά της περιόδου κατά την οποία διαμορφώνονται οι προσδοκίες.

Το σημαντικότερο μειονέκτημα του μηχανισμού των αναθεωρούμενων προσδοκιών, όπως αυτό προκύπτει από τη σχέση (4.5), έγκειται στο γεγονός ότι τα οικονομούντα άτομα διαμορφώνουν τις προσδοκίες τους για το μέγεθος μίας μεταβλητής στηριζόμενοι αποκλειστικά και μόνο στις παρελθούσες τιμές της. Με άλλα λόγια ο συγκεκριμένος μηχανισμός διαμόρφωσης προσδοκιών υποθέτει την ύπαρξη μη άριστης συμπεριφοράς εκ μέρους των οικονομούντων ατόμων, καθώς αυτά αγνοούν τρέχουσες πληροφορίες οι οποίες θα μπορούσαν να τους βοηθήσουν στο σχηματισμό καλύτερων προσδοκιών.

Σύμφωνα με το *μηχανισμό των παλινδρομικών προσδοκιών* η προσδοκώμενη τιμή μίας μεταβλητής, με τις προσδοκίες να διαμορφώνονται κατά την περίοδο t – 1, αποτελεί το σταθμικό μέσο της τιμής ισορροπίας της και της τιμής της κατά την περίοδο διαμόρφωσης των προσδοκιών. Σε μαθηματικούς όρους ο μηχανισμός των παλινδρομικών προσδοκιών περιγράφεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\Delta R_t^e = \theta\, \overline{\Delta R} + (1-\theta)\, \Delta R_{t-1} \quad , \quad 0 < \theta < 1 \qquad \textit{(4.8)}$$

όπου $\overline{\Delta R}$: η βραχυχρόνια τιμή ισορροπίας της επιτοκιακής διαφοράς.

Αναδιατάσσοντας τους όρους της σχέσης (4.8) παίρνουμε:

$$\Delta R_t^e - \Delta R_{t-1} = \theta \left(\overline{\Delta R} - \Delta R_{t-1} \right) \qquad \textit{(4.8.1)}$$

Όπως προκύπτει από την παραπάνω σχέση, ο συντελεστής θ μας δείχνει την ταχύτητα προσαρμογής της επιτοκιακής διαφοράς της περιόδου t – 1 (ΔR_{t-1}) προς τη βραχυχρόνια τιμή ισορροπίας της $\left(\overline{\Delta R}\right)$. Όσο μικρότερη είναι η τιμή της παραμέτρου θ, όσο δηλαδή $\theta \to 0$, τόσο μικρότερη είναι η ταχύτητα της προσαρμογής. Στην ειδική περίπτωση που $\theta = 0$, από τη σχέση (4.8) προκύπτει ότι $\Delta R_t^e = \Delta R_{t-1}$. Με άλλα λόγια για $\theta = 0$ αναγόμαστε από το μηχανισμό των παλινδρομικών προσδοκιών στο μηχανισμό των στατικών προσδοκιών.

Τέλος, στα πλαίσια του μηχανισμού των ορθολογικών προσδοκιών[8] (*rational expectation mechanism*) τα οικονομούντα άτομα σχηματίζουν τις προσδοκίες τους με βάση το σύνολο των πληροφοριών που έχουν στη διάθεσή τους. Αξίζει να σημειωθεί εδώ ότι σ' αυτό το σύνολο των πληροφοριών περιλαμβάνεται και η γνώση των

[8] Ο μηχανισμός των ορθολογικών προσδοκιών εισήχθη από τον Muth J.F. (1961) στο άρθρο του με τίτλο "Rational Expectations and the Theory of Price Movements", *Econometrica*, 29 , pp. 315 ~ 335.

«πραγματικών» σχέσεων βάσει των οποίων προσδιορίζεται το μέγεθος των οικονομικών μεταβλητών του υποδείγματος. Σε μαθηματικούς όρους, ο μηχανισμός των ορθολογικών προσδοκιών περιγράφεται από την ακόλουθη σχέση:

$$X_t^e = E_{t-1}\left(X_t \middle| \Pi_{t-1}\right) \qquad \text{ή ισοδύναμα} \qquad X_t^e = E_{t-1}\left(X_t\right) \qquad \textbf{\textit{(4.9)}}$$

όπου Π_{t-1} : το σύνολο των πληροφοριών οι οποίες είναι διαθέσιμες κατά την περίοδο $t-1$, αναφορικά με τις τρέχουσες και παρελθούσες τιμές των μεταβλητών καθώς και των σταθερών συντελεστών του υποδείγματος, τις οποίες το οικονομούν άτομο χρησιμοποιεί προκειμένου να διαμορφώσει, κατά την ίδια περίοδο, την προσδοκία του αναφορικά με το μέγεθος της μεταβλητής X.

Σύμφωνα με τη σχέση (4.9), όταν η υποκειμενική προσδοκία των οικονομούντων ατόμων για την τιμή της μεταβλητής X_t ισούται με την αντικειμενική (μαθηματική) προσδοκία της X_t η οποία διαμορφώνεται βάσει του πληροφοριακού συνόλου Π_{t-1}, τότε η διαμορφούμενη προσδοκία χαρακτηρίζεται ως ορθολογική και συγκεντρώνει τις παρακάτω ιδιότητες:

(α) Δεν υπάρχουν συστηματικά σφάλματα πρόβλεψης, ισχύει δηλαδή ότι:

$$E_{t-1}\left(X_t\right) - X_t = e_t \quad , \quad E(e_t) = 0 \qquad \textbf{\textit{(4.10)}}$$

(β) Τα σφάλματα πρόβλεψης δεν συσχετίζονται ή ισοδύναμα:

$$E(e_t e_s) = 0 \quad \forall\, t \neq s \qquad \textbf{\textit{(4.11)}}$$

(γ) Τα σφάλματα πρόβλεψης δεν συσχετίζονται με την μεταβλητή X_t ή με οποιαδήποτε άλλη μεταβλητή του συνόλου των πληροφοριών Π_{t-1}. Η ιδιότητα αυτή διασφαλίζει ότι η προσδοκία που διαμορφώνεται βάσει του μηχανισμού των ορθολογικών προσδοκιών είναι αποδοτική (*efficient*), είναι δηλαδή αμερόληπτη και έχει την μικρότερη διακύμανση συγκριτικά με την πρόβλεψη που θα σχηματίζαμε βάσει κάποιου άλλου μηχανισμού. Σε μαθηματικούς όρους θα ισχύει ότι:

$$E\left(e_t \middle| \Pi_{t-1}\right) = 0 \qquad \textbf{\textit{(4.12)}}$$

Στα πλαίσια προσδιοριστικών υποδειγμάτων, όπως αυτό με το οποίο ασχολούμαστε, ο μηχανισμός των ορθολογικών προσδοκιών υπονοεί την ύπαρξη τέλειας προβλεπτικής ικανότητας (*perfect foresight*) ή ισοδύναμα ότι $e_t = 0$. Με άλλα λόγια στα πλαίσια του υποδείγματος που θα αναπτυχθεί βάσει του μηχανισμού των ορθολογικών προσδοκιών, θα πρέπει να ικανοποιείται η ακόλουθη σχέση:

$$E_{t-1}\left(X_t\right) = X_t \qquad \textbf{\textit{(4.13)}}$$

Στη συνέχεια της ανάλυσής μας θα διαπιστώσουμε ότι η χρήση διαφορετικών μηχανισμών διαμόρφωσης των προσδοκιών θα μας οδηγήσει στην εξειδίκευση διαφορετικών βασικών εξισώσεων διαφορών και ως εκ τούτου στον προσδιορισμό αφενός διαφορετικών μεγεθών του εισοδήματος ισορροπίας και αφετέρου διαφορετικών συνθηκών ευστάθειας του υποδείγματος.

5. Η επίδραση του μηχανισμού διαμόρφωσης των προσδοκιών στη λύση του υποδείγματος

Όπως θυμόμαστε οι αγορές αγαθών και χρήματος θα βρίσκονται σε κατάσταση ισορροπίας όταν ικανοποιούνται αντιστοίχως οι ακόλουθες σχέσεις:

$$Y_t - c_1(1+v)Y_{t-1} + vc_1Y_{t-2} = b_0 + b_2\Delta R_t^e \qquad (3.7)$$

$$M_0(1+m)^t = d_1Y_t + d_2\Delta R_t^e \qquad (3.15)$$

Προκειμένου να προσδιορίσουμε τη βασική εξίσωση διαφορών του υποδείγματός μας θα πρέπει να απαλλάξουμε τις δύο παραπάνω εξισώσεις από τη μη παρατηρούμενη μεταβλητή ΔR_t^e. Με άλλα λόγια θα πρέπει να διατυπώσουμε το μηχανισμό διαμόρφωσης των προσδοκιών και βάσει αυτού να προχωρήσουμε στη συνέχεια στην απαλοιφή της μεταβλητής ΔR_t^e από τις σχέσεις (3.7) και (3.15). Στη συνέχεια της ανάλυσής μας και ξεκινώντας από το μηχανισμό των αναθεωρούμενων προσδοκιών, θα δούμε αρχικά με ποιον τρόπο μπορούμε να επιτύχουμε την απαλλαγή του υποδείγματός μας από τη παρατηρούμενη μεταβλητή ΔR_t^e και στη συνέχεια θα προχωρήσουμε στην εξαγωγή και τη λύση της βασικής εξίσωσης διαφορών που προκύπτει.

5.1 Εξαγωγή της βασικής εξίσωσης διαφορών του υποδείγματος στα πλαίσια του μηχανισμού των αναθεωρούμενων προσδοκιών

Στα πλαίσια της παρούσας ενότητας θα κάνουμε την υπόθεση ότι οι προσδοκίες είναι αναθεωρούμενες και ως εκ τούτου διαμορφώνονται βάσει του ακόλουθου μηχανισμού:

$$\Delta R_t^e - (1-\gamma)\Delta R_{t-1}^e = \gamma\,\Delta R_{t-1} \quad , \quad 0<\gamma<1 \qquad (5.1)$$

Παίρνοντας μία χρονική υστέρηση από τη σχέση (3.7) και πολλαπλασιάζοντας με $1-\gamma$ προκύπτει ότι:

$$Y_t - c_1(1+v)Y_{t-1} + vc_1Y_{t-2} = b_0 + b_2\Delta R_t^e \xrightarrow{1\,\text{χρον. υστέρηση}}$$

$$\rightarrow Y_{t-1} - c_1(1+v)Y_{t-2} + vc_1Y_{t-3} = b_0 + b_2\Delta R_{t-1}^e \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1-\gamma)Y_{t-1} - c_1(1+v)(1-\gamma)Y_{t-2} + vc_1(1-\gamma)Y_{t-3} =$$

$$= b_0(1-\gamma) + b_2(1-\gamma)\Delta R_{t-1}^e \qquad (5.2)$$

Αφαιρώντας στη συνέχεια κατά μέλη τις σχέσεις (3.7) και (5.2) παίρνουμε:

$$Y_t - c_1(1+v)Y_{t-1} + vc_1Y_{t-2} - \left[(1-\gamma)Y_{t-1} - c_1(1+v)(1-\gamma)Y_{t-2} + vc_1(1-\gamma)Y_{t-3}\right] =$$

$$= b_0 + b_2\,\Delta R_t^e - \left[b_0(1-\gamma) + b_2(1-\gamma)\Delta R_{t-1}^e\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y_t - \left[c_1(1+v) + (1-\gamma)\right]Y_{t-1} + c_1\left[v + (1+v)(1-\gamma)\right]Y_{t-2} - vc_1(1-\gamma)Y_{t-3} =$$

$$= b_0\left[1-(1-\gamma)\right] + b_2\left[\Delta R_t^e - (1-\gamma)\Delta R_{t-1}^e\right] \overset{(5.1)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow Y_t - \left[c_1(1+v) + (1-\gamma)\right]Y_{t-1} + c_1\left[v + (1+v)(1-\gamma)\right]Y_{t-2} - vc_1(1-\gamma)Y_{t-3} =$$

$$= \gamma b_0 + \gamma b_2 \Delta R_{t-1} \qquad \textbf{\textit{(5.3)}}$$

Η παραπάνω σχέση αποτελεί την απαλλαγμένη από τις προσδοκίες συνθήκη ισορροπίας της αγοράς προϊόντος.

Ενεργώντας κατά τρόπο ανάλογο και στην περίπτωση της εξίσωσης (3.15), παίρνοντας δηλαδή αρχικά μία χρονική υστέρηση και πολλαπλασιάζοντας με 1 – γ, βρίσκουμε ότι:

$$M_0(1+m)^t = d_1Y_t + d_2\Delta R_t^e \xrightarrow{1\,\text{χρον. υστέρηση}} M_0(1+m)^{t-1} = d_1Y_{t-1} + d_2\Delta R_{t-1}^e \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_0(1-\gamma)(1+m)^{t-1} = d_1(1-\gamma)Y_{t-1} + d_2(1-\gamma)\Delta R_{t-1}^e \qquad \textbf{\textit{(5.4)}}$$

Προκειμένου να πάρουμε την απαλλαγμένη από τις προσδοκίες συνθήκη ισορροπίας της αγοράς χρήματος, αφαιρούμε κατά μέλη τις σχέσεις (3.15) και (5.4):

$$M_0(1+m)^t - M_0(1-\gamma)(1+m)^{t-1} = d_1Y_t + d_2\Delta R_t^e - \left[d_1(1-\gamma)Y_{t-1} + d_2(1-\gamma)\Delta R_{t-1}^e\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_0(1+m)^t\left(1 - \frac{1-\gamma}{1+m}\right) = d_1Y_t - d_1(1-\gamma)Y_{t-1} + d_2\left[\Delta R_t^e - (1-\gamma)\Delta R_{t-1}^e\right] \overset{(5.1)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow M_0\left(\frac{\gamma+m}{1+m}\right)(1+m)^t - d_1Y_t + d_1(1-\gamma)Y_{t-1} = \gamma d_2\,\Delta R_{t-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta R_{t-1} = \left[\frac{M_0(\gamma+m)}{\gamma d_2}\right](1+m)^{t-1} - \frac{d_1}{\gamma d_2} Y_t + \frac{d_1(1-\gamma)}{\gamma d_2} Y_{t-1} \qquad \textit{(5.5)}$$

Προκειμένου να εξάγουμε τη βασική εξίσωση διαφορών, αντικαθιστούμε τη σχέση (5.5) στη σχέση (5.3) και από την αντικατάσταση αυτή προκύπτει ότι:

$$Y_t - [c_1(1+v)+(1-\gamma)]Y_{t-1} + c_1[v+(1+v)(1-\gamma)]Y_{t-2} - vc_1(1-\gamma)Y_{t-3} =$$

$$= \gamma b_0 + \gamma b_2 \left\{\left[\frac{M_0(\gamma+m)}{\gamma d_2}\right](1+m)^{t-1} - \frac{d_1}{\gamma d_2} Y_t + \frac{d_1(1-\gamma)}{\gamma d_2} Y_{t-1}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y_t - [c_1(1+v)+(1-\gamma)]Y_{t-1} + c_1[v+(1+v)(1-\gamma)]Y_{t-2} - vc_1(1-\gamma)Y_{t-3} =$$

$$= \gamma b_0 + \frac{b_2(\gamma+m)}{d_2} M_0(1+m)^{t-1} - \frac{b_2 d_1}{d_2} Y_t + \frac{b_2 d_1(1-\gamma)}{d_2} Y_{t-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y_t - [c_1(1+v)+(1-\gamma)]Y_{t-1} + c_1[v+(1+v)(1-\gamma)]Y_{t-2} - vc_1(1-\gamma)Y_{t-3} =$$

$$= \gamma b_0 + \frac{b_2(\gamma+m)}{d_2} M_0(1+m)^{t-1} - \varphi Y_t + \varphi(1-\gamma)Y_{t-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1+\varphi)Y_t - [c_1(1+v)+(1-\gamma)(1+\varphi)]Y_{t-1} + c_1[v+(1+v)(1-\gamma)]Y_{t-2} - vc_1(1-\gamma)Y_{t-3} =$$

$$= \gamma b_0 + \frac{b_2(\gamma+m)}{d_2} M_0(1+m)^{t-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y_t - \frac{c_1(1+v)+(1-\gamma)(1+\varphi)}{1+\varphi} Y_{t-1} + \frac{c_1[v+(1+v)(1-\gamma)]}{1+\varphi} Y_{t-2} - \frac{vc_1(1-\gamma)}{1+\varphi} Y_{t-3} =$$

$$= \frac{\gamma b_0}{1+\varphi} + \frac{b_2(\gamma+m)}{d_2(1+\varphi)} M_0(1+m)^{t-1} \quad , \quad \varphi = \frac{b_2 d_1}{d_2} > 0 \qquad \textit{(5.6)}$$

Από την παραπάνω σχέση και κινούμενοι τρεις περιόδους μπροστά παίρνουμε:

$$Y_{t+3} - \frac{c_1(1+v)+(1-\gamma)(1+\varphi)}{1+\varphi} Y_{t+2} + \frac{c_1[v+(1+v)(1-\gamma)]}{1+\varphi} Y_{t+1} - \frac{vc_1(1-\gamma)}{1+\varphi} Y_t =$$

$$= \frac{\gamma b_0}{1+\varphi} + \frac{b_2(\gamma+m)}{d_2(1+\varphi)} M_0(1+m)^{t+2} \qquad \textbf{\textit{(5.7)}}$$

Η σχέση (5.7) αποτελεί μία μη ομογενή εξίσωση διαφορών τρίτης τάξης με σταθερούς συντελεστές, η γενική μορφή της οποίας έχει ως ακολούθως:

$$Y_{t+3} + a_2 Y_{t+2} + a_1 Y_{t+1} + a_0 Y_t = g(t) \qquad \textbf{\textit{(5.8)}}$$

όπου: $a_2 = -\frac{c_1(1+v)+(1-\gamma)(1+\varphi)}{1+\varphi} < 0$, $a_1 = \frac{c_1[v+(1+v)(1-\gamma)]}{1+\varphi} > 0$,

$a_0 = -\frac{vc_1(1-\gamma)}{1+\varphi} < 0$ & $g(t) = \frac{\gamma b_0}{1+\varphi} + \frac{b_2(\gamma+m)}{d_2(1+\varphi)} M_0(1+m)^{t+2}$

Η γενική λύση (*general solution*) της παραπάνω εξίσωσης διαφορών (Y_t) αποτελεί το άθροισμα μίας μερικής λύσης (*particular solution*) της (5.8) (Y_t^p) με τη συμπληρωματική λύση (*complementary solution*) της εν λόγω εξίσωσης διαφορών (Y_t^c) ή ισοδύναμα με τη γενική λύση της ακόλουθης ομογενούς εξίσωσης διαφορών:

$$Y_{t+3} + a_2 Y_{t+2} + a_1 Y_{t+1} + a_0 Y_t = 0 \qquad \textbf{\textit{(5.9)}}$$

όπου a_i , i = 0,1,2 , οι συντελεστές της εξίσωσης διαφορών (5.8).

Με άλλα λόγια ισχύει ότι :

$$Y_t = Y_t^c + Y_t^p \qquad \textbf{\textit{(5.10)}}$$

Η *μερική λύση* μας δίνει το επίπεδο του εισοδήματος ισορροπίας, το μέγεθος δηλαδή προς το οποίο θα συγκλίνει ή από το οποίο θα αποκλίνει η Y_t. Η *συμπληρωματική λύση* μας δείχνει τη συγκεκριμένη μορφή της διαχρονικής πορείας του εισοδήματος καθώς αυτό συγκλίνει ή αποκλίνει από την τιμή ισορροπίας του.

5.1.1 Προσδιορισμός της συμπληρωματικής λύσης υπό καθεστώς αναθεωρούμενων προσδοκιών

Ξεκινώντας από τον προσδιορισμό της συμπληρωματικής λύσης της εξίσωσης διαφορών (5.8), ας υποθέσουμε ότι αυτή είναι της μορφής:

$$Y_t^c = A\,\lambda^t \qquad \textit{(5.11.1)}$$

κάτι που βεβαίως υπονοεί ότι:

$$Y_{t+j}^c = A\,\lambda^{t+j} \quad , \quad j = 1,2,3 \qquad \textit{(5.11.2)}$$

όπου A: μία αυθαίρετη σταθερά το μέγεθος της οποίας μπορεί να προσδιορισθεί με τη βοήθεια μίας αρχικής συνθήκης

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (5.11.1) και (5.11.2) στη σχέση (5.9) προκύπτει ότι:

$$A\,\lambda^{t+3} + a_2 A\,\lambda^{t+2} + a_1 A\,\lambda^{t+1} + a_0 A\,\lambda^t = 0 \Rightarrow A\,\lambda^t\left(\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0 \qquad \textit{(5.12)}$$

Η παραπάνω σχέση αποτελεί τη χαρακτηριστική εξίσωση (*characteristic equation*) της ομογενούς εξίσωσης διαφορών (5.9) και όπως διαπιστώνουμε είναι μία εξίσωση τρίτου βαθμού ως προς λ. Ως εκ τούτου η χαρακτηριστική εξίσωση θα έχει τρεις ρίζες οι οποίες έχουν ως ακολούθως:

$$\lambda_1 = S + T - \frac{1}{3}a_2 \qquad \textit{(5.13.1)}$$

$$\lambda_2 = -\frac{1}{2}\left(S+T\right) - \frac{1}{3}a_2 + \frac{1}{2}i\sqrt{3}\left(S-T\right) \qquad \textit{(5.13.2)}$$

$$\lambda_3 = -\frac{1}{2}\left(S+T\right) - \frac{1}{3}a_2 - \frac{1}{2}i\sqrt{3}\left(S-T\right) \qquad \textit{(5.13.3)}$$

όπου $S = \sqrt[3]{P + \sqrt{D}}$, $T = \sqrt[3]{P - \sqrt{D}}$, $D = Q^3 + P^2$, $P = \dfrac{9\,a_1 a_2 - 27\,a_0 - 2\,a_2^3}{54}$,

$$Q = \frac{3\,a_1 - a_2^2}{9} \;,\; a_0 = -\frac{hv}{u} \;,\; a_1 = \frac{h\left(1+v\right)+v}{u} \;,\; a_2 = -\left(\frac{1+v}{u} + h\right) ,$$

$$u = \frac{1+\varphi}{c_1} \;,\; \varphi = \frac{b_2 d_1}{d_2} \;\&\; h = 1-\gamma$$

και οι οποίες ικανοποιούν το ακόλουθο σύστημα ισοτήτων:

$$\left.\begin{array}{c}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=-a_2\\ \lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3=a_1\\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3=-a_0\end{array}\right\} \qquad (\Sigma-5.1)$$

Το εάν και κατά πόσον οι παραπάνω ρίζες θα είναι πραγματικές ή φανταστικές, θα εξαρτηθεί από το πρόσημο της διακρίνουσας

$$D = Q^3 + P^2 \qquad (5.14)$$

Βάσει αυτού μπορούμε να διακρίνουμε μεταξύ των ακόλουθων περιπτώσεων:

1ον Εάν D > 0, η (5.12) έχει μία πραγματική ρίζα και δύο συζυγείς μιγαδικές.

2ον Εάν D = 0, όλες οι ρίζες είναι πραγματικές και τουλάχιστον δύο είναι ίσες &

3ον Εάν D < 0, η (5.12) έχει τρεις πραγματικές και διακριτές ρίζες.

Ένα ερώτημα που ανακύπτει στο σημείο αυτό έχει να κάνει με τους παράγοντες που καθορίζουν το πρόσημο της διακρίνουσας D. Προκειμένου να απαντήσουμε σ' αυτό το ερώτημα θα προσδιορίσουμε αρχικά το μέγεθος των παραμέτρων P & Q και στη συνέχεια θα αντικαταστήσουμε τα μεγέθη αυτά στη σχέση (5.14).

Το μέγεθος της παραμέτρου Q έχει ως ακολούθως:

$$Q=\frac{3a_1-a_2^2}{9}=\frac{1}{9}\left\{3\frac{h(1+v)+v}{u}-\left[-\left(\frac{1+v}{u}+h\right)\right]^2\right\}=$$

$$=-\frac{1}{9}\left[-\frac{3h+3hv+3v}{u}+\left(\frac{1+v+hu}{u}\right)^2\right]=$$

$$=-\frac{1}{9}\left[-\frac{3hu+3huv+3uv}{u^2}+\frac{1+2v+2hu+v^2+2huv+h^2u^2}{u^2}\right]=$$

$$=-\frac{1}{9}\frac{-hu-huv-3uv+1+2v+v^2+h^2u^2}{u^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q=-\frac{1}{9}\frac{v^2+[2-u(3+h)]v+(1-hu+h^2u^2)}{u^2} \qquad (5.15)$$

Το μέγεθος της παραμέτρου P ισούται με:

$$P=\frac{9\,a_1a_2-27\,a_0-2\,a_2^3}{54}=\frac{-9\left[\frac{h(1+v)+v}{u}\right]\left(\frac{1+v}{u}+h\right)+27\,\frac{hv}{u}+2\left(\frac{1+v}{u}+h\right)^3}{54}=$$

$$=\frac{1}{54}\left[\frac{-9\,h-18\,hv-9\,h^2u-9\,hv^2-9\,h^2uv-9\,v-9\,v^2-9\,huv}{u^2}+\frac{27\,hv}{u}+\right.$$

$$\left.+\frac{2+6\,v+6\,hu+6\,v^2+12\,huv+6\,h^2u^2+2\,v^3+6\,huv^2+6\,h^2u^2v+2\,h^3u^3}{u^3}\right]=$$

$$=\frac{-9\,hu-18\,huv-9\,h^2u^2-9\,huv^2-9\,h^2u^2v-9\,uv-9\,uv^2-9\,hu^2v+27\,hu^2v}{54\,u^3}+$$

$$+\frac{2+6\,v+6\,hu+6\,v^2+12\,huv+6\,h^2u^2+2\,v^3+6\,huv^2+6\,h^2u^2v+2\,h^3u^3}{54\,u^3}=$$

$$=\frac{-3\,hu-6\,huv-3\,h^2u^2-3\,huv^2-3\,h^2u^2v-9\,uv-9\,uv^2}{54\,u^3}+$$

$$+\frac{18\,hu^2v+2+6\,v+6\,v^2+2\,v^3+2\,h^3u^3}{54\,u^3}=$$

$$=\frac{(v+1-2\,hu)\left(2\,v^2+4\,v+huv-9\,uv+2+hu-h^2u^2\right)}{54\,u^3}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P=\frac{1}{54}(v+1-2\,hu)\frac{2\,v^2+\left[4+(h-9)u\right]v+\left(2+hu-h^2u^2\right)}{u^3} \qquad \textbf{\textit{(5.16)}}$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (5.15) και (5.16) στη σχέση (5.14) βρίσκουμε ότι[9]:

$$D=-\frac{1}{108}\left[v^2+2(1-2\,u)v+1\right]\frac{\left(-v+h+hv-h^2u\right)^2}{u^4} \qquad \textbf{\textit{(5.17)}}$$

[9] Τα βήματα που ακολουθήσαμε προκειμένου να προσδιορίσουμε το μέγεθος της διακρίνουσας D παρουσιάζονται αναλυτικά στο παράρτημα Α

Όπως προκύπτει από την παραπάνω σχέση, το πρόσημο της διακρίνουσας D εξαρτάται από το πρόσημο του ευρισκόμενου εντός των αγκυλών μεγέθους :

$$\Xi = v^2 + 2\left(1 - 2u\right)v + 1 \qquad \textbf{\textit{(5.18)}}$$

το οποίο αποτελεί ένα πολυώνυμο δευτέρου βαθμού ως προς v. Κατά συνέπεια θα μπορούσαμε να προσδιορίσουμε κάποια διαστήματα τιμών της συγκεκριμένης παραμέτρου, εντός των οποίων το μέγεθος Ξ θα είναι θετικά ή αρνητικά ορισμένο. Για να το πετύχουμε αυτό θα προσδιορίσουμε τις ρίζες της ακόλουθης δευτεροβάθμιας (ως προς v) εξίσωσης:

$$v^2 + 2\left(1 - 2u\right)v + 1 = 0 \qquad \textbf{\textit{(5.19)}}$$

Η διακρίνουσα της παραπάνω εξίσωσης έχει ως ακολούθως:

$$\Delta = 4\left(1 - 2u\right)^2 - 4 = 4\left(1 - 4u + 4u^2 - 1\right) \Rightarrow \qquad \Delta = 16u\left(u - 1\right) \qquad \textbf{\textit{(5.20)}}$$

Το γεγονός ότι:

$$u = \frac{1+\varphi}{c_1} > 0 \qquad \textbf{\textit{(5.21)}} \qquad \& \qquad u - 1 = \frac{1 - c_1 + \varphi}{c_1} > 0 \qquad \textbf{\textit{(5.22)}}$$

μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η διακρίνουσα αποτελεί ένα θετικό μέγεθος, κάτι που σημαίνει ότι η εξίσωση (5.19) έχει τις εξής δύο πραγματικές και διακριτές ρίζες:

$$v_{1,2} = \frac{-2\left(1-2u\right) \pm \sqrt{\Delta}}{2} \overset{(5.20)}{=} \frac{2\left(2u-1\right) \pm \sqrt{16u\left(u-1\right)}}{2} = \frac{2\left(2u-1\right) \pm 4\sqrt{u\left(u-1\right)}}{2} =$$

$$= 2u - 1 \pm 2\sqrt{u\left(u-1\right)} = u \pm 2\sqrt{u\left(u-1\right)} + u - 1 = \left(\sqrt{u}\right)^2 \pm 2\sqrt{u\left(u-1\right)} + \left(\sqrt{u-1}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \begin{cases} v_1^{ae} = \left(\sqrt{u} - \sqrt{u-1}\right)^2 > 0 & \textbf{\textit{(5.23.1)}} \\ \\ v_2^{ae} = \left(\sqrt{u} + \sqrt{u-1}\right)^2 > 0 & \textbf{\textit{(5.23.2)}} \end{cases}$$

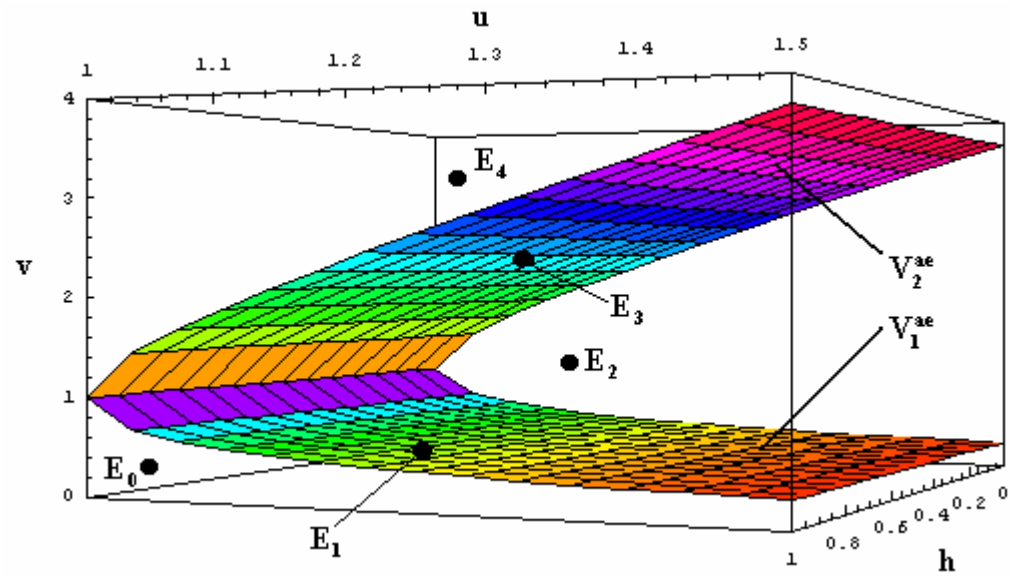
Στο γράφημα Δ – 5.1 παρουσιάζεται η εναλλαγή προσήμου των μεγεθών Ξ και D. Όπως διαπιστώνουμε για $v \in \left(v_1^{ae}, v_2^{ae}\right)$ ισχύει ότι D > 0, κάτι που σημαίνει ότι η χαρακτηριστική εξίσωση (5.12) θα έχει μία πραγματική και δύο συζυγείς μιγαδικές ρίζες. Με άλλα λόγια για το συγκεκριμένο διάστημα τιμών της παραμέτρου v, η διαχρονική πορεία του εισοδήματος (έπειτα από μία εξωγενή διαταραχή) θα χαρακτηρίζεται από ταλαντώσεις. Για $v = v_1^{ae}$ ή $v = v_2^{ae}$ θα ισχύει ότι D = 0, κάτι που σημαίνει

ότι η χαρακτηριστική εξίσωση θα έχει τρεις πραγματικές ρίζες εκ των οποίων τουλάχιστον δύο θα είναι ίσες. Ως εκ τούτου το εισόδημα θα συγκλίνει ή θα αποκλίνει ενδεχομένως εκθετικά από την βραχυχρόνια τιμή ισορροπίας του. Τέλος για $v \in \left(0, v_1^{ae}\right) \cup \left(v_2^{ae}, +\infty\right)$ ισχύει ότι D < 0, κάτι που σημαίνει ότι η χαρακτηριστική εξίσωση θα έχει τρεις πραγματικές και διακριτές ρίζες.

	0		v_1^{ae}		v_2^{ae}		$+\infty$
Ξ		+	0	−	0	+	
D		−	0	+	0	−	

Δ – 5.1

Αυτό σημαίνει ότι η διαχρονική πορεία του εισοδήματος θα είναι ενδεχομένως εκθετικής μορφής. Και λέμε ότι «ενδεχομένως» θα είναι εκθετική μορφής, καθώς για D ≤ 0 μία οι περισσότερες από τις πραγματικές ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι πιθανόν να είναι αρνητικοί αριθμοί. Στην ειδική αυτή περίπτωση η διαχρονική πορεία του εισοδήματος δεν θα είναι εκθετικής μορφής, αλλά θα παρουσιάζει μία ταλάντωση (*improper oscillation*) καθώς η τιμή της μεταβλητής t θα εναλλάσσεται μεταξύ μονών και ζυγών αριθμών[10].



Δ – 5.2

[10] Στη συνέχεια της ανάλυσης μας θα αγνοήσουμε ένα τέτοιο ενδεχόμενο και θα θεωρούμε ότι η ύπαρξη ταλάντωσης στη διαχρονική πορεία του εισοδήματος θα οφείλεται αποκλειστικά στο θετικό πρόσημο της διακρίνουσας D

Στο γράφημα[11] Δ – 5.2 παρουσιάζονται γραφικά οι σχέσεις (5.23.1) και (5.23.2) μέσω των επιφανειών V_1^{ae} και V_2^{ae} αντιστοίχως. Για σημεία του τρισδιάστατου χώρου όπως το E_0 (το οποίο εντοπίζεται κάτω από την επιφάνεια V_1^{ae}) και το E_4 (το οποίο εντοπίζεται πάνω από την επιφάνεια V_2^{ae}) ισχύει ότι D < 0. Με άλλα λόγια αυτά τα σημεία του τρισδιάστατου χώρου περιγράφουν συνδυασμούς (h,u,v) για τους οποίους η διαχρονική πορεία του εισοδήματος θα είναι εκθετικής μορφής. Η διαχρονική πορεία του εισοδήματος θα είναι της ίδιας μορφής και στην περίπτωση σημείων του τρισδιάστατου χώρου, όπως για παράδειγμα τα σημεία E_1 και E_3, τα οποία εντοπίζονται επί των επιφανειών V_1^{ae} και V_2^{ae}, καθώς αυτά περιγράφουν συνδυασμούς (h,u,v) για τους οποίους ισχύει ότι D = 0. Τέλος για σημεία του τρισδιάστατου χώρου τα οποία εντοπίζονται μεταξύ των δύο επιφανειών, όπως το E_2, ισχύει ότι D > 0, κάτι που σημαίνει ότι το εισόδημα θα αποκλίνει ή θα συγκλίνει προς τη βραχυχρόνια τιμή ισορροπίας του μέσω ταλαντώσεων.

Έχοντας διερευνήσει τη μορφή της διαχρονικής πορείας του εισοδήματος έπειτα από μία εξωγενή διαταραχή, ας δούμε τώρα ποια είναι η μαθηματική μορφή της συμπληρωματικής λύσης της μη ομογενούς εξίσωσης διαφορών (5.8). Σε γενικές γραμμές θα μπορούσαμε να υποστηρίξουμε ότι η συμπληρωματική λύση αποτελεί το γραμμικό συνδυασμό των συναρτήσεων:

$$y_{1,t} = \lambda_1^t \qquad \textbf{\textit{(5.24.1)}} \qquad\qquad y_{2,t} = \lambda_2^t \qquad \textbf{\textit{(5.24.2)}}$$

$$\& \quad y_{3,t} = \lambda_3^t \qquad \textbf{\textit{(5.24.3)}}$$

εφόσον αυτές είναι γραμμικώς ανεξάρτητες. Εφόσον δηλαδή ισχύει ότι:

$$C(t) = \begin{vmatrix} y_{1,t} & y_{2,t} & y_{3,t} \\ y_{1,t+1} & y_{2,t+1} & y_{3,t+1} \\ y_{1,t+2} & y_{2,t+2} & y_{3,t+2} \end{vmatrix} \neq 0 \; \forall \, t \qquad \textbf{\textit{(5.25)}}$$

όπου C(t): *η ορίζουσα Casorati*

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (5.24.1) ~ (5.24.3) στη σχέση (5.25) βρίσκουμε ότι:

$$C(t) = \begin{vmatrix} \lambda_1^t & \lambda_2^t & \lambda_3^t \\ \lambda_1^{t+1} & \lambda_2^{t+1} & \lambda_3^{t+1} \\ \lambda_1^{t+2} & \lambda_2^{t+2} & \lambda_3^{t+2} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^t & \lambda_2^t & \lambda_3^t \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{vmatrix} \underset{\Sigma_3 - \Sigma_1}{\overset{\Sigma_2 - \Sigma_1}{=}}$$

[11] Το συγκεκριμένο γράφημα έχει παραχθεί για v ∈ (0,4), h ∈ (0,1) & u ∈ (1,1.5) και η επιλογή των συγκεκριμένων διαστημάτων έγινε για την καλύτερη γραφική παρουσίαση των δύο επιφανειών.

$$= \left(\prod_{i=1}^{3}\lambda_i\right)^t \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_2-\lambda_1 & \lambda_3-\lambda_1 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2-\lambda_1^2 & \lambda_3^2-\lambda_1^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\prod_{i=1}^{3}\lambda_i\right)^t (\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & 1 & 1 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2+\lambda_1 & \lambda_3+\lambda_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\prod_{i=1}^{3}\lambda_i\right)^t (\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_2+\lambda_1 & \lambda_3+\lambda_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\prod_{i=1}^{3}\lambda_i\right)^t (\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3+\lambda_1-\lambda_2-\lambda_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C(t) = \left(\prod_{i=1}^{3}\lambda_i\right)^t (\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2) \qquad \textbf{\textit{(5.26)}}$$

Από το σύστημα (Σ-5.1) γνωρίζουμε ότι $\prod_{i=1}^{3}\lambda_i = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -a_0$ οπότε η σχέση (5.26) παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$C(t) = (-a_0)^t (\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2) \qquad \textbf{\textit{(5.26.1)}}$$

όπου $a_0 = -\dfrac{hv}{u} = -\dfrac{c_1(1-\gamma)v}{1+\varphi} \neq 0$.

Όπως προκύπτει από την παραπάνω σχέση, η ορίζουσα Casorati θα είναι οπωσδήποτε διάφορη του μηδενός, θα ισχύει δηλαδή ότι $C(t) \neq 0$, μόνο εφόσον οι χαρακτηριστικές ρίζες είναι όλες διαφορετικές μεταξύ τους. Με άλλα λόγια εάν ισχύει ότι

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \qquad \textbf{\textit{(5.27)}}$$

η συμπληρωματική λύση θα είναι της γενικής μορφής:

$$Y_t^c = A_1\lambda_1^t + A_2\lambda_2^t + A_3\lambda_3^t \qquad \textbf{\textit{(5.28.1)}}$$

όπου A_i , $i = 1,2,3$, τρεις αυθαίρετες σταθερές το μέγεθος των οποίων μπορεί να προσδιοριστεί με τη βοήθεια τριών αρχικών συνθηκών.

Όπως θυμόμαστε, η χαρακτηριστική εξίσωση θα έχει διακριτές ρίζες στην περίπτωση που ισχύει ότι D >,< 0. Αντιθέτως στην περίπτωση που D = 0 η χαρακτηριστική εξίσωση θα έχει τουλάχιστον δύο ίσες ρίζες, κάτι που αφενός μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι C(t) = 0 και αφετέρου ότι η συμπληρωματική λύση δεν μπορεί να είναι της μορφής (5.28.1). Στη συνέχεια της ανάλυσής μας θα προσδιορίσουμε τη συγκεκριμένη μορφή της συμπληρωματικής λύσης της εξίσωσης διαφορών (5.8) βάσει του μεγέθους της διακρίνουσας D, ξεκινώντας από την περίπτωση που αυτή είναι θετική.

<u>1η Περίπτωση: D < 0</u>

Σ' αυτήν την περίπτωση η χαρακτηριστική εξίσωση έχει τρεις πραγματικές και διακριτές ρίζες οι οποίες έχουν ως ακολούθως[12]:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= 2\sqrt{-Q}\cos\left(\tilde{\theta}/3\right) - a_2/3 && \textbf{\textit{(5.29.1)}} \\ \lambda_2 &= 2\sqrt{-Q}\cos\left(\tilde{\theta}/3 + 120^o\right) - a_2/3 && \textbf{\textit{(5.29.2)}} \\ \lambda_3 &= 2\sqrt{-Q}\cos\left(\tilde{\theta}/3 + 240^o\right) - a_2/3 && \textbf{\textit{(5.29.3)}} \end{aligned}\right\} \text{ όπου } \tilde{\theta} = \arccos\left(\frac{P}{\sqrt{-Q^3}}\right)$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις στη σχέση (5.28.1), παίρνουμε τη μορφή της συμπληρωματικής λύσης για D < 0 η οποία και έχει ως ακολούθως:

$$\begin{aligned} Y_t^c = A_1\left[2\sqrt{-Q}\cos\left(\tilde{\theta}/3\right) - a_2/3\right]^t + A_2\left[2\sqrt{-Q}\cos\left(\tilde{\theta}/3 + 120^o\right) - a_2/3\right]^t + \\ + A_3\left[2\sqrt{-Q}\cos\left(\tilde{\theta}/3 + 240^o\right) - a_2/3\right]^t \end{aligned} \qquad \textbf{\textit{(5.30)}}$$

<u>2η Περίπτωση: D > 0</u>

Σ' αυτήν την περίπτωση η χαρακτηριστική εξίσωση έχει μία πραγματική και δύο συζυγείς μιγαδικές ρίζες, οι οποίες και παρουσιάζονται μέσω των σχέσεων (5.13.1) ~ (5.13.3). Δεδομένου ότι $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$, η συμπληρωματική λύση μπορεί να εξαχθεί από τη σχέση (5.28.1). Πιο συγκεκριμένα αντικαθιστώντας τις χαρακτηριστικές ρίζες (5.13.1) ~ (5.13.3) στη σχέση (5.28.1) προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} Y_t^c = A_1\left(S + T - \frac{a_2}{3}\right)^t + A_2\left[-\frac{1}{2}\left(S+T\right) - \frac{a_2}{3} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}\left(S-T\right)\right]^t + \\ + A_3\left[-\frac{1}{2}\left(S+T\right) - \frac{a_2}{3} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}\left(S-T\right)\right]^t \end{aligned} \qquad \textbf{\textit{(5.31.1)}}$$

---

[12] Βλέπε σχετικά Spiegel M.R. (1976), «Μαθηματικό Τυπολόγιο», σελ. 32, McGraw – Hill, New York, ΕΣΠΙ, Αθήνα

ή ισοδύναμα

$$Y_t^c = A_1\left(S+T-\frac{a_2}{3}\right)^t + A_2\left(k_{ae}+n_{ae}i\right)^t + A_3\left(k_{ae}-n_{ae}i\right)^t \qquad \textbf{\textit{(5.31.2)}}$$

όπου $k_{ae} = -\frac{1}{2}\left(S+T\right)-\frac{a_2}{3}$ & $n_{ae} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(S-T\right)$

Από το θεώρημα De Moivre γνωρίζουμε ότι:

$$\left(k_{ae} \pm n_{ae}i\right)^t = R_{ae}^t\left[\cos(\chi_{ae}t) \pm i\sin(\chi_{ae}t)\right] \qquad \textbf{\textit{(5.32)}}$$

όπου[13]

$$R_{ae} = \sqrt{k_{ae}^2+n_{ae}^2} = \sqrt{\left[-\frac{1}{2}\left(S+T\right)-\frac{a_2}{3}\right]^2+\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\left(S-T\right)\right]^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4}\left(S+T\right)^2+\frac{a_2}{3}\left(S+T\right)+\frac{a_2^2}{9}+\frac{3}{4}\left(S-T\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4}\left(S^2+2ST+T^2+3S^2-6ST+3T^2\right)+\frac{a_2}{3}\left(S+T\right)+\frac{a_2^2}{9}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4}\left(4S^2-4ST+4T^2\right)+\frac{a_2}{3}\left(S+T\right)+\frac{a_2^2}{9}} =$$

$$= \sqrt{S^2-ST+T^2+\frac{a_2}{3}\left(S+T\right)+\frac{a_2^2}{9}}$$

$$\Rightarrow R_{ae} = \sqrt{\left(S-T\right)^2+ST+\frac{a_2}{3}\left(S+T+\frac{a_2}{3}\right)} \qquad \textbf{\textit{(5.33)}}$$

&

$$\tan(\chi_{ae}) = \frac{n_{ae}}{k_{ae}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\left(S-T\right)}{-\frac{1}{2}\left(S+T\right)-\frac{a_2}{3}} = \frac{3\sqrt{3}\left(T-S\right)}{3\left(S+T\right)+2a_2} \Rightarrow$$

---

[13] Να σημειωθεί εδώ ότι στην περίπτωση που $R_{ae} = 1$, η διαχρονική πορεία του εισοδήματος θα χαρακτηρίζεται από σταθερού εύρους ταλαντώσεις γύρω από τη βραχυχρόνια τιμή ισορροπίας του.

$$\Rightarrow \qquad \chi_{ae} = \arctan\left[\frac{3\sqrt{3}\,(T-S)}{3\,(S+T)+2\,a_2}\right] \qquad \textit{(5.34)}$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (5.32) στη σχέση (5.31.2) παίρνουμε:

$$Y_t^c = A_1\left(S+T-\frac{a_2}{3}\right)^t + A_2 R_{ae}^t\left[\cos(\chi_{ae}t)+i\sin(\chi_{ae}t)\right]+A_3 R_{ae}^t\left[\cos(\chi_{ae}t)-i\sin(\chi_{ae}t)\right]=$$

$$=A_1\left(S+T-\frac{a_2}{3}\right)^t + R_{ae}^t\left[(A_2+A_3)\cos(\chi_{ae}t)+(A_2-A_3)i\sin(\chi_{ae}t)\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y_t^c = A_1\left(S+T-\frac{a_2}{3}\right)^t + R_{ae}^t\left[A_4\cos(\chi_{ae}t)+A_5\sin(\chi_{ae}t)\right] \qquad \textit{(5.35)}$$

όπου: $A_4 = A_2 + A_3$ & $A_5 = (A_2 - A_3)i$

Η σχέση (5.35) περιγράφει τη συμπληρωματική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης διαφορών (5.8) στην περίπτωση που D > 0.

<u>3η Περίπτωση: D = 0</u>

Στην περίπτωση που η διακρίνουσα D είναι ίση με το μηδέν η χαρακτηριστική εξίσωση θα έχει, όπως έχουμε ήδη αναφέρει, τρεις πραγματικές ρίζες εκ των οποίων τουλάχιστον δύο θα είναι ίσες. Οι ρίζες όπως αυτές προκύπτουν από τις σχέσεις (5.13.1) ~ (5.13.3) για D = 0, και δεδομένου ότι για τη συγκεκριμένη τιμή της διακρίνουσας D ισχύει ότι $S = T = \sqrt[3]{P}$ και ως εκ τούτου $S + T = 2\sqrt[3]{P}$ & $S - T = 0$, έχουν ως ακολούθως:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= 2\sqrt[3]{P} - \frac{a_2}{3} && \textit{(5.36.1)} \\ \lambda_2 &= \lambda_3 = -\sqrt[3]{P} - \frac{a_2}{3} && \textit{(5.36.2)} \end{aligned}\right\}$$

Το γεγονός ότι $\lambda_2 = \lambda_3$ μας οδηγεί βάσει της σχέσης (5.26.1) στο συμπέρασμα ότι η ορίζουσα Casorati θα είναι ίση με το μηδέν, κάτι που σημαίνει ότι η συμπληρωματική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης διαφορών (5.8) δεν μπορεί να είναι της μορφής (5.28.1), καθώς οι συναρτήσεις (5.24.1) ~ (5.24.3) δεν είναι γραμμικώς ανεξάρτητες. Αν ωστόσο υποθέσουμε ότι $\lambda_1 \neq \lambda_2$ & λ_3 , τότε οι συναρτήσεις:

$$y_{1,t} = \lambda_1^t \qquad (5.37.1) \qquad\qquad y_{2,t} = \lambda_2^t \qquad (5.37.2)$$

$$\& \quad y_{3,t} = t\,\lambda_3^t \qquad (5.37.3)$$

αποδεικνύεται ότι συνιστούν ένα θεμελιώδες σύνολο λύσεων της ομογενούς εξίσωσης διαφορών (5.9), καθώς γι' αυτές ισχύει ότι:

$$C(t) = \begin{vmatrix} y_{1,t} & y_{2,t} & y_{3,t} \\ y_{1,t+1} & y_{2,t+1} & y_{3,t+1} \\ y_{1,t+2} & y_{2,t+2} & y_{3,t+2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_1^t & \lambda_2^t & t\,\lambda_3^t \\ \lambda_1^{t+1} & \lambda_2^{t+1} & (t+1)\lambda_3^{t+1} \\ \lambda_1^{t+2} & \lambda_2^{t+2} & (t+2)\lambda_3^{t+2} \end{vmatrix} \overset{\lambda_2=\lambda_3}{=}$$

$$= \left(\lambda_1^t\,\lambda_2^{2t}\right) \begin{vmatrix} 1 & 1 & t \\ \lambda_1 & \lambda_2 & (t+1)\lambda_2 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & (t+2)\lambda_2^2 \end{vmatrix} \underset{\Sigma_3 - t\,\Sigma_1}{\overset{\Sigma_2 - \Sigma_1}{=}} \left(\lambda_1\,\lambda_2^2\right)^t \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_2 - \lambda_1 & (t+1)\lambda_2 - t\,\lambda_1 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 - \lambda_1^2 & (t+2)\lambda_2^2 - t\,\lambda_1^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\lambda_1\lambda_2^2\right)^t \begin{vmatrix} \lambda_2 - \lambda_1 & (t+1)\lambda_2 - t\,\lambda_1 \\ \lambda_2^2 - \lambda_1^2 & (t+2)\lambda_2^2 - t\,\lambda_1^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\lambda_1\lambda_2^2\right)^t (\lambda_2 - \lambda_1) \begin{vmatrix} 1 & \lambda_2 + t(\lambda_2 - \lambda_1) \\ \lambda_2 + \lambda_1 & 2\lambda_2^2 + t(\lambda_2 + \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1) \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\lambda_1\lambda_2^2\right)^t (\lambda_2 - \lambda_1)\left[2\lambda_2^2 + t(\lambda_2 + \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1) - \lambda_2(\lambda_2 + \lambda_1) - t(\lambda_2 + \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1)\right] =$$

$$= \left(\lambda_1\lambda_2^2\right)^t (\lambda_2 - \lambda_1)\left[2\lambda_2^2 - \lambda_2(\lambda_2 + \lambda_1)\right] = \lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)\left(\lambda_1\,\lambda_2^2\right)^t (2\lambda_2 - \lambda_2 - \lambda_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C(t) = \lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)^2\left(\lambda_1\lambda_2^2\right)^t \neq 0 \;\forall\, t \text{ εάν } \lambda_i \in \Re_+^*,\, i = 1, 2, 3 \qquad (5.38)$$

Στην περίπτωση λοιπόν που ισχύει ότι D = 0 και $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3$, η συμπληρωματική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης διαφορών (5.8) έχει την ακόλουθη μορφή:

$$Y_t^c = A_1\left(2\sqrt[3]{P} - \frac{a_2}{3}\right)^t + A_2\left(-\sqrt[3]{P} - \frac{a_2}{3}\right)^t + A_3 t\left(-\sqrt[3]{P} - \frac{a_2}{3}\right)^t \qquad (5.39.1)$$

ή ισοδύναμα

$$Y_t^c = A_1\left(2\sqrt[3]{P} - \frac{a_2}{3}\right)^t + \left(A_2 + A_3 t\right)\left(-\sqrt[3]{P} - \frac{a_2}{3}\right)^t \qquad \textbf{\textit{(5.39.2)}}$$

Ένα ερώτημα που ανακύπτει ωστόσο σ' αυτό το σημείο έχει να κάνει με τη μορφή της συμπληρωματικής λύσης στην περίπτωση που η χαρακτηριστική εξίσωση έχει τρεις πραγματικές και ίσες ρίζες. Από τις σχέσεις (5.36.1) και (5.36.2) εύκολα προκύπτει ότι $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ μόνο εφόσον P = 0, ενώ το μέγεθος των τριών ίσων ριζών ισούται με:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -\frac{a_2}{3} \qquad \textbf{\textit{(5.40)}}$$

Με άλλα λόγια για D = 0 & P = 0, η συμπληρωματική λύση δεν αποτελεί το γραμμικό συνδυασμό των συναρτήσεων (5.37.1) ~ (5.37.3) αλλά των παρακάτω συναρτήσεων:

$$y_{1,t} = \lambda_1^t = \left(-\frac{a_2}{3}\right)^t \qquad \textbf{\textit{(5.41.1)}} \qquad\qquad y_{2,t} = t\,\lambda_2^t = t\left(-\frac{a_2}{3}\right)^t \qquad \textbf{\textit{(5.41.2)}}$$

$$\& \quad y_{3,t} = t^2\,\lambda_3^t = t^2\left(-\frac{a_2}{3}\right)^t \qquad \textbf{\textit{(5.41.3)}}$$

Και αυτό διότι η ορίζουσα Casorati, όπως αυτή προκύπτει από την αντικατάσταση των τριών παραπάνω σχέσεων στη σχέση (5.25), έχει ως ακολούθως:

$$C(t) = 2\left(-\frac{a_2}{3}\right)^{3(t+1)} \neq 0 \;\; \forall \;\; t \qquad \textbf{\textit{(5.42)}}$$

Στην περίπτωση λοιπόν που D = 0 & P = 0, η συμπληρωματική λύση θα έχει την ακόλουθη μορφή:

$$Y_t^c = A_1\left(-\frac{a_2}{3}\right)^t + A_2 t\left(-\frac{a_2}{3}\right)^t + A_3 t^2\left(-\frac{a_2}{3}\right)^t \qquad \textbf{\textit{(5.43.1)}}$$

ή ισοδύναμα

$$Y_t^c = \left(-\frac{a_2}{3}\right)^t \sum_{i=1}^{3} A_i t^{i-1} \qquad \textbf{\textit{(5.43.2)}}$$

Στον πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζουμε συνοπτικά τις μορφές της συμπληρωματικής λύσης της μη ομογενούς εξίσωσης διαφορών (5.8), όπως αυτή προσδιορίζεται βάσει του προσήμου της διακρίνουσας D.

<u>Πίνακας 5.1</u>: Μορφές της συμπληρωματικής λύσης βάσει του προσήμου της διακρίνουσας D

D < 0		$Y_t^c = A_1\left[2\sqrt{-Q}\cos\left(\frac{\tilde{\theta}}{3}\right)-\frac{a_2}{3}\right]^t + A_2\left[2\sqrt{-Q}\cos\left(\frac{\tilde{\theta}}{3}+120^o\right)-\frac{a_2}{3}\right]^t + A_3\left[2\sqrt{-Q}\cos\left(\frac{\tilde{\theta}}{3}+240^o\right)-\frac{a_2}{3}\right]^t$
D = 0	**P ≠ 0**	$Y_t^c = A_1\left(2\sqrt[3]{P}-\frac{a_2}{3}\right)^t + \left(A_2 + A_3 t\right)\left(-\sqrt[3]{P}-\frac{a_2}{3}\right)^t$
	P = 0	$Y_t^c = \left(-\frac{a_2}{3}\right)^t \sum_{i=1}^{3} A_i t^{i-1}$
D > 0		$Y_t^c = A_1\left(S+T-\frac{a_2}{3}\right)^t + R_{ae}^t\left[A_4\cos(\chi_{ae}t)+A_5\sin(\chi_{ae}t)\right]$

<u>Παρατήρηση</u>: Οι σταθερές A_i, i = 1, …. ,5, μπορούν να προσδιορισθούν με τη βοήθεια τριών αρχικών συνθηκών

5.1.2 Προσδιορισμός της μερικής λύσης υπό καθεστώς αναθεωρούμενων προσδοκιών

Έχοντας ολοκληρώσει τη διερεύνηση της μορφής της συμπληρωματικής λύσης, θα στραφούμε τώρα στον προσδιορισμό μίας μερικής λύσης της εξίσωσης διαφορών (5.8), το μέγεθος της οποίας αποτελεί όπως έχουμε ήδη αναφέρει την τιμή ισορροπίας του εισοδήματος.

Η μορφή της συνάρτησης που θα μπορούσαμε να δοκιμάσουμε ως μερική λύση εξαρτάται από τη συγκεκριμένη μορφή της συνάρτησης g(t). Δεδομένου ότι:

$$g(t) = \overline{B}_0 + \overline{B}_1\left(1+m\right)^t \qquad \textit{(5.44)}$$

όπου $\overline{B}_0 = \frac{\gamma b_0}{1+\varphi} > 0$ & $\overline{B}_1 = \frac{b_2(\gamma+m)}{d_2(1+\varphi)} M_0 (1+m)^2 > 0$

ως μερική λύση της (5.8) θα μπορούσαμε να δοκιμάσουμε την ανάλογης μορφής συνάρτηση:

$$Y_t^p = B_0 + B_1\left(1+m\right)^t \qquad \textit{(5.45)}$$

Από την παραπάνω συνάρτηση εύκολα προκύπτει ότι:

$$Y_{t+1}^p = B_0 + B_1\left(1+m\right)^{t+1} \qquad \textit{(5.45.1)} \quad , \quad Y_{t+2}^p = B_0 + B_1\left(1+m\right)^{t+2} \qquad \textit{(5.45.2)}$$

$$\& \qquad Y_{t+3}^p = B_0 + B_1\left(1+m\right)^{t+3} \qquad \textit{(5.45.3)}$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (5.45) ~ (5.45.3) στη σχέση (5.8) και επιλύοντας ως προς τις σταθερές B_0 και B_1 βρίσκουμε ότι:

$$B_0 + B_1(1+m)^{t+3} + a_2\left[B_0 + B_1(1+m)^{t+2}\right] + a_1\left[B_0 + B_1(1+m)^{t+1}\right] +$$

$$+ a_0\left[B_0 + B_1(1+m)^{t}\right] = \frac{\gamma b_0}{1+\varphi} + \frac{b_2(\gamma+m)}{d_2(1+\varphi)} M_0(1+m)^{t+2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1 + a_0 + a_1 + a_2)B_0 + B_1\left[(1+m)^3 + a_2(1+m)^2 + a_1(1+m) + a_0\right](1+m)^t =$$

$$= \left(\frac{\gamma b_0}{1+\varphi}\right) + \left[\frac{b_2(\gamma+m)}{d_2(1+\varphi)} M_0(1+m)^2\right](1+m)^t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{c} (1 + a_0 + a_1 + a_2)B_0 = \dfrac{\gamma b_0}{1+\varphi} \\ B_1\left[(1+m)^3 + a_2(1+m)^2 + a_1(1+m) + a_0\right] = \dfrac{b_2(\gamma+m)}{d_2(1+\varphi)} M_0(1+m)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{c} \left\{1 - \dfrac{vc_1(1-\gamma)}{1+\varphi} + \dfrac{c_1[v + (1+v)(1-\gamma)]}{1+\varphi} - \dfrac{c_1(1+v) + (1-\gamma)(1+\varphi)}{1+\varphi}\right\} B_0 = \dfrac{\gamma b_0}{1+\varphi} \\ B_1 = \dfrac{b_2(\gamma+m)}{d_2(1+\varphi)} \dfrac{M_0(1+m)^2}{(1+m)^3 + a_2(1+m)^2 + a_1(1+m) + a_0} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{c} [1 + \varphi - vc_1(1-\gamma) + c_1 v + c_1(1+v)(1-\gamma) - c_1(1+v) - (1-\gamma)(1+\varphi)]B_0 = \gamma b_0 \\ B_1 = \dfrac{b_2(\gamma+m)}{d_2(1+\varphi)} \dfrac{M_0(1+m)^2}{(1+m)^3 + a_2(1+m)^2 + a_1(1+m) + a_0} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{c} \left[(1+\varphi)(1-1+\gamma)+vc_1(1-1+\gamma)+c_1(1+v)(1-\gamma-1)\right]B_0=\gamma b_0 \\ B_1=\dfrac{b_2(\gamma+m)}{d_2(1+\varphi)}\dfrac{M_0(1+m)^2}{(1+m)^3+a_2(1+m)^2+a_1(1+m)+a_0} \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{c} \left[(1+\varphi)\gamma+vc_1\gamma-c_1(1+v)\gamma\right]B_0=\gamma b_0 \\ B_1=\dfrac{b_2(\gamma+m)}{d_2(1+\varphi)}\dfrac{M_0(1+m)^2}{(1+m)^3+a_2(1+m)^2+a_1(1+m)+a_0} \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{c} \left[1+\varphi+c_1(v-1-v)\right]B_0=b_0 \\ B_1=\dfrac{b_2(\gamma+m)}{d_2(1+\varphi)}\dfrac{M_0(1+m)^2}{(1+m)^3+a_2(1+m)^2+a_1(1+m)+a_0} \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B_0=\dfrac{b_0}{1-c_1+\varphi} & \textbf{\textit{(5.46.1)}} \\ B_1=\dfrac{b_2(\gamma+m)}{d_2(1+\varphi)}\dfrac{M_0(1+m)^2}{(1+m)^3+a_2(1+m)^2+a_1(1+m)+a_0} & \textbf{\textit{(5.46.2)}} \end{cases}$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των σταθερών B_0 και B_1 που μόλις προσδιορίσαμε στη (5.45), παίρνουμε το μέγεθος του εισοδήματος ισορροπίας το οποίο και έχει ως ακολούθως:

$$Y_t^p=\widetilde{Y}_t^{ae}=\frac{b_0}{1-c_1+\varphi}+\frac{b_2(\gamma+m)}{d_2(1+\varphi)}\frac{M_0(1+m)^{t+2}}{(1+m)^3+a_2(1+m)^2+a_1(1+m)+a_0} \qquad \textbf{\textit{(5.47)}}$$

όπου $a_2=-\dfrac{c_1(1+v)+(1-\gamma)(1+\varphi)}{1+\varphi}<0$, $a_1=\dfrac{c_1[v+(1+v)(1-\gamma)]}{1+\varphi}>0$,

$a_0=-\dfrac{vc_1(1-\gamma)}{1+\varphi}<0$ & $\varphi=\dfrac{b_2d_1}{d_2}>0$

Το ερώτημα το οποίο ανακύπτει στο σημείο αυτό έχει να κάνει με τις προϋποθέσεις κάτω από τις οποίες το εισόδημα ισορροπίας, όπως αυτό περιγράφεται από τη σχέση (5.47), θα αποτελεί ένα θετικό μέγεθος.

Εφόσον $b_0 > 0$, $1 - c_1 \in (0,1)$, $\varphi > 0$, $0 < \gamma < 1$, $M_0 > 0$, $0 < m < 1$, $b_2 < 0$ και $d_2 < 0$, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι:

$$\frac{b_0}{1 - c_1 + \varphi} > 0 \qquad (5.48.1) \quad , \quad \frac{b_2(\gamma + m)}{d_2(1+\varphi)} > 0 \qquad (5.48.2)$$

$$\& \quad M_0(1+m)^{t+2} > 0 \; \forall \, t \qquad (5.48.3)$$

Με άλλα λόγια το πρόσημο του εισοδήματος ισορροπίας θα εξαρτάται, σε μεγάλο βαθμό, από το πρόσημο του ακόλουθου όρου:

$$P_1(\tilde{m}) = \tilde{m}^3 + a_2\tilde{m}^2 + a_1\tilde{m} + a_0 \qquad (5.49) \qquad \text{όπου } \tilde{m} = 1 + m$$

Το παραπάνω μέγεθος αποτελεί ένα πολυώνυμο τρίτου βαθμού ως προς $\tilde{m}$ και έχει τις ίδιες ακριβώς ρίζες με εκείνες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου:

$$P_1(\lambda) = \lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 \qquad (5.50)$$

Ως εκ τούτου το πρόσημο του πολυωνύμου $P_1(\tilde{m})$, και κατ'επέκταση του εισοδήματος ισορροπίας, θα μπορούσε να διερευνηθεί βάσει του πρόσημου της διακρίνουσας D, διακρίνοντας μεταξύ των ακόλουθων περιπτώσεων:

<u>1η Περίπτωση: D < 0</u>

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, στην περίπτωση που $D < 0$ το πολυώνυμο $P_1(\tilde{m})$ θα έχει τρεις πραγματικές και διακριτές ρίζες, οι οποίες δίνονται από τις σχέσεις (5.49.1) ~ (5.49.3). Στο γράφημα Δ – 5.3 παρουσιάζεται η εναλλαγή προσήμου του πολυωνύμου $P_1(\tilde{m})$ βάσει της ακόλουθης σχέσης[14]:

$$\tilde{m}_2 < \tilde{m}_3 < \tilde{m}_1 \qquad (5.51)$$

όπου $\tilde{m}_i = \lambda_i \in \Re^*_+, i = 1, 2, 3$, οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης όπως αυτές περιγράφονται από τις σχέσεις (5.29.1) ~ (5.29.3)

Όπως προκύπτει από τον παραπάνω πίνακα το πολυώνυμο $P_1(\tilde{m})$, και συνεπώς το εισόδημα ισορροπίας $\tilde{Y}_t^{ae}$, είναι θετικά ορισμένο στο διάστημα $(\tilde{m}_2, \tilde{m}_3) \cup (\tilde{m}_1, 2)$. Στην περίπτωση τώρα που $\tilde{m} \in (1, \tilde{m}_2) \cup (\tilde{m}_3, \tilde{m}_1)$ θα ισχύει ότι $P_1(\tilde{m}) < 0$ και ως εκ τούτου το εισόδημα ισορροπίας θα συνιστά ένα θετικό μέγεθος εφόσον ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$b_0/(1 - c_1 + \varphi) > -b_2(\gamma + m)M_0\tilde{m}^{t+2}/d_2(1+\varphi)P_1(\tilde{m}) \quad \forall \, t \qquad (5.52)$$

[14] Η συγκεκριμένη σχέση θεμελιώνεται στο παράρτημα Β

	1	$\tilde{m}_2$	$\tilde{m}_3$	$\tilde{m}_1$	2
$\tilde{m}-\tilde{m}_3$	−	−	0	+	+
$\tilde{m}-\tilde{m}_1$	−	−	−	0	+
$\tilde{m}-\tilde{m}_2$	−	0	+	+	+
$P_1(\tilde{m})$	−	+	−	+	

Δ – 5.3

<u>2η Περίπτωση: D > 0</u>

Όταν η διακρίνουσα D συνιστά ένα θετικό μέγεθος, το πολυώνυμο $P_1(\tilde{m})$ έχει μία πραγματική και δύο συζυγείς μιγαδικές ρίζες οι οποίες και περιγράφονται από τις σχέσεις (5.13.1) ~ (5.13.3). Με άλλα λόγια στην περίπτωση που $v \in \left(v_1^{ae}, v_2^{ae}\right)$ το πολυώνυμο $P_1(\tilde{m})$ παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$P_2(\tilde{m}) = \left[\tilde{m} - \left(S + T - \frac{1}{3}a_2\right)\right]\left\{\tilde{m} - \left[-\frac{1}{2}(S+T) - \frac{a_2}{3} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}(S-T)\right]\right\}\times$$

$$\times\left\{\tilde{m} - \left[-\frac{1}{2}(S+T) - \frac{a_2}{3} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}(S-T)\right]\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_2(\tilde{m}) = \left[\tilde{m}^2 + \left(S + T + \frac{2a_2}{3}\right)\tilde{m} + S^2 - ST + T^2 + \frac{a_2}{3}S + \frac{a_2}{3}T + \frac{a_2^2}{9}\right]\times$$

$$\times\left[\tilde{m} - \left(S + T - \frac{a_2}{3}\right)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_2(\tilde{m}) = \left[\tilde{m}^2 + \left(S + T + \frac{2a_2}{3}\right)\tilde{m} + \left(S + T + \frac{a_2}{3}\right)^2 - 3ST - \frac{a_2}{3}(S+T)\right]\times$$

$$\times\left[\tilde{m} - \left(S + T - \frac{a_2}{3}\right)\right] \qquad (5.53)$$

Ο ευρισκόμενος στην πρώτη αγκύλη όρος, δηλαδή το μέγεθος:

$$\tilde{m}^2 + \left(S + T + \frac{2\,a_2}{3}\right)\tilde{m} + \left(S + T + \frac{a_2}{3}\right)^2 - 3\,S\,T - \frac{a_2}{3}(S + T)$$

αποτελεί ένα πολυώνυμο δευτέρου βαθμού ως προς $\tilde{m}$ και είναι θετικά ορισμένος. Αυτό αποδεικνύεται από το γεγονός ότι η διακρίνουσά του, η οποία περιγράφεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\Delta_2 = \left(S + T + \frac{2a_2}{3}\right)^2 - 4\left[\left(S + T + \frac{a_2}{3}\right)^2 - 3\,S\,T - \frac{a_2}{3}(S + T)\right] = S^2 + 2\,S\,T + \frac{4\,a_2}{3}S + T^2 +$$

$$+ \frac{4\,a_2}{3}T + \frac{4}{9}a_2^2 - 4\left(S^2 - S\,T + T^2 + \frac{a_2}{3}S + \frac{a_2}{3}T + \frac{a_2^2}{9}\right) = -3\,S^2 - 6\,S\,T - 3\,T^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \Delta_2 = -3\,(S + T)^2 < 0 \qquad \textit{(5.54)}$$

συνιστά εμφανώς ένα αρνητικό μέγεθος, οπότε το πρόσημο του τριωνύμου συμπίπτει με το πρόσημο του συντελεστή (+1) του όρου $\tilde{m}^2$.

Γίνεται λοιπόν φανερό ότι το πρόσημο του πολυωνύμου $P_2(\tilde{m})$ εξαρτάται από το πρόσημο του ακόλουθου όρου:

$$\tilde{m} - (S + T - a_2/3) \qquad \textit{(5.55)}$$

Εξισώνοντας τον όρο αυτό με το μηδέν και επιλύοντας ως προς $\tilde{m}$ προκύπτει:

$$\tilde{m} - \left(S + T - \frac{a_2}{3}\right) = 0 \Rightarrow \qquad \tilde{m} = S + T - \frac{a_2}{3} \qquad \textit{(5.56)}$$

Υποθέτοντας ότι η σχέση (5.56) περιγράφει ένα θετικό μέγεθος[15], ο περιγραφόμενος μέσω της σχέσης (5.55) όρος, και κατά συνέπεια το εισόδημα ισορροπίας, θα είναι θετικά ορισμένος εφόσον ισχύει ότι:

$$\tilde{m} > S + T - a_2/3 \qquad \textit{(5.57.1)}$$

Στην περίπτωση που έναντι της (5.57.1) ισχύει η ακόλουθη ανισότητα:

$$\tilde{m} < S + T - a_2/3 \qquad \textit{(5.57.2)}$$

το εισόδημα ισορροπίας [όπως αυτό περιγράφεται από τη σχέση (5.47)] θα συνιστά ένα θετικό μέγεθος μόνο εφόσον ικανοποιείται η σχέση (5.52).

---

[15] Το πρόσημο της περιγραφόμενης μέσω της σχέσης (5.56) ρίζας $\tilde{m}$ διερευνάται στα πλαίσια του παραρτήματος Γ

3η Περίπτωση: D = 0

Σ' αυτήν την περίπτωση όπου η διακρίνουσα D ισούται με το μηδέν, μπορούμε να διακρίνουμε μεταξύ δύο υποπεριπτώσεων. Στα πλαίσια της πρώτης θα έχουμε ότι D = 0 & P ≠ 0 και το πολυώνυμο $P_1(\tilde{m})$ θα έχει τρεις πραγματικές ρίζες οι οποίες και παρουσιάζονται μέσω των σχέσεων (5.36.1) και (5.36.2). Ως εκ τούτου το πολυώνυμο $P_1(\tilde{m})$ παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$P_3(\tilde{m}) = (\tilde{m} - \tilde{m}_1)(\tilde{m} - \tilde{m}_2)(\tilde{m} - \tilde{m}_3) \overset{\tilde{m}_2 = \tilde{m}_3}{=} \left(\tilde{m} - 2\sqrt[3]{P} + \frac{a_2}{3}\right)\left(\tilde{m} + \sqrt[3]{P} + \frac{a_2}{3}\right)^2 \qquad (5.58)$$

Από την παραπάνω σχέση εύκολα προκύπτει ότι το πολυώνυμο $P_3(\tilde{m})$, και κατά συνέπεια και το εισόδημα ισορροπίας, θα είναι θετικά ορισμένο εφόσον ικανοποιείται η ακόλουθη ανισότητα:

$$\tilde{m} > 2\sqrt[3]{P} - \frac{a_2}{3} \qquad (5.59)$$

Εάν δεν ικανοποιείται η παραπάνω ανισότητα, εάν δηλαδή έχουμε ότι $P_3(\tilde{m}) < 0$, το εισόδημα ισορροπίας θα είναι θετικά ορισμένο μόνο εφόσον ικανοποιείται η ανισότητα (5.52).

Στην δεύτερη υποπερίπτωση, στα πλαίσια της οποίας ισχύει ότι P = Q = 0, το πολυώνυμο $P_1(\tilde{m})$ έχει τρεις πραγματικές και ίσες ρίζες οι οποίες και παρουσιάζονται μέσω της σχέσης (5.40). Έτσι το πολυώνυμο $P_1(\tilde{m})$ παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$P_4(\tilde{m}) = \left(\tilde{m} + \frac{a_2}{3}\right)^3 \qquad (5.60)$$

Από την παραπάνω σχέση γίνεται φανερό ότι στην περίπτωση που P = Q = 0, το πολυώνυμο $P_4(\tilde{m})$ θα είναι θετικά ορισμένο εφόσον ισχύει ότι:

$$\tilde{m} > -a_2/3 \qquad (5.61)$$

Στην περίπτωση που δεν ισχύει η παραπάνω σχέση, το εισόδημα ισορροπίας θα αποτελεί ένα θετικό μέγεθος εφόσον ικανοποιείται η ανισότητα (5.52).

5.1.3 Συνθήκες ευστάθειας και προσδιορισμός της γενικής λύσης υπό καθεστώς αναθεωρούμενων προσδοκιών

Έχοντας διερευνήσει τις προϋποθέσεις υπό τις οποίες το εισόδημα ισορροπίας αποτελεί ένα θετικό μέγεθος, στη συνέχεια της ανάλυσής μας θα επιστρέψουμε στον προσδιορισμό της γενικής λύσης της μη ομογενούς εξίσωσης διαφορών με σταθερούς συντελεστές (5.8) και θα διερευνήσουμε την ευστάθειας αυτής. Θα δούμε δηλαδή τις συνθήκες που θα πρέπει να ικανοποιούν οι συντελεστές a_i , i = 0,1,2 , της χαρακτηριστικής εξίσωσης, προκειμένου το εισόδημα να συγκλίνει προς τη βραχυχρόνια τιμή ισορροπίας του $\tilde{Y}_t^{ae}$.

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει η γενική λύση (Y_t) της μη ομογενούς εξίσωσης διαφορών (5.8) δίνεται από τη σχέση (5.10) και αποτελεί το άθροισμα μίας μερικής της λύσης ($\widetilde{Y}_t^{ae}$) με τη συμπληρωματική λύση (Y_t^c) της ίδιας εξίσωσης διαφορών. Δεδομένου ότι η μορφή της συμπληρωματικής λύσης της εξίσωσης διαφορών (5.8) είναι διαφορετική ανάλογα με το πρόσημο της διακρίνουσας D, διαφορετική θα είναι και η μορφή της γενικής λύσης της συγκεκριμένης εξίσωσης διαφορών. Με τη βοήθεια των δεδομένων του πίνακα 5.1, και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (5.10) και (5.47), δημιουργήσαμε τον πίνακα 5.2 στον οποίο και παρουσιάζονται οι μορφές της γενικής λύσης της βασικής εξίσωσης διαφορών του υποδείγματος, όταν οι προσδοκίες διαμορφώνονται σύμφωνα με το μηχανισμό των αναθεωρούμενων προσδοκιών.

<u>Πίνακας 5.2</u>: Μορφές της γενικής λύσης της μη ομογενούς εξίσωσης διαφορών (5.8) σύμφωνα με το πρόσημο της διακρίνουσας D

D < 0		$Y_t = A_1\left[2\sqrt{-Q}\cos\left(\frac{\tilde{\theta}}{3}\right)-\frac{a_2}{3}\right]^t + A_2\left[2\sqrt{-Q}\cos\left(\frac{\tilde{\theta}}{3}+120^o\right)-\frac{a_2}{3}\right]^t + A_3\left[2\sqrt{-Q}\cos\left(\frac{\tilde{\theta}}{3}+240^o\right)-\frac{a_2}{3}\right]^t + \widetilde{Y}_t^{ae}$
D = 0	**P ≠ 0**	$Y_t = A_1\left(2\sqrt[3]{P}-\frac{a_2}{3}\right)^t + \left(A_2 + A_3\, t\right)\left(-\sqrt[3]{P}-\frac{a_2}{3}\right)^t + \widetilde{Y}_t^{ae}$
	P = 0	$Y_t = \left(-\frac{a_2}{3}\right)^t \sum_{i=1}^{3} A_i t^{i-1} + \widetilde{Y}_t^{ae}$
D > 0		$Y_t = A_1\left(S+T-\frac{a_2}{3}\right)^t + R_{ae}^t\left[A_4\cos(\chi_{ae}t)+A_5\sin(\chi_{ae}t)\right]+\widetilde{Y}_t^{ae}$

<u>Παρατήρηση</u>: Οι σταθερές A_i, i = 1, …. ,5 , μπορούν να προσδιορισθούν με τη βοήθεια τριών αρχικών συνθηκών

Ένα σημαντικό ζήτημα που ανακύπτει στο σημείο αυτό έχει να κάνει με την ευστάθεια της γενικής λύσης Y_t. Η Y_t θα συνιστά μία ασυμπτωτικά ευσταθή λύση εφόσον ικανοποιείται η ακόλουθη σχέση[16]:

$$\lim_{t\to+\infty} Y_t \overset{(5.10)}{=} \lim_{t\to+\infty}\left(Y_t^c + \widetilde{Y}_t^{ae}\right) = \lim_{t\to+\infty} Y_t^c + \lim_{t\to+\infty}\widetilde{Y}_t^{ae} = \lim_{t\to+\infty}\widetilde{Y}_t^{ae} \qquad \textit{(5.62)}$$

Με άλλα λόγια η γενική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης διαφορών (5.8) θα είναι ασυμπτωτικά ευσταθής εφόσον ικανοποιείται η ακόλουθη σχέση:

$$\lim_{t\to+\infty} Y_t^c = 0 \qquad \textit{(5.63)}$$

Η παραπάνω σχέση θα ικανοποιείται οπωσδήποτε εάν οι χαρακτηριστικές ρίζες λ_i , i = 1 , 2 , 3 , κινούνται όλες στο διάστημα (–1,1), εάν δηλαδή ισχύει ότι:

---

[16] Υπενθυμίζουμε ότι το εισόδημα ισορροπίας, όπως αυτό δίνεται από τη σχέση (5.47), συνιστά μία συνάρτηση του χρόνου η οποία τείνει στο + ∞ καθώς t → + ∞.

$$-1 < \lambda_i < 1 \quad , \quad i = 1 , 2 , 3 \qquad \textbf{(5.64)}$$

Επειδή η ανάλυση που θα πρέπει να πραγματοποιηθεί προκειμένου να αποδειχθεί η ισχύς της σχέσης (5.64), για κάθε μία από τις περιπτώσεις που οδηγούμαστε βάσει του προσήμου της διακρίνουσας D, είναι αρκετά πολύπλοκη, θα χρησιμοποιήσουμε το κατά Routh θεώρημα ευστάθειας το οποίο μας δίνει ένα σύνολο ικανών και αναγκαίων συνθηκών που θα πρέπει να ικανοποιούν οι συντελεστές a_i , i = 0 , 1 , 2 , της χαρακτηριστικής εξίσωσης (5.12), προκειμένου οι χαρακτηριστικές ρίζες να εντοπίζονται όλες εντός του μοναδιαίου κύκλου (*unit circle*).

Πιο συγκεκριμένα πραγματοποιώντας τον ακόλουθο μετασχηματισμό

$$\lambda = \frac{z+1}{z-1} \quad , \quad z = \frac{\lambda+1}{\lambda-1} \qquad \textbf{(5.65)}$$

,ο οποίος αντιστοιχίζει το εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου στο αριστερό μισό του μιγαδικού επιπέδου, και αντικαθιστώντας στη χαρακτηριστική εξίσωση προκύπτει, μία εξίσωση τρίτου βαθμού ως προς z. Αναλυτικότερα θα έχουμε:

$$P_1(\lambda) = \lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0 \Rightarrow \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^3 + a_2\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2 + a_1\left(\frac{z+1}{z-1}\right) + a_0 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(z+1)^3 + a_2(z+1)^2(z-1) + a_1(z+1)(z-1)^2 + a_0(z-1)^3}{(z-1)^3} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1 + a_0 + a_1 + a_2)z^3 + (3 - 3a_0 - a_1 + a_2)z^2 + (3 + 3a_0 - a_1 - a_2)z +$$

$$+ (1 - a_0 + a_1 - a_2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad P_1(z) = \beta_0^{ae} z^3 + \beta_1^{ae} z^2 + \beta_2^{ae} z + \beta_3^{ae} = 0 \qquad \textbf{(5.66)}$$

όπου : $\beta_0^{ae} = 1 + a_0 + a_1 + a_2$, $\beta_1^{ae} = 3 - 3a_0 - a_1 + a_2$, $\beta_2^{ae} = 3 + 3a_0 - a_1 - a_2$ και $\beta_3^{ae} = 1 - a_0 + a_1 - a_1$

Σύμφωνα με το κατά Routh θεώρημα (*Routh theorem*) ευστάθειας, όλες οι ρίζες της εξίσωσης (5.66) θα έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος, και κατά συνέπεια οι χαρακτηριστικές ρίζες λ_i , i = 1 , 2 , 3 , θα εντοπίζονται εντός του μοναδιαίου κύκλου, εφόσον ισχύει το ακόλουθο σύστημα ανισοτήτων:

$$\left.\begin{array}{c} \beta_0^{ae} > 0 \\ O_1^{ae} = \beta_1^{ae} > 0 \\ O_2^{ae} = \begin{vmatrix} \beta_1^{ae} & \beta_3^{ae} \\ \beta_0^{ae} & \beta_2^{ae} \end{vmatrix} > 0 \\ O_3 = \begin{vmatrix} \beta_1^{ae} & \beta_3^{ae} & 0 \\ \beta_0^{ae} & \beta_2^{ae} & 0 \\ 0 & \beta_1^{ae} & \beta_3^{ae} \end{vmatrix} > 0 \end{array}\right\} \qquad (\ \Sigma - 5.2\ )$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των σταθερών συντελεστών β_j^{ae} , j = 0 , 1 , 2 , 3 , και υπολογίζοντας τις ορίζουσες O_i^{ae} , i = 1 , 2 , 3 , το παραπάνω σύστημα ανισοτήτων παίρνει την ακόλουθη μορφή[17]:

$$\left.\begin{array}{c} 1 + a_0 + a_1 + a_2 > 0 \\ O_1^{ae} = 3 - 3a_0 - a_1 + a_2 > 0 \\ O_2^{ae} = 8\left(1 - a_1 + a_0 a_2 - a_0^2\right) > 0 \\ O_3^{ae} = 8\left(a_0^2 - a_0 a_2 + a_1 - 1\right)\left(a_0 - a_1 + a_2 - 1\right) > 0 \end{array}\right\}$$

ή ισοδύναμα[18]

$$\left.\begin{array}{c} 1 + a_0 + a_1 + a_2 > 0 \\ 3 - 3a_0 - a_1 + a_2 > 0 \\ 1 - a_1 + a_0 a_2 - a_0^2 > 0 \\ a_0^2 - a_0 a_2 + a_1 - 1 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} 1 + a_0 + a_1 + a_2 > 0 \\ 3 - 3a_0 - a_1 + a_2 > 0 \\ 1 - a_1 + a_0 a_2 - a_0^2 > 0 \\ -\left(1 - a_1 + a_0 a_2 - a_0^2\right) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} 1 + a_0 + a_1 + a_2 > 0 \\ 3 - 3a_0 - a_1 + a_2 > 0 \\ 1 - a_1 + a_0 a_2 - a_0^2 > 0 \\ 1 - a_1 + a_0 a_2 - a_0^2 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{ll} 1 + a_0 + a_1 + a_2 > 0 & (\ 5.67.1\ ) \\ 3 - 3a_0 - a_1 + a_2 > 0 & (\ 5.67.2\ ) \\ 1 - a_1 + a_0 a_2 - a_0^2 > 0 & (\ 5.67.3\ ) \end{array}\right\} \qquad (\ \Sigma - 5.3\ )$$

---

[17] Για τον προσδιορισμό των οριζουσών χρησιμοποιήθηκε το πρόγραμμα Η/Υ Mathematica 4

[18] Το γεγονός ότι a_0 , $a_2 < 0$ & $a_1 > 0$ μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι $a_0 - a_1 + a_2 - 1 < 0$, κάτι που σημαίνει ότι η τέταρτη ανισότητα θα ικανοποιείται εφόσον $a_0^2 - a_0 a_2 + a_1 - 1 < 0$

Το σύστημα (Σ – 5.3) περιλαμβάνει τις κατά Routh ικανές και αναγκαίες συνθήκες ευστάθειας του υποδείγματός μας. Η ικανοποίηση των τριών αυτών συνθηκών εγγυάται την ασυμπτωτική ευστάθεια της γενικής λύσης της μη ομογενούς εξίσωσης διαφορών (5.8). Εγγυάται δηλαδή ότι το εισόδημα θα συγκλίνει προς την τιμή ισορροπίας του.

Ας δούμε τώρα υπό ποιες προϋποθέσεις ικανοποιούνται οι συνθήκες ευστάθειας του υποδείγματός μας, μετά από την αντικατάσταση σ' αυτές των σταθερών συντελεστών a_i , i = 1,2,3 , το μέγεθος των οποίων δίνεται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$a_0 = -\frac{hv}{u} < 0 \qquad \textbf{\textit{(5.68.1)}} \quad , \quad a_1 = \frac{h(1+v)+v}{u} > 0 \qquad \textbf{\textit{(5.68.2)}}$$

$$\& \qquad a_2 = -\left(\frac{1+v}{u} + h\right) < 0 \qquad \textbf{\textit{(5.68.3)}}$$

όπου $h = 1 - \gamma \in (0,1)$, $v > 0$ & $u = \frac{1+\varphi}{c_1} > 0$.

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (5.68.1) ~ (5.68.3) στην ανισότητα (5.67.1) προκύπτει:

$$1 + a_0 + a_1 + a_2 > 0 \Rightarrow 1 - \frac{hv}{u} + \frac{h + hv + v}{u} - \left(\frac{1+v}{u} + h\right) > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - h + \frac{-hv + h + hv + v - 1 - v}{u} > 0 \Rightarrow 1 - h - \frac{1-h}{u} > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad (1-h)\frac{u-1}{u} > 0 \qquad \textbf{\textit{(5.69)}}$$

Η παραπάνω σχέση ικανοποιείται για κάθε $0 < h < 1$ και $u > 0$, καθώς αφενός από τη σχέση (5.22) έχουμε ότι $u - 1 > 0$ και αφετέρου ισχύει ότι $0 < 1 - h < 1$. Έτσι οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι οι συντελεστές a_i ικανοποιούν την πρώτη συνθήκη ευστάθειας του υποδείγματος.

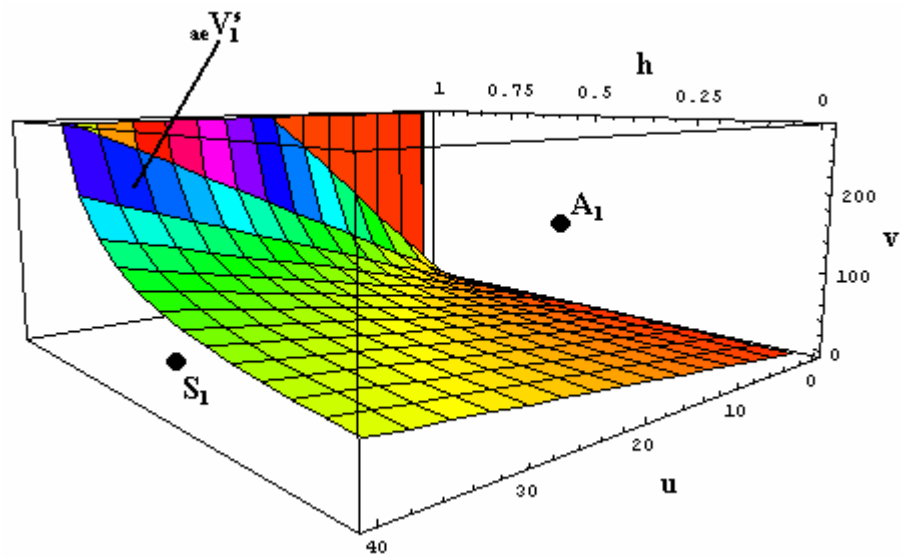
Από την αντικατάσταση των σχέσεων (5.68.1)~(5.68.3) στην ανισότητα (5.67.2) προκύπτει ότι η δεύτερη συνθήκη ευστάθειας θα ικανοποιείται εφόσον ισχύει ότι:

$$3 - 3\left(-\frac{hv}{u}\right) - \frac{h + hv + v}{u} - \left(\frac{1+v}{u} + h\right) > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3u + 3hv - h - hv - v - 1 - v - hu}{u} > 0 \Rightarrow \frac{3u - hu + 2hv - 2v - h - 1}{u} > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (3-h)u-(1-h)2v-(1+h)>0 \Rightarrow (3-h)u-(1+h)>(1-h)2v \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad v<\frac{(3-h)u-(1+h)}{2(1-h)} \qquad \textit{(5.70.1)}$$



Δ – 5.4

Στο διάγραμμα Δ – 5.4 και μέσω της επιφάνειας ${}_{ae}V_1^s$ παρουσιάζεται γραφικά η ακόλουθη συνάρτηση[19]:

$$v_{ae,1}^s=\frac{(3-h)u-(1+h)}{2(1-h)} \qquad \textit{(5.71)}$$

Η επιφάνεια ${}_{ae}V_1^s$ αποτελεί τον γεωμετρικό τόπο των σημείων (h,u,v) για τα οποία ικανοποιείται η σχέση (5.71). Για σημεία του χώρου των τριών διαστάσεων τα οποία εντοπίζονται κάτω από την επιφάνεια ${}_{ae}V_1^s$, όπως το S_1, έχουμε ικανοποίηση της ανισότητας (5.70.1). Με άλλα λόγια, το εισόδημα θα συγκλίνει προς τη βραχυχρόνια τιμή ισορροπίας του για όλα εκείνα τα σημεία του χώρου των τριών διαστάσεων τα οποία εντοπίζονται κάτω από την επιφάνεια ${}_{ae}V_1^s$. Αντιθέτως σημεία όπως το

---

[19] Το διάγραμμα Δ–5.4 έχει παραχθεί για h ∈ (0.001,0.999), u ∈ (1,40) & v ∈ (0,260). Όπως διαπιστώνουμε, η επιφάνεια περιλαμβάνει συνδυασμούς (h,u) για τους οποίους έχουμε ότι v > 0. Και αυτό διότι με μία μικρή αναδιάταξη των όρων της σχέσεως (5.71) παίρνουμε: $v_{ae,1}^s=\frac{(3-h)u-(1+h)}{2(1-h)}=$

$$=\frac{3u-hu-1-h}{2(1-h)}=\frac{(u-1)+u(1-h)+u-h}{2(1-h)}=\frac{(u-1)+u(1-h)+u-1-h+1}{2(1-h)}=$$

$$=\frac{2(u-1)+u(1-h)+(1-h)}{2(1-h)} \Rightarrow v_{ae,1}^s=\frac{2(u-1)+(u+1)(1-h)}{2(1-h)}>0\ \forall\, h\in(0,1)\ \&\ u>0$$

A_1 τα οποία εντοπίζονται πάνω από την επιφάνεια ${}_{ae}V_1^s$, περιγράφουν συνδυασμούς (h,u,v) για τους οποίους επιτυγχάνεται απόκλιση του εισοδήματος από την τιμή ισορροπίας του. Για τους οποίους δηλαδή ικανοποιείται η ακόλουθη ανισότητα:

$$v_{ae,1}^s > \frac{(3-h)u-(1+h)}{2(1-h)} \qquad \textit{(5.70.2)}$$

Προκειμένου να διερευνηθεί η ικανοποίηση της τρίτης συνθήκης ευστάθειας, όπως αυτή περιγράφεται από την ανισότητα (5.67.3), θα αντικαταστήσουμε τις σχέσεις (5.68.1) ~ (5.68.3) στη σχέση (5.67.3). Από την αντικατάσταση αυτή παίρνουμε:

$$1-\frac{h+(1+h)v}{u}+\left(-\frac{hv}{u}\right)\left[-\left(\frac{1+v}{u}+h\right)\right]-\left(-\frac{hv}{u}\right)^2>0 \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad 1-\frac{h+(1+h)v}{u}+\frac{hv(1+v+hu)}{u^2}-\frac{h^2v^2}{u^2}>0 \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{u^2-hu-u(1+h)v+h(1+hu)v+hv^2-h^2v^2}{u^2}>0 \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad h(1-h)v^2+[h(1+hu)-u(1+h)]v+u^2-hu>0 \qquad \textit{(5.72)}$$

Το αριστερό μέλος της παραπάνω ανισότητας αποτελεί ένα πολυώνυμο δευτέρου βαθμού ως προς v. Με άλλα λόγια η ανισότητα (5.72) θα ικανοποιείται εφόσον ισχύει ότι $v\in\left(0,v_{ae,2}^s\right)\cup\left(v_{ae,3}^s,+\infty\right)$, όπου $v_{ae,2}^s$, $v_{ae,3}^s$ οι ρίζες της ακόλουθης εξίσωσης:

$$h(1-h)v^2+[h(1+hu)-u(1+h)]v+u^2-hu=0 \qquad \textit{(5.73)}$$

Ως πρώτο βήμα για τον προσδιορισμό του μεγέθους των δύο ριζών v_4 και v_5, θα υπολογίσουμε τη διακρίνουσα της παραπάνω εξίσωσης η οποία ισούται με:

$$\Delta_3=[h(1+hu)-u(1+h)]^2-4h(1-h)(u^2-hu)=$$

$$=h^2(1+hu)^2-2hu(1+hu)(1+h)+u^2(1+h)^2-4hu(1-h)(u-h)=$$

$$=\left(h^2+2h^3u+h^4u^2\right)-\left(2hu+2h^2u+2h^2u^2+2h^3u^2\right)+\left(u^2+2hu^2+h^2u^2\right)-$$
$$-\left(4hu^2-4h^2u-4h^2u^2+4h^3u\right)=$$

$$=3h^2u^2-2hu^2+2h^2u-2h^3u^2+u^2-2hu+h^2-2h^3u+h^4u^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \Delta_3 = \left(-h + u - hu + h^2 u\right)^2 > 0 \qquad \textbf{\textit{(5.74)}}$$

Το γεγονός ότι $\Delta_3 > 0$ μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι οι ρίζες $v^s_{ae,2}$ & $v^s_{ae,3}$ της εξίσωσης (5.73) θα είναι πραγματικές και διακριτές και το μέγεθός τους θα ισούται με[20]:

$$v^s_{ae,2,3} = \frac{-\left[h\left(1+hu\right) - u\left(1+h\right)\right] \pm \sqrt{\left(-h+u-hu+h^2u\right)^2}}{2\,h\left(1-h\right)} =$$

$$= \frac{u\left(1+h\right) - h\left(1+hu\right) \pm \left(-h+u-hu+h^2u\right)}{2\,h\left(1-h\right)} \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v^s_{ae,2} = \dfrac{u\left(1+h\right) - h\left(1+hu\right) - \left(-h+u-hu+h^2u\right)}{2\,h\left(1-h\right)} \\[2ex] v^s_{ae,3} = \dfrac{u\left(1+h\right) - h\left(1+hu\right) + \left(-h+u-hu+h^2u\right)}{2\,h\left(1-h\right)} \end{cases} \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v^s_{ae,2} = \dfrac{u + hu - h - h^2u + h - u + hu - h^2u}{2\,h\left(1-h\right)} \\[2ex] v^s_{ae,3} = \dfrac{u + hu - h - h^2u - h + u - hu + h^2u}{2\,h\left(1-h\right)} \end{cases} \qquad \Rightarrow$$

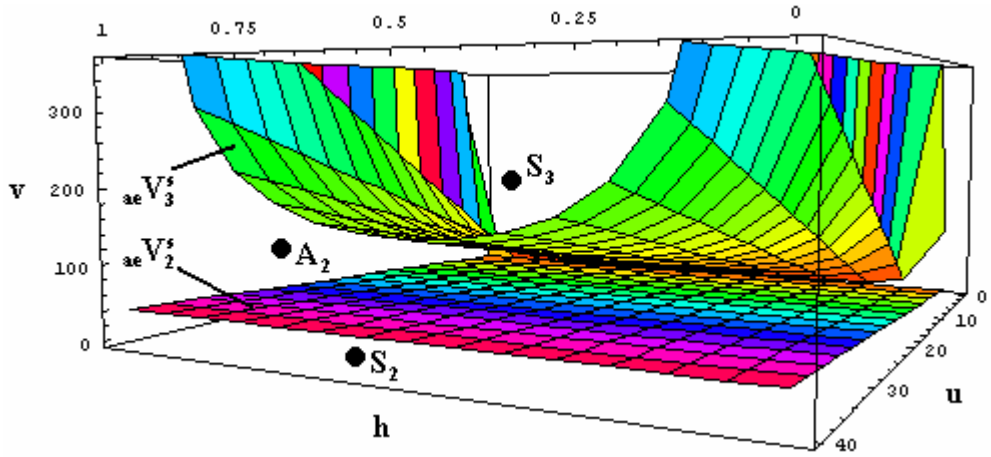
$$\Rightarrow \begin{cases} v^s_{ae,2} = \dfrac{2\,hu - 2\,h^2u}{2\,h\left(1-h\right)} \\[2ex] v^s_{ae,3} = \dfrac{2\,u - 2\,h}{2\,h\left(1-h\right)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v^s_{ae,2} = \dfrac{2\,h\left(1-h\right)u}{2\,h\left(1-h\right)} \\[2ex] v^s_{ae,3} = \dfrac{2\left(u-h\right)}{2\,h\left(1-h\right)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v^s_{ae,2} = u > 0 & \textbf{\textit{(5.75.1)}} \\[2ex] v^s_{ae,3} = \dfrac{u-h}{h\left(1-h\right)} > 0 & \textbf{\textit{(5.75.2)}} \end{cases}$$

Δεδομένου ότι h(1–h)>0, η ανισότητα (5.72), και κατά συνέπεια η τρίτη συνθήκη ευστάθειας, θα ικανοποιείται εφόσον ισχύει ότι $v \in \left(0, v^s_{ae,2}\right) \cup \left(v^s_{ae,3}, +\infty\right)$. Στο διάγραμμα Δ – 5.5 που ακολουθεί παρουσιάζονται γραφικά οι συναρτήσεις (5.75.1) και

---

[20] Η ρίζα $v^s_{ae,3}$ είναι θετική καθώς ο αριθμητής του κλάσματος ισούται με u – h = (u – 1) + (1 – h) > 0

(5.75.2) μέσω των επιφανειών ${}_{ae}V_2^s$ και ${}_{ae}V_3^s$ αντιστοίχως[21]. Με άλλα λόγια οι επιφάνειες ${}_{ae}V_2^s$ και ${}_{ae}V_3^s$ αποτελούν τον γεωμετρικό τόπο των συνδυασμών (h,u,v) για τις οποίες ικανοποιούνται οι σχέσεις (5.75.1) και (5.75.2) αντιστοίχως. Η τρίτη συνθήκη ευστάθειας ικανοποιείται για εκείνα τα σημεία του τρισδιάστατου χώρου τα οποία εντοπίζονται είτε κάτω από την επιφάνεια ${}_{ae}V_2^s$ (όπως το σημείο S_2), είτε πάνω από την επιφάνεια ${}_{ae}V_3^s$ (όπως το σημείο S_3). Αντιθέτως για σημεία του τρισδιάστατου χώρου τα οποία εντοπίζονται μεταξύ των δύο επιφανειών, δεν ικανοποιείται η τρίτη συνθήκη ευστάθειας. Με άλλα λόγια το εισόδημα δεν θα συγκλίνει προς την τιμή ισορροπίας του για σημεία όπως το A_2.



Δ – 5.5

Για ποια όμως σημεία του χώρου των τριών διαστάσεων ικανοποιούνται οι συνθήκες ευστάθειας του υποδείγματος, όπως αυτές ορίζονται από τις ανισότητες (5.67.2) και (5.67.3); Δεδομένου ότι και οι δύο αυτές συνθήκες ευστάθειας θα ικανοποιούνται για εκείνα τα σημεία τα οποία εντοπίζονται κάτω από τις επιφάνειες ${}_{ae}V_1^s$ και ${}_{ae}V_2^s$, αρκεί να δείξουμε ότι η μία καμπύλη βρίσκεται πάνω από την άλλη για κάθε $h \in (0,1)$ και $u > 0$. Με άλλα λόγια αρκεί να δείξουμε την ισχύ μίας εκ των παρακάτω σχέσεων:

$$v_{ae,1}^s < v_{ae,2}^s < v_{ae,3}^s \qquad \textit{(5.76.1)} \qquad \text{ή} \qquad v_{ae,2}^s < v_{ae,1}^s < v_{ae,3}^s \qquad \textit{(5.76.2)}$$

όπου $v_{ae,1}^s$, $v_{ae,2}^s$, $v_{ae,3}^s$: οι τιμές των επιταχυντών όπως αυτές περιγράφονται από τις σχέσεις (5.71), (5.75.1) και (5.75.2) αντιστοίχως.

Στην περίπτωση που ισχύει η σχέση (5.76.1), τα σημεία που θα ικανοποιούν όλες τις συνθήκες ευστάθειας, και για τα οποία θα επιτυγχάνεται σύγκλιση του εισοδή-

---

[21] Στο εν λόγω γράφημα η επιφάνεια ${}_{ae}V_2^s$ εμφανίζεται κάτω από την επιφάνεια ${}_{ae}V_3^s$ καθώς η ρίζα $v_{ae,2}^s$, όπως αυτή περιγράφεται από τη σχέση (5.75.1), είναι μικρότερη από τη ρίζα $v_{ae,3}^s$. Η απόδειξη της ανισότητας $v_{ae,2}^s < v_{ae,3}^s$ πραγματοποιείται στα πλαίσια του παραρτήματος Δ.

ματος προς την τιμή ισορροπίας του έπειτα από μία διατάραξη, είναι εκείνα τα οποία θα εντοπίζονται κάτω από την επιφάνεια ${}_{ae}V_1^s$. Εάν αντιθέτως ισχύει η σχέση (5.76.2), τότε οι συνθήκες ευστάθειας θα ικανοποιούνται για εκείνα τα σημεία τα οποία εντοπίζονται κάτω από την επιφάνεια ${}_{ae}V_2^s$.

Προκειμένου να διαπιστώσουμε ποια από τις σχέσεις (5.76.1) και (5.76.2) είναι εκείνη που ισχύει, θα προσδιορίσουμε το πρόσημο των διαφορών $v_{ae,1}^s - v_{ae,3}^s$ και $v_{ae,1}^s - v_{ae,2}^s$. Πιο συγκεκριμένα έχουμε ότι:

$$v_{ae,1}^s - v_{ae,3}^s = \frac{(3-h)u-(1+h)}{2(1-h)} - \frac{u-h}{h(1-h)} = \frac{(3-h)hu-(1+h)h-2(u-h)}{2h(1-h)} =$$

$$= \frac{3hu-h^2u-h-h^2-2u+2h}{2h(1-h)} = \frac{3hu-h^2u+h-h^2-2u}{2h(1-h)} =$$

$$= \frac{-u(h^2-3h+2)+h(1-h)}{2h(1-h)} = \frac{-u(h-2)(h-1)+h(1-h)}{2h(1-h)} =$$

$$= \frac{u(h-2)(1-h)+h(1-h)}{2h(1-h)} = \frac{u(h-2)+h}{2h} = \frac{hu-2u+h}{2h} = \frac{u(h-1)+h-u}{2h} =$$

$$= \frac{-u(1-h)+h-1-u+1}{2h} = \frac{-u(1-h)-(1-h)-(u-1)}{2h} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_{ae,1}^s - v_{ae,3}^s = -\frac{(1-h)(u+1)+(u-1)}{2h} < 0 \;\forall\, h \in (0,1) \;\&\; u > 0 \qquad \textbf{\textit{(5.77.1)}}$$

και

$$v_{ae,1}^s - v_{ae,2}^s = \frac{(3-h)u-(1+h)}{2(1-h)} - u = \frac{3u-hu-1-h-2u(1-h)}{2(1-h)} =$$

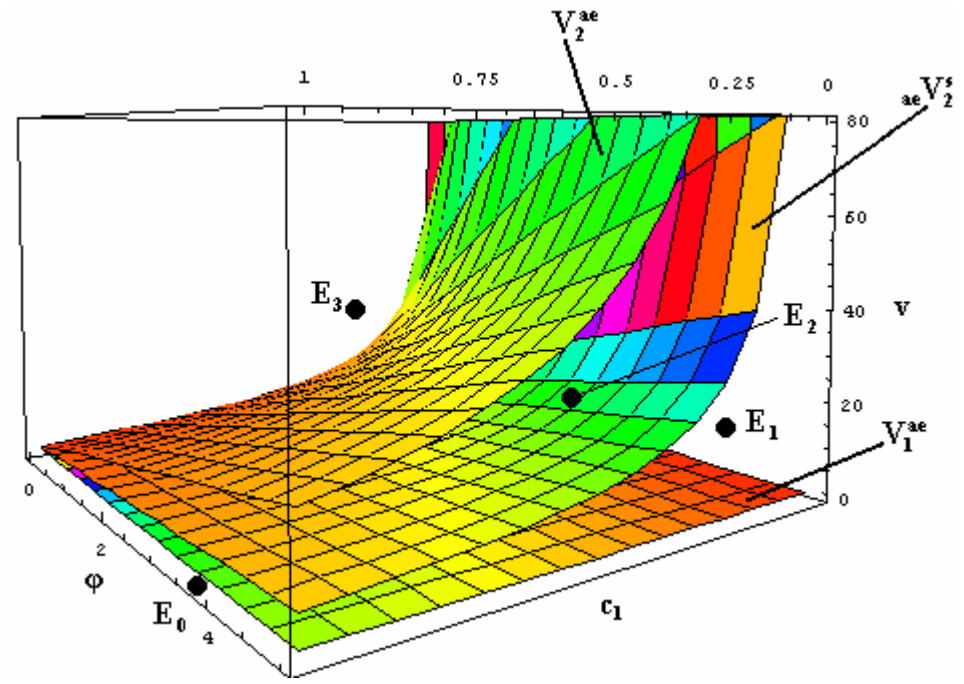
$$= \frac{3u-hu-1-h-2u+2hu}{2(1-h)} = \frac{u+hu-1-h}{2(1-h)} = \frac{u(1+h)-(1+h)}{2(1-h)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_{ae,1}^s - v_{ae,2}^s = \frac{(u-1)(1+h)}{2(1-h)} > 0 \quad \forall\, h \in (0,1) \;\&\; u > 0 \qquad \textbf{\textit{(5.77.2)}}$$

Από τις σχέσεις (5.77.1) & (5.77.2) προκύπτει αντιστοίχως ότι $v^s_{ae,1} < v^s_{ae,3}$ και $v^s_{ae,2} < v^s_{ae,1}$ κάτι που σημαίνει ότι ισχύει η σχέση (5.76.2). Με άλλα λόγια οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι ***τα σημεία του τρισδιάστατου χώρου για τα οποία ικανοποιούνται οι συνθήκες ευστάθειας, είναι εκείνα τα οποία εντοπίζονται κάτω από την επιφάνεια*** $_{ae}V^s_2$.

5.1.4 Η διαχρονική πορεία του εισοδήματος

Έχοντας διερευνήσει τις συνθήκες ευστάθειας, στη συνέχεια της ανάλυσής μας και με τη βοήθεια του γραφήματος Δ – 5.6, θα προσδιορίσουμε εκείνες τις τιμές των παραμέτρων c_1, φ και v για τις οποίες διαφοροποιείται η διαχρονική πορεία του εισοδήματος, καθώς αυτό συγκλίνει ή αποκλίνει από την βραχυχρόνια τιμή ισορροπίας του.



Δ – 5.6

Στο παραπάνω γράφημα και μέσω των επιφανειών V_1^{ae}, V_2^{ae} και $_{ae}V_2^s$ απεικονίζονται οι σχέσεις (5.23.1), (5.23.2) και (5.75.1) ως συναρτήσεις όχι της παραμέτρου u αλλά των συντελεστών $\varphi = b_2d_1/d_2 > 0$ και $c_1 \in (0,1)$. Με άλλα λόγια μέσω των επιφανειών V_1^{ae}, V_2^{ae} & $_{ae}V_2^s$, οι οποίες είναι ταυτόσημες με τις επιφάνειες που παρουσιάσαμε μέσω των γραφημάτων Δ – 5.2 & Δ – 5.5, απεικονίζονται αντιστοίχως οι παρακάτω σχέσεις[22]:

---

[22] Βάσει των σχέσεων αυτών προκύπτει ότι $\sqrt{u}-\sqrt{u-1} < \sqrt{u} \Rightarrow \left(\sqrt{u}-\sqrt{u-1}\right)^2 < u \Rightarrow v_1^{ae} < v^s_{ae,2}$ & $\sqrt{u} < \sqrt{u}+\sqrt{u-1} \Rightarrow u < \left(\sqrt{u}+\sqrt{u-1}\right)^2 \Rightarrow v^s_{ae,2} < v_2^{ae}$. Το γεγονός ότι $v_1^{ae} < v^s_{ae,2} < v_2^{ae}$ σημαίνει ότι η επιφάνεια $_{ae}V_2^s$ θα εντοπίζεται μεταξύ των επιφανειών V_1^{ae} και V_2^{ae} $\forall\ 0 < c_1 < 1$ & $\varphi > 0$.

$$v_1^{ae} = \left(\sqrt{u} - \sqrt{u-1}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{1+\varphi}{c_1}} - \sqrt{\frac{1+\varphi}{c_1} - 1}\right)^2 \qquad (5.78.1)$$

$$v_2^{ae} = \left(\sqrt{u} + \sqrt{u-1}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{1+\varphi}{c_1}} + \sqrt{\frac{1+\varphi}{c_1} - 1}\right)^2 \qquad (5.78.2)$$

$$v_{ae,2}^{s} = u = \frac{1+\varphi}{c_1} \qquad (5.78.3)$$

Σημεία του τρισδιάστατου χώρου τα οποία εντοπίζονται κάτω και από τις τρεις επιφάνειες, όπως το E_0, περιγράφουν συνδυασμούς (c_1,φ,v) για τους οποίους το εισόδημα θα συγκλίνει (καθώς βρίσκονται κάτω από την επιφάνεια ${}_{ae}V_2^s$) μονοτονικά (καθώς βρίσκονται κάτω από την επιφάνεια V_1^{ae}) προς την τιμή ισορροπίας του ($\widetilde{Y}_t^{ae}$). Σημεία όπως το E_1 περιγράφουν εκείνους τους συνδυασμούς (c_1,φ,v) για τους οποίους το εισόδημα θα συγκλίνει (καθώς βρίσκονται κάτω από την επιφάνεια ${}_{ae}V_2^s$) μέσω ταλαντώσεων (καθώς βρίσκονται μεταξύ των επιφανειών V_1^{ae} & V_2^{ae}) προς τη βραχυχρόνια τιμή ισορροπίας του. Το εισόδημα θα αποκλίνει από την τιμή $\widetilde{Y}_t^{ae}$ για εκείνα τα σημεία του τρισδιάστατου χώρου τα οποία εντοπίζονται πάνω από την επιφάνεια ${}_{ae}V_2^s$. Ειδικότερα για σημεία όπως το E_2 (το οποίο εντοπίζεται όχι μόνο πάνω από την επιφάνεια ${}_{ae}V_2^s$ αλλά και μεταξύ των επιφανειών V_1^{ae} και V_2^{ae}) η απόκλιση θα χαρακτηρίζεται από ταλαντώσεις, ενώ για σημεία όπως το E_3 (το οποίο εντοπίζεται πάνω και από τις τρεις επιφάνειες) η απόκλιση του εισοδήματος θα είναι εκθετικής μορφής.

5.1.5 Επηρεασμός του επιπέδου του εισοδήματος ισορροπίας από μεταβολές των τιμών των σταθερών που το συνιστούν

Στα πλαίσια του μηχανισμού των αναθεωρούμενων προσδοκιών το επίπεδο του εισοδήματος ισορροπίας, όπως αυτό περιγράφεται από την ακόλουθη σχέση:

$$Y_t^p = \widetilde{Y}_t^{ae} = \frac{b_0}{1 - c_1 + \varphi} + \frac{b_2(\gamma + m)}{d_2(1+\varphi)} \frac{M_0(1+m)^{t+2}}{(1+m)^3 + a_2(1+m)^2 + a_1(1+m) + a_0} \qquad (5.47)$$

όπου $a_2 = -\dfrac{c_1(1+v) + (1-\gamma)(1+\varphi)}{1+\varphi} < 0$, $a_1 = \dfrac{c_1[v + (1+v)(1-\gamma)]}{1+\varphi} > 0$,

$a_0 = -\dfrac{vc_1(1-\gamma)}{1+\varphi} < 0$ & $\varphi = \dfrac{b_2 d_1}{d_2} > 0$

αποτελεί, όπως θυμόμαστε, μία συνάρτηση των τιμών των σταθερών $b_0 > 0$, $0 < c_1 < 1$, $b_2 < 0$, $d_1 > 0$, $d_2 < 0$, $0 < m < 1$, $0 < \gamma < 1$, $M_0 > 0$ και του χρόνου $t \geq 0$.

Προκειμένου να προσδιορίσουμε την επίπτωση της απειροελάχιστης μεταβολής της τιμής μιας εκ των παραπάνω σταθερών, με δεδομένες τις τιμές των υπολοίπων, επί του εισοδήματος ισορροπίας, δεν έχουμε παρά να υπολογίσουμε τη μερική παράγωγο (*partial derivative*) του εισοδήματος ισορροπίας ($\widetilde{Y}_t^{ae}$) ως προς τη συγκεκριμένη σταθερά.

Στη συνέχεια της ανάλυσης μας θα προσδιορίσουμε τη σχέση που υπάρχει ανάμεσα στο μέγεθος του εισοδήματος ισορροπίας και στο μέγεθος των σταθερών που το συνιστούν, ξεκινώντας από το προσδιορισμό του προσήμου της μερικής παραγώγου[23] του $\widetilde{Y}_t^{ae}$ ως προς τη σταθερά των αυτόνομων επενδύσεων.

(α) ***Οι αυτόνομες επενδύσεις***

Για να προσδιορίσουμε την επίπτωση μίας απειροελάχιστης μεταβολής μόνο των αυτόνομων επενδύσεων (b_0) πάνω στο επίπεδο του εισοδήματος ισορροπίας, θα υπολογίσουμε την ακόλουθη μερική παράγωγο:

$$\frac{\partial \widetilde{Y}_t^{ae}}{\partial b_0}$$

Από οικονομικής απόψεως, η παραπάνω μερική παράγωγος αναμένεται να έχει θετικό πρόσημο καθώς μία μόνιμη αύξηση (μείωση) των αυτόνομων επενδύσεων θα προκαλέσει την αύξηση (μείωση) της συνολικής ζήτησης, οπότε με δεδομένη τη συνολική προσφορά θα έχουμε αύξηση (μείωση) του εισοδήματος ισορροπίας. Το γεγονός ότι:

$$\frac{\partial \widetilde{Y}_t^{ae}}{\partial b_0} = \frac{1}{1 - c_1 + \varphi} > 0 \qquad \textbf{\textit{(5.79)}}$$

μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η μερική παράγωγος $\partial \widetilde{Y}_t^{ae} / \partial b_0$ πράγματι παρουσιάζει το αναμενόμενο πρόσημο.

(β) ***Η οριακή ροπή προς κατανάλωση***

Θετική σχέση αναμένεται να υπάρχει και μεταξύ του εισοδήματος ισορροπίας ($\widetilde{Y}_t^{ae}$) και της οριακής ροπής προς κατανάλωση (c_1), καθώς μία μόνιμη αύξηση (μείωση) της τιμής αυτής της σταθεράς θα οδηγήσει σε αύξηση (μείωση) της συνολικής ζήτησης του προϊόντος, οπότε με δεδομένη τη συνολική προσφορά του προϊόντος θα έχουμε αύξηση (μείωση) του εισοδήματος ισορροπίας. Με άλλα λόγια αναμένεται ότι:

$$\partial \widetilde{Y}_t^{ae} / \partial c_1 > 0$$

Το μέγεθος της παραπάνω μερικής παραγώγου έχει ως ακολούθως:

---

[23] Ο υπολογισμός των μερικών παραγώγων έγινε με τη βοήθεια του προγράμματος Η/Υ Mathematica 4

$$\frac{\partial \tilde{Y}_t^{ae}}{\partial c_1} = -\frac{b_0}{(1-c_1+\varphi)^2}\frac{\partial(1-c_1+\varphi)}{\partial c_1} -$$

$$-\frac{b_2(\gamma+m)M_0(1+m)^{t+2}}{d_2(1+\varphi)}\frac{\partial\left[(1+m)^3+a_2(1+m)^2+a_1(1+m)+a_0\right]/\partial c_1}{\left[(1+m)^3+a_2(1+m)^2+a_1(1+m)+a_0\right]^2} =$$

$$= \frac{b_0}{(1-c_1+\varphi)^2} - \frac{b_2(\gamma+m)M_0\tilde{m}^{t+2}}{d_2(1+\varphi)}\frac{\left[-\frac{1+v}{1+\varphi}\tilde{m}^2+\frac{v+(1+v)(1-\gamma)}{1+\varphi}\tilde{m}-\frac{v(1-\gamma)}{1+\varphi}\right]}{\left(\tilde{m}^3+a_2\tilde{m}^2+a_1\tilde{m}+a_0\right)^2} =$$

$$= \frac{b_0}{(1-c_1+\varphi)^2} - \frac{b_2(\gamma+m)M_0\tilde{m}^{t+2}}{d_2(1+\varphi)^2}\frac{\left\{-(1+v)\tilde{m}^2+\left[v+(1+v)(1-\gamma)\right]\tilde{m}-v(1-\gamma)\right\}}{\left(\tilde{m}^3+a_2\tilde{m}^2+a_1\tilde{m}+a_0\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \tilde{Y}_t^{ae}}{\partial c_1} = \frac{b_0}{(1-c_1+\varphi)^2} + \frac{b_2(\gamma+m)(1+v)M_0\tilde{m}^{t+2}}{d_2(1+\varphi)^2}\times$$

$$\times\frac{\tilde{m}^2-\left[\frac{v}{1+v}+(1-\gamma)\right]\tilde{m}+\frac{v(1-\gamma)}{1+v}}{\left(\tilde{m}^3+a_2\tilde{m}^2+a_1\tilde{m}+a_0\right)^2} \qquad \textbf{\textit{(5.80)}}$$

όπου $\tilde{m} = 1 + m > 1$

Όπως εύκολα προκύπτει από την παραπάνω σχέση, η μερική παράγωγος $\partial\tilde{Y}_t^{ae}/\partial c_1$ θα παρουσιάζει το οικονομικά αναμενόμενο πρόσημο εφόσον ισχύει ότι:

$$P_5(\tilde{m}) = \tilde{m}^2 - \left[\frac{v}{1+v}+(1-\gamma)\right]\tilde{m}+\frac{v(1-\gamma)}{1+v} > 0 \qquad \textbf{\textit{(5.81)}}$$

Δεδομένου ότι το μέγεθος $P_5(\tilde{m})$ αποτελεί ένα πολυώνυμο δευτέρου βαθμού ως προς την παράμετρο $\tilde{m}$, θα μπορούσαμε να προσδιορίσουμε ένα διάστημα τιμών της συγκεκριμένης παραμέτρου για το οποίο να ικανοποιείτε η σχέση (5.81). Προκειμένου να εξειδικεύσουμε αυτό το διάστημα τιμών, θα εξισώσουμε το μέγεθος $P_5(\tilde{m})$ με το μηδέν και θα βρούμε τις ρίζες τις ακόλουθης δευτεροβάθμιας εξίσωσης:

$$P_5(\tilde{m}) = \tilde{m}^2 - \left[\frac{v}{1+v}+(1-\gamma)\right]\tilde{m}+\frac{v(1-\gamma)}{1+v} = 0 \qquad \textbf{\textit{(5.82)}}$$

Η διακρίνουσα της παραπάνω εξίσωσης έχει ως ακολούθως:

$$\Delta_4 = \left\{ -\left[\frac{v}{1+v} + (1-\gamma) \right] \right\}^2 - \frac{4v(1-\gamma)}{1+v} = \left(\frac{v}{1+v} \right)^2 + \frac{2v(1-\gamma)}{1+v} + (1-\gamma)^2 - \frac{4v(1-\gamma)}{1+v} =$$

$$= \left(\frac{v}{1+v} \right)^2 - \frac{2v(1-\gamma)}{1+v} + (1-\gamma)^2 = \left[\frac{v}{1+v} - (1-\gamma) \right]^2 > 0$$

Εφόσον η διακρίνουσα αποτελεί ένα θετικό μέγεθος, η εξίσωση (5.82) θα έχει δύο πραγματικές και διακριτές ρίζες, οι οποίες και διαμορφώνουν ένα διάστημα τιμών εκτός του οποίου το μέγεθος $P_5(\tilde{m})$ είναι θετικό. Οι ρίζες τις εξίσωσης (5.82) έχουν ως ακολούθως:

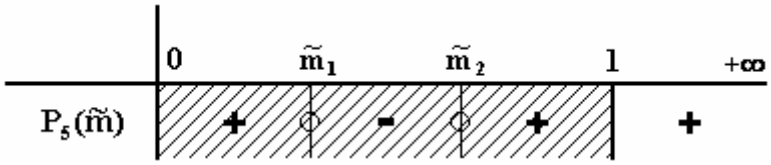
$$\tilde{m}_{1,2} = \frac{-\left\{ -\left[\frac{v}{1+v} + (1-\gamma) \right] \right\} \pm \sqrt{\Delta_4}}{2} = \frac{\frac{v}{1+v} + (1-\gamma) \pm \left[\frac{v}{1+v} - (1-\gamma) \right]}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tilde{m}_1 = \dfrac{\frac{v}{1+v} + (1-\gamma) - \left[\frac{v}{1+v} - (1-\gamma) \right]}{2} \\ \tilde{m}_2 = \dfrac{\frac{v}{1+v} + (1-\gamma) + \left[\frac{v}{1+v} - (1-\gamma) \right]}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{m}_1 = \dfrac{\frac{v}{1+v} + (1-\gamma) - \frac{v}{1+v} + (1-\gamma)}{2} \\ \tilde{m}_2 = \dfrac{\frac{v}{1+v} + (1-\gamma) + \frac{v}{1+v} - (1-\gamma)}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tilde{m}_1 = \dfrac{2(1-\gamma)}{2} \\ \tilde{m}_2 = \dfrac{\frac{2v}{1+v}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{m}_1 = 1-\gamma \in (0,1) & (5.83.1) \\ \tilde{m}_2 = \dfrac{v}{1+v} \in (0,1) & (5.83.2) \end{cases}$$

Προκειμένου να παράγουμε τον πίνακα προσήμων του μεγέθους $P_5(\tilde{m})$ θα πρέπει να γνωρίζουμε ποια ρίζα είναι μεγαλύτερη της άλλης. Υποθέτοντας ότι[24] $\tilde{m}_1 < \tilde{m}_2$ παίρνουμε τον ακόλουθο πίνακα προσήμων του πολυωνύμου $P_5(\tilde{m})$:

[24] Όπως θα διαπιστώσουμε στη συνέχεια, τα συμπεράσματά μας αναφορικά με το πρόσημο του μεγέθους $P_5(\tilde{m})$ είναι ανεξάρτητα από το εάν $\tilde{m}_1 <,> \tilde{m}_2$ καθώς η παράμετρος $\tilde{m}$ είναι μεγαλύτερη της μονάδας και ως εκ τούτου μεγαλύτερη και από τις δύο αυτές ρίζες οι οποίες κυμαίνονται στο διάστημα (0,1).



Όπως προκύπτει από τον παραπάνω πίνακα προσήμων, το πολυώνυμο $P_5(\tilde{m})$ είναι αρνητικά ορισμένο στο διάστημα $(\tilde{m}_1, \tilde{m}_2)$. Δεδομένου όμως ότι η παράμετρος $\tilde{m}$ είναι μεγαλύτερη της μονάδας [καθώς ισχύει ότι $\tilde{m} = 1 + m$ με $0 < m < 1$], μας ενδιαφέρει το πρόσημο του πολυωνύμου $P_5(\tilde{m})$ στο διάστημα (1,+∞). Για το συγκεκριμένο ωστόσο διάστημα τιμών ισχύει ότι $P_5(\tilde{m}) > 0$ κάτι που μας οδηγεί, βάσει της σχέσης (5.80), στο συμπέρασμα ότι:

$$\frac{\partial \tilde{Y}_t^{ae}}{\partial c_1} > 0$$

Με άλλα λόγια η μερική παράγωγος του εισοδήματος ισορροπίας ως προς την οριακή ροπή προς κατανάλωση έχει το αναμενόμενο πρόσημο.

(γ) ***Ο συντελεστής b_2***

Πριν διερευνήσουμε την επίπτωση που αναμένεται να έχει μια απειροελάχιστη μεταβολή της τιμής μόνο του συντελεστή b_2 [ο οποίος μας δείχνει την ευαισθησία των επενδύσεων (I_t) στην προσδοκώμενη μεταβολή του επιτοκίου (ΔR_t^e)], θα διερευνήσουμε τις επιπτώσεις αυτής της μεταβολής πάνω στις επενδύσεις.

Η συνάρτηση των επενδύσεων περιγράφεται, έπειτα από την αντικατάσταση σ' αυτή της συνάρτησης της κατανάλωσης, από την ακόλουθη σχέση:

$$I_t = b_0 + vc_1(Y_{t-1} - Y_{t-2}) + b_2 \Delta R_t^e \qquad \textbf{\textit{(5.84)}}$$

Πολλαπλασιάζοντας την παραπάνω σχέση με 1 – γ και παίρνοντας μία χρονική υστέρηση προκύπτει ότι:

$$(1-\gamma) I_{t-1} = (1-\gamma) b_0 + (1-\gamma) vc_1 (Y_{t-2} - Y_{t-3}) + (1-\gamma) b_2 \Delta R_{t-1}^e \qquad \textbf{\textit{(5.85)}}$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (5.84) και (5.85) παίρνουμε:

$$I_t - (1-\gamma) I_{t-1} = b_0 - (1-\gamma) b_0 + vc_1 (Y_{t-1} - Y_{t-2}) - (1-\gamma) vc_1 (Y_{t-2} - Y_{t-3}) +$$

$$+ b_2 \Delta R_t^e - (1-\gamma) b_2 \, \Delta R_{t-1}^e \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_t = \gamma b_0 + (1-\gamma) I_{t-1} + vc_1 Y_{t-1} - (2-\gamma) vc_1 Y_{t-2} + (1-\gamma) vc_1 Y_{t-3} +$$

$$+ b_2 \left[\Delta R_t^e - (1-\gamma) \Delta R_{t-1}^e \right] \overset{(5.1)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \qquad I_t = H + b_2 \gamma \, \Delta R_{t-1} \qquad \textbf{\textit{(5.86)}}$$

όπου

$$H = \gamma b_0 + (1-\gamma) I_{t-1} + vc_1 Y_{t-1} - (2-\gamma) vc_1 Y_{t-2} + (1-\gamma) vc_1 Y_{t-3} \qquad \textbf{\textit{(5.87)}}$$

Ένα ερώτημα που ανακύπτει στο σημείο αυτό έχει να κάνει με το πρόσημο του μεγέθους Η. Προκειμένου να προσδιορίσουμε το πρόσημο του εν λόγω μεγέθους θα αναδιατάξουμε τους όρους της σχέσης (5.87) ως ακολούθως:

$$H = \gamma b_0 + (1-\gamma) I_{t-1} + vc_1 Y_{t-1} - vc_1 Y_{t-2} - (1-\gamma) vc_1 Y_{t-2} + (1-\gamma) vc_1 Y_{t-3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H = \gamma b_0 + (1-\gamma) I_{t-1} + vc_1 \Delta Y_{t-1} - (1-\gamma) vc_1 \Delta Y_{t-2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H = \gamma b_0 + (1-\gamma) I_{t-1} + vc_1 \left(\Delta^2 Y_{t-1} + \gamma \, \Delta Y_{t-2} \right) \qquad \textbf{\textit{(5.88)}}$$

Υποθέτοντας ότι η οικονομία βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας, από τη σχέση (5.47) προκύπτει:

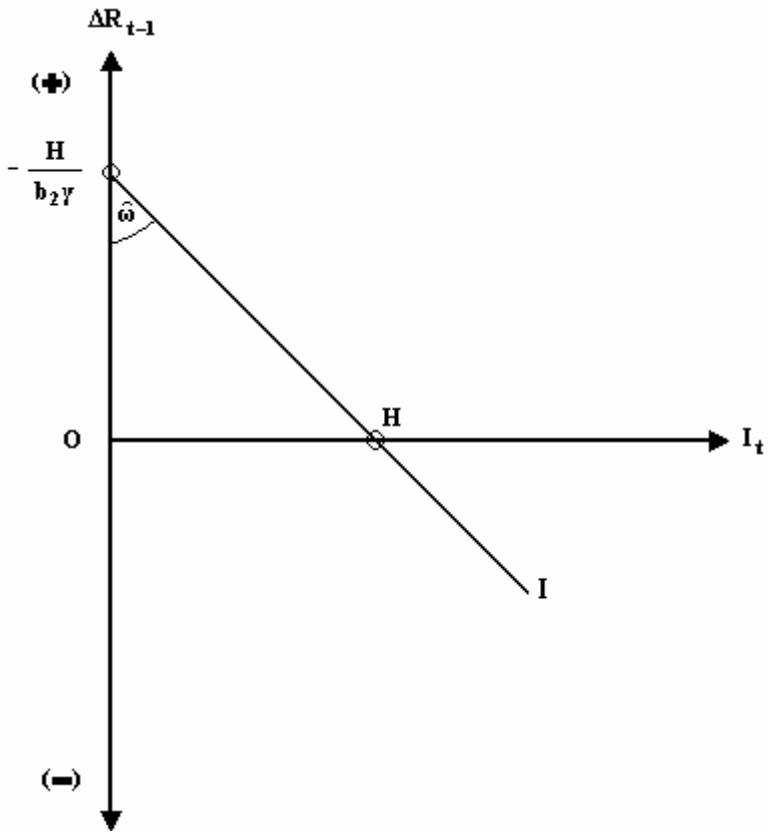
$$\left.\begin{aligned} \Delta Y_{t-2} &= \frac{b_2(\gamma+m)}{d_2(1+\varphi)} \frac{M_0 \tilde{m}^t}{\tilde{m}^3 + a_2 \tilde{m}^2 + a_1 \tilde{m} + a_0} m > 0 \\ \Delta^2 Y_{t-1} &= \frac{b_2(\gamma+m)}{d_2(1+\varphi)} \frac{M_0 \tilde{m}^t}{\tilde{m}^3 + a_2 \tilde{m}^2 + a_1 \tilde{m} + a_0} \frac{m^2}{1+m} > 0 \end{aligned}\right\} \text{ όπου } \tilde{m} = 1 + m$$

κάτι που μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι $H > 0$.

Η σχέση (5.86) παρουσιάζεται διαγραμματικά στο γράφημα Δ – 5.7 μέσω της καμπύλης Ι. Η κλίση της συγκεκριμένης καμπύλης δίνεται από την εφαπτομένη της γωνίας $\hat{\omega}$ και ισούται με:

$$\varepsilon\varphi\hat{\omega} = \frac{H}{-H/b_2\gamma} = -b_2\gamma \qquad \textbf{\textit{(5.89)}}$$

Όπως γίνεται φανερό από την παραπάνω σχέση, η κλίση της καμπύλης I επηρεάζεται από μεταβολές των συντελεστών b_2 και γ. Η θέση της εν λόγω καμπύλης επηρεάζεται από μεταβολές των συνιστωσών του μεγέθους Η, μεταξύ των οποίων είναι και ο συντελεστής προσαρμογής γ.



Δ – 5.7

Με τη βοήθεια του γραφήματος Δ – 5.8 που ακολουθεί θα διερευνήσουμε τις επιπτώσεις της μεταβολής της τιμής του συντελεστή b_2 τόσο πάνω στην καμπύλη των επενδύσεων , I , όσο και στο ύψος αυτών. Πιο συγκεκριμένα θα υποθέσουμε ότι αρχικά, και με δεδομένες τις τιμές των γ , I_{t-1} , Y_{t-1} , Y_{t-2} , Y_{t-3} , v & c_1, η συνάρτηση των επενδύσεων έχει την ακόλουθη μορφή:

$$I_t = \gamma b_0 + (1-\gamma) I_{t-1} + vc_1\left(\Delta^2 Y_{t-1} + \gamma\, \Delta Y_{t-2}\right) + b_{21}\gamma \Delta R_{t-1}$$

Η παραπάνω σχέση παρουσιάζεται γραφικά μέσω της καμπύλης I_1 η οποία τέμνει τους άξονες στα σημεία (0, – $H/b_{21}\gamma$) και (H,0) και η κλίση της οποίας ισούται με $\varepsilon\varphi\widehat{\omega}_1 = -b_{21}\gamma$.

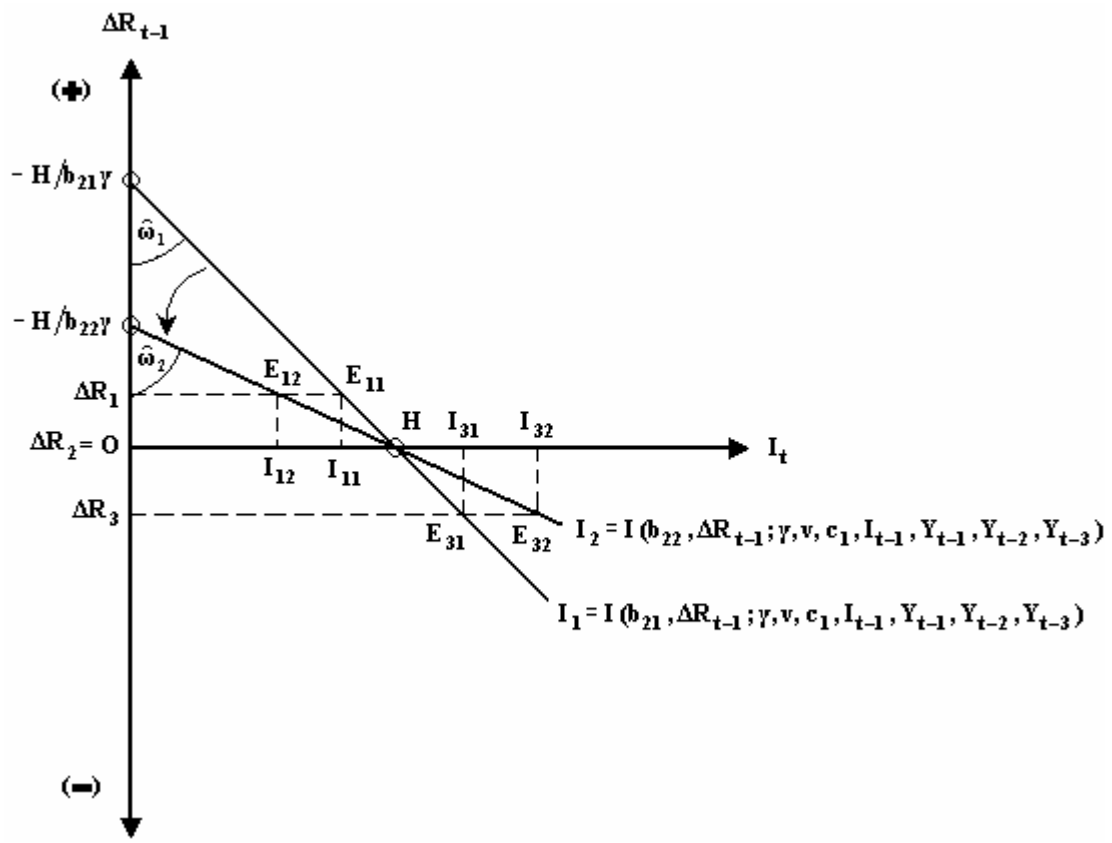
Ας υποθέσουμε τώρα ότι ο συντελεστής b_2 μειώνεται από b_{21} σε b_{22} (ή ισοδύναμα ο συντελεστής b_2 αυξάνεται κατ' απόλυτη τιμή από $|b_{21}|$ σε $|b_{22}|$). Η μείωση του συντελεστή b_2 (για παράδειγμα από – 1 σε – 2) έχει ως συνέπεια τη μείωση του μεγέθους $-H/b_2\gamma$ από $-H/b_{21}\gamma$ σε $-H/b_{22}\gamma$, ενώ αφήνει ανεπηρέαστο το μέγεθος $H = \gamma b_0 + (1-\gamma) I_{t-1} + vc_1\left(\Delta^2 Y_{t-1} + \gamma\, \Delta Y_{t-2}\right)$. Με άλλα λόγια η μείωση του συντε-

λεστή b_2 έχει ως συνέπεια την αριστερόστροφη περιστροφή της καμπύλης των επενδύσεων περί του σημείου Η, από την αρχική θέση I_1 στη νέα θέση I_2. Η νέα αυτή καμπύλη των επενδύσεων αποτελεί τη γραφική απεικόνιση της ακόλουθης συνάρτησης επενδύσεων:

$$I_t = \gamma b_0 + (1-\gamma) I_{t-1} + vc_1\left(\Delta^2 Y_{t-1} + \gamma\, \Delta Y_{t-2}\right) + b_{22}\gamma \Delta R_{t-1}$$

και η κλίση της, η οποία δίνεται από την εφαπτομένη της γωνίας $\widehat{\omega}_2$, είναι μεγαλύτερη από εκείνη της καμπύλης I_1 καθώς ισχύει ότι:

$$b_{22} < b_{21} \Rightarrow b_{22}\gamma < b_{21}\gamma \Rightarrow -b_{22}\gamma > -b_{21}\gamma \Rightarrow \varepsilon\varphi\widehat{\omega}_2 > \varepsilon\varphi\widehat{\omega}_1$$



Δ – 5.8

Επειδή η αύξηση της τιμής του συντελεστή b_2 προκαλεί την περιστροφή της καμπύλης των επενδύσεων περί του σημείου Η, η επίπτωση πάνω στο ύψος των επενδύσεων θα εξαρτηθεί από το πρόσημο της επιτοκιακής διαφοράς ισορροπίας ΔR_{t-1} για την οποία εξασφαλίζεται ισορροπία στην αγορά χρήματος και η οποία δίνεται, όπως θυμόμαστε, από την ακόλουθη σχέση:

$$\Delta R_{t-1} = \left[\frac{M_0(\gamma+m)}{\gamma d_2}\right](1+m)^{t-1} - \frac{d_1}{\gamma d_2} Y_t + \frac{d_1(1-\gamma)}{\gamma d_2} Y_{t-1} \qquad \textit{(5.5)}$$

Όπως προκύπτει από την παραπάνω σχέση, το πρόσημο της επιτοκιακής διαφοράς είναι μάλλον απροσδιόριστο[25]. Βάσει λοιπόν του πρόσημου της επιτοκιακής διαφοράς ΔR_{t-1}, μπορούμε να διακρίνουμε μεταξύ των ακόλουθων περιπτώσεων:

1η Περίπτωση : $\Delta R_{t-1} > 0$

Υποθέτοντας ότι το μέγεθος της επιτοκιακής διαφοράς είναι θετικό και ίσο με ΔR_1, το αρχικό ύψος των επενδύσεων (όπως αυτό προκύπτει από το σημείο E_{11} της αρχικής καμπύλης επενδύσεων I_1 του γραφήματος Δ – 5.8) θα είναι ίσο με I_{11}. Μετά από τη μείωση της τιμής του συντελεστή b_2, και τη συνακόλουθη περιστροφή της καμπύλης των επενδύσεων περί του σημείου Η από τη θέση I_1 στη θέση I_2, το νέο και χαμηλότερο ύψος των επενδύσεων I_{12} προσδιορίζεται από το σημείο E_{12}. Η πτώση των επενδύσεων από I_{11} σε I_{12} θα προκαλέσει τη μείωση της συνολικής ζήτησης, και με δεδομένη τη συνολική προσφορά, θα οδηγήσει στην πτώση του εισοδήματος ισορροπίας.

Γίνεται λοιπόν φανερό ότι στην περίπτωση κατά την οποία η επιτοκιακή διαφορά ΔR_{t-1} (για την οποία επιτυγχάνεται ισορροπία στην αγορά χρήματος) είναι θετική, μία μόνιμη μείωση της τιμής του συντελεστή b_2 αναμένεται να οδηγήσει στην πτώση του επιπέδου του εισοδήματος ισορροπίας. Η αναμενόμενη θετική αυτή σχέση μεταξύ του συντελεστή b_2 και του εισοδήματος ισορροπίας $\tilde{Y}_t^{ae}$ μπορεί να παρουσιασθεί σε μαθηματικούς όρους μέσω της ακόλουθης σχέσης:

$$\frac{\partial \tilde{Y}_t^{ae}}{\partial b_2} > 0 \qquad (5.90.1)$$

2η Περίπτωση : $\Delta R_{t-1} = 0$

Όπως προκύπτει και από το γράφημα Δ – 5.8, στην περίπτωση που η επιτοκιακή διαφορά για την οποία επιτυγχάνεται ισορροπία στην αγορά χρήματος είναι ίση με το μηδέν, στην περίπτωση δηλαδή κατά την οποία ισχύει ότι $\Delta R_{t-1} = 0$, το ύψος των επενδύσεων (όπως αυτό προσδιορίζεται από το σημείο τομής της καμπύλης I_1 με τον οριζόντιο άξονα, από το σημείο δηλαδή Η) είναι ίσο με ΟΗ. Δεδομένου ότι έπειτα από τη μείωση της τιμής της παραμέτρου b_2 η καμπύλη των επενδύσεων περιστρέφεται περί του σημείου Η, το συγκεκριμένο σημείο εξακολουθεί να προσδιορίζει το ύψος των επενδύσεων. Το ύψος δηλαδή των επενδύσεων παρέμεινε αμετάβλητο και ως επακόλουθο σταθερό παρέμεινε το ύψος τόσο της συνολικής ζήτησης όσο και του εισοδήματος ισορροπίας.

Όπως προκύπτει από την παραπάνω ανάλυση, στην περίπτωση που ισχύει ότι $\Delta R_{t-1} = 0$, το εισόδημα ισορροπίας δεν αναμένεται να επηρεασθεί από μεταβολές της τιμής της παραμέτρου b_2. Η ανεξαρτησία αυτή μεταξύ $\tilde{Y}_t^{ae}$ και b_2 μπορεί να εκφρασθεί σε μαθηματικούς όρους μέσω της ακόλουθης σχέσης:

$$\frac{\partial \tilde{Y}_t^{ae}}{\partial b_2} = 0 \qquad (5.90.2)$$

[25] Στα πλαίσια του έκτου παραρτήματος προσδιορίζεται η επιτοκιακή διαφορά όταν η οικονομία βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας και αποδεικνύεται ότι το πρόσημό της είναι απροσδιόριστο.

3η Περίπτωση : $\Delta R_{t-1} < 0$

Αν υποθέσουμε ότι η επιτοκιακή διαφορά είναι αρνητική και ίση με ΔR_2, η μετατόπιση της καμπύλης των επενδύσεων από τη θέση I_1 στη θέση I_2 λόγω της μείωσης της τιμής του συντελεστή b_2, θα έχει ως αποτέλεσμα την αύξηση των επενδύσεων από I_{31} σε I_{32} καθώς μετακινούμαστε από το σημείο E_{31} στο σημείο E_{32}. Η αύξηση αυτή των επενδύσεων θα οδηγήσει στην αύξηση της συνολικής ζήτησης και με δεδομένη την συνολική προσφορά, αναμένεται αύξηση του εισοδήματος ισορροπίας. Σε μαθηματικούς όρους, η αναμενόμενη αρνητική σχέση μεταξύ του συντελεστή b_2 και του εισοδήματος ισορροπίας $\tilde{Y}_t^{ae}$ στην περίπτωση κατά την οποία ισχύει ότι $\Delta R_{t-1} < 0$ μπορεί να περιγραφεί μέσω της ακόλουθης σχέσης:

$$\frac{\partial \tilde{Y}_t^{ae}}{\partial b_2} < 0 \qquad \textit{(5.90.3)}$$

Η μερική παράγωγος του εισοδήματος ισορροπίας ως προς το συντελεστή b_2 προσδιορίζεται με τη βοήθεια της σχέσης (5.47), από την οποία και προκύπτει ότι:

$$\frac{\partial \tilde{Y}_t^{ae}}{\partial b_2} = -\frac{b_0}{(1-c_1+\varphi)^2}\frac{\partial(1-c_1+\varphi)}{\partial b_2} + \frac{(\gamma+m)}{d_2(1+\varphi)}\frac{M_0\tilde{m}^{t+2}}{\tilde{m}^3+a_2\tilde{m}^2+a_1\tilde{m}+a_0} -$$

$$-\frac{b_2(\gamma+m)}{d_2(1+\varphi)^2}\frac{\partial(1+\varphi)}{\partial b_2}\frac{M_0\tilde{m}^{t+2}}{\tilde{m}^3+a_2\tilde{m}^2+a_1\tilde{m}+a_0} -$$

$$-\frac{b_2(\gamma+m)}{d_2(1+\varphi)}\frac{M_0\tilde{m}^{t+2}}{(\tilde{m}^3+a_2\tilde{m}^2+a_1\tilde{m}+a_0)^2}\frac{\partial(\tilde{m}^3+a_2\tilde{m}^2+a_1\tilde{m}+a_0)}{\partial b_2} =$$

$$= -\frac{b_0 d_1}{d_2(1-c_1+\varphi)^2} + \frac{\gamma+m}{d_2(1+\varphi)}\frac{M_0\tilde{m}^{t+2}}{\tilde{m}^3+a_2\tilde{m}^2+a_1\tilde{m}+a_0} -$$

$$-\frac{b_2 d_1(\gamma+m)}{d_2^2(1+\varphi)^2}\frac{M_0\tilde{m}^{t+2}}{\tilde{m}^3+a_2\tilde{m}^2+a_1\tilde{m}+a_0} - \frac{b_2(\gamma+m)}{d_2(1+\varphi)}\frac{M_0\tilde{m}^{t+2}}{(\tilde{m}^3+a_2\tilde{m}^2+a_1\tilde{m}+a_0)^2}\times$$

$$\times\left(\tilde{m}^2\frac{\partial a_2}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial b_2} + \tilde{m}\frac{\partial a_1}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial b_2} + \frac{\partial a_0}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial b_2}\right) =$$

$$= -\frac{b_0 d_1}{d_2(1-c_1+\varphi)^2} + \frac{\gamma+m}{d_2(1+\varphi)}\frac{M_0\tilde{m}^{t+2}}{\tilde{m}^3+a_2\tilde{m}^2+a_1\tilde{m}+a_0} -$$

$$-\frac{b_2 d_1(\gamma+m)}{d_2^2(1+\varphi)^2}\frac{M_0\tilde{m}^{t+2}}{\tilde{m}^3+a_2\tilde{m}^2+a_1\tilde{m}+a_0}-\frac{b_2(\gamma+m)}{d_2(1+\varphi)}\frac{M_0\tilde{m}^{t+2}}{\left(\tilde{m}^3+a_2\tilde{m}^2+a_1\tilde{m}+a_0\right)^2}\times$$

$$\times\left[\tilde{m}^2\frac{c_1(1+v)}{(1+\varphi)^2}\frac{d_1}{d_2}-\tilde{m}\frac{c_1[v+(1+v)(1-\gamma)]}{(1+\varphi)^2}\frac{d_1}{d_2}+\frac{vc_1(1-\gamma)}{(1+\varphi)^2}\frac{d_1}{d_2}\right]=$$

$$=-\frac{b_0 d_1}{d_2(1-c_1+\varphi)^2}+\frac{\gamma+m}{d_2(1+\varphi)}\frac{M_0\tilde{m}^{t+2}}{\tilde{m}^3+a_2\tilde{m}^2+a_1\tilde{m}+a_0}-\frac{\varphi(\gamma+m)}{d_2(1+\varphi)^2}\times$$

$$\times\frac{M_0\tilde{m}^{t+2}}{\tilde{m}^3+a_2\tilde{m}^2+a_1\tilde{m}+a_0}-\frac{\varphi(\gamma+m)}{d_2(1+\varphi)^2}\frac{M_0\tilde{m}^{t+2}}{\left(\tilde{m}^3+a_2\tilde{m}^2+a_1\tilde{m}+a_0\right)^2}\times$$

$$\times\left[\tilde{m}^2\frac{c_1(1+v)}{1+\varphi}-\tilde{m}\frac{c_1[v+(1+v)(1-\gamma)]}{1+\varphi}+\frac{vc_1(1-\gamma)}{1+\varphi}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\partial\tilde{Y}_t^{ae}}{\partial b_2}=-\frac{b_0 d_1}{d_2(1-c_1+\varphi)^2}+\frac{\varphi(\gamma+m)}{d_2(1+\varphi)^2}\frac{M_0\tilde{m}^{t+2}}{\left(\tilde{m}^3+a_2\tilde{m}^2+a_1\tilde{m}+a_0\right)^2}\times$$

$$\times\left\{\frac{1+\varphi}{\varphi}\left(\tilde{m}^3+a_2\tilde{m}^2+a_1\tilde{m}+a_0\right)-\left(\tilde{m}^3+a_2\tilde{m}^2+a_1\tilde{m}+a_0\right)-\right.$$

$$\left.-\left[-a_2\tilde{m}^2-(1-\gamma)\tilde{m}^2-a_1\tilde{m}-a_0\right]\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\partial\tilde{Y}_t^{ae}}{\partial b_2}=-\frac{b_0 d_1}{d_2(1-c_1+\varphi)^2}+\frac{\varphi(\gamma+m)}{d_2(1+\varphi)^2}\frac{M_0\tilde{m}^{t+2}}{\left(\tilde{m}^3+a_2\tilde{m}^2+a_1\tilde{m}+a_0\right)^2}\times$$

$$\times\left[\frac{1}{\varphi}\left(\tilde{m}^3+a_2\tilde{m}^2+a_1\tilde{m}+a_0\right)+a_2\tilde{m}^2+(1-\gamma)\tilde{m}^2+a_1\tilde{m}+a_0\right]\qquad\textbf{\textit{(5.91)}}$$

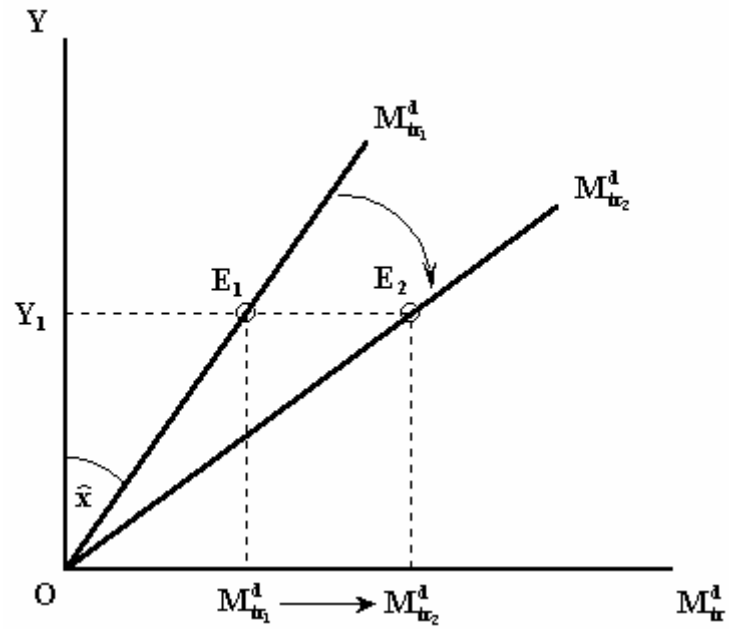
Από την παραπάνω σχέση, και δεδομένου ότι $b_0 > 0$, $0 < c_1 < 1$, $\varphi > 0$, $0 < \gamma < 1$, $M_0 > 0$, $0 < m < 1$, $\tilde{m} = 1 + m > 1$, $d_1 > 0$, $d_2 < 0$, $a_0 < 0$, $a_1 > 0$ & $a_2 < 0$, γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι το πρόσημο της μερικής παραγώγου του εισοδήματος ισορροπίας ως προς το συντελεστή b_2 είναι απροσδιόριστο, επιβεβαιώνοντας έτσι την θεωρητική ανάλυση που προηγήθηκε του προσδιορισμού της μερικής παραγώγου $\partial\tilde{Y}_t^{ae}/\partial b_2$.

(δ) ***Ο συντελεστής d_1***

Ας δούμε τώρα τη σχέση που υπάρχει ανάμεσα στο εισόδημα ισορροπίας ($\tilde{Y}_t^{ae}$) και τον συντελεστή d_1, ο οποίος μας δείχνει την ευαισθησία της συνολικής ζήτησης χρήματος στις μεταβολές του εισοδήματος.

Η συνολική ζήτηση χρήματος $\left(M_t^d\right)$ αποτελεί, όπως έχουμε ήδη αναφέρει, το άθροισμα της ζήτησης χρήματος για συναλλακτικούς σκοπούς και σκοπούς προφύλαξης $\left[\left(M_{tr}^d\right)_t\right]$ και της ζήτησης χρήματος για κερδοσκοπία $\left[\left(M_{sp}^d\right)_t\right]$. Σε μαθηματικούς όρους, η συνάρτηση που περιγράφει τη ζήτηση χρήματος για συναλλακτικούς σκοπούς δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\left(M_{tr}^d\right)_t = d_1 Y_t \quad , \quad d_1 > 0 \qquad \textit{(3.13)}$$



Δ – 5.9

Η σχέση (3.13) περιγράφει την τρέχουσα ζήτηση χρήματος για συναλλακτικούς σκοπούς ως μία θετική συνάρτηση του τρέχοντος εισοδήματος και παρουσιάζεται γραφικά στο διάγραμμα Δ – 5.9 μέσω της καμπύλης $M_{tr_1}^d$. Η συγκεκριμένη καμπύλη διέρχεται από την αρχή των αξόνων, καθώς η αυτόνομη ζήτηση χρήματος για συναλλακτικούς σκοπούς θεωρείται ίση με το μηδέν, ενώ η εφαπτομένη της γωνίας $\hat{x}$ ισούται με την τιμή της παραμέτρου d_1. Ισχύει δηλαδή ότι :

$$\varepsilon\varphi\hat{x} = d_1 \qquad \textit{(5.92)}$$

Από την παραπάνω σχέση γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι με δεδομένη την τιμή του εισοδήματος, *μία αύξηση της τιμής του συντελεστή d_1 θα οδηγήσει στην* δεξιό-

στροφη περιστροφή της καμπύλης M^d_{tr} από τη θέση $M^d_{tr_1}$ στη θέση $M^d_{tr_2}$, προκαλώντας έτσι την *αύξηση της ζήτησης χρήματος για συναλλακτικούς σκοπούς και σκοπούς προφύλαξης*[26], καθώς μετακινούμαστε από το αρχικό σημείο E_1 στο νέο σημείο E_2.

Προκειμένου να διαπιστώσουμε κατά πόσο οι μεταβολές του συντελεστή d_1 επηρεάζουν αφενός τη ζήτηση χρήματος για κερδοσκοπία και αφετέρου τη συνολική ζήτηση χρήματος, θα εξειδικεύσουμε τη συνάρτηση της συνολικής ζήτησης χρήματος και στη συνέχεια αφαιρώντας απ' αυτήν τη σχέση (3.13) θα προσδιορίσουμε τη συνάρτηση της ζήτησης χρήματος για κερδοσκοπία.

Παίρνοντας μία χρονική υστέρηση από τη σχέση (3.6) και πολλαπλασιάζοντας με $1 - \gamma$ προκύπτει ότι:

$$M^d_{t-1} = d_1 Y_{t-1} + d_2 \Delta R^e_{t-1} \Rightarrow (1-\gamma) M^d_{t-1} = (1-\gamma) d_1 Y_{t-1} + (1-\gamma) d_2 \Delta R^e_{t-1} \qquad \textbf{\textit{(5.93)}}$$

Αφαιρώντας στη συνέχεια κατά μέλη τις σχέσεις (3.6) και (5.93) παίρνουμε:

$$M^d_t - (1-\gamma) M^d_{t-1} = d_1 Y_t - (1-\gamma) d_1 Y_{t-1} + d_2 \left[\Delta R^e_t - (1-\gamma) \Delta R^e_{t-1}\right] \overset{(5.1)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow M^d_t = (1-\gamma) M^d_{t-1} + d_1 Y_t - (1-\gamma) d_1 Y_{t-1} + \gamma\, d_2 \Delta R_{t-1} \qquad \textbf{\textit{(5.94)}}$$

Η αγορά χρήματος θα βρίσκεται σε ισορροπία όταν ικανοποιείται η σχέση (3.4) από την οποία και προκύπτει ότι:

$$M^s_t = M^d_t \overset{(3.12)}{\Rightarrow} M_0 (1+m)^t = M^d_t \Rightarrow \qquad M^d_{t-1} = M_0 (1+m)^{t-1} \qquad \textbf{\textit{(5.95)}}$$

Από το συνδυασμό των σχέσεων (5.94) και (5.95) παίρνουμε την απαλλαγμένη από τις προσδοκίες συνάρτηση της συνολικής ζήτησης χρήματος, η μορφή της οποίας έχει ως ακολούθως:

$$M^d_t = (1-\gamma) M_0 (1+m)^{t-1} + d_1 \Delta Y_t + \gamma\, d_1 Y_{t-1} + \gamma\, d_2 \Delta R_{t-1} \qquad \textbf{\textit{(5.96)}}$$

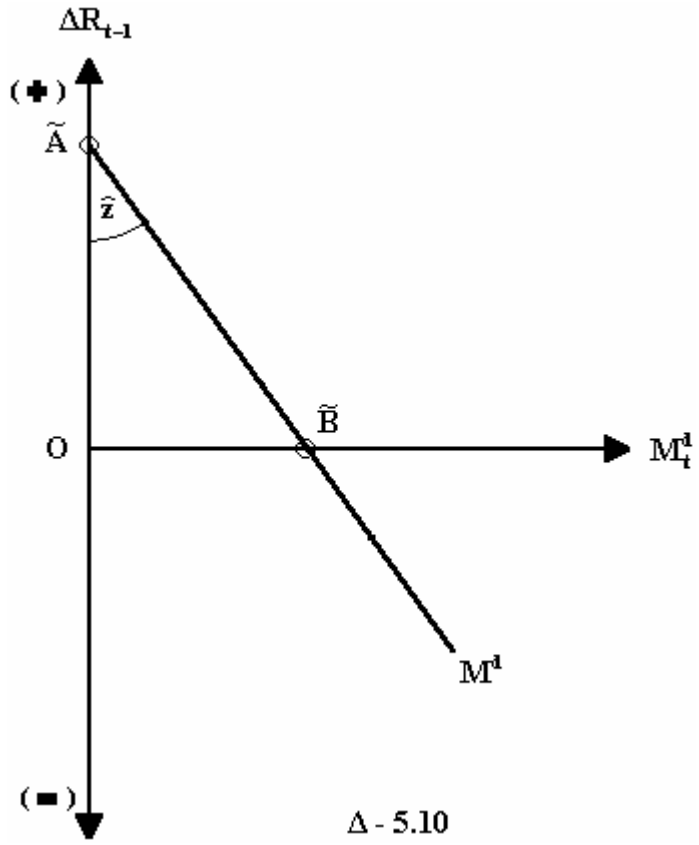
Η παραπάνω σχέση παρουσιάζεται γραφικά στο διάγραμμα Δ – 5.10 μέσω της καμπύλης M^d, η οποία τέμνει τον κατακόρυφο άξονα στο σημείο ($0, \widetilde{A}$) και τον οριζόντιο στο σημείο ($\widetilde{B}, 0$), όπου $\widetilde{A} = -\left[(1-\gamma) M_0 (1+m)^{t-1} + d_1 (\Delta Y_t + \gamma\, Y_{t-1})\right] / \gamma d_2$ και $\widetilde{B} = (1-\gamma) M_0 (1+m)^{t-1} + d_1 (\Delta Y_t + \gamma\, Y_{t-1})$. Η κλίση της καμπύλης M^d δίνεται από την εφαπτομένη της γωνίας $\widehat{z}$, το μέγεθος της οποίας έχει ως ακολούθως:

$$\varepsilon\varphi \widehat{z} = -\gamma d_2 \qquad \textbf{\textit{(5.97)}}$$

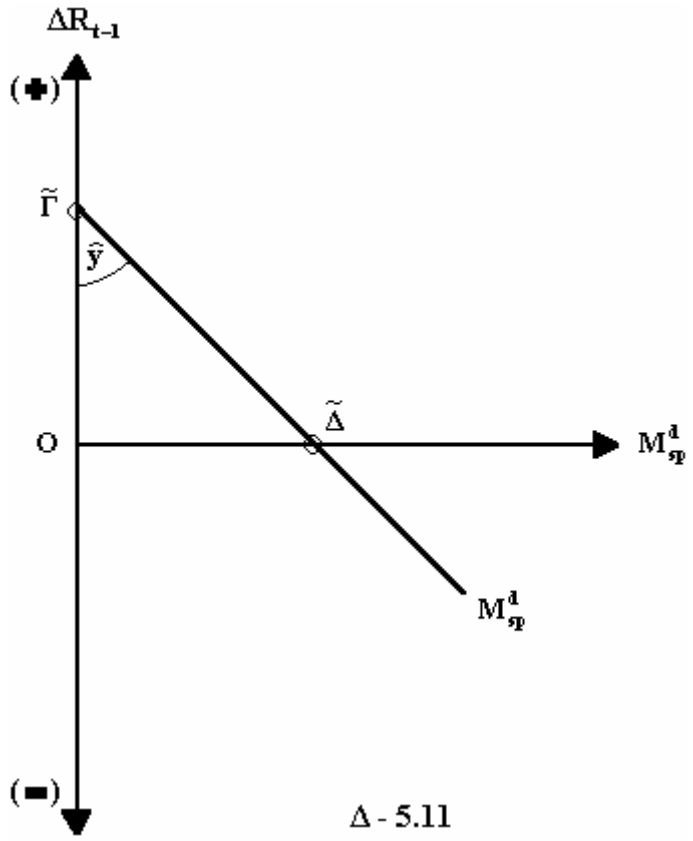
Όπως προκύπτει από τη σχέση (5.96), η θέση της καμπύλης M^d επηρεάζεται από τις παραμέτρους M_0 , m και d_1 , ενώ οι παράμετροι γ και d_2 επηρεάζουν τόσο τη θέση όσο και τη κλίση της καμπύλης αυτής.

---

[26] Στην περίπτωση που η τιμή του συντελεστή d_1 μειωνόταν, η καμπύλη M^d_{tr} θα πραγματοποιούσε μία αριστερόστροφη περί του σημείου Ο περιστροφή οδηγώντας έτσι, με δεδομένο το επίπεδο του εισοδήματος, στη μείωση της ζήτησης χρήματος για συναλλακτικούς σκοπούς.



Δ - 5.10



Δ - 5.11

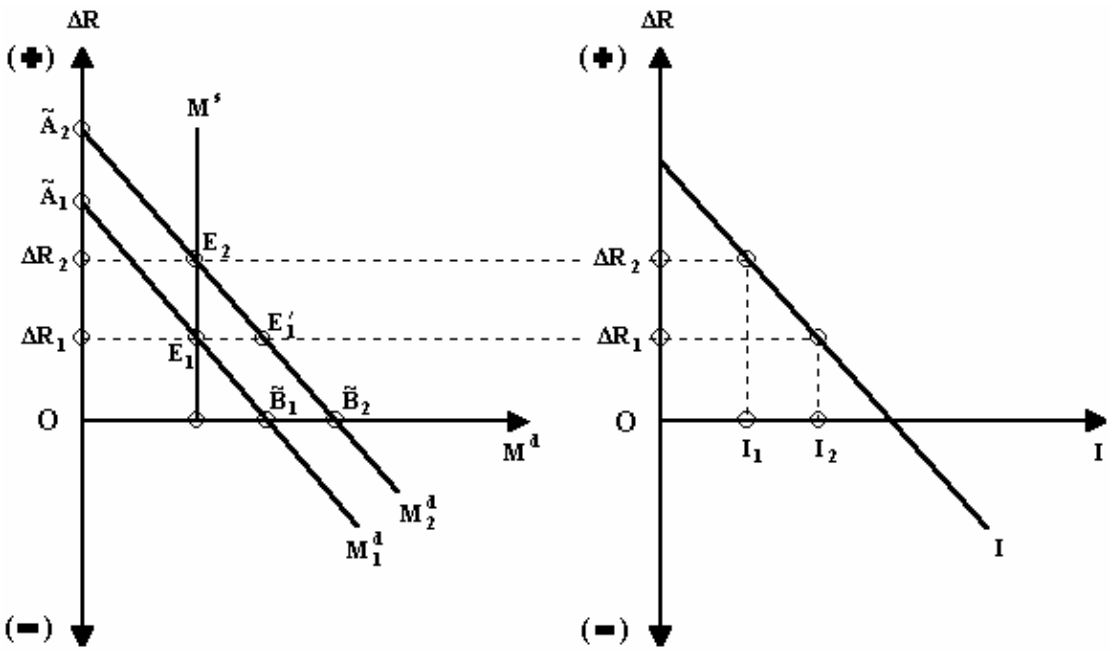
Αφαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (5.96) και (3.13) παίρνουμε τη συνάρτηση της ζήτησης χρήματος για κερδοσκοπία. Πιο συγκεκριμένα:

$$\left(M_{sp}^{d}\right)_t = M_t^d - \left(M_{tr}^{d}\right)_t \underset{(3.13)}{\overset{(5.96)}{=}} (1-\gamma)M_0(1+m)^{t-1} + d_1Y_t - (1-\gamma)d_1Y_{t-1} + \gamma d_2\Delta R_{t-1} - d_1Y_t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(M_{sp}^{d}\right)_t = (1-\gamma)M_0(1+m)^{t-1} - (1-\gamma)d_1Y_{t-1} + \gamma d_2\Delta R_{t-1} \qquad \textit{(5.98)}$$

Η σχέση (5.98) παρουσιάζεται γραφικά στο διάγραμμα Δ – 5.11 μέσω της καμπύλης M_{sp}^{d}, η οποία τέμνει τον κατακόρυφο άξονα στο σημείο $(0,\tilde{\Gamma})$ και τον οριζόντιο άξονα στο σημείο $(\tilde{\Delta},0)$, όπου $\tilde{\Gamma} = -\left[(1-\gamma)M_0(1+m)^{t-1} - (1-\gamma)d_1Y_{t-1}\right]/\gamma d_2$ και $\tilde{\Delta} = (1-\gamma)M_0(1+m)^{t-1} - (1-\gamma)d_1Y_{t-1}$. Η κλίση της συγκεκριμένης καμπύλης δίνεται από την εφαπτομένη της γωνίας $\hat{y}$ και είναι ακριβώς ίση με εκείνη της καμπύλης M^d, ισχύει δηλαδή ότι:

$$\varepsilon\varphi\hat{y} = -\gamma d_2 = \varepsilon\varphi\hat{z} \qquad \textit{(5.99)}$$



Δ – 5.12

Ας δούμε τώρα με τη βοήθεια του παραπάνω γραφήματος, τις επιπτώσεις μίας αύξησης της τιμής της παραμέτρου d_1 στην ισορροπία της αγοράς χρήματος και κατ' επέκταση στο επίπεδο του εισοδήματος ισορροπίας. Πιο συγκεκριμένα ας υποθέσουμε ότι αρχικά η ισορροπία στην αγορά χρήματος επιτυγχάνεται στο σημείο τομής

των καμπυλών M^s και M_1^d. Με άλλα λόγια στο σημείο E_1 η συνολική ζήτηση χρήματος $M_1^d = M^d(d_{11}, \Delta R_{t-1}; M_0, m, \gamma, d_2, Y_t, Y_{t-1})$ είναι ακριβώς ίση με τη συνολική προσφορά χρήματος η οποία είναι ανεξάρτητη της επιτοκιακής διαφοράς. Από το σημείο E_1 προσδιορίζεται η επιτοκιακή διαφορά ισορροπίας ΔR_1 βάσει της οποίας προσδιορίζεται ένα επίπεδο επενδύσεων I_2.

Έστω τώρα ότι η τιμή του συντελεστή d_1 αυξάνεται από d_{11} σε d_{12}. Προκειμένου να προσδιορίσουμε τις επιπτώσεις αυτής της μεταβολής τόσο πάνω στη ζήτηση χρήματος για κερδοσκοπία όσο και στη συνολική ζήτηση χρήματος, δεν έχουμε παρά να υπολογίσουμε την μερική παράγωγο των σχέσεων (5.96) και (5.98) ως προς d_1. Πιο συγκεκριμένα από τη σχέση (5.98) προκύπτει ότι:

$$\frac{\partial\left(M_{sp}^d\right)}{\partial d_1} = -(1-\gamma)\,Y_{t-1} < 0 \qquad \textbf{\textit{(5.100)}}$$

Όπως διαπιστώνουμε η αύξηση της τιμής του συντελεστή d_1 θα έχει ως συνέπεια τη μείωση της ζήτησης χρήματος για κερδοσκοπία[27].

Από τη σχέση τώρα (5.96) προκύπτει:

$$\frac{\partial\left(M^d\right)}{\partial d_1} = \Delta Y_t + \gamma Y_{t-1}$$

Δεδομένου ότι διαχρονικά παρατηρείται αύξηση του εισοδήματος θα έχουμε ότι $Y_t > Y_{t-1} \Rightarrow Y_t - Y_{t-1} > 0 \Rightarrow \Delta Y_t > 0$, κάτι που μας οδηγεί στο εξής συμπέρασμα:

$$\frac{\partial\left(M^d\right)}{\partial d_1} = \Delta Y_t + \gamma Y_{t-1} > 0 \qquad \textbf{\textit{(5.101)}}$$

Με άλλα λόγια η αύξηση της τιμής του συντελεστή d_1 θα έχει ως συνέπεια την αύξηση της συνολικής ζήτησης χρήματος.

Σε γεωμετρικούς όρους, και δεδομένου ότι ο συντελεστής d_1 επηρεάζει μόνο τη θέση της καμπύλης M^d, η αύξηση της τιμής του συντελεστή d_1 θα προκαλέσει, βάσει της σχέσης (5.101), την παράλληλη μετατόπιση της καμπύλης M^d προς τα πάνω και δεξιά[28] από τη θέση M_1^d στη θέση M_2^d.

Με δεδομένο το ύψος της επιτοκιακής διαφοράς ΔR_1 η ισορροπία στην αγορά χρήματος μετατοπίζεται από το σημείο E_1 στο E_1'. Το E_1' αποτελεί ωστόσο ένα

---

[27] Σε γεωμετρικούς όρους, και δεδομένου ότι ο συντελεστής d_1 επηρεάζει μόνο τη θέση της καμπύλης M_{sp}^d, η σχέση (5.100) μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η αύξηση της τιμής του συντελεστή d_1 είχε ως αποτέλεσμα την παράλληλη μετατόπιση της καμπύλης M_{sp}^d προς τα κάτω και αριστερά. Με δεδομένο το ύψος της επιτοκιακής διαφοράς, η μετατόπιση αυτή θα έχει συνέπεια τη μείωση της ζήτησης χρήματος για κερδοσκοπία.

[28] Η καμπύλη M_2^d έχει την ίδια κλίση με την καμπύλη M_1^d και τέμνει τον κάθετο και οριζόντιο άξονα στα σημεία ($O, \tilde{A}_2$) και ($\tilde{B}_2, O$), όπου $\tilde{A}_2 = -\dfrac{(1-\gamma)M_0(1+m)^{t-1} + d_1\Delta Y_t + \gamma d_{12}Y_{t-1}}{\gamma\, d_2} > \tilde{A}_1$ και $\tilde{B}_2 = (1-\gamma)M_0(1+m)^{t-1} + d_1\Delta Y_t + \gamma d_{12}Y_{t-1} > \tilde{B}_1$ καθώς $d_{11} < d_{12}$

προσωρινό σημείο ισορροπίας, καθώς όντας στο σημείο αυτό η αγορά χρήματος χαρακτηρίζεται από υπερβάλλουσα ζήτηση η οποία και δίνεται από την απόσταση E_1E_1'. Η ισορροπία στην αγορά χρήματος αποκαθίσταται καθώς μετακινούμαστε επί της καμπύλης M_2^d από το σημείο E_1' στο σημείο E_2, στο σημείο δηλαδή τομής της νέας καμπύλης ζήτησης χρήματος με την καμπύλη προσφοράς χρήματος M^s.

Όπως προκύπτει και από το γράφημα Δ – 5.12, η αύξηση της τιμής του συντελεστή d_1 οδήγησε στην αύξηση της επιτοκιακή διαφορά ισορροπίας, όπως αυτή προσδιορίζεται από το νέο σημείο ισορροπίας E_2, από ΔR_1 σε ΔR_2, η οποία με τη σειρά της οδηγεί στη μείωση των επενδύσεων από το αρχικό επίπεδο I_1 στο χαμηλότερο επίπεδο I_2. Η μείωση αυτή των επενδύσεων θα προκαλέσει τη μείωση της συνολικής ζήτησης, και με δεδομένη τη συνολική προσφορά, θα οδηγήσει στη μείωση του επιπέδου του εισοδήματος ισορροπίας.

Όπως προκύπτει από την παραπάνω ανάλυση, από οικονομικής απόψεως αναμένουμε την ύπαρξη αρνητικής σχέσης μεταξύ του επιπέδου του εισοδήματος ισορροπίας, αναμένουμε δηλαδή ότι:

$$\frac{\partial \tilde{Y}_t^{ae}}{\partial d_1} < 0 \qquad \textbf{\textit{(5.102)}}$$

Παίρνοντας τη μερική παράγωγο του εισοδήματος ισορροπίας, όπως αυτό περιγράφεται από τη σχέση (5.47), ως προς το συντελεστή d_1 βρίσκουμε:

$$\frac{\partial \tilde{Y}_t^{ae}}{\partial d_1} = -\frac{b_0}{(1-c_1+\varphi)^2}\frac{\partial(1-c_1+\varphi)}{\partial d_1} - \frac{b_2(\gamma+m)}{d_2(1+\varphi)^2}\frac{M_0\tilde{m}^{t+2}}{\tilde{m}^3+a_2\tilde{m}^2+a_1\tilde{m}+a_0}\frac{\partial(1+\varphi)}{\partial d_1} -$$

$$-\frac{b_2(\gamma+m)}{d_2(1+\varphi)}\frac{M_0\tilde{m}^{t+2}}{(\tilde{m}^3+a_2\tilde{m}^2+a_1\tilde{m}+a_0)^2}\frac{\partial(\tilde{m}^3+a_2\tilde{m}^2+a_1\tilde{m}+a_0)}{\partial d_1} =$$

$$= -\frac{b_0}{(1-c_1+\varphi)^2}\frac{b_2}{d_2} - \frac{b_2(\gamma+m)}{d_2(1+\varphi)^2}\frac{M_0\tilde{m}^{t+2}}{\tilde{m}^3+a_2\tilde{m}^2+a_1\tilde{m}+a_0}\frac{b_2}{d_2} - \frac{b_2(\gamma+m)}{d_2(1+\varphi)}\times$$

$$\times\frac{M_0\tilde{m}^{t+2}}{(\tilde{m}^3+a_2\tilde{m}^2+a_1\tilde{m}+a_0)^2}\left(\frac{\partial a_2}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial d_1}\tilde{m}^2 + \frac{\partial a_1}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial d_1}\tilde{m} + \frac{\partial a_0}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial d_1}\right) =$$

$$= -\frac{b_2}{d_2}\left[\frac{b_0}{(1-c_1+\varphi)^2} + \frac{b_2(\gamma+m)}{d_2(1+\varphi)^2}\frac{M_0\tilde{m}^{t+2}}{\tilde{m}^3+a_2\tilde{m}^2+a_1\tilde{m}+a_0}\right] - \frac{b_2^2(\gamma+m)}{d_2^2(1+\varphi)}\times$$

$$\times\frac{M_0\tilde{m}^{t+2}}{(\tilde{m}^3+a_2\tilde{m}^2+a_1\tilde{m}+a_0)^2}\left\{\frac{c_1(1+v)}{(1+\varphi)^2}\tilde{m}^2 - \frac{c_1[v+(1+v)(1-\gamma)]}{(1+\varphi)^2}\tilde{m} + \frac{vc_1(1-\gamma)}{(1+\varphi)^2}\right\} =$$

$$=-\frac{b_2}{d_2}\left\{\frac{b_0}{(1-c_1+\varphi)^2}+\frac{b_2(\gamma+m)}{d_2(1+\varphi)^2}\frac{M_0\tilde{m}^{t+2}}{\tilde{m}^3+a_2\tilde{m}^2+a_1\tilde{m}+a_0}-\right.$$

$$-\frac{b_2(\gamma+m)}{d_2(1+\varphi)^2}\frac{M_0\tilde{m}^{t+2}}{\left(\tilde{m}^3+a_2\tilde{m}^2+a_1\tilde{m}+a_0\right)^2}\times$$

$$\left.\times\left\{-\frac{c_1(1+v)+(1-\gamma)}{1+\varphi}\tilde{m}^2+(1-\gamma)\tilde{m}^2+\frac{c_1\left[v+(1+v)(1-\gamma)\right]}{(1+\varphi)^2}\tilde{m}-\frac{vc_1(1-\gamma)}{(1+\varphi)^2}\right\}\right\}=$$

$$=-\frac{b_2}{d_2}\left\{\frac{b_0}{(1-c_1+\varphi)^2}+\frac{b_2(\gamma+m)}{d_2(1+\varphi)^2}\frac{M_0\tilde{m}^{t+2}}{\left(\tilde{m}^3+a_2\tilde{m}^2+a_1\tilde{m}+a_0\right)^2}\times\right.$$

$$\left.\times\left[\tilde{m}^3+a_2\tilde{m}^2+a_1\tilde{m}+a_0-a_2\tilde{m}^2-(1-\gamma)\tilde{m}^2-a_1\tilde{m}-a_0\right]\right\}=$$

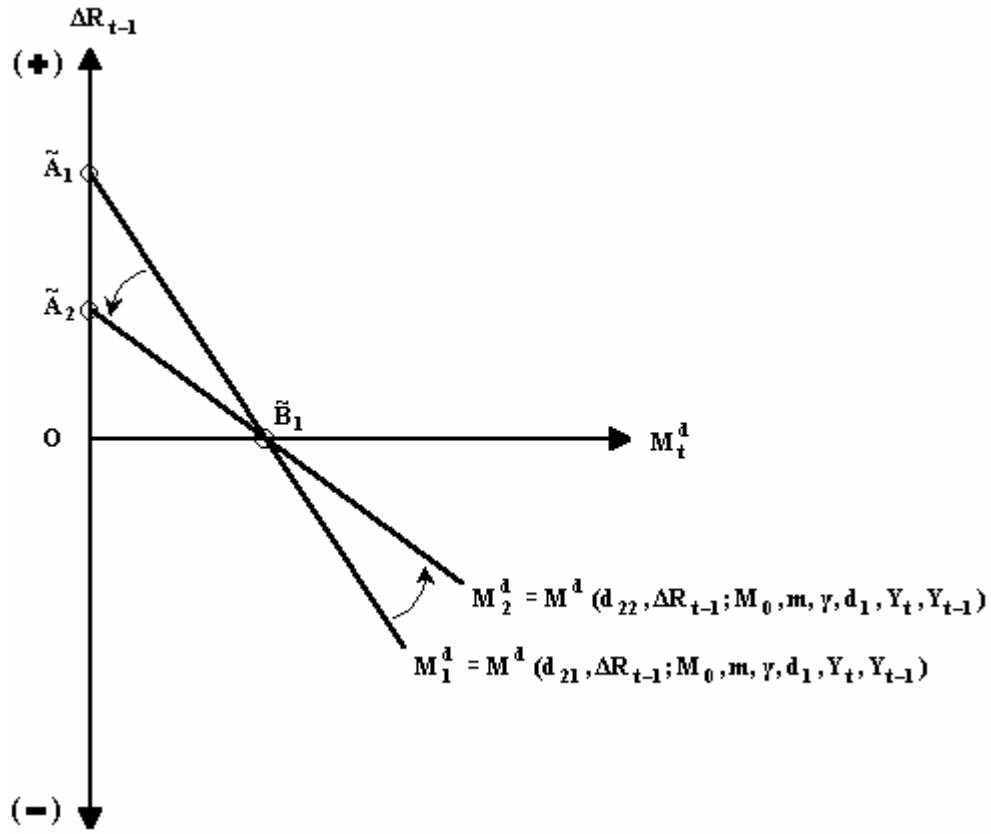
$$=-\frac{b_2}{d_2}\left[\frac{b_0}{(1-c_1+\varphi)^2}+\frac{b_2(\gamma+m)}{d_2(1+\varphi)^2}\frac{M_0\tilde{m}^{t+4}}{\left(\tilde{m}^3+a_2\tilde{m}^2+a_1\tilde{m}+a_0\right)^2}(1+m-1+\gamma)\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\partial\tilde{Y}_t^{ae}}{\partial d_1}=-\frac{b_2}{d_2}\left[\frac{b_0}{(1-c_1+\varphi)^2}+\frac{b_2}{d_2(1+\varphi)^2}\frac{M_0\tilde{m}^{t+4}}{\left(\tilde{m}^3+a_2\tilde{m}^2+a_1\tilde{m}+a_0\right)^2}\right]<0 \qquad \textit{(5.103)}$$

Από την παραπάνω σχέση, και δεδομένου ότι $b_0 > 0$, $0 < c_1 < 1$, $\varphi > 0$, $0 < \gamma < 1$, $M_0 > 0$, $0 < m < 1$, $\tilde{m} = 1 + m > 1$, $d_1 > 0$, $d_2 < 0$, $a_0 < 0$, $a_1 > 0$ & $a_2 < 0$, γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι η μερική παράγωγος του εισοδήματος ισορροπίας ως προς το συντελεστή d_1 αποτελεί, ένα αρνητικό μέγεθος, επιβεβαιώνοντας έτσι την θεωρητική ανάλυση που προηγήθηκε του προσδιορισμού της μερικής παραγώγου $\partial\tilde{Y}_t^{ae}/\partial d_1$.

(ε) ***Ο συντελεστής d_2***

Έχοντας προσδιορίσει τη σχέση που υπάρχει ανάμεσα στο εισόδημα ισορροπίας ($\tilde{Y}_t^{ae}$) και τον συντελεστή d_1, στη συνέχεια της ανάλυσής μας θα διερευνήσουμε την σχέση που υπάρχει μεταξύ του συντελεστή d_2 [ο οποίος μας δείχνει την ευαισθησία της ζήτησης χρήματος (M^d) στις προσδοκώμενες μεταβολές του επιτοκίου (ΔR_t^e)] και του εισοδήματος ισορροπίας. Ξεκινώντας θα διερευνήσουμε τις επιπτώσεις μίας μείωσης της τιμής του συντελεστή d_2 (για παράδειγμα από – 2 σε – 3) πάνω τόσο στη ζήτηση χρήματος για κερδοσκοπία όσο και στη συνολική ζήτηση χρήματος.



Δ – 5.13

Προ της μειώσεως της τιμής του συντελεστή d_2, η συνολική ζήτηση χρήματος δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$M_t^d = (1-\gamma) M_0 (1+m)^{t-1} + d_1 \Delta Y_t + \gamma\, d_1 Y_{t-1} + \gamma\, d_{21} \Delta R_{t-1} \qquad \textit{(5.104)}$$

Η παραπάνω σχέση παρουσιάζεται γραφικά στο διάγραμμα Δ – 5.13 μέσω της καμπύλης M_1^d, η οποία τέμνει τον κατακόρυφο και τον οριζόντιο άξονα στα σημεία $(O, \tilde{A}_1)$ & $(\tilde{B}_1, O)$ αντιστοίχως, με $\tilde{A}_1 = -\left[(1-\gamma) M_0 (1+m)^{t-1} + d_1 (\Delta Y_t + \gamma\, Y_{t-1})\right] / \gamma d_{21}$ και $\tilde{B}_1 = (1-\gamma) M_0 (1+m)^{t-1} + d_1 (\Delta Y_t + \gamma\, Y_{t-1})$.

Η μείωση του συντελεστή d_2 από d_{21} σε d_{22} θα έχει ως συνέπεια την μετατόπιση του σημείου τομής της καμπύλης M^d με τον κατακόρυφο άξονα, από το $(O, \tilde{A}_1)$ στο σημείο $(O, \tilde{A}_2)$, όπου $\tilde{A}_2 = -\left[(1-\gamma) M_0 (1+m)^{t-1} + d_1 (\Delta Y_t + \gamma\, Y_{t-1})\right] / \gamma d_{22}$. Και αυτό διότι:

$$d_{21} > d_{22} \Rightarrow 1/d_{21} < 1/d_{22} \Rightarrow -\left[(1-\gamma) M_0 (1+m)^{t-1} + d_1 (\Delta Y_t + \gamma\, Y_{t-1})\right] / \gamma d_{21} >$$

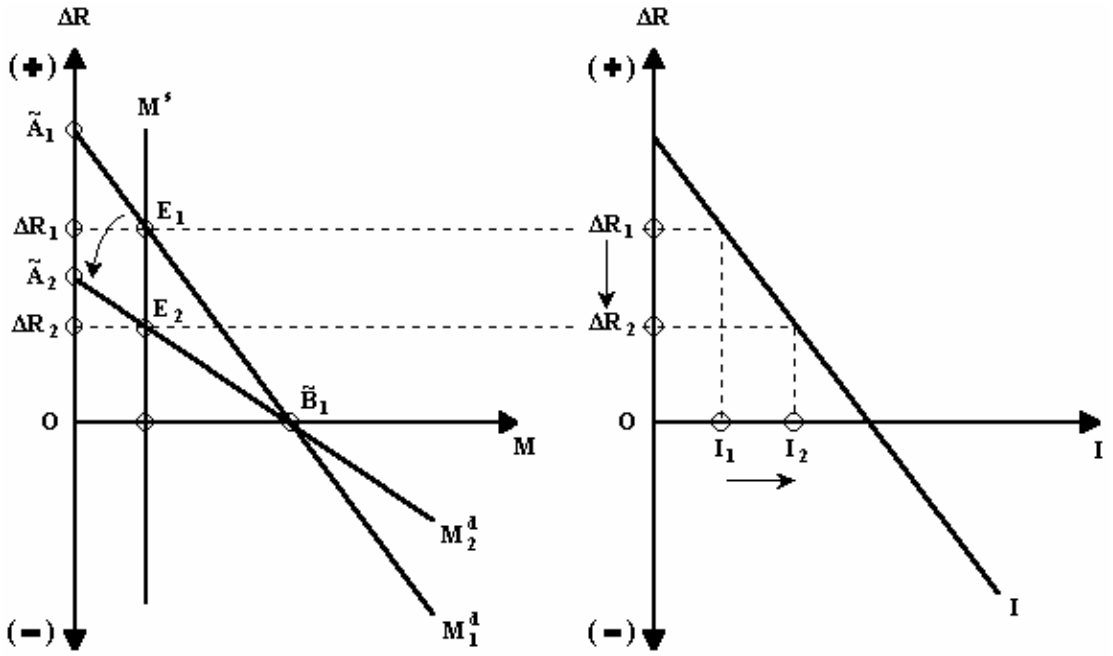
$$> -\left[(1-\gamma) M_0 (1+m)^{t-1} + d_1 (\Delta Y_t + \gamma\, Y_{t-1})\right] / \gamma d_{22} \Rightarrow \tilde{A}_1 > \tilde{A}_2$$

Το σημείο τομής με τον οριζόντιο άξονα παραμένει ωστόσο σταθερό, καθώς το μέγεθος $\tilde{B}_1$ είναι ανεξάρτητο του συντελεστή d_2.

Όπως προκύπτει από την παραπάνω ανάλυση, η μείωση της τιμής του συντελεστή d_2 από d_{21} σε d_{22} προκαλεί την αριστερόστροφη περιστροφή της καμπύλης M^d περί του σημείου $(\widetilde{B}_1, O)$, από τη θέση M_1^d στη θέση M_2^d. Οι επιπτώσεις αυτής της μετατόπισης της καμπύλης M^d πάνω στην επιτοκιακή διαφορά ισορροπίας, και κατ' επέκταση πάνω στις επενδύσεις και το εισόδημα ισορροπίας, εξαρτώνται από τη σχετική θέση του σημείου ισορροπίας της αγοράς χρήματος ως προς το σημείο $\widetilde{B}_1$. Πιο συγκεκριμένα μπορούμε να διακρίνουμε μεταξύ των ακόλουθων περιπτώσεων:

<u>1η Περίπτωση : $\Delta R_{t-1} > 0$</u>

Στα πλαίσια της πρώτης περίπτωσης θα υποθέσουμε ότι προ της μειώσεως της τιμής του συντελεστή d_2, η αγορά χρήματος ισορροπεί στο σημείο E_1, στο σημείο δηλαδή τομής της αρχικής καμπύλης ζήτησης χρήματος M_1^d με την καμπύλη προσφοράς χρήματος M^s, το οποίο εντοπίζεται δεξιά του σημείου $\widetilde{B}_1$. Από το σημείο E_1 προκύπτει το θετικό επίπεδο της επιτοκιακής διαφοράς ισορροπίας ΔR_1, στο οποίο αντιστοιχεί ένα επίπεδο επενδύσεων ίσο με I_1.



Δ – 5.14

Η περιστροφή της καμπύλης ζήτησης χρήματος περί του σημείου $\widetilde{B}_1$, λόγω της μείωσης της τιμής του συντελεστή d_2 από d_{21} σε d_{22}, έχει ως συνέπεια την μετατόπιση του σημείου ισορροπίας της αγοράς χρήματος από το E_1 στο E_2 (στο σημείο δηλαδή τομής της καμπύλης M_2^d με την καμπύλη προσφοράς χρήματος M^s), προκαλώντας έτσι τη μείωση της επιτοκιακής διαφοράς ισορροπίας από ΔR_1 σε ΔR_2. Η μείωση της επιτοκιακής διαφοράς οδηγεί με τη σειρά της την αύξηση των επενδύσεων από I_1 σε I_2, κάτι που προκαλεί την αύξηση της συνολικής ζήτησης και οδηγεί, με δεδομένη τη συνολική προσφορά, στην αύξηση του εισοδήματος ισορροπίας.

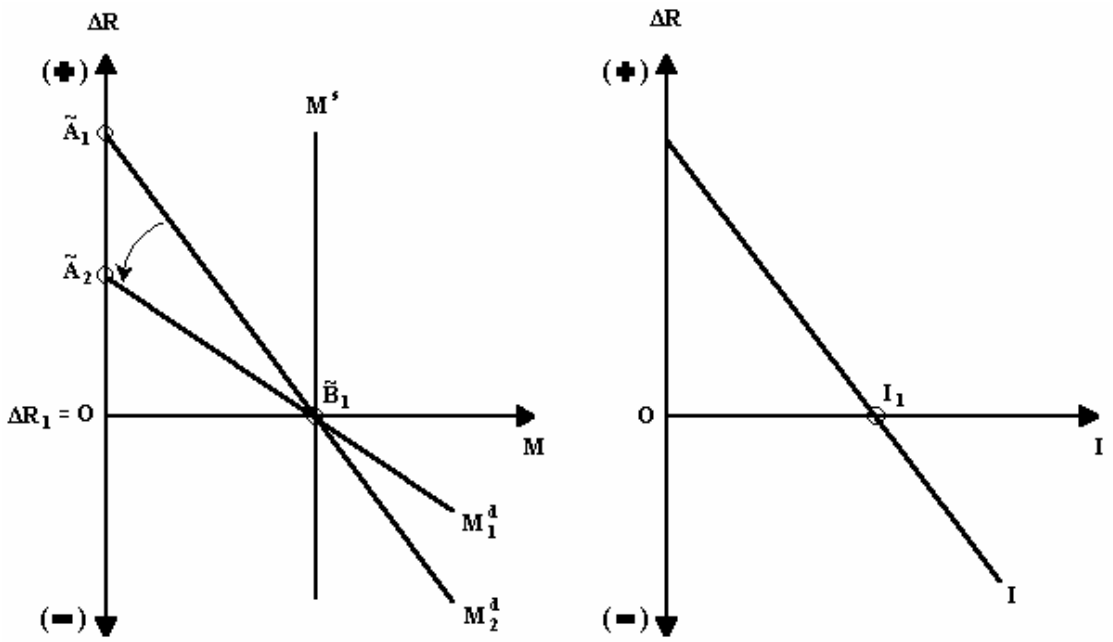
Όπως διαπιστώνουμε, στην περίπτωση που η επιτοκιακή διαφορά (όπως αυτή διαμορφώνεται στα πλαίσια της αγοράς χρήματος) συνιστά ένα θετικό μέγεθος, η μείωση της τιμής του συντελεστή d_2 αναμένεται να οδηγήσει σε αύξηση του εισοδήματος ισορροπίας. Με άλλα λόγια στην περίπτωση που $\Delta R_{t-1} > 0$, αναμένουμε ότι:

$$\frac{\partial \widetilde{Y}_t^{ae}}{\partial d_2} < 0 \qquad \textit{(5.105.1)}$$

<u>2η Περίπτωση : $\Delta R_{t-1} = 0$</u>

Στην περίπτωση που το σημείο ισορροπίας της αγοράς χρήματος ταυτίζεται με το σημείο $\widetilde{B}_1$, η επιτοκιακή διαφορά ισορροπίας η οποία διαμορφώνεται ισούται με το μηδέν. Με άλλα λόγια αρχικά θα έχουμε ότι $\Delta R_1 = 0$. Όπως προκύπτει και από το γράφημα Δ – 5.15, βάσει αυτής της επιτοκιακής διαφοράς προκύπτει ένα επίπεδο επενδύσεων I_1. Η περιστροφή της καμπύλης ζήτησης χρήματος, λόγω μείωσης της τιμής του συντελεστή d_2, περί του σημείου $\widetilde{B}_1$ από τη θέση M_1^d στη θέση M_2^d, αφήνει όπως διαπιστώνουμε ανεπηρέαστη την ισορροπία στην αγορά χρήματος. Το γεγονός ότι η επιτοκιακή διαφορά ισορροπίας παραμένει σταθερή, μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η μείωση της τιμής του συντελεστή d_2 δεν επηρεάζει τόσο το ύψος των επενδύσεων όσο και το επίπεδο του εισοδήματος ισορροπίας. Με άλλα λόγια στην περίπτωση που ισχύει ότι $\Delta R_{t-1} = 0$, η μερική παράγωγος του εισοδήματος ισορροπίας ως προς d_2 αναμένεται να έχει ως ακολούθως:

$$\frac{\partial \widetilde{Y}_t^{ae}}{\partial d_2} = 0 \qquad \textit{(5.105.2)}$$



Δ – 5.15

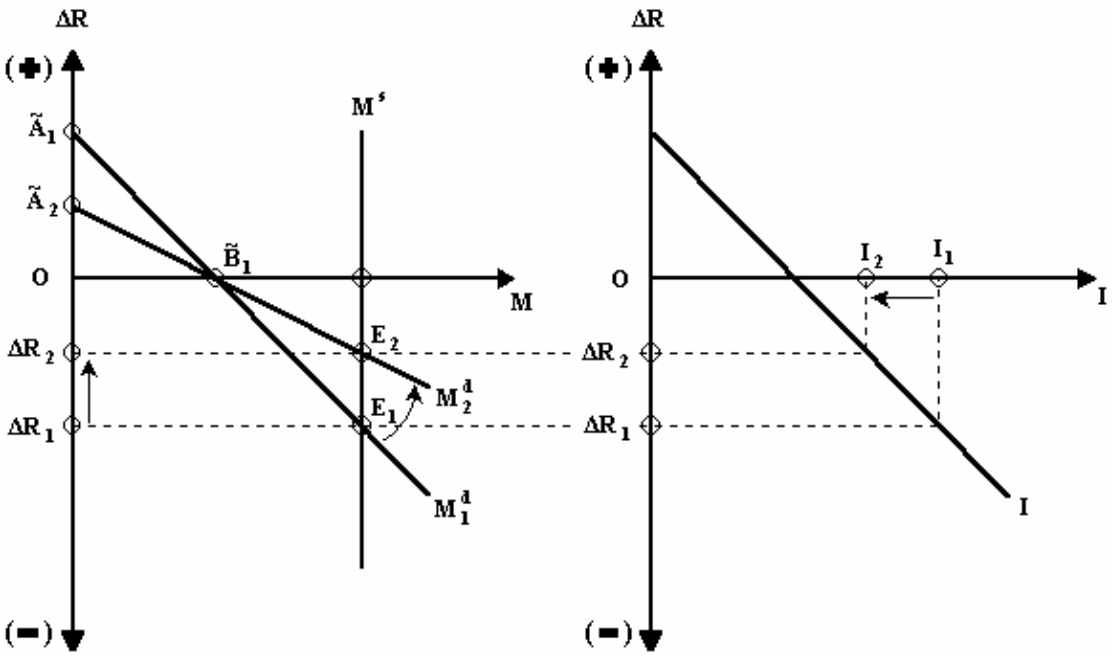
3η Περίπτωση : $\Delta R_{t-1} < 0$

Στα πλαίσια της τρίτης περίπτωσης υποθέτουμε ότι το σημείο ισορροπίας της αγοράς χρήματος εντοπίζεται προς τα δεξιά του σημείου $\widetilde{B}_1$. Πιο συγκεκριμένα θα υποθέσουμε ότι αρχικά η αγορά χρήματος ισορροπεί στο σημείο E_1 του γραφήματος Δ – 5.16 στο σημείο δηλαδή τομής των καμπυλών M_1^d και M^s. Από το σημείο αυτό διαμορφώνεται το αρνητικό επίπεδο επιτοκιακής διαφοράς ισορροπίας ΔR_1, βάσει του οποίου προκύπτει το αρχικό επίπεδο επενδύσεων I_1.

Η περιστροφή της καμπύλης ζήτησης χρήματος περί του σημείου $\widetilde{B}_1$ από τη θέση M_1^d στη θέση M_2^d, η οποία προκύπτει ως αποτέλεσμα της μείωσης του συντελεστή d_2, οδηγεί την αγορά χρήματος σε κατάσταση ανισορροπίας. Και αυτό διότι με την μετατόπιση της καμπύλης ζήτησης χρήματος, εμφανίζεται μία υπερβάλλουσα ζήτηση χρήματος στο ύψος της αρχικής επιτοκιακής διαφοράς ισορροπίας ΔR_1. Η ισορροπία στην αγορά χρήματος αποκαθίσταται στο σημείο E_2, στο σημείο δηλαδή τομής της νέας καμπύλης M_2^d και της καμπύλης προσφοράς χρήματος, στο οποίο αντιστοιχεί το υψηλότερο επίπεδο της επιτοκιακής διαφοράς ισορροπίας ΔR_2. Ως αποτέλεσμα της αύξησης της επιτοκιακής διαφοράς ισορροπίας από ΔR_1 σε ΔR_2, το επίπεδο των επενδύσεων μειώνεται από I_1 σε I_2, κάτι που οδηγεί και στη μείωση της συνολικής ζήτησης. Με δεδομένη τη συνολικά προσφερόμενη ποσότητα, η μείωση της συνολικής ζήτησης θα οδηγήσει αναπόφευκτα στη μείωση και του επιπέδου του εισοδήματος ισορροπίας.

Όπως προκύπτει από την παραπάνω ανάλυση, στην περίπτωση που $\Delta R_{t-1} < 0$ η μείωση της τιμής του συντελεστή d_2 αναμένεται να οδηγήσει στη μείωση του εισοδήματος ισορροπίας. Σε μαθηματικούς όρους αναμένουμε δηλαδή ότι:

$$\partial \widetilde{Y}_t^{ae} / \partial d_2 > 0 \qquad \textbf{\textit{(5.105.3)}}$$



Δ – 5.16

Από την ανάλυση που προηγήθηκε γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι το πρόσημο της μερικής παραγώγου του εισοδήματος ισορροπίας ως προς το συντελεστή d_2 θα είναι μάλλον απροσδιόριστο. Πράγματι από τη σχέση (5.47) προκύπτει ότι:

$$\frac{\partial \tilde{Y}_t^{ae}}{\partial d_2} = -\frac{b_0}{(1-c_1+\varphi)^2}\frac{\partial(1-c_1+\varphi)}{\partial d_2} - \frac{b_2(\gamma+m)}{d_2^2(1+\varphi)}\frac{M_0\tilde{m}^{t+2}}{\tilde{m}^3+a_2\tilde{m}^2+a_1\tilde{m}+a_0} -$$

$$-\frac{b_2(\gamma+m)}{d_2(1+\varphi)^2}\frac{\partial(1+\varphi)}{\partial d_2}\frac{M_0\tilde{m}^{t+2}}{\tilde{m}^3+a_2\tilde{m}^2+a_1\tilde{m}+a_0} -$$

$$-\frac{b_2(\gamma+m)M_0\tilde{m}^{t+2}}{d_2(1+\varphi)}\frac{\partial(\tilde{m}^3+a_2\tilde{m}^2+a_1\tilde{m}+a_0)/\partial d_2}{(\tilde{m}^3+a_2\tilde{m}^2+a_1\tilde{m}+a_0)^2} =$$

$$= \frac{b_0}{(1-c_1+\varphi)^2}\frac{b_2 d_1}{d_2^2} - \frac{b_2(\gamma+m)}{d_2^2(1+\varphi)}\frac{M_0\tilde{m}^{t+2}}{\tilde{m}^3+a_2\tilde{m}^2+a_1\tilde{m}+a_0} +$$

$$+\frac{b_2(\gamma+m)}{d_2(1+\varphi)^2}\frac{b_2 d_1}{d_2^2}\frac{M_0\tilde{m}^{t+2}}{\tilde{m}^3+a_2\tilde{m}^2+a_1\tilde{m}+a_0} -$$

$$-\frac{b_2(\gamma+m)M_0\tilde{m}^{t+2}}{d_2(1+\varphi)}\frac{\frac{\partial a_2}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial d_2}\tilde{m}^2+\frac{\partial a_1}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial d_2}\tilde{m}+\frac{\partial a_0}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial d_2}}{(\tilde{m}^3+a_2\tilde{m}^2+a_1\tilde{m}+a_0)^2} =$$

$$= \frac{b_0}{(1-c_1+\varphi)^2}\frac{\varphi}{d_2} - \frac{b_2(\gamma+m)}{d_2^2(1+\varphi)}\frac{M_0\tilde{m}^{t+2}}{\tilde{m}^3+a_2\tilde{m}^2+a_1\tilde{m}+a_0} +$$

$$+\frac{b_2(\gamma+m)}{d_2(1+\varphi)^2}\frac{\varphi}{d_2}\frac{M_0\tilde{m}^{t+2}}{\tilde{m}^3+a_2\tilde{m}^2+a_1\tilde{m}+a_0} - \frac{b_2(\gamma+m)M_0\tilde{m}^{t+2}}{d_2(1+\varphi)}\times$$

$$\times\frac{-\frac{c_1(1+v)}{(1+\varphi)^2}\frac{b_2 d_1}{d_2^2}\tilde{m}^2+\frac{c_1[v+(1+v)(1-\gamma)]}{(1+\varphi)^2}\frac{b_2 d_1}{d_2^2}\tilde{m}-\frac{vc_1(1-\gamma)}{(1+\varphi)^2}\frac{b_2 d_1}{d_2^2}}{(\tilde{m}^3+a_2\tilde{m}^2+a_1\tilde{m}+a_0)^2} =$$

$$= \frac{b_0}{(1-c_1+\varphi)^2}\frac{\varphi}{d_2} - \frac{b_2(\gamma+m)}{d_2^2(1+\varphi)}\frac{M_0\tilde{m}^{t+2}}{\tilde{m}^3+a_2\tilde{m}^2+a_1\tilde{m}+a_0} +$$

$$+\frac{b_2\,\varphi(\gamma+m)}{d_2^2(1+\varphi)^2}\frac{M_0\tilde{m}^{t+2}}{\tilde{m}^3+a_2\tilde{m}^2+a_1\tilde{m}+a_0} -$$

$$-\frac{b_2(\gamma+m)\varphi\, M_0\tilde{m}^{t+2}}{d_2^2(1+\varphi)^2}\frac{[a_2+(1-\gamma)]\tilde{m}^2+a_1\tilde{m}+a_0}{(\tilde{m}^3+a_2\tilde{m}^2+a_1\tilde{m}+a_0)^2} =$$

$$= \frac{b_0}{(1-c_1+\varphi)^2}\frac{\varphi}{d_2} - \frac{b_2\,\varphi(\gamma+m)}{d_2^2(1+\varphi)^2}\frac{M_0\tilde{m}^{t+2}}{(\tilde{m}^3+a_2\tilde{m}^2+a_1\tilde{m}+a_0)^2}\times$$

$$\times\left\{\frac{1+\varphi}{\varphi}(\tilde{m}^3+a_2\tilde{m}^2+a_1\tilde{m}+a_0)-(\tilde{m}^3+a_2\tilde{m}^2+a_1\tilde{m}+a_0)+\right.$$

$$\left.+[a_2+(1-\gamma)]\tilde{m}^2+a_1\,\tilde{m}+a_0\right\}=$$

$$= \frac{b_0}{(1-c_1+\varphi)^2}\frac{\varphi}{d_2} - \frac{b_2\,\varphi(\gamma+m)}{d_2^2(1+\varphi)^2}\frac{M_0\tilde{m}^{t+2}}{(\tilde{m}^3+a_2\tilde{m}^2+a_1\tilde{m}+a_0)^2}\times$$

$$\times\left[\left(\frac{1}{\varphi}+1-1\right)(\tilde{m}^3+a_2\tilde{m}^2+a_1\tilde{m}+a_0)+a_2\tilde{m}^2+(1-\gamma)\tilde{m}^2+a_1\tilde{m}+a_0\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\partial\tilde{Y}_t^{ae}}{\partial d_2}=\frac{\varphi}{d_2}\left\{\frac{b_0}{(1-c_1+\varphi)^2}-\frac{b_2(\gamma+m)}{d_2(1+\varphi)^2}\frac{M_0\tilde{m}^{t+2}}{(\tilde{m}^3+a_2\tilde{m}^2+a_1\tilde{m}+a_0)^2}\times\right.$$

$$\left.\times\left[\frac{1+\varphi}{\varphi}(\tilde{m}^3+a_2\tilde{m}^2+a_1\tilde{m}+a_0)-(\gamma+m)\tilde{m}^2\right]\right\} \qquad \textbf{\textit{(5.106)}}$$

Από την σχέση (5.106), και δεδομένου ότι $b_0 > 0$, $M_0 > 0$, $b_2 < 0$, $0 < c_1,\gamma,m < 1$, $\varphi > 0$, $\tilde{m} = 1+m > 1$, $d_1 > 0$, $d_2 < 0$, $a_0 < 0$, $a_1 > 0$ & $a_2 < 0$, γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι το πρόσημο της μερικής παραγώγου του εισοδήματος ισορροπίας ως προς το συντελεστή d_2 είναι απροσδιόριστο, επιβεβαιώνοντας έτσι την θεωρητική ανάλυση που προηγήθηκε του προσδιορισμού της μερικής παραγώγου $\partial\tilde{Y}_t^{ae}/\partial d_2$.

(στ) ***Ο ρυθμός νομισματικής επέκτασης (m)***

Προτού διερευνήσουμε την επίπτωση μίας απειροελάχιστης μεταβολής μόνο του συντελεστή m, ο οποίος είναι απολύτως ελεγχόμενος από την Κεντρική Τράπεζα και ο οποίος μας δείχνει το ρυθμό μεγέθυνσης της προσφοράς χρήματος, θα διερευνήσουμε τις επιπτώσεις της μεταβολής του καταρχήν πάνω στην ισορροπία της αγοράς χρήματος και εν συνεχεία, στο επίπεδο των επενδύσεων.

Η τιμή της επιτοκιακής διαφοράς για την οποία η αγορά χρήματος βρίσκεται σε ισορροπία δίνεται από τη σχέση (5.5). Η μερική παράγωγος της εν λόγω σχέσης ως προς m έχει ως ακολούθως:

$$\frac{\partial(\Delta R_{t-1})}{\partial m} = \frac{M_0}{\gamma d_2}(1+m)^{t-1} + (t-1)\frac{M_0(\gamma+m)}{\gamma d_2}(1+m)^{t-2} =$$

$$= \frac{M_0}{\gamma d_2}(1+m)^{t-1}\left[1+\frac{(t-1)(\gamma+m)}{1+m}\right] = \frac{M_0}{\gamma d_2}(1+m)^{t-1}\left[\frac{1+m+t(\gamma+m)-\gamma-m}{1+m}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\partial(\Delta R_{t-1})}{\partial m} = \frac{M_0}{\gamma d_2}(1+m)^{t-2}\left[1-\gamma+t(\gamma+m)\right] < 0 \;\forall\, t \qquad \textbf{\textit{(5.107)}}$$

Όπως προκύπτει και από την παραπάνω σχέση, μία αύξηση (μείωση) του ρυθμού της νομισματικής επέκτασης (m) θα προκαλέσει τη μείωση (αύξηση) της επιτοκιακής διαφοράς ισορροπίας. Ως αποτέλεσμα της μεταβολής αυτής οι επενδύσεις αυξάνονται (μειώνονται), οδηγώντας έτσι στην αύξηση (μείωση) της συνολικής ζήτησης. Με δεδομένη τη συνολική προσφορά, η αύξηση (μείωση) της συνολικής ζήτησης θα οδηγήσει στην άνοδο (πτώση) του εισοδήματος ισορροπίας.

Το συμπέρασμα το οποίο προκύπτει από την παραπάνω ανάλυση είναι ότι μία αύξηση (μείωση) της τιμής του συντελεστή m, αναμένεται να οδηγήσει σε αύξηση (μείωση) του εισοδήματος ισορροπίας. Σε μαθηματικούς όρους αναμένουμε δηλαδή ότι:

$$\frac{\partial \tilde{Y}_t^{ae}}{\partial m} > 0 \qquad \textbf{\textit{(5.108)}}$$

Παίρνοντας τη μερική παράγωγο της σχέσης (5.47) ως προς m βρίσκουμε ότι:

$$\frac{\partial \tilde{Y}_t^{ae}}{\partial m} = \frac{b_2}{d_2(1+\varphi)}\frac{M_0(1+m)^{t+2}}{(1+m)^3+a_2(1+m)^2+a_1(1+m)+a_0}\frac{\partial(\gamma+m)}{\partial m} +$$

$$+\frac{b_2(\gamma+m)}{d_2(1+\varphi)}\frac{M_0}{(1+m)^3+a_2(1+m)^2+a_1(1+m)+a_0}\frac{\partial\left[(1+m)^{t+2}\right]}{\partial m} -$$

$$-\frac{b_2(\gamma+m)}{d_2(1+\varphi)}\frac{M_0(1+m)^{t+2}}{\left[(1+m)^3+a_2(1+m)^2+a_1(1+m)+a_0\right]^2}\times$$

$$\times\frac{\partial\left[(1+m)^3+a_2(1+m)^2+a_1(1+m)+a_0\right]}{\partial m}=$$

$$=\frac{b_2}{d_2(1+\varphi)}\frac{M_0\tilde{m}^{t+2}}{\tilde{m}^3+a_2\tilde{m}^2+a_1\tilde{m}+a_0}+\frac{b_2(\gamma+m)}{d_2(1+\varphi)}\frac{M_0\tilde{m}^{t+1}(t+2)}{\tilde{m}^3+a_2\tilde{m}^2+a_1\tilde{m}+a_0}-$$

$$-\frac{b_2(\gamma+m)}{d_2(1+\varphi)}\frac{M_0\tilde{m}^{t+2}}{\left(\tilde{m}^3+a_2\tilde{m}^2+a_1\tilde{m}+a_0\right)^2}\left(3\tilde{m}^2+2a_2\tilde{m}+a_1\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\partial\tilde{Y}_t^{ae}}{\partial m}=\frac{b_2}{d_2(1+\varphi)}\frac{M_0\tilde{m}^{t+2}}{\tilde{m}^3+a_2\tilde{m}^2+a_1\tilde{m}+a_0}\times$$

$$\times\left[1+\frac{(\gamma+m)(t+2)}{\tilde{m}\left(\tilde{m}^3+a_2\tilde{m}^2+a_1\tilde{m}+a_0\right)}-\frac{(\gamma+m)\left(3\tilde{m}^2+2a_2\tilde{m}+a_1\right)}{\left(\tilde{m}^3+a_2\tilde{m}^2+a_1\tilde{m}+a_0\right)^2}\right] \qquad \textit{(5.109)}$$

Δεδομένου ότι $M_0 > 0$, $\tilde{m}=1+m>1$, $b_2 < 0$, $0 < c_1,\gamma,m < 1$, $\varphi > 0$, $d_1 > 0$, $d_2 < 0$, & $\tilde{m}^3+a_2\tilde{m}^2+a_1\tilde{m}+a_0>0$[29], το πρόσημο της μερικής παράγωγου $\partial\tilde{Y}_t^{ae}/\partial m$ εξαρτάται από το πρόσημο του ευρισκόμενου εντός των αγκυλών όρου. Πιο συγκεκριμένα η μερική παράγωγος $\partial\tilde{Y}_t^{ae}/\partial m$ θα έχει το από οικονομικής απόψεως αναμενόμενο πρόσημο, εάν ικανοποιείται μία από τις παρακάτω συνθήκες:

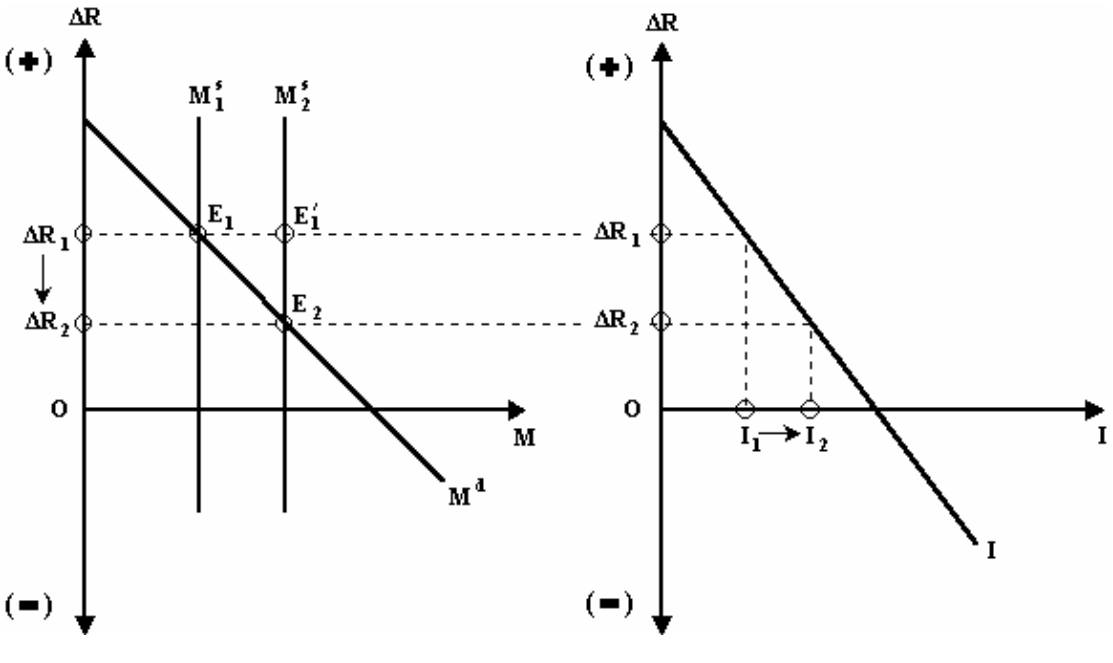
1ον εάν $3\tilde{m}^2+2a_2\tilde{m}+a_1<0$ ή/και

2ον εάν $1+\frac{(\gamma+m)(t+2)}{\tilde{m}\left(\tilde{m}^3+a_2\tilde{m}^2+a_1\tilde{m}+a_0\right)}>\frac{(\gamma+m)\left(3\tilde{m}^2+2a_2\tilde{m}+a_1\right)}{\left(\tilde{m}^3+a_2\tilde{m}^2+a_1\tilde{m}+a_0\right)^2}\quad\forall t$

[29] Η ικανοποίηση της τελευταίας ανισότητας εξασφαλίζει ότι το εισόδημα ισορροπίας, όπως αυτό δίνεται από τη σχέση (5.47), συνιστά ένα θετικό μέγεθος.

(ζ) ***Η αρχική ποσότητα χρήματος (M_0)***

Έχοντας διερευνήσει τις επιπτώσεις της μεταβολής του ρυθμού μεγέθυνσης της προσφοράς χρήματος επί του εισοδήματος ισορροπίας, στην παρούσα ενότητα θα προσδιορίσουμε τις επιπτώσεις επί αυτού του μεγέθους οι οποίες προκαλούνται από την μεταβολή της ποσότητας χρήματος κατά τη χρονική στιγμή t = 0.



Δ – 5.17

Με τη βοήθεια του γραφήματος Δ–5.17 θα επιχειρήσουμε να προσδιορίσουμε το από οικονομικής απόψεως αναμενόμενο πρόσημο της μερικής παραγώγου $\partial \tilde{Y}_t^{ae} / \partial M_0$. Πιο συγκεκριμένα θα ξεκινήσουμε υποθέτοντας ότι η αγορά χρήματος ισορροπεί αρχικά στο σημείο E_1, στο σημείο δηλαδή τομής των καμπυλών προσφοράς και ζήτησης χρήματος. Από το σημείο E_1 προκύπτει η επιτοκιακή διαφορά ισορροπίας $ΔR_1$, βάσει της οποίας προσδιορίζεται το αρχικό επίπεδο επενδύσεων I_1.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η αρχική ποσότητα χρήματος M_0 αυξάνεται. Η αύξηση αυτή της ποσότητας M_0 θα προκαλέσει την μετατόπιση της καμπύλης προσφοράς χρήματος M_1^s, η οποία αποτελεί τη γραφική απεικόνιση της σχέσης (3.12), στη θέση M_2^s. Η προς τα δεξιά μετατόπιση της καμπύλης προσφοράς χρήματος οδηγεί, με δεδομένη τη ζήτηση χρήματος, στη μετατόπιση του σημείου ισορροπίας από το σημείο E_1 στο σημείο E_1'. Ωστόσο το σημείο E_1' αποτελεί προσωρινό σημείο ισορροπίας καθώς όντας σ' αυτό, η αγορά χαρακτηρίζεται από μία υπερβάλλουσα προσφορά χρήματος ίση με την απόσταση E_1E'. Η ισορροπία στην αγορά χρήματος αποκαθίσταται καθώς μετακινούμαστε από το σημείο E_1' στο τελικό σημείο ισορροπίας E_2, στο σημείο δηλαδή τομής των καμπυλών M^d και M_2^s. Όπως διαπιστώνουμε, στο νέο σημείο ισορροπίας E_2 αντιστοιχεί η χαμηλότερη τιμή της επιτοκιακής διαφοράς ισορροπίας $ΔR_2$, βάσει της οποίας προκύπτει το χαμηλότερο επίπεδο των επενδύσεων I_2.

Όπως διαπιστώνουμε η αύξηση της αρχικής ποσότητας χρήματος M_0 οδήγησε στην αύξηση των επενδύσεων, η οποία με τη σειρά της θα προκαλέσει την άνοδο της συνολικής ζήτησης και κατ' επέκταση του εισοδήματος ισορροπίας. Με άλλα λόγια αναμένουμε την ικανοποίηση της ακόλουθης σχέσης:

$$\frac{\partial \widetilde{Y}_t^{ae}}{\partial M_0} > 0 \qquad \textit{(5.110)}$$

Τη μερική παράγωγο του εισοδήματος ισορροπίας ως προς την αρχική ποσότητα χρήματος, θα την προσδιορίσουμε με τη βοήθεια της σχέσης (5.47) από την οποία και προκύπτει ότι:

$$\frac{\partial Y^*}{\partial M_0} = \frac{b_2(\gamma + m)}{d_2(1+\varphi)} \frac{\widetilde{m}^{t+2}}{\widetilde{m}^3 + a_2\widetilde{m}^2 + a_1\widetilde{m} + a_0} > 0 \qquad \textit{(5.111)}$$

Όπως διαπιστώνουμε η σχέση (5.110) επαληθεύεται, δηλαδή η μερική παράγωγος $\partial \widetilde{Y}_t^{ae} / \partial M_0$ παρουσιάζει το οικονομικά αναμενόμενο πρόσημο, καθώς ισχύει ότι: $b_2 < 0$, $0 < \gamma < 1$, $0 < m < 1$, $\varphi > 0$, $d_2 < 0$, $\widetilde{m}^3 + a_2\widetilde{m}^2 + a_1\widetilde{m} + a_0 > 0$, $M_0 > 0$ και $\widetilde{m} = 1 + m > 1$.

(η) ***Ο χρόνος (t)***

Σε γενικές γραμμές αναμένουμε την ύπαρξη θετικής σχέσης μεταξύ του χρόνου και του εισοδήματος ισορροπίας. Σε μαθηματικούς όρους αναμένουμε δηλαδή την ικανοποίηση της ακόλουθης σχέσης:

$$\frac{\partial \widetilde{Y}_t^{ae}}{\partial t} > 0 \qquad \textit{(5.112)}$$

Προκειμένου να επαληθεύσουμε την παραπάνω σχέση, δεν έχουμε παρά να υπολογίσουμε από τη σχέση (5.47) τη μερική παράγωγο του εισοδήματος ισορροπίας ως προς το χρόνο. Πιο συγκεκριμένα από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι:

$$\frac{\partial \widetilde{Y}_t^{ae}}{\partial t} = \frac{b_2(\gamma + m)}{d_2(1+\varphi)} \frac{M_0\widetilde{m}^{t+2}\ln(\widetilde{m})}{\widetilde{m}^3 + a_2\widetilde{m}^2 + a_1\widetilde{m} + a_0} \qquad \textit{(5.113)}$$

Από τη σχέση (5.113), και εφόσον $\widetilde{m} = 1 + m > 1$, $\widetilde{m}^3 + a_2\widetilde{m}^2 + a_1\widetilde{m} + a_0 > 0$, $\varphi > 0$, $b_2 < 0$, $0 < \gamma < 1$, $0 < m < 1$, $d_2 < 0$, $M_0 > 0$, γίνεται αντιληπτό ότι $\partial \widetilde{Y}_t^{ae} / \partial t > 0 \; \forall \, t$.

(θ) ***Ο επιταχυντής (ν)***

Μια απειροελάχιστη μεταβολή μόνο της τιμής του επιταχυντή αναμένεται να επηρεάσει μόνο την αγορά προϊόντος και ειδικότερα το επίπεδο των επενδύσεων. Η συνάρτηση των επενδύσεων, όπως αυτή διαμορφώνεται βάσει της υπόθεσης ότι οι

προσδοκίες σχηματίζονται σύμφωνα με το μηχανισμό των αναθεωρούμενων προσδοκιών, δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

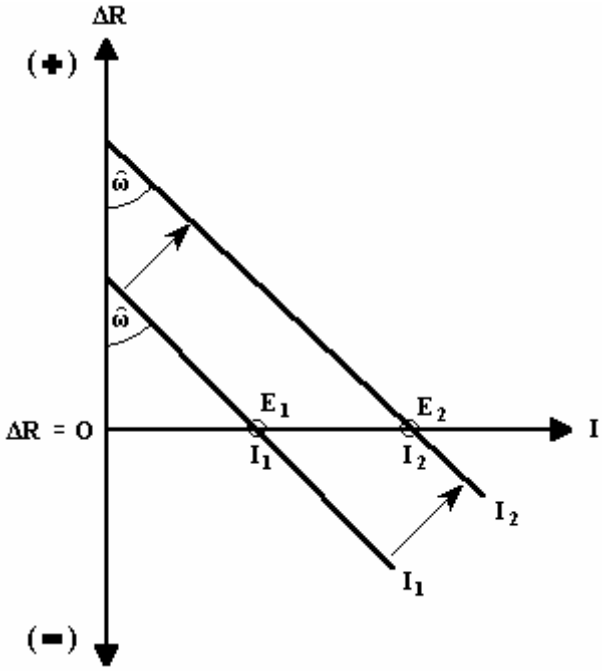
$$I_t = \gamma b_0 + (1-\gamma) I_{t-1} + v c_1 \left(\Delta^2 Y_{t-1} + \gamma \, \Delta Y_{t-2}\right) + b_2 \gamma \Delta R_{t-1}$$

Η παραπάνω σχέση παρουσιάζεται γραφικά στο διάγραμμα Δ – 5.18 μέσω της καμπύλης I_1. Υποθέτοντας ότι η επιτοκιακή διαφορά για την οποία η αγορά χρήματος βρίσκεται σε ισορροπία ισούται με το μηδέν[30], ισχύει δηλαδή ότι $\Delta R = 0$, το αρχικό επίπεδο των επενδύσεων θα δίνεται από το σημείο E_1 και θα ισούται με I_1.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι αυξάνεται η τιμή του επιταχυντή. Δεδομένου ότι η τιμή της παραμέτρου v επηρεάζει τη θέση αλλά όχι και τη κλίση της καμπύλης των επενδύσεων[31], η αύξηση της τιμής της παραμέτρου v θα προκαλέσει την παράλληλη μετατόπιση της καμπύλης I_1. Το γεγονός ότι:

$$\frac{\partial I_t}{\partial v} = c_1 \left(\Delta^2 Y_{t-1} + \gamma \, \Delta Y_{t-2}\right) > 0$$

μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η καμπύλη των επενδύσεων μετατοπίζεται παράλληλα προς τα επάνω και δεξιά, από τη θέση I_1 στη θέση I_2. Με δεδομένο το ύψος της επιτοκιακής διαφοράς, η μετατόπιση αυτή θα προκαλέσει την αύξηση των επενδύσεων, καθώς μετακινούμαστε από το σημείο E_1 στο σημείο E_2, από I_1 σε I_2. Η αύξηση αυτή των επενδύσεων θα οδηγήσει, με την σειρά της, στην αύξηση της συνολικής ζήτησης και κατ' επέκταση του εισοδήματος ισορροπίας.



Δ – 5.18

[30] Το βασικό συμπέρασμα της ανάλυσης μας δεν επηρεάζεται από το πρόσημο της επιτοκιακής διαφοράς ισορροπίας, καθώς ανεξαρτήτως από το ύψος της η προς τα δεξιά μετατόπιση της καμπύλης I_1 οδηγεί στην αύξηση του επιπέδου των επενδύσεων.

[31] Η κλίση της καμπύλης των επενδύσεων επηρεάζεται όπως θυμόμαστε από τους συντελεστών b_2 και γ, οι τιμές των οποίων παραμένουν αμετάβλητες.

Όπως προκύπτει από την παραπάνω ανάλυση, η αύξηση της τιμής του επιταχυντή αναμένεται να προκαλέσει την αύξηση του εισοδήματος ισορροπίας. Σε μαθηματικούς όρους αναμένουμε δηλαδή ότι:

$$\frac{\partial \tilde{Y}_t^{ae}}{\partial v} > 0 \qquad \textbf{\textit{(5.114)}}$$

Υπολογίζοντας από τη σχέση (5.47) τη μερική παράγωγο του εισοδήματος ισορροπίας ως προς v βρίσκουμε ότι:

$$\frac{\partial \tilde{Y}_t^{ae}}{\partial v} = -\frac{b_2(\gamma+m)}{d_2(1+\varphi)} \frac{M_0 \tilde{m}^{t+2}}{\left(\tilde{m}^3 + a_2\tilde{m}^2 + a_1\tilde{m} + a_0\right)^2} \frac{\partial\left(\tilde{m}^3 + a_2\tilde{m}^2 + a_1\tilde{m} + a_0\right)}{\partial v} =$$

$$= -\frac{b_2(\gamma+m)}{d_2(1+\varphi)} \frac{M_0 \tilde{m}^{t+2}}{\left(\tilde{m}^3 + a_2\tilde{m}^2 + a_1\tilde{m} + a_0\right)^2} \left(\frac{\partial a_2}{\partial v}\tilde{m}^2 + \frac{\partial a_1}{\partial v}\tilde{m} + \frac{\partial a_0}{\partial v}\right) =$$

$$= -\frac{b_2(\gamma+m)}{d_2(1+\varphi)} \frac{M_0 \tilde{m}^{t+2}}{\left(\tilde{m}^3 + a_2\tilde{m}^2 + a_1\tilde{m} + a_0\right)^2} \left[-\frac{c_1}{1+\varphi}\tilde{m}^2 + \frac{c_1(2-\gamma)}{1+\varphi}\tilde{m} - \frac{c_1(1-\gamma)}{1+\varphi}\right] =$$

$$= \frac{b_2 c_1(\gamma+m)}{d_2(1+\varphi)^2} \frac{M_0 \tilde{m}^{t+2}}{\left(\tilde{m}^3 + a_2\tilde{m}^2 + a_1\tilde{m} + a_0\right)^2} \left[(1+m)^2 - (2-\gamma)(1+m) + (1-\gamma)\right] =$$

$$= \frac{b_2 c_1(\gamma+m)}{d_2(1+\varphi)^2} \frac{M_0 \tilde{m}^{t+2}}{\left(\tilde{m}^3 + a_2\tilde{m}^2 + a_1\tilde{m} + a_0\right)^2} \left(1 + 2m + m^2 - 2 - 2m + \gamma + \gamma m + 1 - \gamma\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\partial \tilde{Y}_t^{ae}}{\partial v} = \frac{b_2 c_1 m(\gamma+m)^2}{d_2(1+\varphi)^2} \frac{M_0 \tilde{m}^{t+2}}{\left(\tilde{m}^3 + a_2\tilde{m}^2 + a_1\tilde{m} + a_0\right)^2} \qquad \textbf{\textit{(5.115)}}$$

Δεδομένου ότι $b_2 < 0$, $0 < c_1 < 1$, $\varphi > 0$, $0 < \gamma < 1$, $d_2 < 0$, $M_0 > 0$, $0 < m < 1$, $\tilde{m}^3 + a_2\tilde{m}^2 + a_1\tilde{m} + a_0 > 0$ & $\tilde{m} = 1 + m > 1$, από τη σχέση (5.115) γίνεται αντιληπτό ότι η μερική παράγωγος $\partial \tilde{Y}_t^{ae} / \partial v$ παρουσιάζει το, από οικονομικής απόψεως, αναμενόμενο πρόσημο καθώς επαληθεύεται η σχέση (5.114).

(ι) ***Ο συντελεστής γ***

Προτού διερευνήσουμε τις επιπτώσεις μίας απειροελάχιστης μεταβολής της τιμής του συντελεστή γ πάνω στο εισόδημα ισορροπίας, θα διερευνήσουμε τις επιπτώσεις της μεταβολής του πάνω στις επενδύσεις.

Όπως θυμόμαστε η συνάρτηση των επενδύσεων και η επιτοκιακή διαφορά για την οποία η αγορά χρήματος βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$I_t = \gamma b_0 + (1-\gamma) I_{t-1} + vc_1 \left(\Delta^2 Y_{t-1} + \gamma\, \Delta Y_{t-2}\right) + b_2 \gamma\, \Delta R_{t-1} \qquad \textit{(5.116)}$$

&

$$\Delta R_{t-1} = \left[\frac{M_0(\gamma + m)}{\gamma d_2}\right](1+m)^{t-1} - \frac{d_1}{\gamma d_2}\Delta Y_t - \frac{d_1}{d_2} Y_{t-1} \qquad \textit{(5.5)}$$

Από τις δύο παραπάνω σχέσεις γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι η παράμετρος γ επηρεάζει τις επενδύσεις τόσο άμεσα όσο και έμμεσα, μέσα από την μεταβολή της επιτοκιακής διαφοράς ισορροπίας. Υπολογίζοντας τη μερική παράγωγο της συνάρτησης των επενδύσεων ως προς την παράμετρο γ, θα προσπαθήσουμε στη συνέχεια να προσδιορίσουμε την κατεύθυνση προς την οποία θα κινηθούν οι επενδύσεις μετά από μία απειροελάχιστη μεταβολή της τιμής της παραμέτρου γ.

Από τη σχέση (5.116) προκύπτει ότι:

$$\frac{\partial I_t}{\partial \gamma} = b_0 - I_{t-1} + vc_1 \Delta Y_{t-2} + b_2 \Delta R_{t-1} + b_2 \gamma \frac{\partial \Delta R_{t-1}}{\partial \gamma} =$$

$$= b_0 - I_{t-1} + vc_1 \Delta Y_{t-2} + b_2 \Delta R_{t-1} + b_2 \gamma \left\{(1+m)^{t-1} \frac{\partial\left[M_0(\gamma+m)/\gamma d_2\right]}{\partial \gamma} + \frac{d_1}{\gamma^2 d_2}\Delta Y_t\right\} =$$

$$\overset{(5.5)}{=} b_0 - I_{t-1} + vc_1 \Delta Y_{t-2} + \frac{b_2(\gamma+m)}{\gamma d_2} M_0 (1+m)^{t-1} - \frac{b_2 d_1}{\gamma d_2}\Delta Y_t - \frac{b_2 d_1}{d_2} Y_{t-1} +$$

$$+ b_2 \gamma \left\{-\frac{m\, M_0 (1+m)^{t-1}}{\gamma^2 d_2} + \frac{d_1}{\gamma^2 d_2}\Delta Y_t\right\} =$$

$$= b_0 - I_{t-1} + vc_1 \Delta Y_{t-2} + \frac{b_2}{d_2} M_0 (1+m)^{t-1} + \frac{b_2 m}{\gamma d_2} M_0 (1+m)^{t-1} - \frac{b_2 d_1}{\gamma d_2}\Delta Y_t -$$

$$- \frac{b_2 d_1}{d_2} Y_{t-1} - \frac{b_2 m}{\gamma d_2} M_0 (1+m)^{t-1} + \frac{b_2 d_1}{\gamma d_2}\Delta Y_t =$$

$$= b_0 - I_{t-1} + vc_1\Delta Y_{t-2} + \frac{b_2}{d_2} M_0 \left(1+m\right)^{t-1} - \frac{b_2 d_1}{d_2} Y_{t-1} =$$

$$= b_0 - I_{t-1} + vc_1\Delta Y_{t-2} + \frac{b_2}{d_2} \left[M_0 \left(1+m\right)^{t-1} - d_1 Y_{t-1}\right] \underset{(3.13)}{\overset{(3.12)}{\Rightarrow}}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\partial I_t}{\partial \gamma} = b_0 - I_{t-1} + vc_1\Delta Y_{t-2} + \frac{b_2}{d_2}\left[M^s_{t-1} - \left(M^d_{tr}\right)_{t-1}\right] \qquad \textbf{\textit{(5.117)}}$$

Δεδομένου ότι $b_0 > 0$, $I_{t-1} > 0$, $0 < c_1 < 1$, $v > 0$, $\Delta Y_{t-2} > 0$, $b_2 < 0$, $d_2 < 0$ και $M^s_{t-1} - \left(M^d_{tr}\right)_{t-1}$, από τη σχέση (5.117) γίνεται αντιληπτό ότι τι πρόσημο της μερικής παραγώγου $\partial I_t / \partial \gamma$ είναι απροσδιόριστο. Με άλλα λόγια δεν γνωρίζουμε εάν μία αύξηση (μείωση) της τιμής της παραμέτρου γ επιδρά θετικά ή αρνητικά στο ύψος των επενδύσεων. Ως εκ τούτου δεν μπορούμε να γνωρίζουμε και τις επιπτώσεις της μεταβολής της πάνω στο επίπεδο του εισοδήματος ισορροπίας.

Προκειμένου να επιβεβαιώσουμε το παραπάνω συμπέρασμα, θα υπολογίσουμε από τη σχέση (5.47) την μερική παράγωγο $\partial \tilde{Y}^{ae}_t / \partial \gamma$. Πιο συγκεκριμένα από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι:

$$\frac{\partial \tilde{Y}^{ae}_t}{\partial \gamma} = \frac{b_2}{d_2\left(1+\varphi\right)} \frac{M_0 \tilde{m}^{t+2}}{\tilde{m}^3 + a_2\tilde{m}^2 + a_1\tilde{m} + a_0} - \frac{b_2\left(\gamma + m\right)}{d_2\left(1+\varphi\right)} \times$$

$$\times \frac{M_0 \tilde{m}^{t+2}}{\left(\tilde{m}^3 + a_2\tilde{m}^2 + a_1\tilde{m} + a_0\right)^2} \left(\frac{\partial a_2}{\partial \gamma}\tilde{m}^2 + \frac{\partial a_1}{\partial \gamma}\tilde{m} + \frac{\partial a_0}{\partial \gamma}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \tilde{Y}^{ae}_t}{\partial \gamma} = \frac{b_2}{d_2\left(1+\varphi\right)} \frac{M_0 \tilde{m}^{t+2}}{\tilde{m}^3 + a_2\tilde{m}^2 + a_1\tilde{m} + a_0} - \frac{b_2\left(\gamma + m\right)}{d_2\left(1+\varphi\right)} \times$$

$$\times \frac{M_0 \tilde{m}^{t+2}}{\left(\tilde{m}^3 + a_2\tilde{m}^2 + a_1\tilde{m} + a_0\right)^2} \left[\tilde{m}^2 - \frac{c_1\left(1+v\right)}{1+\varphi}\tilde{m} + \frac{c_1 v}{1+\varphi}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\partial \tilde{Y}^{ae}_t}{\partial \gamma} = \tilde{O}_1 - \tilde{O}_2 \qquad \textbf{\textit{(5.118)}}$$

όπου

$$\widetilde{O}_1 = \frac{b_2}{d_2(1+\varphi)} \frac{M_0 \widetilde{m}^{t+2}}{\widetilde{m}^3 + a_2\widetilde{m}^2 + a_1\widetilde{m} + a_0} \quad \&$$

$$\widetilde{O}_2 = \frac{b_2(\gamma+m)}{d_2(1+\varphi)} \frac{M_0(1+m)^{t+2}}{\left(\widetilde{m}^3 + a_2\widetilde{m}^2 + a_1\widetilde{m} + a_0\right)^2} \left[\widetilde{m}^2 - \frac{c_1(1+v)}{1+\varphi}\widetilde{m} + \frac{c_1 v}{1+\varphi}\right]$$

Όπως διαπιστώνουμε το πρόσημο της μερικής παραγώγου $\partial\widetilde{Y}_t^{ae}/\partial\gamma$ εξαρτάται από το πρόσημο των μεγεθών $\widetilde{O}_1$ & $\widetilde{O}_2$. Δεδομένου ότι $0 < c_1 < 1$, $\varphi > 0$, $0 < \gamma < 1$, $b_2 < 0$, $d_2 < 0$, $\widetilde{m}^3 + a_2\widetilde{m}^2 + a_1\widetilde{m} + a_0 > 0$, $M_0 > 0$, $0 < m < 1$ & $\widetilde{m} = 1 + m > 1$, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι $\widetilde{O}_1 > 0$ ενώ το πρόσημο του μεγέθους $\widetilde{O}_2$ εξαρτάται από το πρόσημο του ευρισκομένου εντός της αγκύλης πολυωνύμου:

$$\widetilde{P}(\widetilde{m}) = \widetilde{m}^2 - \frac{c_1(1+v)}{1+\varphi}\widetilde{m} + \frac{c_1 v}{1+\varphi}$$

Ειδικότερα εάν η διακρίνουσα ($\widetilde{\Delta}$) της δευτεροβάθμιας εξίσωσης $\widetilde{P}(\widetilde{m}) = 0$ είναι μικρότερη του μηδενός θα ισχύει ότι $\widetilde{P}(\widetilde{m}) > 0$, ενώ αν $\widetilde{\Delta} > 0$ τότε θα μπορούσαμε να προσδιορίσουμε ένα διάστημα τιμών $(\widetilde{m}_1, \widetilde{m}_2)$, όπου $\widetilde{m}_1, \widetilde{m}_2$ δύο πραγματικές και διακριτές ρίζες του πολυωνύμου $\widetilde{P}(\widetilde{m})$, εντός του οποίου θα ισχύει ότι $\widetilde{P}(\widetilde{m}) < 0$.

Η διακρίνουσα της εξίσωσης $\widetilde{P}(\widetilde{m}) = 0$ έχει ως ακολούθως:

$$\widetilde{\Delta} = c_1\left[c_1(1+v)^2 - 4\,v\,(1+\varphi)\right]$$

και βάσει του μεγέθους της μπορούμε να διακρίνουμε μεταξύ τριών περιπτώσεων:

1ον Εάν $\frac{(1+v)^2}{v} > \frac{4(1+\varphi)}{c_1} \rightarrow \widetilde{\Delta} > 0$ και διακρίνουμε μεταξύ δύο υποπεριπτώσεων:

(α) $\widetilde{P}(\widetilde{m}) < 0$ εάν $\widetilde{m} \in (\widetilde{m}_1, \widetilde{m}_2) \rightarrow \widetilde{O}_2 < 0 \rightarrow \frac{\partial\widetilde{Y}_t^{ae}}{\partial\gamma} > 0$ και

(β) $\widetilde{P}(\widetilde{m}) > 0$ εάν $\widetilde{m} \notin (\widetilde{m}_1, \widetilde{m}_2) \rightarrow \widetilde{O}_2 > 0 \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial\widetilde{Y}_t^{ae}}{\partial\gamma} > 0 \text{ εάν } \widetilde{O}_1 > \widetilde{O}_2 \\ \frac{\partial\widetilde{Y}_t^{ae}}{\partial\gamma} < 0 \text{ εάν } \widetilde{O}_1 < \widetilde{O}_2 \end{cases}$

$$\textit{2}^{ov}\ \text{Εάν}\ \frac{(1+v)^2}{v} < \frac{4(1+\varphi)}{c_1} \rightarrow \tilde{\Delta} < 0 \rightarrow \tilde{P}(\tilde{m}) > 0 \rightarrow \tilde{O}_2 > 0 \rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{Y}_t^{ae}}{\partial \gamma} > 0\ \text{εάν}\ \tilde{O}_1 > \tilde{O}_2 \\ \dfrac{\partial \tilde{Y}_t^{ae}}{\partial \gamma} < 0\ \text{εάν}\ \tilde{O}_1 < \tilde{O}_2 \end{cases}$$

$\textit{3}^{ov}$ Εάν $\frac{(1+v)^2}{v} = \frac{4(1+\varphi)}{c_1} \rightarrow \tilde{\Delta} = 0$, κάτι που σημαίνει ότι το πολυώνυμο $\tilde{P}(\tilde{m})$ έχει δύο πραγματικές και ίσες ρίζες $\tilde{m}^*$ και διακρίνουμε μεταξύ δύο υποπεριπτώσεων:

(α) $$\tilde{P}(\tilde{m}) > 0\ \text{εάν}\ \tilde{m} \in (\tilde{m}^*, +\infty) \rightarrow \tilde{O}_2 > 0 \rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{Y}_t^{ae}}{\partial \gamma} > 0\ \text{εάν}\ \tilde{O}_1 > \tilde{O}_2 \\ \dfrac{\partial \tilde{Y}_t^{ae}}{\partial \gamma} < 0\ \text{εάν}\ \tilde{O}_1 < \tilde{O}_2 \end{cases}$$

(β) $$\tilde{P}(\tilde{m}) < 0\ \text{εάν}\ \tilde{m} \in (1, \tilde{m}^*) \rightarrow \tilde{O}_2 < 0 \rightarrow \frac{\partial \tilde{Y}_t^{ae}}{\partial \gamma} > 0$$

Όπως προκύπτει από την παραπάνω ανάλυση το πρόσημο της μερικής παραγώγου $\partial \tilde{Y}_t^{ae} / \partial \gamma$ είναι απροσδιόριστο και ως εκ τούτου δεν μπορούμε να γνωρίζουμε την επίδραση μίας απειροελάχιστης μεταβολής της παραμέτρου γ πάνω στο εισόδημα ισορροπίας.

5.1.6 Επηρεασμός των δυναμικών ιδιοτήτων του υποδείγματος από μεταβολές των τιμών των παραμέτρων του

Έχοντας προσδιορίσει τις επιπτώσεις της μεταβολής της τιμής μίας εκ των σταθερών συντελεστών του υποδείγματος πάνω στο επίπεδο του εισοδήματος ισορροπίας, στην παρούσα ενότητα θα προσδιορίσουμε τις επιπτώσεις ανάλογων μεταβολών πάνω στις δυναμικές ιδιότητες του υποδείγματος.

Οι δυναμικές ιδιότητες του υποδείγματος παρουσιάζονται συνοπτικά με τη βοήθεια των ακόλουθων σχέσεων:

$$v_1^{ae} < v < v_2^{ae} \qquad (5.119) \qquad \& \qquad v < v_{ae,2}^{s} \qquad (5.120)$$

όπου $v_1^{ae} < v_{ae,2}^{s} < v_2^{ae}$ και

$$\left.\begin{array}{ll} v_1^{ae} = \left(\sqrt{u} - \sqrt{u-1}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{1+\varphi}{c_1}} - \sqrt{\frac{1+\varphi}{c_1} - 1}\right)^2 & \textbf{\textit{(5.78.1)}} \\ v_2^{ae} = \left(\sqrt{u} + \sqrt{u-1}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{1+\varphi}{c_1}} + \sqrt{\frac{1+\varphi}{c_1} - 1}\right)^2 & \textbf{\textit{(5.78.2)}} \\ v_{ae,2}^{s} = u = \frac{1+\varphi}{c_1} & \textbf{\textit{(5.78.3)}} \end{array}\right\} \quad \text{με } \varphi = \frac{b_2 d_1}{d_2} > 0$$

Όπως θυμόμαστε η ικανοποίηση της σχέσης (5.119) εγγυάται ότι έπειτα από μία διαταραχή το εισόδημα θα συγκλίνει ή θα αποκλίνει από τη βραχυχρόνια τιμή ισορροπίας ($\widetilde{Y}_t^{ae}$) του μέσω ταλαντώσεων, ενώ η ικανοποίηση της σχέσης (5.120) εγγυάται την ύπαρξη σύγκλισης του εισοδήματος (Y_t) προς τη βραχυχρόνια τιμή του.

Από τις σχέσεις (5.78.1) ~ (5.78.3) γίνεται αντιληπτό ότι οι δυναμικές ιδιότητες του υποδείγματός μας επηρεάζονται από τις τιμές των παραμέτρων[32] b_2, d_1, d_2 και c_1. Προκειμένου να προσδιορίσουμε την κατεύθυνση της επιρροής αυτής δεν έχουμε παρά να προσδιορίσουμε το πρόσημο των μερικών παραγώγων των σχέσεων (5.78.1) ~ (5.78.3) ως προς κάθε ένα από τους συντελεστές b_2, d_1, d_2 και c_1. Ειδικότερα:

(α) Οι μερικές παράγωγοι $\partial v_1^{ae} / \partial c_1$ & $\partial v_2^{ae} / \partial c_1$ έχουν αντιστοίχως ως ακολούθως:

$$\frac{\partial v_{2,1}^{ae}}{\partial c_1} = \frac{\partial\left[\left(\sqrt{\frac{1+\varphi}{c_1}} \pm \sqrt{\frac{1+\varphi}{c_1} - 1}\right)^2\right]}{\partial c_1} =$$

$$= 2\left(\sqrt{\frac{1+\varphi}{c_1}} \pm \sqrt{\frac{1+\varphi}{c_1} - 1}\right)\left\{\frac{\partial\sqrt{(1+\varphi)/c_1}}{\partial c_1} \pm \frac{\partial\sqrt{[(1+\varphi)/c_1]-1}}{\partial c_1}\right\} =$$

$$= 2\left(\sqrt{\frac{1+\varphi}{c_1}} \pm \sqrt{\frac{1+\varphi}{c_1} - 1}\right)\left\{\frac{-(1+\varphi)/c_1^2}{2\sqrt{(1+\varphi)/c_1}} \pm \frac{-(1+\varphi)/c_1^2}{2\sqrt{[(1+\varphi)/c_1]-1}}\right\} =$$

$$= 2\left(\sqrt{u} \pm \sqrt{u-1}\right)\left\{\frac{-u/c_1}{2\sqrt{u}} \pm \frac{-u/c_1}{2\sqrt{u-1}}\right\} \Rightarrow$$

[32] Όπως διαπιστώνουμε από τις σχέσεις (5.78.1) ~ (5.78.3) απουσιάζει η παράμετρος γ, δηλαδή ο συντελεστής που μας δείχνει την ταχύτητα προσαρμογής των προσδοκιών. Με άλλα λόγια μεταβολές της τιμής του εν λόγω συντελεστή αφήνει εντελώς ανεπηρέαστη τη δυναμική συμπεριφορά του υποδείγματος.

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial v_1^{ae}}{\partial c_1} = \dfrac{u\left(\sqrt{u}-\sqrt{u-1}\right)}{c_1}\left(\dfrac{-1}{\sqrt{u}}-\dfrac{-1}{\sqrt{u-1}}\right) \\ \dfrac{\partial v_2^{ae}}{\partial c_1} = \dfrac{u\left(\sqrt{u}+\sqrt{u-1}\right)}{c_1}\left(\dfrac{-1}{\sqrt{u}}+\dfrac{-1}{\sqrt{u-1}}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial v_1^{ae}}{\partial c_1} = \dfrac{u\left(\sqrt{u}-\sqrt{u-1}\right)^2}{c_1\sqrt{u(u-1)}} \\ \dfrac{\partial v_2^{ae}}{\partial c_1} = -\dfrac{u\left(\sqrt{u}+\sqrt{u-1}\right)\left(\sqrt{u}-\sqrt{u-1}\right)}{c_1\sqrt{u(u-1)}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial v_1^{ae}}{\partial c_1} = \dfrac{u\left(\sqrt{u}-\sqrt{u-1}\right)^2}{c_1\sqrt{u(u-1)}} > 0 & \textbf{\textit{(5.121.1)}} \\ \dfrac{\partial v_2^{ae}}{\partial c_1} = -\dfrac{u}{c_1\sqrt{u(u-1)}} < 0 & \textbf{\textit{(5.121.2)}} \end{cases}$$

Όπως προκύπτει από τις δύο παραπάνω σχέσεις, μία αύξηση της τιμής της οριακής ροπής προς κατανάλωση θα προκαλέσει την αύξηση της τιμής του μεγέθους v_1^{ae} και τη μείωση της τιμής του μεγέθους $v_{ae,2}^{s}$. Με άλλα λόγια ***η αύξηση της τιμής της παραμέτρου c_1 θα προκαλέσει τη συρρίκνωση του πεδίου τιμών*** $\left(v_1^{ae}, v_2^{ae}\right)$, για το οποίο εξασφαλίζεται ότι έπειτα από μία διαταραχή η διαχρονική πορεία του εισοδήματος θα είναι ημιτονοειδούς μορφής.

Επιπρόσθετα το γεγονός ότι:

$$\frac{\partial v_{ae,2}^{s}}{\partial c_1} = \frac{\partial\left[(1+\varphi)/c_1\right]}{\partial c_1} = -\frac{1+\varphi}{c_1^2} = -\frac{u}{c_1} < 0 \qquad \textbf{\textit{(5.121.3)}}$$

μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι ***μία αύξηση της τιμής της οριακής ροπής προς κατανάλωση, θα οδηγήσει στη μείωση του πεδίου τιμών της παραμέτρου ν για τις οποίες επιτυγχάνεται σύγκληση του εισοδήματος προς τη βραχυχρόνια τιμή ισορροπίας του***.

(β) Παίρνοντας τη μερική παράγωγο των σχέσεων (5.78.1) και (5.78.2) ως προς b_2 βρίσκουμε ότι:

$$\frac{\partial v_{2,1}^{ae}}{\partial b_2} = \frac{\partial\left[\left(\sqrt{\dfrac{1+\varphi}{c_1}} \pm \sqrt{\dfrac{1+\varphi}{c_1}-1}\right)^2\right]}{\partial b_2} =$$

$$= 2\left(\sqrt{\frac{1+\varphi}{c_1}} \pm \sqrt{\frac{1+\varphi}{c_1}-1}\right)\left\{\frac{\partial\sqrt{(1+\varphi)/c_1}}{\partial b_2} \pm \frac{\partial\sqrt{\left[(1+\varphi)/c_1\right]-1}}{\partial b_2}\right\} =$$

$$= 2\left(\sqrt{\frac{1+\varphi}{c_1}} \pm \sqrt{\frac{1+\varphi}{c_1}-1}\right)\left\{\frac{\partial\varphi/\partial b_2}{2\,c_1\sqrt{(1+\varphi)/c_1}} \pm \frac{\partial\varphi/\partial b_2}{2\,c_1\sqrt{[(1+\varphi)/c_1]-1}}\right\} =$$

$$= \frac{2\left(\sqrt{u} \pm \sqrt{u-1}\right)}{2\,c_1}\left\{\frac{d_1/d_2}{\sqrt{u}} \pm \frac{d_1/d_2}{\sqrt{u-1}}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\partial v_1^{ae}}{\partial b_2} = \dfrac{d_1\left(\sqrt{u}-\sqrt{u-1}\right)}{c_1 d_2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{u}} - \dfrac{1}{\sqrt{u-1}}\right) \\ \dfrac{\partial v_2^{ae}}{\partial b_2} = \dfrac{d_1\left(\sqrt{u}+\sqrt{u-1}\right)}{c_1 d_2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{u}} + \dfrac{1}{\sqrt{u-1}}\right) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\partial v_1^{ae}}{\partial b_2} = -\dfrac{d_1\left(\sqrt{u}-\sqrt{u-1}\right)^2}{c_1 d_2\sqrt{u\,(u-1)}} > 0 & \textbf{\textit{(5.122.1)}} \\ \dfrac{\partial v_2^{ae}}{\partial b_2} = \dfrac{d_1\left(\sqrt{u}+\sqrt{u-1}\right)^2}{c_1 d_2\sqrt{u\,(u-1)}} < 0 & \textbf{\textit{(5.122.2)}} \end{cases}$$

Όπως προκύπτει από τις σχέσεις (5.122.1) και (5.122.2) μία αύξηση της τιμής του συντελεστή b_2 (για παράδειγμα από – 2 σε – 1) θα προκαλέσει την αύξηση του μεγέθους v_1^{ae} και τη μείωση του μεγέθους v_2^{ae} [33]. Με άλλα λόγια ***η αύξηση της τιμής του συντελεστή b_2 οδηγεί στη συρρίκνωση του πεδίου τιμών της παραμέτρου ν, για τις οποίες διασφαλίζεται ότι η διαχρονική πορεία του εισοδήματος έπειτα από μία εξωγενή διαταραχή θα χαρακτηρίζεται από ταλαντώσεις***.

Το γεγονός τώρα ότι:

$$\frac{\partial v_{ae,2}^{s}}{\partial b_2} = \frac{\partial\left[(1+\varphi)/c_1\right]}{\partial b_2} = \frac{d_1}{c_1 d_2} < 0 \qquad \textbf{\textit{(5.122.3)}}$$

μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι μία αύξηση της τιμής του συντελεστή b_2, για παράδειγμα από – 2 σε – 1, θα προκαλέσει τη μείωση του μεγέθους $v_{ae,2}^{s}$. Με άλλα λόγια ***η αύξηση της τιμής του συντελεστή b_2 θα έχει ως συνέπεια την συρρίκνωση του πεδίου τιμών της παραμέτρου ν για τις οποίες επιτυγχάνεται σύγκλιση του εισοδήματος προς τη βραχυχρόνια τιμή ισορροπίας του***[34].

---

[33] Ισοδύναμα μία κατ' απόλυτη τιμή μείωση του μεγέθους του συντελεστή b_2, π.χ. από $|-2| = 2$ σε $|-1| = 1$, θα προκαλέσει την αύξηση του μεγέθους v_1^{ae} και τη μείωση του μεγέθους v_2^{ae}.

[34] Σε γεωμετρικούς όρους, η αύξηση της τιμής της παραμέτρου b_2 θα έχει ως συνέπεια την προς τα κάτω μετατόπιση της επιφάνειας ${}_{ae}V_2^{s}$ του γραφήματος Δ – 5.6, επιφέροντας έτσι συρρίκνωση της περιοχής των σημείων (c_1,φ,ν) για τους οποίους επιτυγχάνεται σύγκλιση του εισοδήματος.

(γ) Υπολογίζοντας τις μερικές παραγώγους $\partial v_1^{ae}/\partial d_1$ και $\partial v_2^{ae}/\partial d_1$ από τις σχέσεις (5.78.1) και (5.78.2) βρίσκουμε ότι:

$$\frac{\partial v_{2,1}^{ae}}{\partial d_1}=\frac{\partial\left[\left(\sqrt{\frac{1+\varphi}{c_1}}\pm\sqrt{\frac{1+\varphi}{c_1}-1}\right)^2\right]}{\partial d_1}=$$

$$=2\left(\sqrt{\frac{1+\varphi}{c_1}}\pm\sqrt{\frac{1+\varphi}{c_1}-1}\right)\left\{\frac{\partial\sqrt{(1+\varphi)/c_1}}{\partial d_1}\pm\frac{\partial\sqrt{[(1+\varphi)/c_1]-1}}{\partial d_1}\right\}=$$

$$=2\left(\sqrt{\frac{1+\varphi}{c_1}}\pm\sqrt{\frac{1+\varphi}{c_1}-1}\right)\left\{\frac{\partial\varphi/\partial d_1}{2\,c_1\sqrt{(1+\varphi)/c_1}}\pm\frac{\partial\varphi/\partial d_1}{2\,c_1\sqrt{[(1+\varphi)/c_1]-1}}\right\}=$$

$$=\frac{2\left(\sqrt{u}\pm\sqrt{u-1}\right)}{2\,c_1}\left\{\frac{b_2/d_2}{\sqrt{u}}\pm\frac{b_2/d_2}{\sqrt{u-1}}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad\begin{cases}\dfrac{\partial v_1^{ae}}{\partial d_1}=\dfrac{b_2\left(\sqrt{u}-\sqrt{u-1}\right)}{c_1 d_2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{u}}-\dfrac{1}{\sqrt{u-1}}\right)\\[2ex]\dfrac{\partial v_2^{ae}}{\partial d_1}=\dfrac{b_2\left(\sqrt{u}+\sqrt{u-1}\right)}{c_1 d_2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{u}}+\dfrac{1}{\sqrt{u-1}}\right)\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad\begin{cases}\dfrac{\partial v_1^{ae}}{\partial d_1}=-\dfrac{b_2\left(\sqrt{u}-\sqrt{u-1}\right)^2}{c_1 d_2\sqrt{u(u-1)}}<0 & \textbf{\textit{(5.123.1)}}\\[2ex]\dfrac{\partial v_2^{ae}}{\partial d_1}=\dfrac{b_2\left(\sqrt{u}+\sqrt{u-1}\right)^2}{c_1 d_2\sqrt{u(u-1)}}>0 & \textbf{\textit{(5.123.2)}}\end{cases}$$

Όπως προκύπτει από τις δύο παραπάνω σχέσεις, μία αύξηση της τιμής του συντελεστή d_1 θα προκαλέσει τη μείωση του μεγέθους v_1^{ae} και την αύξηση του μεγέθους v_2^{ae}. ***Με άλλα λόγια μία αύξηση της τιμής του συντελεστή d_1 θα προκαλέσει τη διεύρυνση του πεδίου τιμών $\left(v_1^{ae}, v_2^{ae}\right)$, για το οποίο εξασφαλίζεται ότι η διαχρονική πορεία του εισοδήματος***, έπειτα από μία εξωγενή διαταραχή, ***θα είναι ημιτονοειδούς μορφής***.

Επιπρόσθετα το γεγονός ότι:

$$\frac{\partial v_{ae,2}^{s}}{\partial d_1} = \frac{\partial\left[(1+\varphi)/c_1\right]}{\partial d_1} = \frac{b_2}{c_1 d_2} > 0 \qquad \textbf{\textit{(5.123.3)}}$$

μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι ***μία αύξηση της τιμής του συντελεστή d_1 έχει ως συνέπεια την διεύρυνση του πεδίου τιμών της παραμέτρου ν για το οποίο έπειτα από μία εξωγενή διαταραχή, επιτυγχάνεται σύγκλιση του εισοδήματος προς τη βραχυχρόνια τιμή ισορροπίας του***.

(δ) Τέλος, προσδιορίζοντας από τις σχέσεις (5.78.1) και (5.78.2) τις μερικές παραγώγους $\partial v_1^{ae}/\partial d_2$ και $\partial v_2^{ae}/\partial d_2$ βρίσκουμε ότι:

$$\frac{\partial v_{2,1}^{ae}}{\partial d_2} = \frac{\partial\left[\left(\sqrt{\frac{1+\varphi}{c_1}} \pm \sqrt{\frac{1+\varphi}{c_1}-1}\right)^2\right]}{\partial d_2} =$$

$$= 2\left(\sqrt{\frac{1+\varphi}{c_1}} \pm \sqrt{\frac{1+\varphi}{c_1}-1}\right)\left\{\frac{\partial\sqrt{(1+\varphi)/c_1}}{\partial d_2} \pm \frac{\partial\sqrt{\left[(1+\varphi)/c_1\right]-1}}{\partial d_2}\right\} =$$

$$= 2\left(\sqrt{\frac{1+\varphi}{c_1}} \pm \sqrt{\frac{1+\varphi}{c_1}-1}\right)\left\{\frac{\partial\varphi/\partial d_1}{2c_1\sqrt{(1+\varphi)/c_1}} \pm \frac{\partial\varphi/\partial d_1}{2c_1\sqrt{\left[(1+\varphi)/c_1\right]-1}}\right\} =$$

$$= \frac{2\left(\sqrt{u} \pm \sqrt{u-1}\right)}{2\,c_1}\left\{\frac{-b_2 d_1/d_2^2}{\sqrt{u}} \pm \frac{-b_2 d_1/d_2^2}{\sqrt{u-1}}\right\} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\partial v_1^{ae}}{\partial d_2} = -\dfrac{\varphi\left(\sqrt{u}-\sqrt{u-1}\right)}{c_1 d_2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{u}} - \dfrac{1}{\sqrt{u-1}}\right) \\ \dfrac{\partial v_2^{ae}}{\partial d_2} = -\dfrac{\varphi\left(\sqrt{u}+\sqrt{u-1}\right)}{c_1 d_2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{u}} + \dfrac{1}{\sqrt{u-1}}\right) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\partial v_1^{ae}}{\partial d_2} = \dfrac{\varphi\left(\sqrt{u}-\sqrt{u-1}\right)^2}{c_1 d_2 \sqrt{u(u-1)}} < 0 & \textbf{(5.124.1)} \\ \dfrac{\partial v_2^{ae}}{\partial d_2} = -\dfrac{\varphi\left(\sqrt{u}+\sqrt{u-1}\right)^2}{c_1 d_2 \sqrt{u(u-1)}} > 0 & \textbf{(5.124.2)} \end{cases}$$

Σύμφωνα με τις δύο παραπάνω σχέσεις μία αύξηση της τιμής του συντελεστή d_2 (για παράδειγμα από – 2 σε – 1) θα έχει ως αποτέλεσμα τη μείωση του μεγέθους v_1^{ae} και την αύξηση του μεγέθους v_2^{ae}. Με άλλα λόγια ***η αύξηση μόνο της τιμής του συντελεστή d_2 θα οδηγήσει στην αύξηση του πεδίου τιμών $\left(v_1^{ae}, v_2^{ae}\right)$ για το οποίο εξασφαλίζεται ότι έπειτα από μία εξωγενή διαταραχή, η διαχρονική πορεία του εισοδήματος θα χαρακτηρίζεται από ταλαντώσεις***.

Επιπροσθέτως, το γεγονός ότι:

$$\frac{\partial v_{ae,2}^{s}}{\partial d_2} = \frac{\partial\left[(1+\varphi)/c_1\right]}{\partial d_2} = -\frac{b_2 d_1}{c_1 d_2^2} = -\frac{\varphi}{c_1 d_2} > 0 \qquad \textbf{(5.124.3)}$$

μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι ***μία αύξηση του εν λόγω συντελεστή θα προκαλέσει τη διεύρυνση του πεδίου τιμών της παραμέτρου ν για τις οποίες διασφαλίζεται η σύγκλιση του εισοδήματος προς τη βραχυχρόνια τιμή ισορροπίας του***.

Όπως προκύπτει από την παραπάνω ανάλυση το πεδίο τιμών $\left(v_1^{ae}, v_2^{ae}\right)$, το πεδίο δηλαδή τιμών του επιταχυντή για το οποίο διασφαλίζεται ότι έπειτα από μία εξωγενή διαταραχή το εισόδημα θα συγκλίνει ή θα αποκλίνει ημιτονοειδώς, διευρύνεται (συρρικνούται) ως αποτέλεσμα της αύξησης (μείωσης) του μεγέθους των συντελεστών d_1 & d_2 και συρρικνούται (διευρύνεται) ως αποτέλεσμα της αύξησης (μείωσης) του μεγέθους των συντελεστών c_1 και b_2. Επιπρόσθετα, οι πιθανότητες για την επίτευξη σύγκλισης διευρύνονται (μειώνονται) ως αποτέλεσμα της αύξησης (μείωσης) του μεγέθους των συντελεστών d_1 & d_2 και μειώνονται (αυξάνονται) ως αποτέλεσμα της αύξησης (μείωσης) του μεγέθους των συντελεστών c_1 και b_2.

5.2 Εξαγωγή της βασικής εξίσωσης διαφορών του υποδείγματος στα πλαίσια του μηχανισμού των στατικών προσδοκιών

Στα πλαίσια της τέταρτης ενότητας της ανάλυσής μας είδαμε ότι για να μεταβούμε από το μηχανισμό των αναθεωρούμενων προσδοκιών στο μηχανισμό των στατικών προσδοκιών, ο συντελεστής προσαρμογής γ του μηχανισμού των αναθεωρούμενων προσδοκιών θα πρέπει να πάρει την τιμή 1.

Σε μαθηματικούς όρους, η σχέση που περιγράφει τον τρόπο διαμόρφωσης των στατικών προσδοκιών προκύπτει από τη σχέση (4.1) για γ = 1. Ειδικότερα από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι:

$$\Delta R_t^e - \Delta R_{t-1}^e = \gamma\left(\Delta R_{t-1} - \Delta R_{t-1}^e\right) \xrightarrow{\gamma=1} \Delta R_t^e = \Delta R_{t-1} \qquad \textbf{(5.125)}$$

Δεδομένου ότι οι στατικές προσδοκίες αποτελούν ειδική περίπτωση του μηχανισμού των αναθεωρούμενων προσδοκιών, θα μπορούσαμε να εξάγουμε τη βασική εξίσωση διαφορών του υποδείγματος από τη σχέση (5.6) θέτοντας όπου γ = 1. Πιο συγκεκριμένα από τη σχέση αυτή για γ = 1 προκύπτει ότι:

$$Y_t - \frac{c_1(1+v)+(1-\gamma)(1+\varphi)}{1+\varphi}Y_{t-1} + \frac{c_1[v+(1+v)(1-\gamma)]}{1+\varphi}Y_{t-2} - \frac{vc_1(1-\gamma)}{1+\varphi}Y_{t-3} =$$

$$= \frac{\gamma b_0}{1+\varphi} + \frac{b_2(\gamma+m)}{d_2(1+\varphi)}M_0(1+m)^{t-1} \xrightarrow{\gamma=1}$$

$$\rightarrow Y_t - \frac{c_1(1+v)}{1+\varphi}Y_{t-1} + \frac{vc_1}{1+\varphi}Y_{t-2} = \frac{b_0}{1+\varphi} + \frac{b_2(1+m)}{d_2(1+\varphi)}M_0(1+m)^{t-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y_t - \frac{c_1(1+v)}{1+\varphi}Y_{t-1} + \frac{vc_1}{1+\varphi}Y_{t-2} = \frac{b_0}{1+\varphi} + \frac{\varphi}{d_1(1+\varphi)}M_0(1+m)^{t} \qquad \textbf{\textit{(5.126)}}$$

όπου $\varphi = \frac{b_2 d_1}{d_2} > 0$

Από τη σχέση (5.126) και κινούμενοι δύο περιόδους μπροστά προκύπτει η ακόλουθη σχέση:

$$Y_{t+2} - \frac{c_1(1+v)}{1+\varphi}Y_{t+1} + \frac{vc_1}{1+\varphi}Y_t = \frac{b_0}{1+\varphi} + \frac{\varphi}{d_1(1+\varphi)}M_0(1+m)^{t+2} \qquad \textbf{\textit{(5.127)}}$$

Η σχέση (5.127) αποτελεί μία μη ομογενή εξίσωση διαφορών δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές, η γενική μορφή της οποίας έχει ως ακολούθως:

$$Y_{t+2} + \delta_1 Y_{t+1} + \delta_0 Y_t = G_1(t) \qquad \textbf{\textit{(5.128)}}$$

όπου: $\delta_1 = -\frac{c_1(1+v)}{1+\varphi}$, $\delta_0 = \frac{vc_1}{1+\varphi}$ και $G_1(t) = \frac{b_0}{1+\varphi} + \frac{\varphi}{d_1(1+\varphi)}M_0(1+m)^{t+2}$

Η σχέση (5.128) αποτελεί τη βασική εξίσωση διαφορών του υποδείγματος όταν οι προσδοκίες διαμορφώνονται σύμφωνα με το μηχανισμό των αναθεωρούμενων προσδοκιών και η γενική λύση της οποίας (Y_t) αποτελεί, όπως έχουμε ήδη αναφέρει,

το άθροισμα μίας μερικής της λύσης (Y_t^p) με τη συμπληρωματική λύση (Y_t^c) της (5.128) ή ισοδύναμα με τη γενική λύση της ακόλουθης ομογενούς εξίσωσης διαφορών:

$$Y_{t+2} + \delta_1 Y_{t+1} + \delta_0 Y_t = 0 \qquad \textit{(5.129)}$$

Με άλλα λόγια η γενική λύση της εξίσωσης (5.128) θα έχει ως ακολούθως:

$$Y_t = Y_t^p + Y_t^c \qquad \textit{(5.130)}$$

Στη συνέχεια της ανάλυσής μας θα προσδιορίσουμε αφενός τις συγκεκριμένες μορφές των λύσεων Y_t^c και Y_t^p και αφετέρου καθώς και εκείνη της γενικής λύσης της εξίσωσης διαφορών (5.128), ξεκινώντας από τη μορφή της συμπληρωματικής λύσης.

5.2.1 Προσδιορισμός της συμπληρωματικής λύσης στα πλαίσια του μηχανισμού των στατικών προσδοκιών

Η συμπληρωματική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης διαφορών (5.128) θα μπορούσε να υποτεθεί ότι είναι της μορφής:

$$Y_t^c = A\,\lambda^t \qquad \textit{(5.131)} \qquad \text{όπου } \lambda \in \Re_+^*$$

κάτι που βεβαίως υπονοεί ότι:

$$Y_{t+j}^c = A\,\lambda^{t+j} \quad , \quad j = 1, 2 \qquad \textit{(5.132)}$$

Από την αντικατάσταση των σχέσεων (5.131) και (5.132) στη σχέση (5.129) προκύπτει η χαρακτηριστική εξίσωση της (5.129) [ή της (5.128)] η οποία έχει ως εξής:

$$Y_{t+2} + \delta_1 Y_{t+1} + \delta_0 Y_t = 0 \underset{(5.132)}{\overset{(5.131)}{\Rightarrow}} A\,\lambda^{t+2} + \delta_1 A\,\lambda^{t+1} + \delta_0 A\,\lambda^t = 0 \Rightarrow A\,\lambda^t\left(\lambda^2 + \delta_1\lambda + \delta_0\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \lambda^2 + \delta_1\lambda + \delta_0 = 0 \qquad \textit{(5.133)}$$

Δεδομένου ότι η χαρακτηριστική εξίσωση αποτελεί μία εξίσωση δευτέρου βαθμού ως προς λ θα έχει δύο ρίζες, τις λ_1 και λ_2, οι οποίες και θα ικανοποιούν τις παρακάτω σχέσεις:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= -\delta_1 > 0 \qquad \textit{(5.134.1)} \\ \lambda_1\lambda_2 &= \delta_0 > 0 \qquad \textit{(5.134.2)} \end{aligned}\right\}$$

Η σχέση (5.134.2) μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι οι δύο ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης θα είναι ομόσημες. Βάσει τώρα της σχέσης (5.134.1) οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι *οι χαρακτηριστικές ρίζες είναι όχι μόνο ομόσημες αλλά και θετικές*.

Προκειμένου να διερευνήσουμε τη φύση των χαρακτηριστικών ριζών λ_1 και λ_2, καθώς αυτές μπορεί συνιστούν τόσο πραγματικούς όσο και φανταστικούς αριθμούς, θα προσδιορίσουμε το πρόσημο της διακρίνουσας της χαρακτηριστικής εξίσωσης (5.133), το μέγεθος της οποίας έχει ως ακολούθως:

$$\Delta_5 = \delta_1^2 - 4\,\delta_0 = \left[-\frac{c_1(1+v)}{1+\varphi}\right]^2 - 4\,\frac{vc_1}{1+\varphi} = \frac{c_1^2\left(1+2\,v+v^2\right)}{(1+\varphi)^2} - \frac{4\,vc_1}{1+\varphi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \Delta_5 = \frac{c_1^2 v^2 + 2\,c_1\left[c_1 - 2\,(1+\varphi)\right]v + c_1^2}{(1+\varphi)^2} \qquad \textbf{\textit{(5.135)}}$$

Όπως προκύπτει από την παραπάνω σχέση, το πρόσημο της διακρίνουσας εξαρτάται από το πρόσημο του μεγέθους $c_1^2 v^2 + 2\,c_1\left[c_1 - 2\,(1+\varphi)\right]v + c_1^2$. Δεδομένου ότι ο αριθμητής του κλάσματος της σχέσης (5.135) αποτελεί ένα πολυώνυμο δευτέρου βαθμού ως προς v, θα μπορούσαμε να προσδιορίσουμε κάποια διαστήματα τιμών του επιταχυντή για τα οποία η διακρίνουσα συνιστά ένα θετικό ή αρνητικό μέγεθος. Προκειμένου να προσδιορίσουμε αυτά τα διαστήματα τιμών θα εξισώσουμε τη διακρίνουσα Δ_5 με το μηδέν και θα επιλύσουμε την προκύπτουσα δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς v. Ειδικότερα:

$$\Delta_5 = \frac{c_1^2 v^2 + 2\,c_1\left[c_1 - 2\,(1+\varphi)\right]v + c_1^2}{(1+\varphi)^2} = 0 \Rightarrow c_1^2 v^2 + 2\,c_1\left[c_1 - 2\,(1+\varphi)\right]v + c_1^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad v^2 + 2\,\frac{c_1 - 2\,(1+\varphi)}{c_1}\,v + 1 = 0 \qquad \textbf{\textit{(5.136)}}$$

Η διακρίνουσα (Δ_6) της εξίσωσης (5.136) έχει ως εξής:

$$\Delta_6 = \left[2\,\frac{c_1 - 2\,(1+\varphi)}{c_1}\right]^2 - 4 = \frac{4\left[c_1^2 - 4\,c_1(1+\varphi) + 4\,(1+\varphi)^2\right]}{c_1^2} - 4 =$$

$$= \frac{4\,c_1^2 + 16\,(1+\varphi)(1+\varphi-c_1) - 4\,c_1^2}{c_1^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \Delta_6 = \frac{16\,(1+\varphi)(1+\varphi-c_1)}{c_1^2} > 0 \qquad \textbf{\textit{(5.137)}}$$

Το γεγονός ότι $\Delta_6 > 0$ μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η εξίσωση (5.136) έχει δύο πραγματικές και διακριτές ρίζες, το μέγεθος των οποίων έχει ως ακολούθως:

$$v_{2,1} = \frac{-2\dfrac{c_1 - 2(1+\varphi)}{c_1} \pm \sqrt{\Delta_6}}{2} = \frac{2\dfrac{2(1+\varphi) - c_1}{c_1} \pm \sqrt{\dfrac{16(1+\varphi)(1+\varphi-c_1)}{c_1^2}}}{2} =$$

$$= \frac{2\left[2(1+\varphi) - c_1\right] \pm 4\sqrt{(1+\varphi)(1+\varphi-c_1)}}{2\,c_1} =$$

$$= \frac{(1+\varphi) \pm 2\sqrt{(1+\varphi)(1+\varphi-c_1)} + (1+\varphi-c_1)}{c_1} =$$

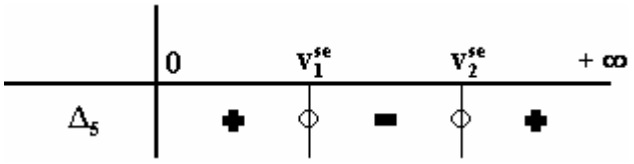
$$= \frac{\left(\sqrt{1+\varphi}\right)^2 \pm 2\sqrt{(1+\varphi)(1+\varphi-c_1)} + \left(\sqrt{1+\varphi-c_1}\right)^2}{c_1} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{1+\varphi} \pm \sqrt{1+\varphi-c_1}\right)^2}{\left(\sqrt{c_1}\right)^2} = \left(\sqrt{\frac{1+\varphi}{c_1}} \pm \sqrt{\frac{1+\varphi-c_1}{c_1}}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} v_1^{se} = \left(\sqrt{u} - \sqrt{u-1}\right)^2 > 0 & \textbf{\textit{(5.138.1)}} \\ v_2^{se} = \left(\sqrt{u} + \sqrt{u-1}\right)^2 > 0 & \textbf{\textit{(5.138.2)}} \end{cases}$$

όπου $u = \dfrac{1+\varphi}{c_1} > 1$

Όπως προκύπτει και από τον πίνακα εναλλαγής προσήμων που ακολουθεί, για τιμές του επιταχυντή μεταξύ των δύο ριζών η διακρίνουσα Δ_5 θα αποτελεί ένα αρνητικό μέγεθος. Για $v = v_1^{se}$ ή $v = v_2^{se}$ η διακρίνουσα ισούται με το μηδέν, ενώ για τιμές του επιταχυντή εκτός του διαστήματος τιμών που ορίζουν οι δύο ρίζες v_1^{se} και v_2^{se} η διακρίνουσα θα αποτελεί ένα θετικό μέγεθος.



Με άλλα λόγια για $v \in \left(v_1^{se}, v_2^{se}\right)$ θα ισχύει ότι $\Delta_5 < 0$ κάτι που σημαίνει ότι αφενός η χαρακτηριστική εξίσωση θα έχει δύο συζυγείς μιγαδικές ρίζες και αφετέρου ότι έπειτα από μία εξωγενή διαταραχή το εισόδημα θα συγκλίνει ή θα αποκλίνει μέσω ταλαντώσεων από τη βραχυχρόνια τιμή ισορροπίας του. Στην περίπτωση που έχουμε ότι $v = v_1^{se}$ ή $v = v_2^{se}$ η χαρακτηριστική εξίσωση θα έχει δύο πραγματικές και ίσες ρίζες, καθώς θα ισχύει ότι $\Delta_5 = 0$, ενώ η διαχρονική πορεία του εισοδήματος έπειτα από μία διατάραξη θα είναι εκθετικής μορφής. Η διαχρονική πορεία του εισοδήματος θα είναι της ίδιας μορφής και στην περίπτωση που $v \in \left(0, v_1^{se}\right) \cup \left(v_2^{se}, +\infty\right)$, στα πλαίσια της οποίας η χαρακτηριστική εξίσωση έχει δύο πραγματικές και διακριτές ρίζες καθώς ισχύει ότι $\Delta_5 > 0$.

Στο σημείο αυτό, ***θα πρέπει να τονισθεί το γεγονός ότι το διάστημα τιμών*** $\left(v_1^{se}, v_2^{se}\right)$ ***του επιταχυντή για το οποίο στα πλαίσια του μηχανισμού των στατικών προσδοκιών η διαχρονική πορεία του εισοδήματος χαρακτηρίζεται από ταλαντώσεις, είναι το ίδιο με εκείνο που είχαμε προσδιορίσει στα πλαίσια του μηχανισμού των αναθεωρούμενων προσδοκιών***. Και αυτό διότι οι τιμές των μεγεθών v_1^{se} και v_2^{se} οι οποίες περιγράφονται μέσω των σχέσεων (5.138.1) & (5.138.2) είναι ακριβώς οι ίδιες με εκείνες που περιγράφονται από τις σχέσεις (5.23.1) και (5.23.2) αντιστοίχως.

Έχοντας ολοκληρώσει τη διερεύνηση του προσήμου της διακρίνουσας της χαρακτηριστικής εξίσωσης, θα επιστρέψουμε στη συνέχεια στην εξειδίκευση της συμπληρωματικής λύσης της βασικής εξίσωσης διαφορών (5.128) και ειδικότερα στον προσδιορισμό του μεγέθους των χαρακτηριστικών ριζών.

Οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης θα έχουν ως ακολούθως:

$$\lambda_{2,1} = \frac{-\delta_1 \pm \sqrt{\Delta_5}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{-\delta_1 - \sqrt{\Delta_5}}{2} & \textbf{\textit{(5.139.1)}} \\ \lambda_2 = \dfrac{-\delta_1 + \sqrt{\Delta_5}}{2} & \textbf{\textit{(5.139.2)}} \end{cases}$$

Η συμπληρωματική λύση θα αποτελεί το γραμμικό συνδυασμό των συναρτήσεων

$$y_{1,t} = \lambda_1^t \qquad \textbf{\textit{(5.140.1)}} \qquad \& \qquad y_{2,t} = \lambda_2^t \qquad \textbf{\textit{(5.140.2)}}$$

εφόσον οι δύο αυτές συναρτήσεις είναι γραμμικώς ανεξάρτητες, εφόσον δηλαδή ισχύει ότι:

$$C(t) = \begin{vmatrix} y_{1,t} & y_{2,t} \\ y_{1,t+1} & y_{2,t+1} \end{vmatrix} \neq 0 \; \forall \, t \qquad \textbf{\textit{(5.141)}}$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (5.140.1) & (5.140.2) στη σχέση (5.141) προκύπτει:

$$C(t)=\begin{vmatrix} y_{1,t} & y_{2,t} \\ y_{1,t+1} & y_{2,t+1} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda_1^t & \lambda_2^t \\ \lambda_1^{t+1} & \lambda_2^{t+1} \end{vmatrix}=(\lambda_1\lambda_2)^t\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix}\overset{(5.134.2)}{=}(\delta_0)^t(\lambda_2-\lambda_1) \qquad \textbf{\textit{(5.142)}}$$

Δεδομένου ότι $\delta_0 > 0$, οι συναρτήσεις $y_{1,t}$ & $y_{2,t}$ θα είναι γραμμικώς ανεξάρτητες μόνο εφόσον ισχύει ότι $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Δεδομένου ότι $\lambda_1 = \lambda_2$ στην περίπτωση που $\Delta_5 = 0$ και $\lambda_1 \neq \lambda_2$ εάν $\Delta_5 >,< 0$, θα διακρίνουμε στη συνέχεια και βάσει του προσήμου της διακρίνουσας της χαρακτηριστικής εξίσωσης μεταξύ τριών περιπτώσεων, ξεκινώντας από εκείνη που η διακρίνουσα συνιστά ένα θετικό μέγεθος.

<u>1η Περίπτωση : $\Delta_5 > 0$</u>

Σ' αυτή την περίπτωση οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι πραγματικές και διακριτές και έχουν ως ακολούθως:

$$\lambda_{2,1}=\frac{-\delta_1\pm\sqrt{\Delta_5}}{2}=\frac{-\left(-\frac{c_1(1+v)}{1+\varphi}\right)\pm\sqrt{\frac{c_1^2v^2+2c_1[c_1-2(1+\varphi)]v+c_1^2}{(1+\varphi)^2}}}{2}=$$

$$=\frac{\frac{c_1(1+v)}{1+\varphi}\pm\sqrt{\frac{c_1^2(1+2v+v^2)}{(1+\varphi)^2}-\frac{4vc_1}{1+\varphi}}}{2}=\frac{\frac{1+v}{u}\pm\sqrt{\frac{(1+v)^2}{u^2}-\frac{4v}{u}}}{2}=$$

$$=\frac{1+v}{2u}\pm\frac{1}{2u}\sqrt{v^2+2v+1-4uv}=\frac{1+v\pm\sqrt{v^2+2(1-2u)v+1}}{2u}\underset{(5.138.2)}{\overset{(5.138.1)}{\Rightarrow}}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1=\dfrac{1+v-\sqrt{(v-v_1^{se})(v-v_2^{se})}}{2u} & \textbf{\textit{(5.143.1)}} \\[2ex] \lambda_2=\dfrac{1+v+\sqrt{(v-v_1^{se})(v-v_2^{se})}}{2u} & \textbf{\textit{(5.143.2)}} \end{cases}$$

όπου $u=\frac{1+\varphi}{c_1}$ & $v_{2,1}^{se}=\left(\sqrt{u}\pm\sqrt{u-1}\right)^2$ οι ρίζες του πολυωνύμου $v^2+2(1-2u)v+1$

Δεδομένου ότι $\lambda_1 \neq \lambda_2$ θα έχουμε ότι $C(t) \neq 0$, κάτι που σημαίνει ότι οι συναρτήσεις $y_{1,t}$ & $y_{2,t}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες και κατά συνέπεια συγκροτούν ένα

θεμελιώδες σύνολο λύσεων της ομογενούς εξίσωσης διαφορών (5.133). Ως εκ τούτου η συμπληρωματική λύση της βασικής εξίσωσης διαφορών (5.128) έχει την ακόλουθη μορφή:

$$Y_t^c = A_1\lambda_1^t + A_2\lambda_2^t$$

ή ισοδύναμα

$$Y_t^c = A_1\left[\frac{1+v-\sqrt{\left(v-v_1^{se}\right)\left(v-v_2^{se}\right)}}{2\,u}\right]^t + A_2\left[\frac{1+v+\sqrt{\left(v-v_1^{se}\right)\left(v-v_2^{se}\right)}}{2\,u}\right]^t \qquad \textbf{\textit{(5.144)}}$$

<u>2η Περίπτωση : Δ5 = 0</u>

Στην περίπτωση που η διακρίνουσα ισούται με το μηδέν, η χαρακτηριστική εξίσωση θα έχει, όπως γνωρίζουμε, δύο πραγματικές και ίσες ρίζες το μέγεθος των οποίων έχει ως ακολούθως:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{-\delta_1}{2} = \frac{c_1(1+v)}{2(1+\varphi)} \qquad \textbf{\textit{(5.145)}}$$

Το γεγονός ωστόσο ότι $\lambda_1 = \lambda_2$ μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι οι συναρτήσεις (5.140.1) & (5.140.2) δεν συγκροτούν ένα θεμελιώδες σύνολο λύσεων της ομογενούς εξίσωσης διαφορών (5.129), καθώς από τη σχέση (5.142) για $\lambda_1 = \lambda_2$ προκύπτει ότι $C(t) = 0$.

Σε αντίθεση με τις συναρτήσεις (5.140.1) και (5.140.2), οι συναρτήσεις:

$$y_{1,t} = \lambda_1^t \qquad \textbf{\textit{(5.146.1)}} \qquad \& \qquad y_{3,t} = t\,\lambda_2^t \qquad \textbf{\textit{(5.146.2)}}$$

είναι γραμμικώς ανεξάρτητες, καθώς για τις συναρτήσεις αυτές η ορίζουσα Casorati έχει ως ακολούθως:

$$C(t) = \begin{vmatrix} y_{1,t} & y_{3,t} \\ y_{1,t+1} & y_{3,t+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_1^t & t\,\lambda_2^t \\ \lambda_1^{t+1} & (t+1)\lambda_2^{t+1} \end{vmatrix} = (\lambda_1\lambda_2)^t \begin{vmatrix} 1 & t \\ \lambda_1 & (t+1)\lambda_2 \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda_1\lambda_2)^t\left[(t+1)\lambda_2 - t\,\lambda_1\right] = (\lambda_1\lambda_2)^t\left[t\,(\lambda_2-\lambda_1)+\lambda_2\right] \overset{(5.145)}{=} \left(\frac{\delta_1^2}{4}\right)^t\left(0-\frac{\delta_1}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad C(t) = -\left(\frac{\delta_1}{2}\right)^{2t+1} \neq 0\ \forall\, t \qquad \textbf{\textit{(5.147)}}$$

Ως εκ τούτου η συμπληρωματική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης διαφορών (5.128) θα αποτελεί το γραμμικό συνδυασμό των συναρτήσεων $y_{1,t}$ και $y_{3,t}$. Θα έχουμε δηλαδή ότι:

$$Y_t^c = A_1 y_{1,t} + A_2 y_{3,t} \underset{(5.146.2)}{\overset{(5.146.1)}{=}} A_1 \lambda_1^t + A_2\, t\, \lambda_2^t \overset{(5.145)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow Y_t^c = \left(A_1 + A_2\, t\right)\left[\frac{c_1\left(1+v\right)}{2\left(1+\varphi\right)}\right]^t \qquad \textbf{\textit{(5.148)}}$$

όπου A_i , i = 1,2 , δύο αυθαίρετες σταθερές το μέγεθος των οποίων μπορεί να προσδιορισθεί με τη βοήθεια δύο αρχικών συνθηκών.

<u>2η Περίπτωση : $\Delta_5 < 0$</u>

Στην περίπτωση που η διακρίνουσα είναι ένα αρνητικό μέγεθος, οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης θα είναι δύο συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί οι οποίοι και έχουν ως ακολούθως:

$$\lambda_{2,1} = \frac{-\delta_1 \pm \sqrt{\Delta_5}}{2} = \frac{-\delta_1 \pm \sqrt{\delta_1^2 - 4\,\delta_0}}{2} = \frac{-\delta_1 \pm \sqrt{-1}\,\sqrt{4\,\delta_0 - \delta_1^2}}{2} = k_{se} \pm i\, n_{se} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \begin{cases} \lambda_1 = k_{se} - i\, n_{se} & \textbf{\textit{(5.149.1)}} \\ \lambda_2 = k_{se} + i\, n_{se} & \textbf{\textit{(5.149.2)}} \end{cases}$$

όπου $k_{se} = -\delta_1/2, i = \sqrt{-1}$ και $n_{se} = \sqrt{4\,\delta_0 - \delta_1^2}\,/2$

Δεδομένου ότι $\lambda_1 \neq \lambda_2$, η ορίζουσα Casorati [όπως αυτή ορίζεται στη σχέση (5.142)] θα είναι διάφορη του μηδενός και ως εκ τούτου οι συναρτήσεις

$$y_{1,t} = \lambda_1^t = \left(k_{se} - i\, n_{se}\right)^t \quad \textbf{\textit{(5.150.1)}} \quad \& \quad y_{2,t} = \lambda_2^t = \left(k_{se} + i\, n_{se}\right)^t \quad \textbf{\textit{(5.150.2)}}$$

θα είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

Εφόσον οι συναρτήσεις (5.150.1) και (5.150.2) συγκροτούν ένα θεμελιώδες σύνολο της ομογενούς εξίσωσης διαφορών (5.129), η συμπληρωματική λύση της βασικής εξίσωσης διαφορών (5.128) [ή ισοδύναμα η γενική λύση της (5.129)] θα αποτελεί ένα γραμμικό συνδυασμό των συναρτήσεων αυτών. Με άλλα λόγια θα είναι της μορφής:

$$Y_t^c = A_1 y_{1,t} + A_2 y_{2,t} \underset{(5.150.2)}{\overset{(5.150.1)}{\Rightarrow}} \quad Y_t^c = A_1 (k_{se} - i\, n_{se})^t + A_2 (k_{se} + i\, n_{se})^t \qquad \textbf{\textit{(5.151)}}$$

Σύμφωνα τώρα με το θεώρημα De Moivre ισχύει ότι:

$$\lambda_{2,1}^t = (k_{se} \pm i\, n_{se})^t = R_{se}^t \left[\cos(\chi_{se} t) \pm i \sin(\chi_{se} t)\right] \qquad \textbf{\textit{(5.152)}}$$

όπου

$$R_{se} = \sqrt{k_{se}^2 + n_{se}^2} = \sqrt{\left(\frac{-\delta_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{4\,\delta_0 - \delta_1^2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{\delta_1^2 + 4\,\delta_0 - \delta_1^2}{4}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad R_{se} = \sqrt{\delta_0} = \sqrt{vc_1/(1+\varphi)} \qquad \textbf{\textit{(5.153)}}$$

&

$$\tan(\chi_{se}) = \frac{n_{se}}{k_{se}} = \frac{\sqrt{4\,\delta_0 - \delta_1^2}/2}{-\delta_1/2} = -\frac{\sqrt{4\,\delta_0 - \delta_1^2}}{\delta_1} = \arctan\left(-\frac{\sqrt{4\,\delta_0 - \delta_1^2}}{\delta_1}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \chi_{se} = -\arctan\left(\sqrt{4\,\delta_0 - \delta_1^2}/\delta_1\right) \qquad \textbf{\textit{(5.154)}}$$

Από το συνδυασμό των σχέσεων (5.151), (5.152) και (5.153) προκύπτει ως ακολούθως η τελική μορφή της συμπληρωματικής λύσης της βασικής εξίσωσης διαφορών (5.128), όταν η διακρίνουσα της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι αρνητική:

$$Y_t^c = A_1 (k_{se} - i\, n_{se})^t + A_2 (k_{se} + i\, n_{se})^t \overset{(5.152)}{=}$$

$$= A_1 R_{se}^t \left[\cos(\chi_{se} t) - i \sin(\chi_{se} t)\right] + A_2 R^t \left[\cos(\chi_{se} t) + i \sin(\chi_{se} t)\right] =$$

$$= R_{se}^t \left[(A_1 + A_2)\cos(\chi_{se} t) + (A_2 - A_1)\, i \sin(\chi_{se} t)\right] \overset{(5.153)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow Y_t^c = \sqrt{\delta_0^t}\left[A_3 \cos(\chi_{se} t) + A_4 \sin(\chi_{se} t)\right] \qquad \textbf{\textit{(5.155)}}$$

όπου $A_3 = A_1 + A_2$ & $A_4 = (A_2 - A_1)i$ δύο αυθαίρετες σταθερές το μέγεθος των οποίων μπορεί να προσδιορισθεί με τη βοήθεια δύο αρχικών συνθηκών.

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι στην περίπτωση που η παράμετρος R_{se}, όπως αυτή περιγράφεται από τη σχέση (5.153), ισούται με τη μονάδα, η διαχρονική πορεία του εισοδήματος έπειτα από μία εξωγενή διαταραχή θα χαρακτηρίζεται από σταθερού εύρους ταλαντώσεις (*uniform fluctuations*). Με άλλα λόγια στην περίπτωση που ισχύει ότι:

$$R_{se} = 1 \overset{(5.153)}{\Rightarrow} \sqrt{\frac{vc_1}{1+\varphi}} = 1 \Rightarrow \frac{vc_1}{1+\varphi} = 1 \Rightarrow \qquad v_{uf}^{su} = \frac{1+\varphi}{c_1} = u \qquad \textit{(5.156)}$$

η εκδήλωση μίας εξωγενούς διατάραξης θα έχει ως συνέπεια την ταλάντωση του εισοδήματος γύρω από τη βραχυχρόνια τιμή ισορροπίας του, με το εύρος της ταλάντωσης, δηλαδή της περιόδου ($\widetilde{P}_{se}$) εντός της οποίας ολοκληρώνεται μία ταλάντωση, να παραμένει σταθερό και ίσο με:

$$\widetilde{P}_{se} = \frac{2\pi}{n_{se}/2} = \frac{4\pi}{\sqrt{4\delta_0 - \delta_1^2}} \qquad \textit{(5.157)}$$

Στον πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζονται συνοπτικά οι μορφές της συμπληρωματικής λύσης της μη ομογενούς εξίσωσης διαφορών με σταθερούς συντελεστές (5.128), βάσει του προσήμου της διακρίνουσας της χαρακτηριστικής εξίσωσης (5.133).

<u>Πίνακας 5.3</u>: Μορφές της συμπληρωματικής λύσης βάσει του προσήμου της διακρίνουσας Δ_5

$\Delta_5 > 0$	$Y_t^c = A_1\left[\frac{1+v-\sqrt{(v-v_1^{se})(v-v_2^{se})}}{2u}\right]^t + A_2\left[\frac{1+v+\sqrt{(v-v_1^{se})(v-v_2^{se})}}{2u}\right]^t$
$\Delta_5 = 0$	$Y_t^c = (A_1 + A_2 t)(-\delta_1/2)^t$
$\Delta_5 < 0$	$Y_t^c = \sqrt{\delta_0^t}\,[A_3\cos(\chi_{se}t) + A_4\sin(\chi_{se}t)]$

<u>Παρατήρηση</u>: Οι σταθερές A_i, i = 1, …. ,4, μπορούν να προσδιορισθούν με τη βοήθεια δύο αρχικών συνθηκών

5.2.2 Προσδιορισμός της μερικής λύσης στα πλαίσια του μηχανισμού των στατικών προσδοκιών

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει η μερική λύση μας δίνει το επίπεδο του εισοδήματος ισορροπίας, το επίπεδο δηλαδή προς το οποίο θα συγκλίνει ή από το οποίο θα αποκλίνει το εισόδημα έπειτα από μία εξωγενή διαταραχή.

Προκειμένου να προσδιορίσουμε την τιμή του εισοδήματος ισορροπίας όταν οι προσδοκίες διαμορφώνονται βάσει του μηχανισμού των στατικών προσδοκιών, δεν έχουμε παρά να θέσουμε στη σχέση (5.47) όπου γ = 1. Ειδικότερα:

$$\tilde{Y}_t^{ae} = \frac{b_0}{1-c_1+\varphi} + \frac{b_2(\gamma+m)}{d_2(1+\varphi)} \frac{M_0(1+m)^{t+2}}{(1+m)^3 + a_2(1+m)^2 + a_1(1+m) + a_0} \xrightarrow{\gamma=1}$$

$$\rightarrow Y_t^p = \tilde{Y}_t^{se} = \frac{b_0}{1-c_1+\varphi} + \frac{b_2(1+m)}{d_2(1+\varphi)} \frac{M_0(1+m)^{t+2}}{(1+m)^3 - \frac{c_1(1+v)}{1+\varphi}(1+m)^2 + \frac{vc_1}{1+\varphi}(1+m) + 0} =$$

$$= \frac{b_0}{1-c_1+\varphi} + \frac{b_2(1+m)}{d_2(1+\varphi)} \frac{M_0(1+m)^{t+2}}{(1+m)\left[(1+m)^2 + \delta_1(1+m) + \delta_0\right]} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad Y_t^p = \tilde{Y}_t^{se} = \frac{b_0}{1-c_1+\varphi} + \frac{b_2}{d_2(1+\varphi)} \frac{M_0\tilde{m}^{t+2}}{\tilde{m}^2 + \delta_1\tilde{m} + \delta_0} \qquad \textbf{\textit{(5.158)}}$$

όπου $\tilde{m} = 1+m > 1$, $\delta_0 = \frac{vc_1}{1+\varphi} > 0$ και $\delta_1 = -\frac{c_1(1+v)}{1+\varphi} < 0$

Στο σημείο αυτό ανακύπτουν δύο ερωτήματα. Το πρώτο σχετίζεται με τις προϋποθέσεις που θα πρέπει να ικανοποιούνται προκειμένου το εισόδημα ισορροπίας, όπως αυτό περιγράφεται από τη σχέση (5.158), να συνιστά ένα θετικό μέγεθος. Το δεύτερο έχει να κάνει με το εάν και κατά πόσο διαφέρουν τα μεγέθη του εισοδήματος ισορροπίας τα οποία προσδιορίσαμε βάσει του μηχανισμού των αναθεωρούμενων και των στατικών προσδοκιών.

Στα πλαίσια του πρώτου ερωτήματος, και δεδομένου ότι $b_0 > 0$, c_1 & $m \in (0,1)$, $\varphi > 0$, $b_2 < 0$, $d_2 < 0$, $M_0 > 0$, $\tilde{m} = 1+m > 1$, $\delta_0 > 0$ και $\delta_1 < 0$, από τη σχέση (5.158) εύκολα προκύπτει ότι το πρόσημο του εισοδήματος ισορροπίας εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από το πρόσημο του ακόλουθου πολυωνύμου:

$$P_6(\tilde{m}) = \tilde{m}^2 + \delta_1\tilde{m} + \delta_0 \qquad \textbf{\textit{(5.159)}}$$

Βάσει του προσήμου του παραπάνω πολυωνύμου μπορούμε να διακρίνουμε μεταξύ των παρακάτω δύο περιπτώσεων:

1<u>ον</u> Εάν $P_6(\tilde{m}) < 0$ τότε για να αποτελεί το εισόδημα ισορροπίας ένα θετικό μέγεθος θα πρέπει να ισχύει ότι:

$$\frac{b_0}{1-c_1+\varphi} > -\frac{b_2}{d_2(1+\varphi)} \frac{M_0\tilde{m}^{t+2}}{\tilde{m}^2 + \delta_1\tilde{m} + \delta_0} \qquad \textbf{\textit{(5.160)}}$$

2<u>ον</u> Εάν $v \in \left(v_1^{se}, v_2^{se}\right)$, όπου $v_1^{se} = \left(\sqrt{u} - \sqrt{u-1}\right)^2$ & $v_1^{se} = \left(\sqrt{u} + \sqrt{u-1}\right)^2$, τότε η διακρίνουσα της εξίσωσης $P_6(\tilde{m}) = 0$, η οποία είναι ακριβώς η ίδια με τη διακρίνουσα Δ_5 της χαρακτηριστικής εξίσωσης (5.129), θα είναι αρνητική και ως εκ τούτου το πολυώνυμο $P_6(\tilde{m})$ θα έχει το ίδιο πρόσημο με εκείνο του συντελεστή (+1) του όρου $\tilde{m}^2$. Με άλλα λόγια εάν $v \in \left(v_1^{se}, v_2^{se}\right)$ θα έχουμε ότι $P_6(\tilde{m}) > 0$, κάτι που μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι $\tilde{Y}_t^{se} > 0$.

Στα πλαίσια του δευτέρου ερωτήματος και προκειμένου να διαπιστώσουμε εάν και κατά πόσο το εισόδημα ισορροπίας στο οποίο καταλήγουμε βάσει του μηχανισμού των αναθεωρούμενων προσδοκιών $\left(\tilde{Y}_t^{ae}\right)$, διαφέρει από εκείνο στο οποίο καταλήγουμε βάσει του μηχανισμού των στατικών προσδοκιών $\left(\tilde{Y}_t^{se}\right)$, θα προσδιορίσουμε το πρόσημο της ακόλουθης διαφοράς:

$$\tilde{Y}_t^{ae} - \tilde{Y}_t^{se} \qquad \textbf{\textit{(5.161)}}$$

Ειδικότερα, εάν αποδειχθεί ότι $\tilde{Y}_t^{ae} - \tilde{Y}_t^{se} > 0 \left(\tilde{Y}_t^{ae} - \tilde{Y}_t^{se} < 0\right)$ τότε ο μηχανισμός των αναθεωρούμενων (στατικών) προσδοκιών θα μας οδηγεί σ' ένα υψηλότερο επίπεδο εισοδήματος ισορροπίας συγκριτικά με εκείνο του μηχανισμού των στατικών (αναθεωρούμενων) προσδοκιών. Οι δύο μηχανισμοί διαμόρφωσης των προσδοκιών θα μας οδηγούν στο ίδιο επίπεδο του εισοδήματος ισορροπίας στην περίπτωση που ισχύει ότι $\tilde{Y}_t^{ae} - \tilde{Y}_t^{se} = 0$.

Από το συνδυασμό των σχέσεων (5.47) , (5.158) και (5.161) προκύπτει ότι:

$$\tilde{Y}_t^{ae} - \tilde{Y}_t^{se} \underset{(5.158)}{\overset{(5.47)}{=}} \frac{b_0}{1 - c_1 + \varphi} + \frac{b_2(\gamma + m)}{d_2(1+\varphi)} \frac{M_0 \tilde{m}^{t+2}}{\tilde{m}^3 + a_2 \tilde{m}^2 + a_1 \tilde{m} + a_0} -$$

$$- \frac{b_0}{1 - c_1 + \varphi} - \frac{b_2}{d_2(1+\varphi)} \frac{M_0 \tilde{m}^{t+2}}{\tilde{m}^2 + \delta_1 \tilde{m} + \delta_0} =$$

$$= \frac{b_2 \, M_0 \tilde{m}^{t+2}}{d_2(1+\varphi)} \left(\frac{\gamma + m}{\tilde{m}^3 + a_2 \tilde{m}^2 + a_1 \tilde{m} + a_0} - \frac{1}{\tilde{m}^2 + \delta_1 \tilde{m} + \delta_0} \right) =$$

$$= \frac{b_2 \, M_0 \tilde{m}^{t+2}}{d_2(1+\varphi)} \left[\frac{(\gamma + m)\left(\tilde{m}^2 + \delta_1 \tilde{m} + \delta_0\right) - \tilde{m}^3 - a_2 \tilde{m}^2 - a_1 \tilde{m} - a_0}{\left(\tilde{m}^3 + a_2 \tilde{m}^2 + a_1 \tilde{m} + a_0\right)\left(\tilde{m}^2 + \delta_1 \tilde{m} + \delta_0\right)} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \widetilde{Y}_t^{ae} - \widetilde{Y}_t^{se} = \frac{b_2\, M_0 \widetilde{m}^{t+2}}{d_2(1+\varphi)} \times$$

$$\times \left\{ \frac{-\widetilde{m}^3 + (\gamma + m - a_2)\,\widetilde{m}^2 + \left[(\gamma + m)\,\delta_1 - a_1\right]\widetilde{m} + (\gamma + m)\,\delta_0 - a_0}{\left(\widetilde{m}^3 + a_2\widetilde{m}^2 + a_1\widetilde{m} + a_0\right)\left(\widetilde{m}^2 + \delta_1\widetilde{m} + \delta_0\right)} \right\} \qquad \textbf{\textit{(5.162)}}$$

Δεδομένου ότι:

$$\gamma + m - a_2 = \gamma + m + \frac{c_1(1+v)}{1+\varphi} + 1 - \gamma = \widetilde{m} - \delta_1 \qquad \textbf{\textit{(5.163.1)}}$$

$$(\gamma + m)\delta_1 - a_1 = (\gamma + m)\delta_1 - \frac{c_1\left[v + (1+v)(1-\gamma)\right]}{1+\varphi} =$$

$$= (\gamma + m)\delta_1 - \frac{vc_1}{1+\varphi} - \frac{c_1(1+v)}{1+\varphi}(1-\gamma) = (\gamma + m)\delta_1 - \delta_0 + \delta_1(1-\gamma) =$$

$$= (\gamma + m + 1 - \gamma)\delta_1 - \delta_0 = \delta_1\widetilde{m} - \delta_0 \qquad \textbf{\textit{(5.163.2)}}$$

&

$$(\gamma + m)\delta_0 - a_0 = (\gamma + m)\delta_0 + \frac{vc_1}{1+\varphi}(1-\gamma) = (\gamma + m)\delta_0 + \delta_0(1-\gamma) =$$

$$= (\gamma + m + 1 - \gamma)\delta_0 = \delta_0\widetilde{m} \qquad \textbf{\textit{(5.163.3)}}$$

από το συνδυασμό των σχέσεων (5.162) & (5.163.1) ~ (5.163.3) προκύπτει:

$$\widetilde{Y}_t^{ae} - \widetilde{Y}_t^{se} = \frac{b_2\, M_0 \widetilde{m}^{t+2}}{d_2(1+\varphi)} \frac{-\widetilde{m}^3 + (\widetilde{m} - \delta_1)\widetilde{m}^2 + (\delta_1\widetilde{m} - \delta_0)\widetilde{m} + \delta_0\widetilde{m}}{\left(\widetilde{m}^3 + a_2\widetilde{m}^2 + a_1\widetilde{m} + a_0\right)\left(\widetilde{m}^2 + \delta_1\widetilde{m} + \delta_0\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \widetilde{Y}_t^{ae} - \widetilde{Y}_t^{se} = \frac{b_2\, M_0 \widetilde{m}^{t+2}}{d_2(1+\varphi)} \frac{-\widetilde{m}^3 + \widetilde{m}^3 - \delta_1\widetilde{m}^2 + \delta_1\widetilde{m}^2 - \delta_0\widetilde{m} + \delta_0\widetilde{m}}{\left(\widetilde{m}^3 + a_2\widetilde{m}^2 + a_1\widetilde{m} + a_0\right)\left(\widetilde{m}^2 + \delta_1\widetilde{m} + \delta_0\right)} = 0 \qquad \textbf{\textit{(5.164)}}$$

Βάσει της σχέσης (5.164) οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι οι μηχανισμοί των αναθεωρούμενων και των στατικών προσδοκιών μας οδηγούν στο ίδιο επίπεδο του εισοδήματος ισορροπίας.

5.2.3 Επηρεασμός του επιπέδου του εισοδήματος ισορροπίας από μεταβολές των συνιστωσών παραμέτρων του.

Στην παρούσα ενότητα θα προσπαθήσουμε να εξειδικεύσουμε τις επιπτώσεις από τη μεταβολή μίας μόνο εκ των παραμέτρων c_1 , b_0 , b_2 , d_1 , d_2 , v , M_0 , m και t που συνθέτουν το περιγραφόμενο μέσω της σχέσης (5.158) εισόδημα ισορροπίας, όταν οι προσδοκίες διαμορφώνονται βάσει του μηχανισμού των στατικών προσδοκιών.

Στα πλαίσια του παραπάνω μηχανισμού, οι απαλλαγμένες από τις προσδοκίες συναρτήσεις των επενδύσεων και της συνολικής ζήτησης χρήματος, όπως αυτές προκύπτουν από τις σχέσεις (5.86) και (5.96) για γ = 1, έχουν ως ακολούθως:

$$I_t = b_0 + vc_1\,\Delta Y_{t-1} + b_2\,\Delta R_{t-1} \qquad \textit{(5.165)}$$

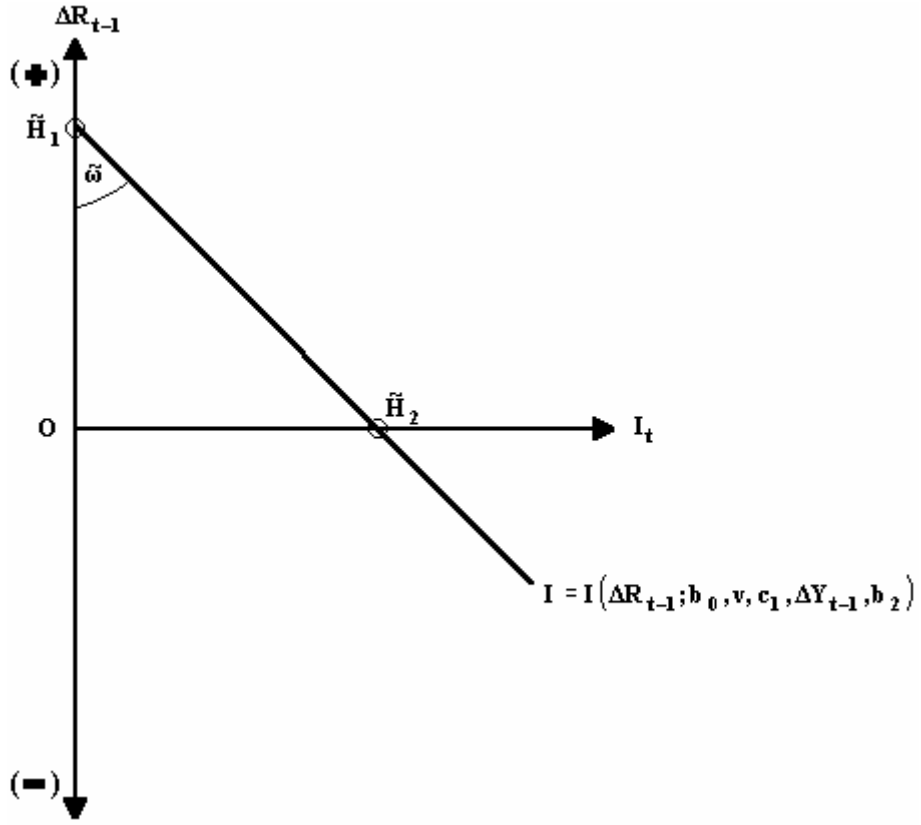
$$M_t^d = d_1 Y_t + d_2\,\Delta R_{t-1} \qquad \textit{(5.166)}$$

όπου $b_0 > 0$, $v > 0$, $0 < c_1 < 1$, $\Delta Y_{t-1} > 0$, $b_2 < 0$, $d_1 > 0$ & $d_2 < 0$

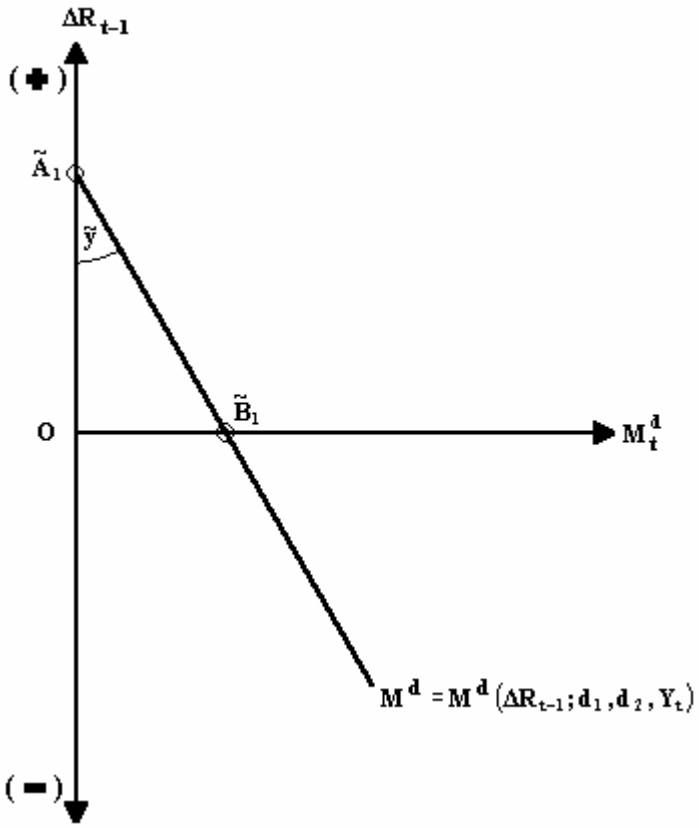
Θεωρώντας τη διαφορά ΔY_{t-1} ως ένα σταθερό μέγεθος, η συνάρτηση των επενδύσεων παρουσιάζεται γραφικά στο διάγραμμα Δ – 5.19 μέσω της καμπύλης I_1, η οποία τέμνει τον κατακόρυφο άξονα στο σημείο $\left(O,\tilde{H}_1\right)$ και τον οριζόντιο άξονα στο σημείο $\left(\tilde{H}_2,O\right)$, όπου $\tilde{H}_1 = -\left(b_0 + vc_1\,\Delta Y_{t-1}\right)/b_2 > 0$ και $\tilde{H}_2 = b_0 + vc_1\,\Delta Y_{t-1} > 0$. Η κλίση της καμπύλης I_1 δίνεται από την εφαπτομένη της γωνίας $\tilde{\omega}$ το μέγεθος της οποίας έχει ως ακολούθως:

$$\varepsilon\varphi\left(\tilde{\omega}\right) = \frac{O\tilde{H}_2}{O\tilde{H}_1} = \frac{b_0 + vc_1\,\Delta Y_{t-1}}{-\left(b_0 + vc_1\,\Delta Y_{t-1}\right)/b_2} = -b_2 \qquad \textit{(5.167)}$$

Όπως γίνεται φανερό η θέση της καμπύλης I επηρεάζεται από μεταβολές των παραμέτρων b_0 , v και c_1 ενώ η κλίση της επηρεάζεται από μεταβολές της τιμής του συντελεστή b_2. Πιο συγκεκριμένα μία αύξηση (μείωση) των τιμών των συντελεστών b_0 , v & c_1 θα προκαλέσει την παράλληλη μετατόπιση της καμπύλης I προς τα επάνω και δεξιά (προς τα κάτω και αριστερά). Από την άλλη μεριά μία μείωση (αύξηση) του συντελεστή b_2 [ή ισοδύναμα μία κατ' απόλυτη τιμή αύξηση (μείωση) του εν λόγω συντελεστή] θα προκαλέσει τη μείωση (αύξηση) του μεγέθους $\tilde{H}_1$, ενώ το μέγεθος $\tilde{H}_2$ θα παραμείνει αμετάβλητο. Με άλλα λόγια η συγκεκριμένη μεταβολή του συντελεστή b_2 θα προκαλέσει την αριστερόστροφη (δεξιόστροφη) περιστροφή της καμπύλης I περί του σταθερού σημείου $\tilde{H}_2$.


ΔR_{t-1}
(+)
$\tilde{H}_1$
$\tilde{\omega}$
O
$\tilde{H}_2$
I_t
$I = I(\Delta R_{t-1}; b_0, v, c_1, \Delta Y_{t-1}, b_2)$
(−)

Δ – 5.19


ΔR_{t-1}
(+)
$\tilde{A}_1$
$\tilde{y}$
O
$\tilde{B}_1$
M_t^d
$M^d = M^d(\Delta R_{t-1}; d_1, d_2, Y_t)$
(−)

Δ – 5.20

Με δεδομένο το τρέχον επίπεδο του εισοδήματος, η συνάρτηση της συνολικής ζήτησης χρήματος παρουσιάζεται γραφικά στο διάγραμμα Δ – 5.20 μέσω της καμπύλης M^d, η οποία τέμνει τον κατακόρυφο και τον οριζόντιο άξονα στα σημεία $\left(O,\widetilde{A}_1\right)$ και $\left(\widetilde{B}_1,O\right)$ αντιστοίχως, όπου $\widetilde{A}_1 = -\frac{d_1 Y_t}{d_2} > 0$ και $\widetilde{B}_1 = d_1 Y_t > 0$. Η κλίση της καμπύλης M^d δίνεται από την εφαπτομένη της γωνίας $\widetilde{y}$ η οποία και έχει ως εξής:

$$\varepsilon\varphi\left(\widetilde{y}\right) = \frac{O\widetilde{B}_1}{O\widetilde{A}_1} = \frac{d_1 Y_t}{-d_1 Y_t / d_2} = -d_2 \qquad \textbf{\textit{(5.168)}}$$

Όπως εύκολα μπορεί να διαπιστώσει κανείς, η θέση της καμπύλης M^d επηρεάζεται από μεταβολές του συντελεστή d_1 ενώ η κλίση της επηρεάζεται από μεταβολές του συντελεστή d_2. Ειδικότερα μία αύξηση (μείωση) της τιμής του συντελεστή d_1 θα έχει ως συνέπεια την παράλληλη μετατόπιση της καμπύλης M^d προς τα επάνω και δεξιά (προς τα κάτω και αριστερά). Από την άλλη μία μείωση (αύξηση) [ή ισοδύναμα μία κατ' απόλυτη τιμή αύξηση (μείωση)] της τιμής του συντελεστή d_2 θα προκαλέσει την μείωση (αύξηση) του μεγέθους $\widetilde{A}_1$ ενώ το μέγεθος $\widetilde{B}_1$ θα παραμείνει αμετάβλητο. Με άλλα λόγια η συγκεκριμένη μεταβολή της τιμής του συντελεστή d_2 θα προκαλέσει την αριστερόστροφη (δεξιόστροφη) περιστροφή της καμπύλης M^d περί του σταθερού σημείου $\widetilde{B}_1$.

Τέλος η επιτοκιακή διαφορά (ΔR_{t-1}) για την οποία η αγορά χρήματος βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας, προσδιορίζεται με τη βοήθεια της σχέσης (5.5) από την οποία για γ = 1 προκύπτει ότι:

$$\Delta R_{t-1} = \frac{1}{d_2}\left[M_0\left(1+m\right)^t - d_1 Y_t\right] \qquad \textbf{\textit{(5.169)}}$$

Στη συνέχεια της ανάλυσής μας θα προσδιορίσουμε το πρόσημο της μερικής παραγώγου του εισοδήματος ισορροπίας, όπως αυτό περιγράφεται από τη σχέση (5.158), ως προς κάθε μία από τις συνιστώσες παραμέτρους του, ξεκινώντας από εκείνη των αυτόνομων επενδύσεων.

(α) Αυτόνομες επενδύσεις (b_0)

Μία απειροελάχιστη αύξηση των αυτόνομων επενδύσεων θα προκαλέσει την αύξηση της συνολικής ζήτησης, και με δεδομένη τη συνολικά προσφερόμενη ποσότητα θα οδηγήσει την αγορά προϊόντος σε κατάσταση ανισορροπίας. Η ισορροπία στην αγορά προϊόντος θα αποκατασταθεί με την αύξηση της συνολικά προσφερόμενης ποσότητας. Με άλλα λόγια μία αύξηση των αυτόνομων επενδύσεων αναμένεται να οδηγήσει στην αύξηση του εισοδήματος ισορροπίας ή σε μαθηματικούς όρους:

$$\frac{\partial \widetilde{Y}_t^{se}}{\partial b_0} > 0$$

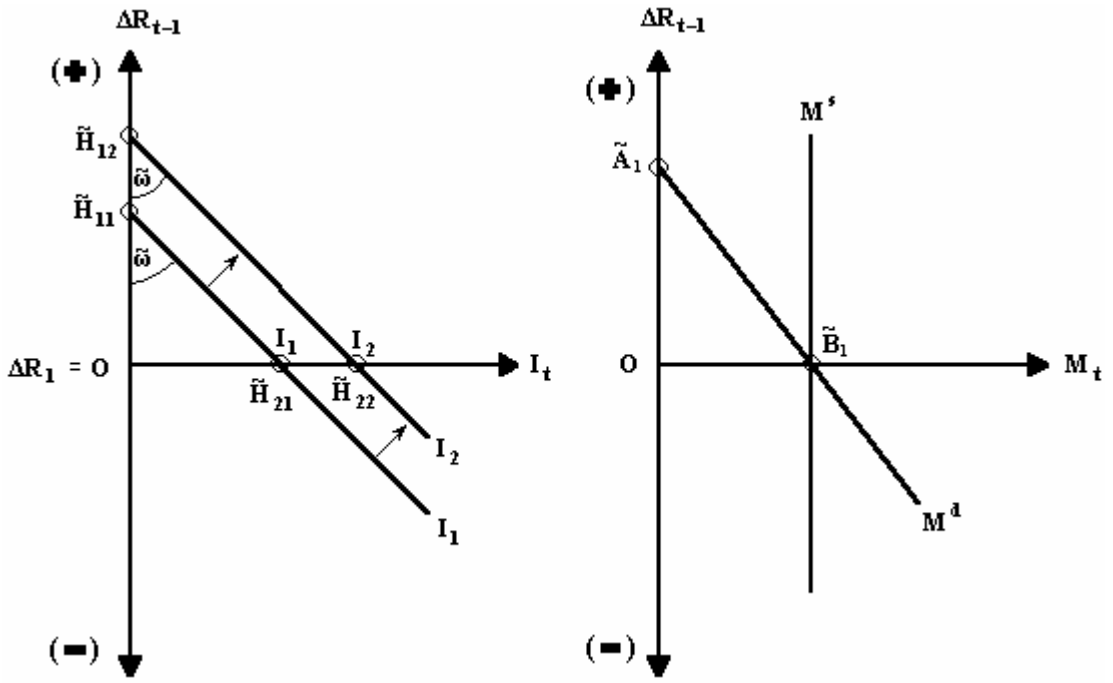
Η μερική παράγωγος του εισοδήματος ισορροπίας ως προς b_0 έχει ως εξής:

$$\frac{\partial \tilde{Y}_t^{se}}{\partial b_0} = \frac{1}{1 - c_1 + \varphi} > 0 \qquad (5.170)$$

Όπως διαπιστώνουμε από την παραπάνω σχέση, και δεδομένου ότι $1 - c_1 > 0$ και $\varphi > 0$, η μερική παράγωγος του εισοδήματος ισορροπίας ως προς τις αυτόνομες επενδύσεις έχουν το αναμενόμενο, βάσει της προηγηθείσας ανάλυσης, πρόσημο.

(β) Οριακή ροπή προς κατανάλωση (c_1)

Προ της μεταβολής του μεγέθους της οριακής ροπής προς κατανάλωση, ας υποθέσουμε ότι η αγορά χρήματος ισορροπεί στο σημείο $(\tilde{B}_1, O)$ του γραφήματος Δ – 5.21, στο σημείο δηλαδή τομής των καμπυλών προσφοράς (M^s) και ζήτησης (M^d) χρήματος, από το οποίο προκύπτει η επιτοκιακή διαφορά ισορροπίας[35] $\Delta R_1 = 0$. Βάσει αυτής, το αρχικό ύψος των επενδύσεων I_1 προσδιορίζεται από το σημείο τομής της αρχικής καμπύλης των επενδύσεων $I_1 = I(c_{11}, \Delta R_{t-1}; b_0, v, b_2, \Delta Y_{t-1})$ με τον οριζόντιο άξονα.



Δ – 5.21

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η τιμή της οριακής ροπής προς κατανάλωση αυξάνεται από c_{11} σε c_{12}, με $c_{11} < c_{12}$. Η μεταβολή αυτή θα αφήσει ανεπηρέαστη την κλίση της καμπύλης των επενδύσεων, δεδομένου ότι αυτή υπόκειται στην επίδραση μόνο του συντελεστή b_2. Ανεπηρέαστη θα παραμείνει και η ισορροπία στην αγορά χρήματος,

[35] Οι επιπτώσεις της μεταβολής του μεγέθους της οριακής ροπής προς κατανάλωση επί του ύψους των επενδύσεων είναι οι ίδιες ανεξαρτήτως του προσήμου της επιτοκιακής διαφοράς ισορροπίας ΔR_1

καθώς από τη σχέση (5.169) προκύπτει ότι $\partial \Delta R_{t-1} / \partial c_1 = 0$. Από τη σχέση ωστόσο (5.165) προκύπτει ότι $\partial I_t / \partial c_1 = v\, \Delta Y_{t-1} > 0$. Με άλλα λόγια η αύξηση της τιμής της οριακής ροπής προς κατανάλωση θα προκαλέσει την παράλληλη μετατόπιση της καμπύλης των επενδύσεων προς τα επάνω και δεξιά από τη θέση I_1 στη θέση I_2. Το νέο και υψηλότερο επίπεδο επενδύσεων I_2 προσδιορίζεται από το σημείο $\left(\tilde{H}_{22}, O\right)$, από το σημείο δηλαδή τομής της καμπύλης I_2 με τον οριζόντιο άξονα.

Ως αποτέλεσμα της αύξησης της οριακής ροπής προς κατανάλωση θα αυξηθεί όχι μόνο το επίπεδο των επενδύσεων αλλά και το επίπεδο της κατανάλωσης. Με άλλα λόγια θα έχουμε αύξηση της συνολικής ζήτησης, κάτι που αναμένεται να οδηγήσει στην αύξηση και του επιπέδου του εισοδήματος ισορροπίας. Σε μαθηματικούς όρους αναμένουμε δηλαδή ότι:

$$\frac{\partial \tilde{Y}_t^{se}}{\partial c_1} > 0$$

Από τη σχέση (5.158) προκύπτει ότι:

$$\frac{\partial \tilde{Y}_t^{se}}{\partial c_1} = -\frac{b_0}{\left(1 - c_1 + \varphi\right)^2} \frac{\partial\left(1 - c_1 + \varphi\right)}{\partial c_1} - \frac{b_2}{d_2\left(1+\varphi\right)} \frac{M_0 \tilde{m}^{t+2}}{\left(\tilde{m}^2 + \delta_1 \tilde{m} + \delta_0\right)^2} \frac{\partial\left(\tilde{m}^2 + \delta_1 \tilde{m} + \delta_0\right)}{\partial c_1} =$$

$$= \frac{b_0}{\left(1 - c_1 + \varphi\right)^2} - \frac{b_2}{d_2\left(1+\varphi\right)} \frac{M_0 \tilde{m}^{t+2}}{\left(\tilde{m}^2 + \delta_1 \tilde{m} + \delta_0\right)^2} \left(0 + \tilde{m} \frac{\partial \delta_1}{\partial c_1} + \frac{\partial \delta_0}{\partial c_1}\right) =$$

$$= \frac{b_0}{\left(1 - c_1 + \varphi\right)^2} - \frac{b_2}{d_2\left(1+\varphi\right)} \frac{M_0 \tilde{m}^{t+2}}{\left(\tilde{m}^2 + \delta_1 \tilde{m} + \delta_0\right)^2} \left[-\frac{\left(1+v\right)}{1+\varphi} \tilde{m} + \frac{v}{1+\varphi}\right] =$$

$$= \frac{b_0}{\left(1 - c_1 + \varphi\right)^2} - \frac{b_2}{d_2\left(1+\varphi\right)} \frac{M_0 \tilde{m}^{t+2}}{\left(\tilde{m}^2 + \delta_1 \tilde{m} + \delta_0\right)^2} \left[-\frac{\left(1+v\right)\tilde{m} - v}{1+\varphi}\right] =$$

$$= \frac{b_0}{\left(1 - c_1 + \varphi\right)^2} + \frac{b_2}{d_2\left(1+\varphi\right)^2} \frac{M_0 \tilde{m}^{t+2}}{\left(\tilde{m}^2 + \delta_1 \tilde{m} + \delta_0\right)^2} \left[\tilde{m} + v\left(\tilde{m} - 1\right)\right] =$$

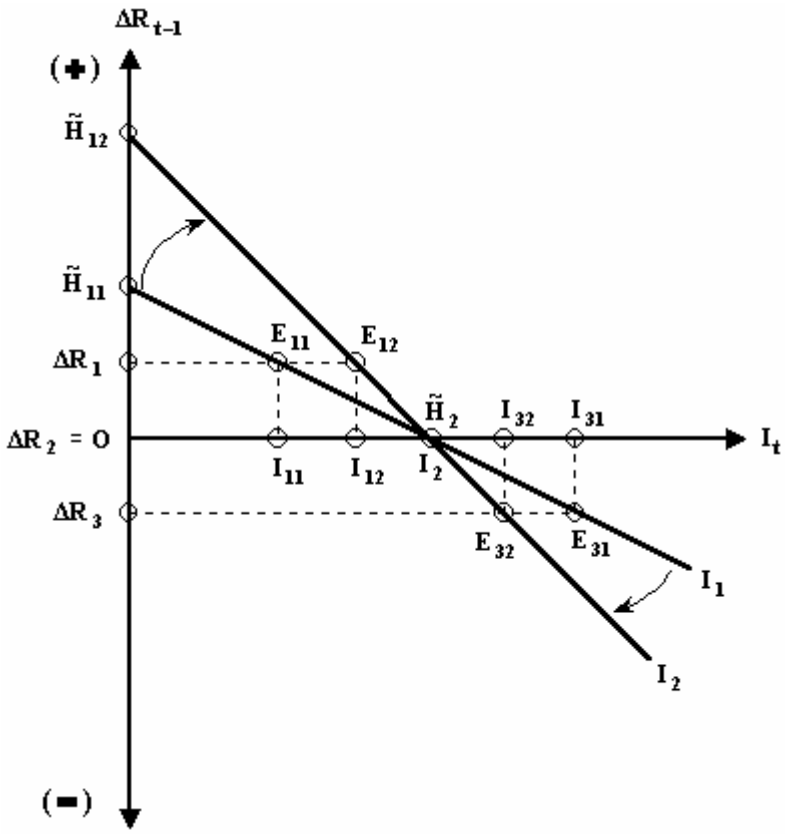
$$= \frac{b_0}{\left(1 - c_1 + \varphi\right)^2} + \frac{b_2}{d_2\left(1+\varphi\right)^2} \frac{M_0 \tilde{m}^{t+2}}{\left(\tilde{m}^2 + \delta_1 \tilde{m} + \delta_0\right)^2} \left[\tilde{m} + v\left(1 + m - 1\right)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \tilde{Y}_t^{se}}{\partial c_1} = \frac{b_0}{\left(1 - c_1 + \varphi\right)^2} + \frac{\varphi\left(\tilde{m} + m\, v\right)}{d_1\left(1+\varphi\right)^2} \frac{M_0 \tilde{m}^{t+2}}{\left(\tilde{m}^2 + \delta_1 \tilde{m} + \delta_0\right)^2} > 0 \qquad \textbf{\textit{(5.171)}}$$

Δεδομένου ότι $b_0 > 0$, $\varphi > 0$, $d_1 > 0$, $0 < m < 1$, $v > 0$ & $\tilde{m} = 1 + m > 1$, από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι η μερική παράγωγος του εισοδήματος ισορροπίας παρουσιάζει το, από οικονομικής απόψεως, αναμενόμενο πρόσημο.

(γ) Ο συντελεστής b_2

Έχοντας διερευνήσει τις επιπτώσεις μίας απειροελάχιστης μεταβολής των αυτόνομων επενδύσεων και της οριακής ροπής προς κατανάλωση πάνω στο επίπεδο του εισοδήματος ισορροπίας, στην παρούσα παράγραφο θα διερευνήσουμε και τις επιπτώσεις μίας αύξησης της τιμής του συντελεστή b_2 επί του εισοδήματος ισορροπίας. Με τη βοήθεια του γραφήματος Δ – 5.22 που ακολουθεί θα επιχειρήσουμε να προσδιορίσουμε το αναμενόμενο πρόσημο της μερικής παραγώγου $\partial \tilde{Y}_t^{se} / \partial b_2$.



Δ – 5.22

Από τη σχέση (5.169) γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι η αύξηση της τιμής του συντελεστή b_2 (για παράδειγμα από – 2 σε – 1) θα αφήσει ανεπηρέαστο το επίπεδο της επιτοκιακής διαφοράς για την οποία η αγορά χρήματος βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας. Όπως έχουμε όμως ήδη αναφέρει, η αύξηση του εν λόγω συντελεστή θα προκαλέσει την δεξιόστροφη περιστροφή της καμπύλης των επενδύσεων περί του σημείου $\tilde{H}_2$ από την αρχική θέση I_1 στη νέα θέση I_2. Γίνεται λοιπόν φανερό ότι η επίπτωση της αύξησης του συντελεστή b_2 πάνω στο ύψος των επενδύσεων εξαρτάται

από το πρόσημο της επιτοκιακής διαφοράς ισορροπίας ΔR_{t-1}. Ως εκ τούτου μπορούμε να διακρίνουμε μεταξύ των παρακάτω περιπτώσεων:

1η Περίπτωση: $\Delta R_{t-1} > 0$

Στην περίπτωση που η επιτοκιακή διαφορά ισορροπίας ΔR_{t-1} συνιστά ένα θετικό μέγεθος ($\Delta R_1 > 0$), το αρχικό ύψος των επενδύσεων (I_{11}) προσδιορίζεται από το σημείο E_{11}. Η περιστροφή της καμπύλης των επενδύσεων, ως αποτέλεσμα της αύξησης του συντελεστή b_2, από τη θέση I_1 στη θέση I_2 θα προκαλέσει την αύξηση των επενδύσεων από I_{11} σε I_{12}. Η αύξηση αυτή των επενδύσεων θα προκαλέσει την αύξηση της συνολικής ζήτησης και κατ' επέκταση του εισοδήματος ισορροπίας. Με άλλα λόγια στην περίπτωση που $\Delta R_{t-1} > 0$ θα αναμένουμε ότι:

$$\frac{\partial \widetilde{Y}_t^{se}}{\partial b_2} > 0$$

2η Περίπτωση: $\Delta R_{t-1} = 0$

Εάν η επιτοκιακή διαφορά για την οποία η αγορά χρήματος βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας ισούται με το μηδέν ($\Delta R_2 = 0$), το αρχικό ύψος των επενδύσεων προσδιορίζεται από το σημείο τομής της αρχικής καμπύλης I_1 με τον οριζόντιο άξονα. Όπως προκύπτει και από το γράφημα Δ – 5.22, η περιστροφή της καμπύλης των επενδύσεων περί του σημείου τομής $\widetilde{H}_2$ θα αφήσει ανεπηρέαστο το ύψος των επενδύσεων. Με άλλα λόγια, στην περίπτωση που $\Delta R_{t-1} = 0$ θα αναμένουμε ότι:

$$\frac{\partial \widetilde{Y}_t^{se}}{\partial b_2} = 0$$

3η Περίπτωση: $\Delta R_{t-1} < 0$

Τέλος στην περίπτωση που η επιτοκιακή διαφορά ισορροπίας συνιστά ένα αρνητικό μέγεθος ($\Delta R_3 < 0$), η αύξηση του συντελεστή b_2 αφενός θα προκαλέσει την περιστροφή της καμπύλης των επενδύσεων από τη θέση I_1 στη θέση I_2, αφετέρου θα επιφέρει την μείωση των επενδύσεων από το αρχικό επίπεδο I_{31} στο νέο και χαμηλότερο επίπεδο I_{32}. Η μείωση των επενδύσεων θα έχει ως συνέπεια τη μείωση της συνολικής ζήτησης και συνακολούθως του εισοδήματος ισορροπίας. Με άλλα λόγια στην περίπτωση που $\Delta R_{t-1} < 0$ θα αναμένουμε ότι:

$$\frac{\partial \widetilde{Y}_t^{se}}{\partial b_2} < 0$$

Όπως προκύπτει από την παραπάνω ανάλυση το πρόσημο της μερικής παραγώγου του εισοδήματος ισορροπίας ως προς b_2 αναμένεται ότι θα είναι απροσδιόριστο.

Η μερική παράγωγος του εισοδήματος ισορροπίας ως προς το συντελεστή b_2, όπως αυτή προκύπτει από τη σχέση (5.158), έχει ως ακολούθως:

$$\frac{\partial \widetilde{Y}_t^{se}}{\partial b_2} = -\frac{b_0}{(1-c_1+\varphi)^2}\frac{\partial(1-c_1+\varphi)}{\partial b_2} + \frac{d_2(1+\varphi)-b_2\frac{\partial[d_2(1+\varphi)]}{\partial b_2}}{[d_2(1+\varphi)]^2}\frac{M_0\widetilde{m}^{t+2}}{\widetilde{m}^2+\delta_1\widetilde{m}+\delta_0} -$$

$$-\frac{b_2}{d_2(1+\varphi)}\frac{M_0\widetilde{m}^{t+2}}{(\widetilde{m}^2+\delta_1\widetilde{m}+\delta_0)^2}\frac{\partial(\widetilde{m}^2+\delta_1\widetilde{m}+\delta_0)}{\partial b_2} =$$

$$= -\frac{b_0}{(1-c_1+\varphi)^2}\frac{d_1}{d_2} + \frac{d_2(1+\varphi)-b_2 d_1}{d_2^2(1+\varphi)^2}\frac{M_0\widetilde{m}^{t+2}}{\widetilde{m}^2+\delta_1\widetilde{m}+\delta_0} -$$

$$-\frac{b_2}{d_2(1+\varphi)}\frac{M_0\widetilde{m}^{t+2}}{(\widetilde{m}^2+\delta_1\widetilde{m}+\delta_0)^2}\left(0+\frac{\partial\delta_1}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial b_2}\widetilde{m}+\frac{\partial\delta_0}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial b_2}\right) =$$

$$= -\frac{b_0}{(1-c_1+\varphi)^2}\frac{d_1}{d_2} + \frac{1+\varphi-\varphi}{d_2(1+\varphi)^2}\frac{M_0\widetilde{m}^{t+2}}{\widetilde{m}^2+\delta_1\widetilde{m}+\delta_0} -$$

$$-\frac{b_2}{d_2(1+\varphi)}\frac{M_0\widetilde{m}^{t+2}}{(\widetilde{m}^2+\delta_1\widetilde{m}+\delta_0)^2}\left[\frac{c_1(1+v)}{(1+\varphi)^2}\frac{d_1}{d_2}\widetilde{m} - \frac{vc_1}{(1+\varphi)^2}\frac{d_1}{d_2}\right] =$$

$$= -\frac{b_0}{(1-c_1+\varphi)^2}\frac{d_1}{d_2} + \frac{1}{d_2(1+\varphi)^2}\frac{M_0\widetilde{m}^{t+2}}{\widetilde{m}^2+\delta_1\widetilde{m}+\delta_0} -$$

$$-\frac{b_2 d_1}{d_2^2(1+\varphi)^2}\frac{M_0\widetilde{m}^{t+2}}{(\widetilde{m}^2+\delta_1\widetilde{m}+\delta_0)^2}(-\delta_1\widetilde{m}-\delta_0) =$$

$$= -\frac{b_0}{(1-c_1+\varphi)^2}\frac{d_1}{d_2} + \frac{1}{d_2(1+\varphi)^2}\frac{M_0\widetilde{m}^{t+2}}{\widetilde{m}^2+\delta_1\widetilde{m}+\delta_0} +$$

$$+\frac{\varphi}{d_2(1+\varphi)^2}\frac{M_0\widetilde{m}^{t+2}}{(\widetilde{m}^2+\delta_1\widetilde{m}+\delta_0)^2}(\delta_1\widetilde{m}+\delta_0) =$$

$$= -\frac{b_0}{(1-c_1+\varphi)^2}\frac{d_1}{d_2} + \frac{1}{d_2(1+\varphi)^2}\frac{M_0\widetilde{m}^{t+2}}{\widetilde{m}^2+\delta_1\widetilde{m}+\delta_0}\left[1+\frac{\varphi(\delta_1\widetilde{m}+\delta_0)}{\widetilde{m}^2+\delta_1\widetilde{m}+\delta_0}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \tilde{Y}_t^{se}}{\partial b_2} = -\frac{b_0 d_1}{d_2(1-c_1+\varphi)^2} + \frac{\left[\tilde{m}^2 + (1+\varphi)\delta_1\tilde{m} + (1+\varphi)\delta_0\right] M_0 \tilde{m}^{t+2}}{d_2(1+\varphi)^2\left(\tilde{m}^2 + \delta_1\tilde{m} + \delta_0\right)^2} \qquad (5.172)$$

Δεδομένου ότι $b_0 > 0$, $d_1 > 0$, $d_2 < 0$, $b_2 < 0$, $\varphi > 0$, $M_0 > 0$, $\delta_1 < 0$, $\delta_0 > 0$ και $\tilde{m} = 1 + m > 1$, από τη σχέση (5.172) γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι το πρόσημο της μερικής παραγώγου $\partial \tilde{Y}_t^{se} / \partial b_2$ είναι μάλλον απροσδιόριστο, επιβεβαιώνοντας έτσι το βασικό συμπέρασμα της ανάλυσης που προηγήθηκε του προσδιορισμού της εν λόγω μερικής παραγώγου.

(δ) Ο συντελεστής d_1

Μία απειροελάχιστη μεταβολή της τιμής του συντελεστή d_1 θα επηρεάσει, όπως προκύπτει και από τη σχέση (5.169), το επίπεδο της επιτοκιακής διαφοράς (ΔR_{t-1}) για την οποία ισορροπεί η αγορά χρήματος. Προκειμένου να διερευνήσουμε προς ποια κατεύθυνση θα κινηθεί η επιτοκιακή διαφορά ισορροπίας έπειτα από μία μεταβολή μόνο του συντελεστή d_1, δεν έχουμε παρά να υπολογίσουμε το πρόσημο της μερικής παραγώγου της σχέσης (5.169) ως προς d_1. Το μέγεθος της εν λόγω μερικής παραγώγου έχει ως ακολούθως:

$$\frac{\partial \Delta R_{t-1}}{\partial d_1} = -\frac{Y_t}{d_2} > 0 \qquad (5.173)$$

Όπως προκύπτει από την παραπάνω σχέση μία αύξηση της τιμής του συντελεστή d_1 θα προκαλέσει τη αύξηση της επιτοκιακής διαφοράς για την οποία η αγορά χρήματος βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας. Δεδομένης της ύπαρξης αρνητικής σχέσης μεταξύ των επενδύσεων και της επιτοκιακής διαφοράς, η αύξηση της τελευταίας θα προκαλέσει τη μείωση του επιπέδου των επενδύσεων και συνακολούθως της συνολικής ζήτησης, οδηγώντας έτσι και στη συρρίκνωση του εισοδήματος ισορροπίας. Σε μαθηματικούς όρους θα αναμένουμε δηλαδή ότι:

$$\frac{\partial \tilde{Y}_t^{se}}{\partial d_1} < 0$$

Από τη σχέση (5.158) προκύπτει ότι:

$$\frac{\partial \tilde{Y}_t^{se}}{\partial d_1} = -\frac{b_0}{(1-c_1+\varphi)^2}\frac{\partial(1-c_1+\varphi)}{\partial d_1} - \frac{b_2}{d_2(1+\varphi)^2}\frac{\partial(1+\varphi)}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial d_1}\frac{M_0\tilde{m}^{t+2}}{\tilde{m}^2+\delta_1\tilde{m}+\delta_0} -$$

$$-\frac{b_2}{d_2(1+\varphi)}\frac{M_0\tilde{m}^{t+2}}{\left(\tilde{m}^2+\delta_1\tilde{m}+\delta_0\right)^2}\frac{\partial\left(\tilde{m}^2+\delta_1\tilde{m}+\delta_0\right)}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial d_1} =$$

$$=-\frac{b_0}{(1-c_1+\varphi)^2}\frac{b_2}{d_2}-\frac{b_2}{d_2(1+\varphi)^2}\frac{b_2}{d_2}\frac{M_0\tilde{m}^{t+2}}{\tilde{m}^2+\delta_1\tilde{m}+\delta_0}-$$

$$-\frac{b_2}{d_2(1+\varphi)}\frac{M_0\tilde{m}^{t+2}}{\left(\tilde{m}^2+\delta_1\tilde{m}+\delta_0\right)^2}\left(0+\frac{\partial\delta_1}{\partial\varphi}\tilde{m}+\frac{\partial\delta_0}{\partial\varphi}\right)\frac{b_2}{d_2}=$$

$$=-\frac{b_0\varphi}{d_1(1-c_1+\varphi)^2}-\frac{\varphi^2}{d_1^2(1+\varphi)^2}\frac{M_0\tilde{m}^{t+2}}{\tilde{m}^2+\delta_1\tilde{m}+\delta_0}-$$

$$-\frac{\varphi^2}{d_1^2(1+\varphi)}\frac{M_0\tilde{m}^{t+2}}{\left(\tilde{m}^2+\delta_1\tilde{m}+\delta_0\right)^2}\left[\frac{c_1(1+v)}{(1+\varphi)^2}\tilde{m}-\frac{vc_1}{(1+\varphi)^2}\right]=$$

$$=-\frac{b_0\varphi}{d_1(1-c_1+\varphi)^2}-\frac{\varphi^2}{d_1^2(1+\varphi)^2}\frac{M_0\tilde{m}^{t+2}}{\tilde{m}^2+\delta_1\tilde{m}+\delta_0}+$$

$$+\frac{\varphi^2}{d_1^2(1+\varphi)^2}\frac{M_0\tilde{m}^{t+2}}{\left(\tilde{m}^2+\delta_1\tilde{m}+\delta_0\right)^2}\left[-\frac{c_1(1+v)}{1+\varphi}\tilde{m}+\frac{vc_1}{1+\varphi}\right]=$$

$$=-\frac{b_0\varphi}{d_1(1-c_1+\varphi)^2}-\frac{\varphi^2}{d_1^2(1+\varphi)^2}\frac{M_0\tilde{m}^{t+2}}{\tilde{m}^2+\delta_1\tilde{m}+\delta_0}+$$

$$+\frac{\varphi^2}{d_1^2(1+\varphi)^2}\frac{M_0\tilde{m}^{t+2}}{\left(\tilde{m}^2+\delta_1\tilde{m}+\delta_0\right)^2}\left(\delta_1\tilde{m}+\delta_0\right)=$$

$$=-\frac{b_0\varphi}{d_1(1-c_1+\varphi)^2}-\frac{\varphi^2}{d_1^2(1+\varphi)^2}\frac{M_0\tilde{m}^{t+2}}{\tilde{m}^2+\delta_1\tilde{m}+\delta_0}\left[1-\frac{\delta_1\tilde{m}+\delta_0}{\tilde{m}^2+\delta_1\tilde{m}+\delta_0}\right]\Rightarrow$$

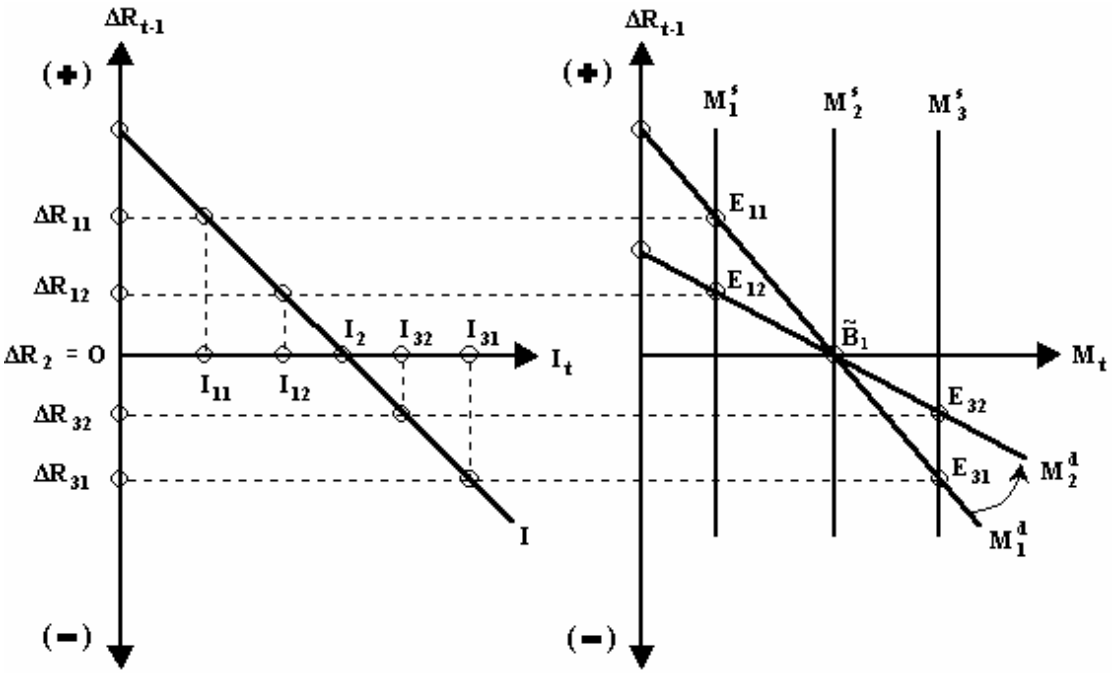
$$\Rightarrow\frac{\partial\tilde{Y}_t^{se}}{\partial d_1}=-\left[\frac{b_0\varphi}{d_1(1-c_1+\varphi)^2}+\frac{\varphi^2}{d_1^2(1+\varphi)^2}\frac{M_0\tilde{m}^{t+4}}{\left(\tilde{m}^2+\delta_1\tilde{m}+\delta_0\right)^2}\right] \qquad \textit{(5.174)}$$

Δεδομένου ότι οι παράμετροι b_0, d_1, M_0 και φ είναι θετικά ορισμένες, ο εντός της αγκύλης όρος της σχέσης (5.174) θα συνιστά ένα θετικό μέγεθος και ως εκ τούτου θα

ισχύει ότι $\partial\tilde{Y}_t^{se}/\partial d_1 < 0$. Με άλλα λόγια η προκύπτουσα από τη σχέση (5.158) μερική παράγωγος $\partial\tilde{Y}_t^{se}/\partial d_1$ υποδεικνύει, όπως αναμενόταν, την ύπαρξη αρνητικής σχέσης μεταξύ του εισοδήματος ισορροπίας και του συντελεστή d_1.

(ε) Ο συντελεστής d_2

Με τη βοήθεια του γραφήματος που ακολουθεί θα προσπαθήσουμε να διερευνήσουμε τις επιπτώσεις μίας μείωσης της τιμής του συντελεστή d_2 (για παράδειγμα από –1 σε –2) πάνω τόσο στο επίπεδο των επενδύσεων όσο και σ' εκείνο του εισοδήματος ισορροπίας.



Δ – 5.23

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, η μείωση της τιμής του συντελεστή d_2 θα έχει ως συνέπεια την αριστερόστροφη περιστροφή της αρχικής καμπύλης ζήτησης χρήματος $\left(M_1^d\right)$ περί του σημείου τομής της με τον οριζόντιο άξονα $\left[\left(\tilde{B}_1, O\right)\right]$, από τη θέση M_1^d στη θέση M_2^d. Όσον αφορά τώρα την επίπτωση της συγκεκριμένης μεταβολής του συντελεστή d_2 επί του ύψους των επενδύσεων, από το γράφημα Δ – 5.23 γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι αυτή εξαρτάται από το πρόσημο της τιμής της αρχικής επιτοκιακής διαφοράς ισορροπίας. Εξαρτάται δηλαδή από τη σχετική θέση του αρχικού σημείο ισορροπίας της αγοράς χρήματος ως προς το σημείο τομής της καμπύλης ζήτησης χρήματος με τον οριζόντιο άξονα. Βάσει του προσήμου της επιτοκιακής διαφοράς ισορροπίας θα διακρίνουμε στη συνέχεια μεταξύ τριών περιπτώσεων:

1η Περίπτωση: $\Delta R_{t-1} > 0$

Στα πλαίσια της πρώτης περίπτωσης θα υποθέσουμε ότι προ της μειώσεως της τιμής του συντελεστή d_2, η επιτοκιακή διαφορά ισορροπίας (ΔR_{11}), όπως αυτή προσδιορίζεται από το σημείο τομής (E_{11}) των καμπυλών M_1^d και M_1^s, συνιστά ένα θετικό μέγεθος.

Ως αποτέλεσμα της μετατόπισης της καμπύλης ζήτησης χρήματος, λόγω μείωσης της τιμής του συντελεστή d_2, από τη θέση M_1^d στη θέση M_2^d και της συνακόλουθης μετατόπισης του σημείου ισορροπίας της αγοράς χρήματος από το E_{11} στο E_{12}, η επιτοκιακή διαφορά ισορροπίας μειώνεται από ΔR_{11} σε ΔR_{12} προκαλώντας έτσι την αύξηση των επενδύσεων από το αρχικό επίπεδο I_{11} στο υψηλότερο επίπεδο I_{12}. Η αύξηση αυτή των επενδύσεων αναμένεται να οδηγήσει στην αύξηση της συνολικής ζήτησης και κατ' επέκταση του επιπέδου του εισοδήματος ισορροπίας. Σε μαθηματικούς όρους θα αναμένουμε κατά συνέπεια ότι:

$$\frac{\partial \tilde{Y}_t^{se}}{\partial d_2} < 0$$

2η Περίπτωση: $\Delta R_{t-1} = 0$

Στην περίπτωση που η καμπύλη προσφοράς χρήματος (M_2^s) τέμνει την αρχική καμπύλη ζήτησης χρήματος στο σημείο τομής της με τον οριζόντιο άξονα, η μετατόπιση της καμπύλης M_1^d στη θέση M_2^d, ως αποτέλεσμα της μειώσεως του μεγέθους του συντελεστή d_2, θα αφήσει ανεπηρέαστη αφενός την επιτοκιακή διαφορά ισορροπίας (το ύψος της οποίας θα παραμείνει σταθερό σε $\Delta R_2 = 0$) και αφετέρου το επίπεδο των επενδύσεων (το ύψος των οποίων θα παραμείνει στο επίπεδο I_2) και συνακολούθως της συνολικής ζήτησης και του εισοδήματος ισορροπίας. Με άλλα λόγια, και σε μαθηματικούς όρους, θα αναμένουμε ότι:

$$\frac{\partial \tilde{Y}_t^{se}}{\partial d_2} = 0$$

3η Περίπτωση: $\Delta R_{t-1} < 0$

Στην περίπτωση τέλος που το σημείο τομής της αρχικής καμπύλης ζήτησης χρήματος με τον οριζόντιο άξονα κείται αριστερά του αρχικού σημείου ισορροπίας της αγοράς χρήματος (E_{31}), του σημείου δηλαδή τομής των καμπυλών M_1^d και M_3^s, η μετατόπιση της καμπύλης M_1^d στη θέση M_2^d και της συνακόλουθης μετατόπισης του σημείου ισορροπίας της αγοράς χρήματος από το E_{31} στο E_{32}, θα προκαλέσει την αύξηση της επιτοκιακής διαφοράς ισορροπίας (από το αρχικό ύψος ΔR_{31} στο υψηλότερο ΔR_{32}) και συνακολούθως τη μείωση των επενδύσεων (από I_{31} σε I_{32}), της συνολικής ζήτησης και κατ' επέκταση του εισοδήματος ισορροπίας. Σε μαθηματικούς όρους θα αναμένουμε δηλαδή ότι:

$$\frac{\partial \tilde{Y}_t^{se}}{\partial d_2} > 0$$

Όπως προκύπτει από την παραπάνω ανάλυση, το πρόσημο της μερικής παραγώγου $\partial\tilde{Y}_t^{se}/\partial d_2$ είναι μάλλον απροσδιόριστο. Προκειμένου να επιβεβαιώσουμε το συμπέρασμα αυτό δεν έχουμε παρά να υπολογίσουμε το ακριβές μέγεθος της εν λόγω μερικής παραγώγου. Πιο συγκεκριμένα από τη σχέση (5.158) παίρνουμε:

$$\frac{\partial\tilde{Y}_t^{se}}{\partial d_2}=-\frac{b_0}{(1-c_1+\varphi)^2}\frac{\partial(1-c_1+\varphi)}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial d_2}+\frac{\partial\left[\frac{b_2}{(d_2+b_2d_1)}\frac{M_0\tilde{m}^{t+2}}{\tilde{m}^2+\delta_1\tilde{m}+\delta_0}\right]}{\partial d_2}=$$

$$=-\frac{b_0}{(1-c_1+\varphi)^2}\left(-\frac{b_2d_1}{d_2^2}\right)-\frac{b_2}{(d_2+b_2d_1)^2}\frac{M_0\tilde{m}^{t+2}}{\tilde{m}^2+\delta_1\tilde{m}+\delta_0}-$$

$$-\frac{b_2}{(d_2+b_2d_1)}\frac{M_0\tilde{m}^{t+2}}{(\tilde{m}^2+\delta_1\tilde{m}+\delta_0)^2}\frac{\partial(\tilde{m}^2+\delta_1\tilde{m}+\delta_0)}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial d_2}=$$

$$=\frac{b_0\varphi}{d_2(1-c_1+\varphi)^2}-\frac{b_2}{d_2^2(1+\varphi)^2}\frac{M_0\tilde{m}^{t+2}}{\tilde{m}^2+\delta_1\tilde{m}+\delta_0}-$$

$$-\frac{b_2}{d_2(1+\varphi)}\frac{M_0\tilde{m}^{t+2}}{(\tilde{m}^2+\delta_1\tilde{m}+\delta_0)^2}\left(0+\frac{\partial\delta_1}{\partial\varphi}\tilde{m}+\frac{\partial\delta_0}{\partial\varphi}\right)\left(-\frac{b_2d_1}{d_2^2}\right)=$$

$$=\frac{b_0\varphi}{d_2(1-c_1+\varphi)^2}-\frac{b_2}{d_2^2(1+\varphi)^2}\frac{M_0\tilde{m}^{t+2}}{\tilde{m}^2+\delta_1\tilde{m}+\delta_0}+$$

$$+\frac{b_2\varphi}{d_2^2(1+\varphi)}\frac{M_0\tilde{m}^{t+2}}{(\tilde{m}^2+\delta_1\tilde{m}+\delta_0)^2}\left[\frac{c_1(1+v)}{(1+\varphi)^2}\tilde{m}-\frac{vc_1}{(1+\varphi)^2}\right]=$$

$$=\frac{b_0\varphi}{d_2(1-c_1+\varphi)^2}-\frac{b_2}{d_2^2(1+\varphi)^2}\frac{M_0\tilde{m}^{t+2}}{\tilde{m}^2+\delta_1\tilde{m}+\delta_0}-$$

$$-\frac{b_2\varphi}{d_2^2(1+\varphi)^2}\frac{M_0\tilde{m}^{t+2}}{(\tilde{m}^2+\delta_1\tilde{m}+\delta_0)^2}(\delta_1\tilde{m}+\delta_0)=$$

$$=\frac{b_0\varphi}{d_2(1-c_1+\varphi)^2}-\frac{b_2}{d_2^2(1+\varphi)^2}\frac{M_0\tilde{m}^{t+2}}{\tilde{m}^2+\delta_1\tilde{m}+\delta_0}\left[1+\frac{\varphi(\delta_1\tilde{m}+\delta_0)}{\tilde{m}^2+\delta_1\tilde{m}+\delta_0}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\partial\tilde{Y}_t^{se}}{\partial d_2}=\frac{b_0\varphi}{d_2(1-c_1+\varphi)^2}-\frac{b_2M_0\tilde{m}^{t+2}\left[\tilde{m}^2+\delta_1(1+\varphi)\tilde{m}+\delta_0(1+\varphi)\right]}{d_2^2(1+\varphi)^2(\tilde{m}^2+\delta_1\tilde{m}+\delta_0)^2} \qquad \textbf{\textit{(5.175)}}$$

Δεδομένου ότι $b_0 > 0$, $b_2 < 0$, $d_2 < 0$, $M_0 > 0$, $\tilde{m} > 1$, $\delta_1 < 0$, $\delta_0 > 0$ και $\varphi > 0$, από την παραπάνω σχέση εύκολα προκύπτει ότι το πρόσημο της μερικής παραγώγου του εισοδήματος ισορροπίας ως προς το συντελεστή d_2 είναι πράγματι απροσδιόριστο.

(στ) Ο επιταχυντής (v)

Μια απειροελάχιστη αύξηση (μείωση) μόνο της τιμής του επιταχυντή (v) θα προκαλέσει την παράλληλη μετατόπιση της καμπύλης των επενδύσεων προς τα επάνω και δεξιά (προς τα κάτω και αριστερά). Με δεδομένο το επίπεδο της επιτοκιακής διαφοράς ισορροπίας, η μετατόπιση της καμπύλης των επενδύσεων θα προκαλέσει την αύξηση (μείωση) των επενδύσεων και κατ' επέκταση της συνολικής ζήτησης, οδηγώντας έτσι στην αύξηση (μείωση) του εισοδήματος ισορροπίας. Σε μαθηματικούς όρους θα αναμένουμε συνεπώς ότι:

$$\frac{\partial\tilde{Y}_t^{se}}{\partial v}>0$$

Από τη σχέση (5.158) προκύπτει ότι:

$$\frac{\partial\tilde{Y}_t^{se}}{\partial v}=0-\frac{b_2}{d_2(1+\varphi)}\frac{M_0\tilde{m}^{t+2}}{(\tilde{m}^2+\delta_1\tilde{m}+\delta_0)^2}\frac{\partial(\tilde{m}^2+\delta_1\tilde{m}+\delta_0)}{\partial v}=$$

$$=-\frac{b_2}{d_2(1+\varphi)}\frac{M_0\tilde{m}^{t+2}}{(\tilde{m}^2+\delta_1\tilde{m}+\delta_0)^2}\left(0-\frac{c_1}{1+\varphi}\tilde{m}+\frac{c_1}{1+\varphi}\right)=$$

$$=-\frac{b_2c_1}{d_2(1+\varphi)^2}\frac{M_0\tilde{m}^{t+2}}{(\tilde{m}^2+\delta_1\tilde{m}+\delta_0)^2}(1-\tilde{m})\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\partial\tilde{Y}_t^{se}}{\partial v}=\frac{b_2c_1m}{d_2(1+\varphi)^2}\frac{M_0\tilde{m}^{t+2}}{(\tilde{m}^2+\delta_1\tilde{m}+\delta_0)^2}>0 \qquad \textbf{\textit{(5.176)}}$$

Δεδομένου ότι $b_2 < 0$, $d_2 < 0$, $0 < c_1 < 1$, $M_0 > 0$, $0 < m < 1$ και $\tilde{m} > 1$, από την σχέση (5.176) γίνεται φανερό ότι η μερική παράγωγος του εισοδήματος ισορροπίας ως προς τον επιταχυντή θα έχει το αναμενόμενο πρόσημο.

(ζ) *Αρχική ποσότητα χρήματος (M_0)*

Υποθέτοντας ότι το μέγεθος των υπολοίπων συντελεστών του υποδείγματος παραμένει σταθερό, μία απειροελάχιστη αύξηση (μείωση) της αρχικής ποσότητας χρήματος θα προκαλέσει την μείωση (αύξηση) της επιτοκιακής διαφοράς για την οποία η αγορά χρήματος βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας. Η αρνητική αυτή σχέση αποδεικνύεται από το γεγονός ότι η ακόλουθη μερική παράγωγος της επιτοκιακής διαφοράς ισορροπίας, όπως αυτή περιγράφεται από τη σχέση (5.169), ως προς M_0:

$$\frac{\partial \Delta R_{t-1}}{\partial M_0} = \frac{\partial\left\{\left[M_0(1+m)^t - d_1 Y_t\right]/d_2\right\}}{\partial M_0} = \frac{(1+m)^t}{d_2} < 0 \qquad (5.177)$$

συνιστά ένα αρνητικό μέγεθος.

Η μείωση (αύξηση) της επιτοκιακής διαφοράς ισορροπίας ως αποτέλεσμα της αύξησης (μείωσης) της αρχικής ποσότητας χρήματος, θα προκαλέσει την αύξηση (μείωση) των επενδύσεων και κατ' επέκταση της συνολικής ζήτησης και του εισοδήματος ισορροπίας. Με άλλα λόγια και σε μαθηματικούς όρους αναμένουμε ότι:

$$\frac{\partial \tilde{Y}_t^{se}}{\partial M_0} > 0$$

Προκειμένου να επιβεβαιώσουμε το παραπάνω συμπέρασμα θα υπολογίσουμε το πρόσημο της μερικής παραγώγου $\partial \tilde{Y}_t^{se} / \partial M_0$, το μέγεθος της οποίας προσδιορίζεται από τη σχέση (5.158). Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι:

$$\frac{\partial \tilde{Y}_t^{se}}{\partial M_0} = \frac{b_2}{d_2(1+\varphi)} \frac{\tilde{m}^{t+2}}{\tilde{m}^2 + \delta_1 \tilde{m} + \delta_0} \qquad (5.178)$$

Όπως προκύπτει από την παραπάνω σχέση, και δεδομένου ότι $b_2 < 0$, $d_2 < 0$, $\varphi > 0$ και $\tilde{m} > 1$, η μερική παράγωγος $\partial \tilde{Y}_t^{se} / \partial M_0$ θα έχει το αναμενόμενο πρόσημο εφόσον ισχύει ότι $P_6(\tilde{m}) = \tilde{m}^2 + \delta_1 \tilde{m} + \delta_0 > 0$. Δεδομένου ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης $P_6(\tilde{m}) = 0$ είναι ακριβώς η ίδια με εκείνη της χαρακτηριστικής εξίσωσης, περιγράφεται δηλαδή από τη σχέση (5.135), μπορούμε να διακρίνουμε μεταξύ των δύο παρακάτω περιπτώσεων:

1η Εάν ο επιταχυντής παίρνει τιμές στο διάστημα[36] $\left(v_1^{se}, v_2^{se}\right)$, τότε η διακρίνουσα της εξίσωσης $P_6(\tilde{m}) = 0$ θα είναι αρνητική και θα ισχύει ότι $P_6(\tilde{m}) > 0$. Με άλλα

[36] Οι τιμές των v_1^{se} και v_2^{se} περιγράφονται από τις σχέσεις (5.138.1) και (5.138.2) αντιστοίχως.

λόγια στην περίπτωση που $v \in \left(v_1^{se}, v_2^{se}\right)$, η μερική παράγωγος $\partial \tilde{Y}_t^{se} / \partial M_0$ θα έχει το αναμενόμενο πρόσημο.

2η Εάν $v \notin \left(v_1^{se}, v_2^{se}\right)$, το πολυώνυμο $P_6(\tilde{m})$ θα είναι θετικά ορισμένο, και κατά συνέπεια η μερική παράγωγος $\partial \tilde{Y}_t^{se} / \partial M_0$ θα έχει το αναμενόμενο πρόσημο, εφόσον η παράμετρος $\tilde{m}$ παίρνει τιμές στο διάστημα[37] $(0, \lambda_1) \cup (\lambda_2, +\infty)$ ή εφόσον ισχύει ότι[38] $\tilde{m} > -\delta_1/2$

(η) ***Ο ρυθμός αύξησης της προσφοράς χρήματος (m)***

Η μόνιμη αύξηση (μείωση) μόνο του ποσοστού της νομισματικής επέκτασης (m) θα έχει ως συνέπεια την μείωση (αύξηση) της επιτοκιακής διαφοράς, για την οποία η αγορά χρήματος βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας. Η ύπαρξη αρνητικής σχέσης μεταξύ της επιτοκιακής διαφοράς ισορροπίας και του ρυθμού της νομισματικής επέκτασης αποδεικνύεται από το γεγονός ότι η μερική παράγωγος της σχέσης (5.169) ως προς m, η οποία ισούται με:

$$\frac{\partial \Delta R_{t-1}}{\partial m} = \frac{1}{d_2}\left[t\, M_0 (1+m)^{t-1} - 0\right] = \frac{t\, M_0 \tilde{m}^t}{d_2 \tilde{m}} < 0 \qquad \textbf{\textit{(5.179)}}$$

όπου $d_2 < 0$, $0 < m < 1$, $t \geq 0$, $M_0 > 0$ και $\tilde{m} = 1 + m > 1$

συνιστά ένα αρνητικό μέγεθος. Η μείωση (αύξηση) της επιτοκιακής διαφοράς ισορροπίας οδηγεί στην αύξηση (μείωση) των επενδύσεων, και κατ' επέκταση της συνολικής ζήτησης, προκαλώντας έτσι και την αύξηση (μείωση) του εισοδήματος ισορροπίας. Σε μαθηματικούς όρους, η αναμενόμενη θετική σχέση μεταξύ του ρυθμού της νομισματικής επέκτασης (m) και του εισοδήματος ισορροπίας ($\tilde{Y}_t^{se}$) περιγράφεται ως ακολούθως:

$$\frac{\partial \tilde{Y}_t^{se}}{\partial m} > 0$$

Παίρνοντας τη μερική παράγωγο της σχέσης (5.158) ως προς m προκύπτει ότι:

$$\frac{\partial \tilde{Y}_t^{se}}{\partial m} = \frac{b_2 M_0}{d_2 (1+\varphi)} \frac{\frac{\partial \left(\tilde{m}^{t+2}\right)}{\partial m}\left(\tilde{m}^2 + \delta_1 \tilde{m} + \delta_0\right) - \tilde{m}^{t+2} \frac{\partial \left(\tilde{m}^2 + \delta_1 \tilde{m} + \delta_0\right)}{\partial m}}{\left(\tilde{m}^2 + \delta_1 \tilde{m} + \delta_0\right)^2} =$$

---

[37] Οι παράμετροι λ_1 και λ_2 συνιστούν τις ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης (5.133) στην περίπτωση που $\Delta_5 > 0$ και τα μεγέθη τους δίνονται μέσω των σχέσεων (5.143.1) & (5.143.2) αντιστοίχως

[38] Το μέγεθος $-\delta_1/2$ συνιστά τη ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης (5.133) στην περίπτωση που $\Delta_5 = 0$

$$= \frac{b_2 M_0}{d_2(1+\varphi)} \frac{(t+2)\tilde{m}^{t+1}\left(\tilde{m}^2+\delta_1\tilde{m}+\delta_0\right)-\tilde{m}^{t+2}\left(2\,\tilde{m}+\delta_1+0\right)}{\left(\tilde{m}^2+\delta_1\tilde{m}+\delta_0\right)^2} =$$

$$= \frac{b_2 M_0 \tilde{m}^{t+1}}{d_2(1+\varphi)} \frac{(t+2)\left(\tilde{m}^2+\delta_1\tilde{m}+\delta_0\right)-2\,\tilde{m}^2-\delta_1\tilde{m}}{\left(\tilde{m}^2+\delta_1\tilde{m}+\delta_0\right)^2} =$$

$$= \frac{b_2 M_0 \tilde{m}^{t+1}}{d_2(1+\varphi)} \frac{(t+2-2)\tilde{m}^2+\delta_1(t+2-1)\tilde{m}+(t+2)\delta_0}{\left(\tilde{m}^2+\delta_1\tilde{m}+\delta_0\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \tilde{Y}_t^{se}}{\partial m} = \frac{\varphi\, M_0 \tilde{m}^{t+1}}{d_1(1+\varphi)} \frac{t\,\tilde{m}^2+\delta_1(t+1)\tilde{m}+(t+2)\delta_0}{\left(\tilde{m}^2+\delta_1\tilde{m}+\delta_0\right)^2} \qquad \textbf{\textit{(5.180)}}$$

Δεδομένου ότι $\varphi > 0$, $M_0 > 0$, $d_1 > 0$, $t \geq 0$, $\delta_1 < 0$, $\delta_0 > 0$ και $\tilde{m} = 1 + m > 1$, από την παραπάνω σχέση γίνεται αντιληπτό ότι το πρόσημο της μερικής παραγώγου του εισοδήματος ισορροπίας ως προς την παράμετρο m εξαρτάται από του πρόσημο του μεγέθους $P_7(\tilde{m}) = t\,\tilde{m}^2 + \delta_1(t+1)\tilde{m} + (t+2)\delta_0$. Δεδομένου ότι το $P_7(\tilde{m})$ συνιστά ένα πολυώνυμο δευτέρου βαθμού ως προς $\tilde{m}$, θα μπορούσαμε να προσδιορίσουμε ένα διάστημα τιμών της εν λόγω παραμέτρου εντός του οποίου θα ισχύει ότι $P_7(\tilde{m}) > 0$.

Ως πρώτο βήμα για την εξειδίκευση αυτού του διαστήματος τιμών, θα προσδιορίσουμε τη διακρίνουσα της εξίσωσης $P_7(\tilde{m}) = 0$ η οποία και έχει ως ακολούθως:

$$\Delta_7 = \delta_1^2(t+1)^2 - 4\,t\,(t+2)\delta_0 = \delta_1^2\,(t+1)^2 - 4\left(t^2+2\,t+1-1\right)\delta_0 =$$

$$= \delta_1^2\,(t+1)^2 - 4\left[(t+1)^2-1\right]\delta_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \Delta_7 = \left(\delta_1^2 - 4\,\delta_0\right)(t+1)^2 + 4\,\delta_0 \qquad \textbf{\textit{(5.181)}}$$

Από την παραπάνω σχέση, και εφόσον $\delta_0 > 0$, γίνεται φανερό ότι το πρόσημο της διακρίνουσας της εξίσωσης $P_7(\tilde{m}) = 0$ εξαρτάται από το πρόσημο του μεγέθους $\delta_1^2 - 4\,\delta_0$, από το πρόσημο δηλαδή της διακρίνουσας της χαρακτηριστικής εξίσωσης (5.133), βάσει του οποίου διακρίνουμε μεταξύ των ακόλουθων περιπτώσεων:

***<u>1η περίπτωση</u>*:** Εάν ο επιταχυντής (v) παίρνει τιμές στο διάστημα $\left(v_1^{se}, v_2^{se}\right)$, όπου v_1^{se}, v_2^{se} οι ρίζες της εξίσωσης $v^2 + 2\,(1-2u)\,v + 1 = 0$ το μέγεθος των οποίων περιγράφεται από τις σχέσεις (5.138.1) και (5.138.2) αντιστοίχως, θα ισχύει ότι $\delta_1^2 - 4\,\delta_0 < 0$. Ως εκ τούτου μπορούμε να διακρίνουμε μεταξύ τριών υποπεριπτώσεων:

(1α) Στην περίπτωση που ισχύει ότι $\left(\delta_1^2 - 4\,\delta_0\right)(t+1)^2 < -4\,\delta_0$ η διακρίνουσα, όπως αυτή περιγράφεται από τη σχέση (5.181), θα συνιστά ένα αρνητικό μέγεθος. Εφόσον $\Delta_7 < 0$ οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι $P_7(\tilde{m}) > 0$, κάτι που σημαίνει ότι η μερική παράγωγος $\partial\tilde{Y}_t^{se}/\partial m$, όπως αυτή περιγράφεται από τη σχέση (5.180), θα παρουσιάζει το αναμενόμενο πρόσημο.

(1β) Στην περίπτωση που $\left(\delta_1^2 - 4\,\delta_0\right)(t+1)^2 > -4\,\delta_0$, στην περίπτωση δηλαδή που $\Delta_7 > 0$, το μέγεθος $P_7(\tilde{m})$ θα είναι θετικά ορισμένο εφόσον ισχύει ότι $\tilde{m} \notin \left(\tilde{m}_1^*, \tilde{m}_2^*\right)$, όπου $\tilde{m}_1^*, \tilde{m}_2^*$ με $\tilde{m}_1^* < \tilde{m}_2^*$ οι ρίζες της εξίσωσης $P_7(\tilde{m}) = 0$, το μέγεθος των οποίων έχει ως ακολούθως:

$$\tilde{m}_{2,1}^* = \frac{-\delta_1(t+1) \pm \sqrt{\Delta_7}}{2\,t} = \frac{-\delta_1(t+1) \pm \sqrt{\delta_1^2(t+1)^2 \dfrac{\Delta_7}{\delta_1^2(t+1)^2}}}{2\,t} =$$

$$= \frac{-\delta_1(t+1) \pm \delta_1(t+1)\sqrt{\Delta_7/\delta_1^2(t+1)^2}}{2\,t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tilde{m}_1^* = \dfrac{-\delta_1(t+1) - \delta_1(t+1)\sqrt{\Delta_7/\delta_1^2(t+1)^2}}{2\,t} \\[2ex] \tilde{m}_2^* = \dfrac{-\delta_1(t+1) + \delta_1(t+1)\sqrt{\Delta_7/\delta_1^2(t+1)^2}}{2\,t} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tilde{m}_1^* = -\delta_1(t+1)\dfrac{1+\sqrt{\Delta_7/\delta_1^2(t+1)^2}}{2\,t} > 0 & \textbf{\textit{(5.182.1)}} \\[2ex] \tilde{m}_2^* = -\delta_1(t+1)\dfrac{1-\sqrt{\Delta_7/\delta_1^2(t+1)^2}}{2\,t} > 0 & \textbf{\textit{(5.182.2)}} \end{cases}$$

Με άλλα λόγια η μερική παράγωγος $\partial\tilde{Y}_t^{se}/\partial m$ θα έχει το αναμενόμενο πρόσημο εφόσον ισχύει ότι $\tilde{m} \in \left(0, \tilde{m}_1^*\right) \cup \left(\tilde{m}_2^*, +\infty\right)$.

(1γ) Στην περίπτωση που $\left(\delta_1^2 - 4\,\delta_0\right)\left(t+1\right)^2 = -4\,\delta_0$, στην περίπτωση δηλαδή που $\Delta_7 = 0$, το πολυώνυμο $P_7(\tilde{m})$ θα είναι θετικά ορισμένο εφόσον ισχύει ότι $\tilde{m} \in \left(\tilde{m}_3^*, +\infty\right)$, όπου $\tilde{m}_3^*$ η διπλή ρίζα της εξίσωσης $P_7(\tilde{m}) = 0$ το μέγεθος της οποίας προκύπτει από τη σχέση (5.182.1) [ή από τη σχέση (5.182.2)] θέτοντας όπου $\Delta_7 = 0$ και το οποίο έχει ως ακολούθως:

$$\tilde{m}_3^* = \frac{-\delta_1\left(t+1\right)}{2\,t} \qquad \textit{(5.183)}$$

***<u>2η περίπτωση</u>*:** Εάν ο επιταχυντής παίρνει τιμές στο διάστημα $(0, v_1^{se}] \cup [v_2^{se}, +\infty)$ θα ισχύει ότι $\delta_1^2 - 4\,\delta_0 \geq 0$ και ως εκ τούτου η εξίσωση $P_7(\tilde{m}) = 0$ θα έχει δύο πραγματικές και διακριτές ρίζες. Με άλλα λόγια το πολυώνυμο $P_7(\tilde{m})$ θα είναι θετικά ορισμένο, και κατά συνέπεια η μερική παράγωγος $\partial\tilde{Y}_t^{se}/\partial m$ θα παρουσιάζει το αναμενόμενο πρόσημο, εφόσον η παράμετρος $\tilde{m}$ κινείται εκτός του διαστήματος τιμών που ορίζουν οι δύο αυτές πραγματικές ρίζες.

(θ) Ο χρόνος

Το επίπεδο του εισοδήματος ισορροπίας αναμένεται να επηρεάζεται θετικά από το χρόνο, καθώς διαχρονικά παρατηρούμε μία αύξηση της τιμής του. Με άλλα λόγια και σε μαθηματικούς όρους θα αναμένουμε ότι:

$$\frac{\partial\tilde{Y}_t^{se}}{\partial t} > 0$$

Από τη σχέση (5.158) προκύπτει ότι:

$$\frac{\partial\tilde{Y}_t^{se}}{\partial t} = \frac{b_2}{d_2\left(1+\varphi\right)}\,\frac{M_0\tilde{m}^{t+2}\ln\left(\tilde{m}\right)}{\tilde{m}^2 + \delta_1\tilde{m} + \delta_0} \qquad \textit{(5.184)}$$

Από την παραπάνω σχέση, και δεδομένου ότι $b_2 < 0$, $d_2 < 0$, $\varphi > 0$, $M_0 > 0$ και $\tilde{m} > 1$, γίνεται φανερό ότι η μερική παράγωγος $\partial\tilde{Y}_t^{se}/\partial t$ θα έχει οπωσδήποτε το αναμενόμενο πρόσημο εφόσον $\tilde{m}^2 + \delta_1\tilde{m} + \delta_0 > 0$, εφόσον δηλαδή ο επιταχυντής παίρνει τιμές στο διάστημα $\left(v_1^{se}, v_2^{se}\right)$.

5.2.4 Συνθήκες ευστάθειας και προσδιορισμός της γενικής λύσης υπό καθεστώς στατικών προσδοκιών.

Έχοντας διερευνήσει στα πλαίσια του μηχανισμού των στατικών προσδοκιών τον επηρεασμό του επιπέδου του εισοδήματος ισορροπίας από πολύ μικρές μεταβολές της τιμής μίας μόνο εκ των παραμέτρων που το συνθέτουν, στην παρούσα ενότητα και κινούμενοι στα πλαίσια του ίδιου μηχανισμού διαμόρφωσης των προσδοκιών, θα εξάγουμε κατ' αρχήν τη μαθηματική μορφή της γενικής λύσης του υποδείγματος και

στη συνέχεια θα προσδιορίσουμε τις συνθήκες που θα πρέπει να ικανοποιούνται προκειμένου το υπόδειγμα να είναι ευσταθές.

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, η γενική λύση (Y_t) της εξίσωσης διαφορών (5.128) δίνεται από τη σχέση (5.130) και αποτελεί το άθροισμα της συμπληρωματικής της λύσης $\left(Y_t^c\right)$ με μία μερική της λύση $\left(Y_t^p = \widetilde{Y}_t^{se}\right)$. Από το συνδυασμό των σχέσεων (5.130), (5.144), (5.148), (5.155) και (5.158) προκύπτει η γενική λύση Y_t, η μορφή της οποίας διαφοροποιείται ανάλογα με το πρόσημο της διακρίνουσας της χαρακτηριστικής εξίσωσης (5.133) και η οποία παρουσιάζεται συνοπτικά με τη βοήθεια του πίνακα 5.4.

<u>Πίνακας 5.4</u>: Μορφές της γενικής λύσης βάσει του προσήμου της διακρίνουσας Δ_5

$\Delta_5 > 0$	$Y_t = \widetilde{Y}_t^{se} + A_1\left[\dfrac{1+v-\sqrt{\left(v-v_1^{se}\right)\left(v-v_2^{se}\right)}}{2u}\right]^t + A_2\left[\dfrac{1+v+\sqrt{\left(v-v_1^{se}\right)\left(v-v_2^{se}\right)}}{2u}\right]^t$
$\Delta_5 = 0$	$Y_t = \widetilde{Y}_t^{se} + \left(A_1 + A_2 t\right)\left(-\delta_1/2\right)^t$
$\Delta_5 < 0$	$Y_t = \widetilde{Y}_t^{se} + \sqrt{\delta_0^t}\left[A_3\cos\left(\chi_{se}t\right) + A_4\sin\left(\chi_{se}t\right)\right]$

<u>Παρατήρηση</u>: Οι σταθερές A_i, i = 1, …. ,4, μπορούν να προσδιορισθούν με τη βοήθεια δύο αρχικών συνθηκών

Έχοντας προσδιορίσει τη μορφή της γενικής λύσης της βασικής εξίσωσης διαφορών (5.128) θα προσδιορίσουμε στη συνέχεια τις συνθήκες ευστάθειας, τις συνθήκες δηλαδή που θα πρέπει να ικανοποιούν οι παράμετροι του υποδείγματος προκειμένου το εισόδημα να συγκλίνει προς τη βραχυχρόνια τιμή ισορροπίας του έπειτα από μία εξωγενή διαταραχή.

Προκειμένου να εξάγουμε τις κατά Routh ικανές και αναγκαίες συνθήκες ευστάθειας του υποδείγματος, θα πραγματοποιήσουμε τον περιγραφόμενο μέσω της σχέσης (5.65) μετασχηματισμό. Ειδικότερα, αντικαθιστώντας τη σχέση (5.65) στη χαρακτηριστική εξίσωση (5.133) προκύπτει ότι:

$$P_2(\lambda) = \lambda^2 + \delta_1\lambda + \delta_0 = 0 \Rightarrow \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2 + \delta_1\left(\frac{z+1}{z-1}\right) + \delta_0 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{(z+1)^2 + \delta_1(z+1)(z-1) + \delta_0(z-1)^2}{(z-1)^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad z^2 + 2z + 1 + \delta_1\left(z^2 - 1\right) + \delta_0\left(z^2 - 2z + 1\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \left(1 + \delta_0 + \delta_1\right)z^2 + 2\left(1 - \delta_0\right)z + \left(1 + \delta_0 - \delta_1\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad P(z)=\beta_0 z^2+\beta_1 z+\beta_2=0 \qquad \textbf{\textit{(5.185)}}$$

όπου $\beta_0^{se}=1+\delta_0+\delta_1$, $\beta_1^{se}=2\,(1-\delta_0)$ και $\beta_2^{se}=1+\delta_0-\delta_1$.

Σύμφωνα με το κατά Routh θεώρημα ευστάθειας, όλες οι ρίζες της εξίσωσης (5.185) θα έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος, και κατά συνέπεια οι χαρακτηριστικές ρίζες θα εντοπίζονται εντός του μοναδιαίου κύκλου καθιστώντας έτσι το υπόδειγμα ευσταθές, εφόσον ισχύει το ακόλουθο σύστημα ανισοτήτων:

$$\left.\begin{array}{c}\beta_0^{se}>0\\ O_1^{se}=\beta_1^{se}>0\\ O_2^{se}=\begin{vmatrix}\beta_1^{se} & \beta_3^{se}\\ \beta_0^{se} & \beta_2^{se}\end{vmatrix}>0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{c}1+\delta_0+\delta_1>0\\ 2(1-\delta_0)>0\\ \begin{vmatrix}\beta_1^{se} & 0\\ \beta_0^{se} & \beta_2^{se}\end{vmatrix}>0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{c}1+\delta_0+\delta_1>0\\ 1-\delta_0>0\\ \beta_1^{se}\,\beta_2^{se}>0\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{c}1+\delta_0+\delta_1>0\\ 1-\delta_0>0\\ 2(1-\delta_0)(1+\delta_0-\delta_1)>0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{ll}1+\delta_0+\delta_1>0 & \textbf{\textit{(5.186.1)}}\\ 1+\delta_0-\delta_1>0 & \textbf{\textit{(5.186.2)}}\\ 1-\delta_0>0 & \textbf{\textit{(5.186.3)}}\end{array}\right\}\qquad \textbf{\textit{(Σ − 5.4)}}$$

Από τις τρεις παραπάνω συνθήκες, η (5.186.2) ικανοποιείται καθώς ισχύει ότι $\delta_0=\dfrac{vc_1}{1+\varphi}>0$ και $\delta_1=-\dfrac{c_1(1+v)}{1+\varphi}<0$. Ως εκ τούτου οι συνθήκες (5.186.1) και (5.186.3) είναι εκείνες που θα πρέπει να ικανοποιούνται, προκειμένου η γενική λύση του υποδείγματος να είναι ευσταθής. Από την αντικατάσταση σ' αυτές των τιμών των σταθερών δ_0 και δ_1 προκύπτει το ακόλουθο σύστημα:

$$\left.\begin{array}{c}1+\delta_0+\delta_1>0\\ 1-\delta_0>0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{c}1+\dfrac{vc_1}{1+\varphi}-\dfrac{c_1(1+v)}{1+\varphi}>0\\ 1-\dfrac{vc_1}{1+\varphi}>0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{c}1+\dfrac{vc_1}{1+\varphi}-\dfrac{c_1}{1+\varphi}-\dfrac{vc_1}{1+\varphi}>0\\ 1>\dfrac{vc_1}{1+\varphi}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{ll} \dfrac{1-c_1+\varphi}{1+\varphi} > 0 & \textit{(5.187.1)} \\ v < v_{se}^{s} = \dfrac{1+\varphi}{c_1} = u & \textit{(5.187.2)} \end{array}\right\} \quad \textit{(Σ – 5.5)}$$

Δεδομένου ότι $1 - c_1 > 0$ & $\varphi = b_2 d_1/d_2 > 0$ η συνθήκη (5.187.1) θα ικανοποιείται για κάθε $c_1 \in (0,1)$ & $\varphi > 0$. ***Ως εκ τούτου η συνθήκη που θα πρέπει να ικανοποιείται προκειμένου η γενική λύση του υποδείγματος, όπως αυτό διαμορφώνεται στα πλαίσια των στατικών προσδοκιών, να είναι ευσταθής περιγράφεται από την ανισότητα (5.187.2) και συμπίπτει με τη συνθήκη ευστάθειας που εξειδικεύσαμε στα πλαίσια του μηχανισμού των αναθεωρούμενων προσδοκιών***.

5.3 Εξαγωγή της βασικής εξίσωσης διαφορών του υποδείγματος στα πλαίσια του μηχανισμού των παλινδρομικών προσδοκιών

Η ανάλυση που θα πραγματοποιήσουμε στην παρούσα ενότητα διαφοροποιείται από εκείνη που πραγματοποιήσαμε στις υποενότητες 5.1 και 5.2 σε δύο επίπεδα. Πιο συγκεκριμένα θα υποθέσουμε ότι πρώτον οι προσδοκίες διαμορφώνονται βάσει του μηχανισμού των παλινδρομικών προσδοκιών και δεύτερον ότι η ταχύτητα προσαρμογής της επιτοκιακής διαφοράς της περιόδου t – 1 (ΔR_{t-1}) προς την τιμή ισορροπίας της $\left(\overline{\Delta R}\right)$ όπως αυτή διαμορφώνεται στην αγορά αγαθών (θ_1) είναι διαφορετική από εκείνη της αγοράς χρήματος (θ_2). Με άλλα λόγια οι μηχανισμοί διαμόρφωσης των προσδοκιών στις αγορές αγαθών και χρήματος περιγράφονται αντιστοίχως από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\Delta R_t^e = \theta_1 \overline{\Delta R} + (1-\theta_1)\Delta R_{t-1} \qquad \textit{(5.188.1)}$$

&

$$\Delta R_t^e = \theta_2 \overline{\Delta R} + (1-\theta_2)\Delta R_{t-1} \qquad \textit{(5.188.2)}$$

όπου $\theta_i \in (0,1)$, $i = 1,2$, με $\theta_1 \neq \theta_2$

Η σχέση που περιγράφει την ισορροπία στην αγορά αγαθών, όπως αυτή διαμορφώνεται έπειτα από την αντικατάσταση της σχέσης (5.188.1) στη σχέση (3.7), έχει ως ακολούθως:

$$Y_t - c_1(1+v)Y_{t-1} + vc_1 Y_{t-2} = b_0 + b_2\, \Delta R_t^e \overset{(5.188.1)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow Y_t - c_1(1+v)Y_{t-1} + vc_1 Y_{t-2} = b_0 + b_2\theta_1 \overline{\Delta R} + b_2(1-\theta_1)\Delta R_{t-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y_t - c_1(1+v)Y_{t-1} + vc_1 Y_{t-2} = \left(b_0 + b_2\theta_1\,\overline{\Delta R}\right) + b_2\omega_1\,\Delta R_{t-1} \qquad \textbf{\textit{(5.189)}}$$

όπου $\omega_1 = 1 - \theta_1 \in (\,0,1\,)$.

Αντικαθιστώντας στη συνέχεια τη σχέση (5.188.2) στη σχέση (3.15), παίρνουμε τη συνάρτηση που μας περιγράφει την ισορροπία στην αγορά χρήματος, όπως αυτή διαμορφώνεται στα πλαίσια του μηχανισμού των παλινδρομικών προσδοκιών, και η οποία έχει ως ακολούθως:

$$M_0(1+m)^t = d_1 Y_t + d_2 \Delta R_t^e \overset{(5.188.2)}{\Rightarrow} M_0(1+m)^t = d_1 Y_t + d_2\theta_2\,\overline{\Delta R} + d_2(1-\theta_2)\Delta R_{t-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_0(1+m)^t - d_1 Y_t - d_2\theta_2\,\overline{\Delta R} = d_2\omega_2\,\Delta R_{t-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \Delta R_{t-1} = \frac{M_0(1+m)^t}{d_2\omega_2} - \frac{d_1}{d_2\omega_2} Y_t - \frac{\theta_2\,\overline{\Delta R}}{\omega_2} \qquad \textbf{\textit{(5.190)}}$$

όπου $\omega_2 = 1 - \theta_2 \in (\,0,1\,)$.

Η βασική εξίσωση διαφορών του υποδείγματος, όπως αυτή διαμορφώνεται στα πλαίσια του μηχανισμού των παλινδρομικών προσδοκιών, προκύπτει από την αντικατάσταση της σχέσης (5.190) στη σχέση (5.189) και έχει ως ακολούθως:

$$Y_t - c_1(1+v)Y_{t-1} + vc_1 Y_{t-2} = \left(b_0 + b_2\theta_1\,\overline{\Delta R}\right) + b_2\omega_1\,\Delta R_{t-1} \overset{(5.190)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow Y_t - c_1(1+v)Y_{t-1} + vc_1 Y_{t-2} = \left(b_0 + b_2\theta_1\,\overline{\Delta R}\right) +$$

$$+ \frac{b_2\omega_1}{d_2\omega_2} M_0(1+m)^t - \frac{b_2 d_1\omega_1}{d_2\omega_2} Y_t - \frac{b_2\omega_1\theta_2\,\overline{\Delta R}}{\omega_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{\varphi\omega_1}{\omega_2}\right) Y_t - c_1(1+v)Y_{t-1} + vc_1 Y_{t-2} = \left(b_0 + b_2\theta_1\,\overline{\Delta R}\right) +$$

$$+ \frac{b_2\omega_1}{d_2\omega_2} M_0(1+m)^t - \frac{b_2\omega_1\theta_2\,\overline{\Delta R}}{\omega_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1+\varphi\omega)Y_t - c_1(1+v)Y_{t-1} + vc_1 Y_{t-2} = \left(b_0 + b_2\theta_1\,\overline{\Delta R}\right) +$$

$$+\frac{\varphi\omega}{d_1}M_0(1+m)^t - b_2\omega\theta_2\,\overline{\Delta R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y_t - \frac{c_1(1+v)}{1+\varphi\omega}Y_{t-1} + \frac{vc_1}{1+\varphi\omega}Y_{t-2} = \frac{b_0 + b_2(\theta_1 - \omega\theta_2)\overline{\Delta R}}{1+\varphi\omega} + \frac{\varphi\omega}{d_1(1+\varphi\omega)}M_0(1+m)^t \rightarrow$$

$$\xrightarrow{\text{2 περίοδοι μπροστά}} \qquad Y_{t+2} + \zeta_1 Y_{t+1} + \zeta_0 Y_t = \Gamma(t) \qquad \textbf{\textit{(5.191)}}$$

όπου $\zeta_1 = -\frac{c_1(1+v)}{1+\varphi\omega} < 0$, $\zeta_0 = \frac{vc_1}{1+\varphi\omega} > 0$, $\varphi = \frac{b_2 d_1}{d_2} > 0$, $\omega = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1-\theta_1}{1-\theta_2} > 0$ και

$$\Gamma(t) = \frac{b_0 + b_2(\theta_1 - \omega\theta_2)\overline{\Delta R}}{1+\varphi\omega} + \frac{\varphi\omega}{d_1(1+\varphi\omega)}M_0(1+m)^{t+2} =$$

$$= \frac{b_0 + b_2\left(\theta_1 - \frac{1-\theta_1}{1-\theta_2}\theta_2\right)\overline{\Delta R}}{1+\varphi\omega} + \frac{\varphi\omega}{d_1(1+\varphi\omega)}M_0(1+m)^{t+2} =$$

$$= \frac{b_0 + b_2\frac{\theta_1 - \theta_1\theta_2 - \theta_2 + \theta_1\theta_2}{1-\theta_2}\overline{\Delta R}}{1+\varphi\omega} + \frac{\varphi\omega}{d_1(1+\varphi\omega)}M_0(1+m)^{t+2} =$$

$$= \frac{b_0 + b_2\frac{\theta_1 - \theta_2}{1-\theta_2}\overline{\Delta R}}{1+\varphi\omega} + \frac{\varphi\omega}{d_1(1+\varphi\omega)}M_0(1+m)^{t+2} =$$

$$= \frac{b_0 + b_2\frac{1-\theta_2 - (1-\theta_1)}{1-\theta_2}\overline{\Delta R}}{1+\varphi\omega} + \frac{\varphi\omega}{d_1(1+\varphi\omega)}M_0(1+m)^{t+2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \Gamma(t) = \frac{b_0 + b_2(1-\omega)\overline{\Delta R}}{1+\varphi\omega} + \frac{\varphi\omega}{d_1(1+\varphi\omega)}M_0(1+m)^{t+2}$$

Όπως γνωρίζουμε, η γενική λύση (Y_t) της βασικής εξίσωσης διαφορών (5.191) αποτελεί το άθροισμα της συμπληρωματικής της λύσης $\left(Y_t^c\right)$, δηλαδή της γενικής λύσης της ομογενούς εξίσωσης διαφορών:

$$Y_{t+2} + \zeta_1 Y_{t+1} + \zeta_0 Y_t = 0 \qquad \textbf{\textit{(5.192)}}$$

με μία μερική λύση $\left(Y_t^p\right)$ της εν λόγω εξίσωσης διαφορών, ισχύει δηλαδή ότι:

$$Y_t = Y_t^c + Y_t^p \qquad \textbf{\textit{(5.193)}}$$

Στη συνέχεια της ανάλυσής μας θα εξειδικεύσουμε τη συγκεκριμένη μορφή της γενικής λύσης της βασικής εξίσωσης διαφορών με σταθερούς συντελεστές (5.191), ξεκινώντας από τον προσδιορισμό της συμπληρωματικής της λύσης.

5.3.1 Προσδιορισμός της συμπληρωματικής λύσης στα πλαίσια του μηχανισμού των παλινδρομικών προσδοκιών

Ας υποθέσουμε ότι η γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης διαφορών (5.192) είναι της γενικής μορφής:

$$Y_{t+j}^c = A\,\lambda^{t+j} \quad , \quad j = 0,1,2 \qquad \textbf{\textit{(5.194)}}$$

όπου A μία αυθαίρετη σταθερά και $\lambda \in \Re_+^*$

Από την αντικατάσταση της παραπάνω σχέσης στη σχέση (5.192) προκύπτει ως ακολούθως η χαρακτηριστική εξίσωση της βασικής εξίσωσης διαφορών (5.191):

$$A\,\lambda^{t+2} + \zeta_1 A\,\lambda^{t+1} + \zeta_0 A\,\lambda^t = 0 \Rightarrow A\,\lambda^t\left(\lambda^2 + \zeta_1\lambda + \zeta_0\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \lambda^2 + \zeta_1\lambda + \zeta_0 = 0 \qquad \textbf{\textit{(5.195)}}$$

Δεδομένου ότι η σχέση (5.195) περιγράφει μία δευτεροβάθμια εξίσωση, η χαρακτηριστική εξίσωση θα έχει δύο ρίζες (λ_1,λ_2) οι οποίες και θα ικανοποιούν τις παρακάτω σχέσεις:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= -\zeta_1 > 0 \qquad \textbf{\textit{(5.196.1)}} \\ \lambda_1\lambda_2 &= \zeta_0 > 0 \qquad \textbf{\textit{(5.196.2)}} \end{aligned}\right\}$$

Το γεγονός ότι το γινόμενο των λ_1 και λ_2 είναι ένα θετικό μέγεθος μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι οι χαρακτηριστικές ρίζες είναι ομόσημες, κάτι που σε συνδυασμό με το ότι το άθροισμα των ριζών λ_1 και λ_2 είναι ένα θετικό μέγεθος, μας οδηγεί στο επιπρόσθετο συμπέρασμα ότι *οι χαρακτηριστικές ρίζες είναι θετικές*.

Οι χαρακτηριστικές ρίζες λ_1 , λ_2 θα είναι πραγματικοί (μιγαδικοί) αριθμοί εφόσον η διακρίνουσα της χαρακτηριστικής εξίσωσης (5.195) είναι μεγαλύτερη ή ίση (μικρότερη) από το μηδέν. Το ακριβές μέγεθος της διακρίνουσας αυτής έχει ως εξής:

$$\Delta_8 = \zeta_1^2 - 4\,\zeta_0 = \left[-\frac{c_1(1+v)}{1+\varphi\omega}\right]^2 - 4\,\frac{vc_1}{1+\varphi\omega} = \frac{c_1^2(1+v)^2}{(1+\varphi\omega)^2} - 4\,\frac{vc_1}{1+\varphi\omega} =$$

$$= \frac{c_1^2}{(1+\varphi\omega)^2}\left[v^2 + 2\,v + 1 - \frac{4\,(1+\varphi\omega)\,v}{c_1}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta_8 = \left(\frac{c_1}{1+\varphi\omega}\right)^2 \left\{v^2 + 2\left[1 - \frac{2\,(1+\varphi\omega)}{c_1}\right]v + 1\right\} \qquad \textbf{\textit{(5.197)}}$$

Όπως εύκολα μπορεί να διαπιστώσει κανείς από τη σχέση (5.197), το πρόσημο της διακρίνουσας Δ_8 εξαρτάται από το πρόσημο του ευρισκόμενου εντός του αγκίστρου όρου, ο οποίος αποτελεί ένα πολυώνυμο δευτέρου βαθμού ως προς τον επιταχυντή v. Ως εκ τούτου, θα μπορούσαμε να προσδιορίσουμε κάποια διαστήματα τιμών της συγκεκριμένης παραμέτρου εντός των οποίων θα ισχύει ότι $\Delta_8 >$, $=$, < 0. Προκειμένου να προσδιορίσουμε αυτά τα διαστήματα τιμών θα προσδιορίσουμε τις ρίζες της ακόλουθης δευτεροβάθμιας εξίσωσης:

$$P_1(v) = v^2 + 2\left[1 - \frac{2\,(1+\varphi\omega)}{c_1}\right]v + 1 = 0 \qquad \textbf{\textit{(5.198)}}$$

Η διακρίνουσα της παραπάνω εξίσωσης έχει ως ακολούθως:

$$\Delta_9 = 4\left[1 - \frac{2\,(1+\varphi\omega)}{c_1}\right]^2 - 4 = 4\left[1 - \frac{4\,(1+\varphi\omega)}{c_1} + \frac{4\,(1+\varphi\omega)^2}{c_1^2} - 1\right] = \frac{16\,(1+\varphi\omega)}{c_1}\left(\frac{1+\varphi\omega}{c_1} - 1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \Delta_9 = \frac{16\,(1+\varphi\omega)(1 - c_1 + \varphi\omega)}{c_1^2} \qquad \textbf{\textit{(5.199)}}$$

Δεδομένου ότι $\varphi > 0$, $\omega > 0$ και $0 < 1 - c_1 < 1$, από τη σχέση (5.199) προκύπτει ότι $\Delta_9 > 0$, κάτι που μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η εξίσωση (5.198) έχει δύο πραγματικές και διακριτές ρίζες το μέγεθος των οποίων έχει ως εξής:

$$v_{2,1}^{re}=\frac{-2\left[1-\frac{2\left(1+\varphi\omega\right)}{c_1}\right]\pm\sqrt{\frac{16\left(1+\varphi\omega\right)\left(1-c_1+\varphi\omega\right)}{c_1^2}}}{2}=$$

$$=\frac{-2\left[1-\frac{2\left(1+\varphi\omega\right)}{c_1}\right]\pm 4\sqrt{\frac{\left(1+\varphi\omega\right)\left(1-c_1+\varphi\omega\right)}{c_1^2}}}{2}=$$

$$=\frac{2\left(1+\varphi\omega\right)}{c_1}-1\pm 2\sqrt{\frac{\left(1+\varphi\omega\right)\left(1-c_1+\varphi\omega\right)}{c_1^2}}=$$

$$=\frac{1+\varphi\omega}{c_1}\pm 2\sqrt{\frac{\left(1+\varphi\omega\right)\left(1-c_1+\varphi\omega\right)}{c_1^2}}+\frac{1-c_1+\varphi\omega}{c_1}=$$

$$=\left(\sqrt{\frac{1+\varphi\omega}{c_1}}\right)^2\pm 2\sqrt{\frac{\left(1+\varphi\omega\right)\left(1-c_1+\varphi\omega\right)}{c_1^2}}+\left(\sqrt{\frac{1-c_1+\varphi\omega}{c_1}}\right)^2=$$

$$=\left(\sqrt{\frac{1+\varphi\omega}{c_1}}\pm\sqrt{\frac{1-c_1+\varphi\omega}{c_1}}\right)^2\Rightarrow$$

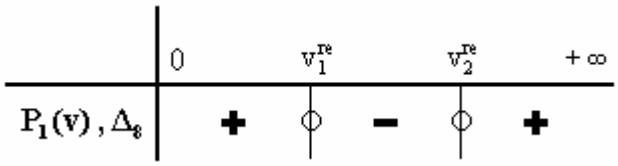
$$\Rightarrow\begin{cases} v_1^{re}=\left(\sqrt{\frac{1+\varphi\omega}{c_1}}-\sqrt{\frac{1-c_1+\varphi\omega}{c_1}}\right)^2>0 & \textbf{\textit{(5.200.1)}} \\ v_2^{re}=\left(\sqrt{\frac{1+\varphi\omega}{c_1}}+\sqrt{\frac{1-c_1+\varphi\omega}{c_1}}\right)^2>0 & \textbf{\textit{(5.200.2)}} \end{cases}$$

Βάσει των παραπάνω ριζών της εξίσωσης (5.198), κατασκευάσαμε τον πίνακα προσήμων του πολυωνύμου $P_1(v)$ και της διακρίνουσας Δ_8 που ακολουθεί. Σύμφωνα με τον πίνακα αυτό μπορούμε να διακρίνουμε μεταξύ των παρακάτω περιπτώσεων:

1ον Για $\left(0,v_1^{re}\right)\cup\left(v_2^{re},+\infty\right)$ το πολυώνυμο $P_1(v)$, και κατά συνέπεια η διακρίνουσα Δ_8, είναι θετικά ορισμένο. Με άλλα λόγια για το συγκεκριμένο διάστημα τιμών του επιταχυντή η χαρακτηριστική εξίσωση θα έχει δύο πραγματικές και διακριτές ρίζες, κάτι που μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι έπειτα από μία εξωγενή διαταραχή η διαχρονική πορεία του εισοδήματος θα είναι εκθετικής μορφής.

2ον Για $v = v_1^{re}$ ή $v = v_2^{re}$ θα ισχύει ότι $P_1(v) = \Delta_8 = 0$. Σ' αυτήν λοιπόν την περίπτωση η χαρακτηριστική εξίσωση θα έχει μία διπλή ρίζα, κάτι που σημαίνει ότι έπειτα από μία εξωγενή διαταραχή το εισόδημα θα συγκλίνει ή θα αποκλίνει μονοτονικά από τη βραχυχρόνια τιμή ισορροπίας του.

3ον Στην περίπτωση που $v \in \left(v_1^{re}, v_2^{re}\right)$ θα ισχύει ότι $\Delta_8 < 0$, καθώς στο συγκεκριμένο διάστημα τιμών το πολυώνυμο $P_1(v)$ είναι αρνητικά ορισμένο. Ως εκ τούτου η χαρακτηριστική εξίσωση θα έχει ως ρίζες δύο συζυγείς μιγαδικούς αριθμούς, με αποτέλεσμα η διαχρονική πορεία του εισοδήματος να χαρακτηρίζεται από ταλαντώσεις[39].



Ένα ερώτημα που ανακύπτει στο σημείο αυτό, έχει να κάνει με το εάν και κατά πόσο το διάστημα τιμών του επιταχυντή (v_1, v_2) για το οποίο η διαχρονική πορεία του εισοδήματος χαρακτηρίζεται από ταλαντώσεις και το οποίο προσδιορίζεται στα πλαίσια του μηχανισμού των αναθεωρούμενων και των στατικών προσδοκιών, είναι διαφορετικό από το αντίστοιχο διάστημα τιμών $\left(v_1^{re}, v_2^{re}\right)$ που προσδιορίσαμε στα πλαίσια του μηχανισμού των παλινδρομικών προσδοκιών.

Προκειμένου να απαντήσουμε στο παραπάνω ερώτημα θα προσδιορίσουμε τις διαφορές $q_1 = v_2^{as} - v_1^{as}$ και $q_2 = v_2^{re} - v_1^{re}$, με τα μεγέθη των v_1^{as}, v_2^{as}, v_1^{re} και v_2^{re} να ορίζονται μέσω των παρακάτω σχέσεων[40]:

$$\begin{cases} v_1^{as} = \left(\sqrt{u} - \sqrt{u-1}\right)^2 \underset{(5.22)}{\overset{(5.21)}{=}} \left(\sqrt{\dfrac{1+\varphi}{c_1}} - \sqrt{\dfrac{1-c_1+\varphi}{c_1}}\right)^2 & \textbf{\textit{(5.23.1)}} \\ \\ v_2^{as} = \left(\sqrt{u} + \sqrt{u-1}\right)^2 \underset{(5.22)}{\overset{(5.21)}{=}} \left(\sqrt{\dfrac{1+\varphi}{c_1}} + \sqrt{\dfrac{1-c_1+\varphi}{c_1}}\right)^2 & \textbf{\textit{(5.23.2)}} \end{cases}$$

και

[39] Η διαχρονική πορεία του εισοδήματος έπειτα από μία εξωγενή διαταραχή θα χαρακτηρίζεται από ταλαντώσεις μόνο στην περίπτωση που η διακρίνουσα της χαρακτηριστικής εξίσωσης (5.195) συνιστά ένα αρνητικό μέγεθος. Και αυτό διότι όπως είδαμε οι πραγματικές χαρακτηριστικές ρίζες συνιστούν μη αρνητικά μεγέθη.

[40] Υπενθυμίζουμε ότι $v_1^{as} = v_1^{ae} = v_1^{se}$ και $v_2^{as} = v_2^{ae} = v_2^{se}$.

$$\begin{cases} v_1^{re} = \left(\sqrt{\dfrac{1+\varphi\omega}{c_1}} - \sqrt{\dfrac{1-c_1+\varphi\omega}{c_1}}\right)^2 & \textbf{\textit{(5.200.1)}} \\ \\ v_2^{re} = \left(\sqrt{\dfrac{1+\varphi\omega}{c_1}} + \sqrt{\dfrac{1-c_1+\varphi\omega}{c_1}}\right)^2 & \textbf{\textit{(5.200.2)}} \end{cases}$$

και στη συνέχεια θα προσδιορίσουμε το πρόσημο της διαφοράς $q_1 - q_2$. Πιο συγκεκριμένα εάν αποδειχθεί ότι $q_1 - q_2 < 0$, τότε θα οδηγηθούμε στο συμπέρασμα ότι η χρησιμοποίηση των παλινδρομικών προσδοκιών έχει ως συνέπεια τη διεύρυνση του πεδίου τιμών του επιταχυντή, για το οποίο διασφαλίζεται ότι έπειτα από μία εξωγενή διαταραχή η διαχρονική πορεία του εισοδήματος θα χαρακτηρίζεται από ταλαντώσεις. Εάν αντιθέτως αποδειχθεί ότι $q_1 - q_2 > 0$, τότε το συμπέρασμα στο οποίο καταλήγουμε είναι ότι σε σχέση με τους μηχανισμούς των αναθεωρούμενων ή των στατικών προσδοκιών, η χρησιμοποίηση του μηχανισμού των παλινδρομικών προσδοκιών οδηγεί στη συρρίκνωση του πεδίου τιμών του επιταχυντή για το οποίο διασφαλίζεται η ημιτονοειδούς μορφής διαχρονική πορεία του εισοδήματος. Εάν τέλος δειχθεί ότι $q_1 - q_2 = 0$, τότε θα συμπεράνουμε ότι η χρησιμοποίηση των στατικών προσδοκιών δεν επηρεάζει το διάστημα τιμών του επιταχυντή στο οποίο καταλήγουμε βάσει των αναθεωρούμενων ή των στατικών προσδοκιών και το οποίο καθορίζει τη μορφή της διαχρονικής πορείας του εισοδήματος.

Από τις σχέσεις (5.23.1) και (5.23.2) προκύπτει ότι:

$$q_1 = v_2^{as} - v_1^{as} = \left(\sqrt{\frac{1+\varphi}{c_1}} + \sqrt{\frac{1-c_1+\varphi}{c_1}}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{1+\varphi}{c_1}} - \sqrt{\frac{1-c_1+\varphi}{c_1}}\right)^2 =$$

$$= \left[\left(\sqrt{\frac{1+\varphi}{c_1}} + \sqrt{\frac{1-c_1+\varphi}{c_1}}\right) + \left(\sqrt{\frac{1+\varphi}{c_1}} - \sqrt{\frac{1-c_1+\varphi}{c_1}}\right)\right] \times$$

$$\times \left[\left(\sqrt{\frac{1+\varphi}{c_1}} + \sqrt{\frac{1-c_1+\varphi}{c_1}}\right) - \left(\sqrt{\frac{1+\varphi}{c_1}} - \sqrt{\frac{1-c_1+\varphi}{c_1}}\right)\right] =$$

$$= \left(2\sqrt{\frac{1+\varphi}{c_1}}\right)\left(2\sqrt{\frac{1-c_1+\varphi}{c_1}}\right) = 4\sqrt{\frac{(1+\varphi)(1-c_1+\varphi)}{c_1^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad q_1 = \frac{4}{c_1}\sqrt{(1+\varphi)(1-c_1+\varphi)} \qquad \textbf{\textit{(5.201)}}$$

Από τις σχέσεις (5.200.1) και (5.200.2) προκύπτει ότι:

$$q_2 = v_2^{re} - v_1^{re} = \left(\sqrt{\frac{1+\varphi\omega}{c_1}} + \sqrt{\frac{1-c_1+\varphi\omega}{c_1}}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{1+\varphi\omega}{c_1}} - \sqrt{\frac{1-c_1+\varphi\omega}{c_1}}\right)^2 =$$

$$= \left[\left(\sqrt{\frac{1+\varphi\omega}{c_1}} + \sqrt{\frac{1-c_1+\varphi\omega}{c_1}}\right) + \left(\sqrt{\frac{1+\varphi\omega}{c_1}} - \sqrt{\frac{1-c_1+\varphi\omega}{c_1}}\right)\right] \times$$

$$\times \left[\left(\sqrt{\frac{1+\varphi\omega}{c_1}} + \sqrt{\frac{1-c_1+\varphi\omega}{c_1}}\right) - \left(\sqrt{\frac{1+\varphi\omega}{c_1}} - \sqrt{\frac{1-c_1+\varphi\omega}{c_1}}\right)\right] =$$

$$= \left(2\sqrt{\frac{1+\varphi\omega}{c_1}}\right)\left(2\sqrt{\frac{1-c_1+\varphi\omega}{c_1}}\right) = 4\sqrt{\frac{(1+\varphi\omega)(1-c_1+\varphi\omega)}{c_1^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad q_2 = \frac{4}{c_1}\sqrt{(1+\varphi\omega)(1-c_1+\varphi\omega)} \qquad \textbf{\textit{(5.202)}}$$

Αφαιρώντας τώρα κατά μέλη τις σχέσεις (5.201) και (5.202) βρίσκουμε:

$$q_1 - q_2 = \frac{4}{c_1}\sqrt{(1+\varphi)(1-c_1+\varphi)} - \frac{4}{c_1}\sqrt{(1+\varphi\omega)(1-c_1+\varphi\omega)} =$$

$$= \frac{4}{c_1}\left[\sqrt{(1+\varphi)(1-c_1+\varphi)} - \sqrt{(1+\varphi\omega)(1-c_1+\varphi\omega)}\right] =$$

$$= \frac{4}{c_1}\frac{\left[\sqrt{(1+\varphi)(1-c_1+\varphi)} - \sqrt{(1+\varphi\omega)(1-c_1+\varphi\omega)}\right]}{\sqrt{(1+\varphi)(1-c_1+\varphi)} + \sqrt{(1+\varphi\omega)(1-c_1+\varphi\omega)}} \times$$

$$\times \frac{\left[\sqrt{(1+\varphi)(1-c_1+\varphi)} + \sqrt{(1+\varphi\omega)(1-c_1+\varphi\omega)}\right]}{\sqrt{(1+\varphi)(1-c_1+\varphi)} + \sqrt{(1+\varphi\omega)(1-c_1+\varphi\omega)}} =$$

$$= \frac{4}{c_1}\frac{(1+\varphi)(1-c_1+\varphi) - (1+\varphi\omega)(1-c_1+\varphi\omega)}{\sqrt{(1+\varphi)(1-c_1+\varphi)} + \sqrt{(1+\varphi\omega)(1-c_1+\varphi\omega)}} =$$

$$=\frac{4}{c_1}\frac{(1-c_1+\varphi)+\varphi(1-c_1+\varphi)-(1-c_1+\varphi\omega)-\varphi\omega(1-c_1+\varphi\omega)}{\sqrt{(1+\varphi)(1-c_1+\varphi)}+\sqrt{(1+\varphi\omega)(1-c_1+\varphi\omega)}}=$$

$$=\frac{4}{c_1}\frac{\varphi(1-\omega)+\varphi(1-c_1)+\varphi^2-\varphi\omega(1-c_1)-\varphi^2\omega^2}{\sqrt{(1+\varphi)(1-c_1+\varphi)}+\sqrt{(1+\varphi\omega)(1-c_1+\varphi\omega)}}=$$

$$=\frac{4}{c_1}\frac{\varphi(1-\omega)+\varphi(1-c_1)(1-\omega)+\varphi^2(1-\omega)(1+\omega)}{\sqrt{(1+\varphi)(1-c_1+\varphi)}+\sqrt{(1+\varphi\omega)(1-c_1+\varphi\omega)}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow q_1-q_2=\frac{4\varphi(1-\omega)}{c_1}\frac{\varphi(1+\omega)+2-c_1}{\sqrt{(1+\varphi)(1-c_1+\varphi)}+\sqrt{(1+\varphi\omega)(1-c_1+\varphi\omega)}} \qquad \textbf{\textit{(5.203)}}$$

Από τη σχέση (5.203), και δεδομένου ότι $\varphi > 0$, $\omega > 0$ & $c_1 \in (0,1)$, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι το πρόσημο της διαφοράς $q_1 - q_2$ εξαρτάται από την παράμετρο ω, το μέγεθος της όποιας προσδιορίζεται με τη βοήθεια της ακόλουθης σχέσης:

$$\omega=\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{1-\theta_1}{1-\theta_2}>0 \qquad \textbf{\textit{(5.204)}}$$

βάσει της οποίας μπορούμε να διακρίνουμε μεταξύ τριών περιπτώσεων. Ειδικότερα:

<u>1η περίπτωση</u>: 0 < ω < 1

Όπως προκύπτει από τη σχέση (5.203), όταν η παράμετρος ω κινείται στο διάστημα (0,1) η διαφορά $q_1 - q_2$ συνιστά ένα θετικό μέγεθος. Βάσει ωστόσο της σχέσης (5.204), η τιμή της παραμέτρου ω θα ανήκει στο διάστημα (0,1) εφόσον ισχύει ότι:

$$0<\omega<1 \overset{(5.201)}{\Rightarrow} 0<\frac{1-\theta_1}{1-\theta_2}<1\Rightarrow 0<1-\theta_1<1-\theta_2\Rightarrow -1<-\theta_1<-\theta_2\Rightarrow \theta_2<\theta_1<1$$

εφόσον δηλαδή η ταχύτητα προσαρμογής της επιτοκιακής διαφοράς της περιόδου t –1 (ΔR_{t-1}) προς τη μακροχρόνια τιμή ισορροπίας της $\left(\overline{\Delta R}\right)$ στην αγορά προϊόντος (θ_1) είναι μεγαλύτερη από εκείνη της αγοράς χρήματος (θ_2).

Με άλλα λόγια στην περίπτωση που ισχύει ότι $\theta_1 > \theta_2$, η χρήση του μηχανισμού των παλινδρομικών προσδοκιών οδηγεί στη συρρίκνωση του πεδίου τιμών του επιταχυντή, συγκριτικά με εκείνο στο οποίο καταλήγουμε βάσει των μηχανισμών των αναθεωρούμενων και των στατικών προσδοκιών, για το οποίο η διαχρονική πορεία του εισοδήματος θα χαρακτηρίζεται από ταλαντώσεις.

<u>2η περίπτωση</u>: ω = 1

Στην ειδική περίπτωση που $\theta_1 = \theta_2$ η παράμετρος ω θα ισούται με τη μονάδα. Ωστόσο για ω = 1 από τη σχέση (5.203) προκύπτει ότι $q_1 - q_2 = 0$. *Με άλλα λόγια όταν η ταχύτητα προσαρμογής της επιτοκιακής διαφοράς της περιόδου t – 1 προς την τιμή*

ισορροπίας της είναι η ίδια στις αγορές αγαθών και χρήματος, η χρήση των μηχανισμών των αναθεωρούμενων, των στατικών και των παλινδρομικών προσδοκιών μας οδηγεί στο ίδιο διάστημα τιμών του επιταχυντή, για το οποίο επιτυγχάνεται ημιτονοειδούς μορφής πορεία του εισοδήματος έπειτα από μία εξωγενή διαταραχή.

<u>3η περίπτωση</u>: ω > 1

Εάν η ταχύτητα προσαρμογής της επιτοκιακής διαφοράς ΔR_{t-1} προς τη μακροχρόνια τιμή ισορροπίας της είναι μεγαλύτερη στην αγορά χρήματος, εάν δηλαδή ισχύει ότι $\theta_2 > \theta_1$, τότε θα έχουμε ότι:

$$\theta_2 > \theta_1 \Rightarrow -\theta_2 < -\theta_1 \Rightarrow 1-\theta_2 < 1-\theta_1 \Rightarrow 1 < \frac{1-\theta_1}{1-\theta_2} \Rightarrow \omega > 1$$

Ωστόσο για ω > 1 από τη σχέση (5.203) προκύπτει ότι $q_1 - q_2 < 0$, κάτι που μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι *στην περίπτωση που $\theta_1 < \theta_2$ ο μηχανισμός των παλινδρομικών προσδοκιών οδηγεί στη διεύρυνση του πεδίου τιμών του επιταχυντή, συγκριτικά με εκείνο στο οποίο καταλήγουμε βάσει του μηχανισμού των αναθεωρούμενων ή των στατικών προσδοκιών, για το οποίο η μορφή της διαχρονικής πορείας του εισοδήματος έπειτα από μία εξωγενή διαταραχή χαρακτηρίζεται από ταλαντώσεις.*

Στη συνέχεια της ανάλυσής μας και υποθέτοντας ότι[41] $\theta_1 \neq \theta_2$ θα προσδιορίσουμε τη συμπληρωματική λύση της βασικής εξίσωσης διαφορών (5.191), η οποία και θα αποτελεί το γραμμικό συνδυασμό των συναρτήσεων:

$$y_{1,t} = \lambda_1^t \qquad \textbf{(5.205.1)} \qquad \& \qquad y_{2,t} = \lambda_2^t \qquad \textbf{(5.205.2)}$$

όπου λ_i , i = 1,2 , οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης

εφόσον η ορίζουσα Casorati είναι διάφορη του μηδενός, εφόσον δηλαδή ισχύει ότι:

$$C(t) = \begin{vmatrix} y_{1,t} & y_{2,t} \\ y_{1,t+1} & y_{2,t+1} \end{vmatrix} \neq 0 \; \forall \; t \qquad \textbf{(5.206)}$$

Από την αντικατάσταση των σχέσεων (5.205.1) και (5.205.2) στη σχέση (5.206) προκύπτει ότι:

$$C(t) = \begin{vmatrix} y_{1,t} & y_{2,t} \\ y_{1,t+1} & y_{2,t+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_1^t & \lambda_2^t \\ \lambda_1^{t+1} & \lambda_2^{t+1} \end{vmatrix} = (\lambda_1\lambda_2)^t \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix} \overset{(5.196.2)}{=} (\zeta_0)^t (\lambda_2 - \lambda_1) \qquad \textbf{(5.207)}$$

Το συμπέρασμα στο οποίο οδηγούμαστε βάσει της παραπάνω σχέσης είναι ότι οι συναρτήσεις $y_{1,t}$ και $y_{2,t}$ θα συγκροτούν ένα θεμελιώδες σύνολο λύσεων της ομογενούς εξίσωσης διαφορών (5.192) εφόσον $\lambda_1 \neq \lambda_2$, εφόσον δηλαδή ισχύει ότι $\Delta_8 \neq 0$.

---

[41] Στην περίπτωση που ισχύει ότι $\theta_1 = \theta_2$, ή ισοδύναμα ότι ω = 1, η βασική εξίσωση διαφορών (5.128) ταυτίζεται με τη βασική εξίσωση διαφορών (5.191), κάτι που σημαίνει ότι τα συμπεράσματα στα οποία καταλήξαμε στην ενότητα 5.2 εξακολουθούν να ισχύουν και στην ειδική περίπτωση που ω = 1

Βάσει του προσήμου της διακρίνουσας Δ_8 της χαρακτηριστικής εξίσωσης (5.195) θα διακρίνουμε παρακάτω μεταξύ τριών περιπτώσεων αναφορικά με τη μορφή της συμπληρωματικής λύσης Y_t^c.

<u>1η Περίπτωση</u>: $\Delta_8 > 0$

Στην περίπτωση αυτή θα ισχύει ότι $C(t) \neq 0$ καθώς η χαρακτηριστική εξίσωση θα έχει δύο πραγματικές και διακριτές ρίζες το μέγεθος των οποίων έχει ως ακολούθως:

$$\lambda_{2,1} = \frac{-\zeta_1 \pm \sqrt{\Delta_8}}{2} = \frac{\dfrac{c_1(1+v)}{1+\varphi\omega} \pm \sqrt{\left(\dfrac{c_1}{1+\varphi\omega}\right)^2 \left\{v^2 + 2\left[1 - \dfrac{2(1+\varphi\omega)}{c_1}\right]v + 1\right\}}}{2} =$$

$$= \frac{\dfrac{c_1(1+v)}{1+\varphi\omega} \pm \dfrac{c_1}{1+\varphi\omega}\sqrt{\left(v - v_1^{re}\right)\left(v - v_2^{re}\right)}}{2} = \frac{c_1}{2(1+\varphi\omega)}\left[1 + v \pm \sqrt{\left(v - v_1^{re}\right)\left(v - v_2^{re}\right)}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{c_1\left[1 + v - \sqrt{\left(v - v_1^{re}\right)\left(v - v_2^{re}\right)}\right]}{2(1+\varphi\omega)} & \textbf{\textit{(5.208.1)}} \\[2ex] \lambda_2 = \dfrac{c_1\left[1 + v + \sqrt{\left(v - v_1^{re}\right)\left(v - v_2^{re}\right)}\right]}{2(1+\varphi\omega)} & \textbf{\textit{(5.208.2)}} \end{cases}$$

Εφόσον για τις παραπάνω χαρακτηριστικές ρίζες ισχύει ότι $C(t) \neq 0$, η συμπληρωματική λύση της εξίσωσης διαφορών (5.191) θα αποτελεί το γραμμικό συνδυασμό των συναρτήσεων $y_{1,t}$ και $y_{2,t}$, θα είναι δηλαδή της μορφής:

$$Y_t^c = A_1 y_{1,t} + A_2 y_{2,t} = A_1 \lambda_1^t + A_2 \lambda_2^t =$$

$$= A_1\left[\frac{c_1\left\{1 + v - \sqrt{(v - v_1^{re})(v - v_2^{re})}\right\}}{2(1+\varphi\omega)}\right]^t + A_2\left[\frac{c_1\left\{1 + v + \sqrt{(v - v_1^{re})(v - v_2^{re})}\right\}}{2(1+\varphi\omega)}\right]^t \quad \textbf{\textit{(5.209)}}$$

όπου A_i , $i = 1,2$, δύο αυθαίρετες σταθερές το μέγεθος των οποίων μπορεί να προσδιορισθεί με τη βοήθεια δύο αρχικών συνθηκών

<u>2η Περίπτωση</u>: $\Delta_8 = 0$

Εάν η διακρίνουσα Δ_8 ισούται με το μηδέν, η χαρακτηριστική εξίσωση (5.195) θα έχει δύο πραγματικές και ίσες ρίζες, το μέγεθος των οποίων έχει ως ακολούθως:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{-\zeta_1}{2} = \frac{c_1(1+v)}{2(1+\varphi\omega)} > 0 \qquad \textbf{\textit{(5.210)}}$$

Η ισότητα ωστόσο των χαρακτηριστικών ριζών μας οδηγεί, βάσει της σχέσης (5.207), στο συμπέρασμα ότι οι συναρτήσεις $y_{1,t}$ και $y_{2,t}$ δεν συγκροτούν ένα θεμελιώδες σύνολο λύσεων της ομογενούς εξίσωσης διαφορών (5.192), καθώς για $\lambda_1 = \lambda_2$ ισχύει ότι C(t) = 0. Σ' αυτήν την περίπτωση, η συμπληρωματική λύση της βασικής εξίσωσης διαφορών (5.191) θα αποτελεί το γραμμικό συνδυασμό των δύο παρακάτω συναρτήσεων:

$$y_{1,t} = \lambda_1^t \qquad \textbf{\textit{(5.211.1)}} \qquad \& \qquad y_{3,t} = t\,\lambda_2^t \qquad \textbf{\textit{(5.211.2)}}$$

οι οποίες σε αντίθεση με τις συναρτήσεις (5.205.1) & (5.205.2) είναι γραμμικώς ανεξάρτητες. Η γραμμική ανεξαρτησία των δύο παραπάνω συναρτήσεων αποδεικνύεται από το γεγονός ότι η ορίζουσα Casorati είναι διάφορη του μηδενός, καθώς ισχύει ότι:

$$C(t) = \begin{vmatrix} y_{1,t} & y_{3,t} \\ y_{1,t+1} & y_{3,t+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_1^t & t\,\lambda_2^t \\ \lambda_1^{t+1} & (t+1)\lambda_2^{t+1} \end{vmatrix} = (\lambda_1\lambda_2)^t \begin{vmatrix} 1 & t \\ \lambda_1 & (t+1)\lambda_2 \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda_1\lambda_2)^t\left[(t+1)\lambda_2 - t\,\lambda_1\right] = (\lambda_1\lambda_2)^t\left[\,t(\lambda_2-\lambda_1)+\lambda_2\right] \overset{(5.210)}{=} \left(\frac{\zeta_1^2}{4}\right)^t\left(0-\frac{\zeta_1}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad C(t) = -\left(\frac{\zeta_1}{2}\right)^{2t+1} \neq 0 \;\forall\, t \qquad \textbf{\textit{(5.212)}}$$

Όπως προκύπτει από την παραπάνω ανάλυση η μορφή της συμπληρωματικής λύσης στην περίπτωση που ισχύει ότι $\Delta_8 = 0$ θα έχει ως ακολούθως:

$$Y_t^c = A_1 y_{1,t} + A_2 y_{3,t} \underset{(5.211.2)}{\overset{(5.211.1)}{=}} A_1\lambda_1^t + A_2\,t\,\lambda_2^t \overset{(5.210)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow Y_t^c = (A_1 + A_2 t)\left[\frac{c_1(1+v)}{2(1+\varphi\omega)}\right]^t \qquad \textbf{\textit{(5.213)}}$$

όπου A_i , i = 1,2 , δύο αυθαίρετες σταθερές το μέγεθος των οποίων είναι δυνατό να προσδιορισθεί με τη βοήθεια δύο αρχικών συνθηκών.

<u>3η Περίπτωση</u>: $\Delta_8 < 0$

Όπως γνωρίζουμε στην περίπτωση που η διακρίνουσα Δ_8 συνιστά ένα αρνητικό μέγεθος, η χαρακτηριστική εξίσωση θα έχει δύο συζυγείς μιγαδικές ρίζες το μέγεθος των οποίων έχει ως ακολούθως:

$$\lambda_{2,1} = \frac{-\zeta_1 \pm \sqrt{\Delta_8}}{2} = \frac{-\zeta_1 \pm \sqrt{\zeta_1^2 - 4\,\zeta_0}}{2} = \frac{-\zeta_1 \pm \sqrt{-1}\,\sqrt{4\,\zeta_0 - \zeta_1^2}}{2} =$$

$$= k_{re} \pm i\, n_{re} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = k_{re} - i\, n_{re} & \textbf{\textit{(5.214.1)}} \\ \lambda_2 = k_{re} + i\, n_{re} & \textbf{\textit{(5.214.2)}} \end{cases}$$

όπου $k_{re} = -\zeta_1/2,\, i = \sqrt{-1}$ και $n_{re} = \sqrt{4\,\zeta_0 - \zeta_1^2}\,/2$

Δεδομένου ότι $\lambda_1 \neq \lambda_2$ η ορίζουσα Casorati, όπως αυτή περιγράφεται από τη σχέση (5.207), θα είναι διάφορη του μηδενός. Ως εκ τούτου η συμπληρωματική λύση της βασικής εξίσωσης διαφορών (5.191) θα αποτελεί το γραμμικό συνδυασμό των παρακάτω συναρτήσεων:

$$y_{1,t} = \lambda_1^t = (k_{re} - i\, n_{re})^t \qquad \textbf{\textit{(5.215.1)}} \qquad \& \qquad y_{2,t} = \lambda_2^t = (k_{re} + i\, n_{re})^t \qquad \textbf{\textit{(5.215.2)}}$$

και θα έχει την ακόλουθη μορφή:

$$Y_t^c = A_1 y_{1,t} + A_2 y_{2,t} \underset{(5.215.2)}{\overset{(5.215.1)}{\Rightarrow}} Y_t^c = A_1 (k_{re} - i\, n_{re})^t + A_2 (k_{re} + i\, n_{re})^t \qquad \textbf{\textit{(5.216)}}$$

Βάσει του θεωρήματος De Moivre γνωρίζουμε ότι ισχύει:

$$\lambda_{2,1}^t = (k_{re} \pm i\, n_{re})^t = R_{re}^t \left[\cos(\chi_{re} t) \pm i \sin(\chi_{re} t)\right] \qquad \textbf{\textit{(5.217)}}$$

όπου

$$R_{re} = \sqrt{k_{re}^2 + n_{re}^2} = \sqrt{\left(\frac{-\zeta_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{4\,\zeta_0 - \zeta_1^2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{\zeta_1^2 + 4\,\zeta_0 - \zeta_1^2}{4}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad R_{re} = \sqrt{\zeta_0} = \sqrt{v c_1 / (1 + \varphi\omega)} \qquad \textbf{\textit{(5.218)}}$$

και

$$\tan(\chi_{re}) = \frac{n_{re}}{k_{re}} = \frac{\sqrt{4\zeta_0 - \zeta_1^2}/2}{-\zeta_1/2} = -\frac{\sqrt{4\zeta_0 - \zeta_1^2}}{\zeta_1} = \arctan\left(-\frac{\sqrt{4\zeta_0 - \zeta_1^2}}{\delta_1}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \chi_{re} = -\arctan\left(\sqrt{4\zeta_0 - \zeta_1^2}/\zeta_1\right) \qquad \textbf{\textit{(5.219)}}$$

Από το συνδυασμό των σχέσεων (5.216) και (5.217) προκύπτει η τελική μορφή της συμπληρωματικής λύσης της βασικής εξίσωσης διαφορών η οποία και έχει ως ακολούθως:

$$Y_t^c = A_1(k_{re} - i\,n_{re})^t + A_2(k_{re} + i\,n_{re})^t \overset{(5.217)}{=}$$

$$= A_1 R_{re}^t\,[\cos(\chi_{re}t) - i\sin(\chi_{re}t)] + A_2 R_{re}^t[\cos(\chi_{re}t) + i\sin(\chi_{re}t)] =$$

$$= R_{re}^t[(A_1 + A_2)\cos(\chi_{re}t) + (A_2 - A_1)i\sin(\chi_{re}t)] \overset{(5.218)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow Y_t^c = \sqrt{\zeta_0^t}\,[A_3\cos(\chi_{re}t) + A_4\sin(\chi_{re}t)] \qquad \textbf{\textit{(5.220)}}$$

όπου $A_3 = A_1 + A_2$ & $A_4 = (A_2 - A_1)i$ δύο αυθαίρετες σταθερές το μέγεθος των οποίων μπορεί να προσδιορισθεί με τη βοήθεια δύο αρχικών συνθηκών.

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι στην περίπτωση που η παράμετρος R_{re}, όπως αυτή περιγράφεται από τη σχέση (5.218), ισούται με τη μονάδα, η διαχρονική πορεία του εισοδήματος έπειτα από μία εξωγενή διαταραχή θα χαρακτηρίζεται από σταθερού εύρους ταλαντώσεις. Με άλλα λόγια στην περίπτωση που ισχύει ότι:

$$R_{re} = 1 \overset{(5.218)}{\Rightarrow} \sqrt{\frac{vc_1}{1+\varphi\omega}} = 1 \Rightarrow \frac{vc_1}{1+\varphi\omega} = 1 \Rightarrow \qquad v_{uf}^{re} = \frac{1+\varphi\omega}{c_1} \qquad \textbf{\textit{(5.221)}}$$

η εκδήλωση μίας εξωγενούς διατάραξης θα έχει ως συνέπεια την ταλάντωση του εισοδήματος γύρο από την μακροχρόνια τιμή ισορροπίας του, με το εύρος της ταλάντωσης, δηλαδή της περιόδου ($\widetilde{P}_{re}$) εντός της οποίας ολοκληρώνεται μία ταλάντωση, να παραμένει σταθερό και ίσο με:

$$\widetilde{P}_{re} = \frac{2\pi}{n_{re}/2} = \frac{4\pi}{\sqrt{4\zeta_0 - \zeta_1^2}} \qquad (5.222)$$

Στον πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζονται συνοπτικά οι μορφές της συμπληρωματικής λύσης της μη ομογενούς εξίσωσης διαφορών με σταθερούς συντελεστές (5.192), βάσει του προσήμου της διακρίνουσας της χαρακτηριστικής εξίσωσης (5.195).

<u>Πίνακας 5.5</u>: Μορφές της συμπληρωματικής λύσης βάσει του προσήμου της διακρίνουσας Δ_8

$\Delta_8 > 0$	$Y_t^c = A_1\left[\frac{c_1\left\{1+v-\sqrt{\left(v-v_1^{re}\right)\left(v-v_2^{re}\right)}\right\}}{2\left(1+\varphi\omega\right)}\right]^t + A_2\left[\frac{c_1\left\{1+v+\sqrt{\left(v-v_1^{re}\right)\left(v-v_2^{re}\right)}\right\}}{2\left(1+\varphi\omega\right)}\right]^t$
$\Delta_8 = 0$	$Y_t^c = \left(A_1 + A_2 t\right)\left[\frac{c_1\left(1+v\right)}{2\left(1+\varphi\omega\right)}\right]^t$
$\Delta_8 < 0$	$Y_t^c = \sqrt{\zeta_0^t}\left[A_3\cos\left(\chi_{re}t\right) + A_4\sin\left(\chi_{re}t\right)\right]$

<u>Παρατήρηση</u>: Οι σταθερές A_i, i = 1, …. ,4, μπορούν να προσδιορισθούν με τη βοήθεια δύο αρχικών συνθηκών

5.3.2 Προσδιορισμός της μερικής λύσης στα πλαίσια του μηχανισμού των παλινδρομικών προσδοκιών

Η μερική λύση $\left(Y_t^p\right)$ της βασικής εξίσωσης διαφορών (5.191) περιγράφει όπως γνωρίζουμε το επίπεδο του εισοδήματος ισορροπίας. Προκειμένου να προσδιορίσουμε το ύψος του εισοδήματος ισορροπίας όταν οι προσδοκίες είναι παλινδρομικές $\left(\widetilde{Y}_t^{re}\right)$, θα υποθέσουμε ότι η μερική λύση της (5.191) είναι της ίδιας γενικής μορφής με τη συνάρτηση Γ(t). Με άλλα λόγια και δεδομένου ότι:

$$\Gamma(t) = \overline{\Gamma}_0 + \overline{\Gamma}_1\left(1+m\right)^t \qquad (5.223)$$

όπου $\overline{\Gamma}_0 = \frac{b_0 + b_2\left(1-\omega\right)\overline{\Delta R}}{1+\varphi\omega}$ & $\overline{\Gamma}_1 = \frac{\varphi\omega}{d_1\left(1+\varphi\omega\right)}M_0\left(1+m\right)^2$

εμείς θα κάνουμε την ακόλουθη υπόθεση:

$$Y_t^p = \Gamma_0 + \Gamma_1\left(1+m\right)^t \qquad (5.224.1)$$

κάτι που προφανώς υπονοεί ότι:

$$Y_{t+1}^p = \Gamma_0 + \Gamma_1\left(1+m\right)^{t+1} \quad (5.224.2) \quad \& \quad Y_{t+2}^p = \Gamma_0 + \Gamma_1\left(1+m\right)^{t+2} \quad (5.224.3)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (5.224.1) ~ (5.224.3) στη σχέση (5.191) και επιλύοντας ως προς Γ_0 και Γ_1 βρίσκουμε ότι:

$$Y_{t+2} + \zeta_1 Y_{t+1} + \zeta_0 Y_t = \frac{b_0 + b_2(1-\omega)\overline{\Delta R}}{1+\varphi\omega} + \frac{\varphi\omega}{d_1(1+\varphi\omega)} M_0 (1+m)^{t+2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Gamma_0 + \Gamma_1 (1+m)^{t+2} + \zeta_1 \left[\Gamma_0 + \Gamma_1 (1+m)^{t+1}\right] + \zeta_0 \left[\Gamma_0 + \Gamma_1 (1+m)^{t}\right] =$$

$$= \frac{b_0 + b_2(1-\omega)\overline{\Delta R}}{1+\varphi\omega} + \frac{\varphi\omega}{d_1(1+\varphi\omega)} M_0 (1+m)^{t+2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1+\zeta_0+\zeta_1)\Gamma_0 + \left[(1+m)^2 + \zeta_1(1+m) + \zeta_0\right]\Gamma_1 (1+m)^t =$$

$$= \frac{b_0 + b_2(1-\omega)\overline{\Delta R}}{1+\varphi\omega} + \left[\frac{\varphi\omega}{d_1(1+\varphi\omega)} M_0 (1+m)^2\right](1+m)^t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1+\zeta_0+\zeta_1)\Gamma_0 = \dfrac{b_0 + b_2(1-\omega)\overline{\Delta R}}{1+\varphi\omega} \\ \left[(1+m)^2 + \zeta_1(1+m) + \zeta_0\right]\Gamma_1 = \dfrac{\varphi\omega}{d_1(1+\varphi\omega)} M_0 (1+m)^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left[1 + \dfrac{vc_1}{1+\varphi\omega} - \dfrac{c_1(1+v)}{1+\varphi\omega}\right]\Gamma_0 = \dfrac{b_0 + b_2(1-\omega)\overline{\Delta R}}{1+\varphi\omega} \\ \Gamma_1 = \dfrac{\varphi\omega}{d_1(1+\varphi\omega)} \dfrac{M_0(1+m)^2}{(1+m)^2 + \zeta_1(1+m) + \zeta_0} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1+\varphi\omega - c_1}{1+\varphi\omega}\Gamma_0 = \dfrac{b_0 + b_2(1-\omega)\overline{\Delta R}}{1+\varphi\omega} \\ \Gamma_1 = \dfrac{\varphi\omega}{d_1(1+\varphi\omega)} \dfrac{M_0 \tilde{m}^2}{\tilde{m}^2 + \zeta_1 \tilde{m} + \zeta_0} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Gamma_0 = \dfrac{b_0 + b_2(1-\omega)\overline{\Delta R}}{1 - c_1 + \varphi\omega} & \textit{(5.225.1)} \\ \\ \Gamma_1 = \dfrac{\varphi\omega}{d_1(1+\varphi\omega)} \dfrac{M_0 \tilde{m}^2}{\tilde{m}^2 + \zeta_1 \tilde{m} + \zeta_0} & \textit{(5.225.2)} \end{cases}$$

όπου $\tilde{m} = 1 + m$

Από το συνδυασμό των σχέσεων (5.224.1) , (5.225.1) και (5.225.2) προκύπτει η τιμή του εισοδήματος ισορροπίας όταν η προσδοκίες διαμορφώνονται παλινδρομικά και η οποία έχει ως ακολούθως:

$$\tilde{Y}_t^{re} = Y_t^p = \frac{b_0 + b_2(1-\omega)\overline{\Delta R}}{1 - c_1 + \varphi\omega} + \frac{\varphi\omega}{d_1(1+\varphi\omega)} \frac{M_0 \tilde{m}^{t+2}}{\tilde{m}^2 + \zeta_1 \tilde{m} + \zeta_0} \qquad \textit{(5.226)}$$

Στη συνέχεια της ανάλυσής μας, και γνωρίζοντας ότι $b_0 > 0$, $b_2 < 0$, $\varphi > 0$, $\omega > 0$, c_1 & $m \in (0,1)$, $\overline{\Delta R} \leq, \geq 0$, $d_1 > 0$, $M_0 > 0$, $\tilde{m} = 1 + m > 1$, $\zeta_0 > 0$ & $\zeta_1 < 0$, θα διερευνήσουμε καταρχήν τις προϋποθέσεις που θα πρέπει να ικανοποιούνται προκειμένου το εισόδημα ισορροπίας $\tilde{Y}_t^{re}$ να αποτελεί ένα θετικό μέγεθος και στη συνέχεια θα συγκρίνουμε το μέγεθός του με εκείνο του εισοδήματος ισορροπίας που προκύπτει βάσει του μηχανισμού των στατικών (ή των αναθεωρούμενων) προσδοκιών.

Το πρόσημο του εισοδήματος ισορροπίας $\tilde{Y}_t^{re}$, όπως αυτό περιγράφεται από τη σχέση (5.226), εξαρτάται από το πρόσημο των μεγεθών $P_8(\tilde{m}) = \tilde{m}^2 + \zeta_1 \tilde{m} + \zeta_0$, $1 - \omega$ και $\overline{\Delta R}$. Το κύριο ερώτημα που ανακύπτει στο σημείο αυτό έχει να κάνει με το πρόσημο του πολυωνύμου $P_8(\tilde{m})$.

Το πολυώνυμο $P_8(\tilde{m})$ θα συνιστά οπωσδήποτε ένα θετικό μέγεθος εάν η διακρίνουσα της εξίσωσης $P_8(\tilde{m}) = 0$ είναι αρνητική. Δεδομένου ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης $P_8(\tilde{m}) = 0$ είναι ακριβώς η ίδια με εκείνη της χαρακτηριστικής εξίσωσης (5.195), το πρόσημό της θα είναι οπωσδήποτε αρνητικό εφόσον ισχύει ότι $v \in (v_1^{re}, v_2^{re})$. Εάν $v = v_1^{re}$ ή $v = v_2^{re}$ τότε η διακρίνουσα θα ισούται με το μηδέν και το πολυώνυμο $P_8(\tilde{m})$ θα είναι θετικά (αρνητικά) ορισμένο εφόσον ισχύει ότι $\tilde{m} > \rho_0$ ($\tilde{m} < \rho_0$), όπου $\rho_0 = -\zeta_1/2 > 0$ η διπλή ρίζα της εξίσωσης $P_8(\tilde{m}) = 0$. Στην περίπτωση τέλος που ο επιταχυντής παίρνει τιμές στο διάστημα $(0, v_1^{re}) \cup (v_2^{re}, +\infty)$, το πολυώνυμο $P_8(\tilde{m})$ θα είναι θετικά (αρνητικά) ορισμένο εφόσον ισχύει ότι $\tilde{m} \notin (\rho_1, \rho_2)$ $[\tilde{m} \in (\rho_1, \rho_2)]$, όπου ρ_i , i = 1 , 2 , οι πραγματικές και διακριτές ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης (5.195).

Βάσει του προσήμου του πολυωνύμου $P_8(\tilde{m})$ θα διακρίνουμε στη συνέχεια μεταξύ των παρακάτω περιπτώσεων και υποπεριπτώσεων:

(1) $P_8(\tilde{m}) > 0$

Εάν το πολυώνυμο $P_8(\tilde{m})$ είναι θετικά ορισμένο το δεύτερο κλάσμα της σχέσης (5.226) θα συνιστά ένα θετικό μέγεθος. Ως εκ τούτου το πρόσημο του εισοδήματος ισορροπίας θα εξαρτάται από το πρόσημο των μεγεθών 1 – ω και $\overline{\Delta R}$, βάσει των οποίων μπορούμε να διακρίνουμε μεταξύ τριών υποπεριπτώσεων.

***(1.α) Τα μεγέθη 1 – ω & $\overline{\Delta R}$ είναι ομόσημα*:** Σ' αυτήν την περίπτωση, και δεδομένου ότι $b_2 < 0$, το εισόδημα ισορροπίας θα αποτελεί ένα θετικό μέγεθος εφόσον ισχύει ότι $b_0 > -b_2(1-\omega)\overline{\Delta R}$. Εάν ωστόσο ο αριθμητής του πρώτου κλάσματος αποτελεί ένα αρνητικό μέγεθος[42], το εισόδημα ισορροπίας θα είναι θετικά ορισμένο εφόσον ισχύει ότι:

$$\frac{\varphi\omega}{d_1(1+\varphi\omega)}\frac{M_0\tilde{m}^{t+2}}{\tilde{m}^2+\zeta_1\tilde{m}+\zeta_0} > -\frac{b_0+b_2(1-\omega)\overline{\Delta R}}{1-c_1+\varphi\omega}$$

***(1.β) Τα μεγέθη 1 – ω & $\overline{\Delta R}$ είναι ετερόσημα*:** Δεδομένου ότι $b_2 < 0$ το πρώτο κλάσμα της σχέσης (5.226) θα είναι θετικά ορισμένο εφόσον τα μεγέθη 1 – ω και $\overline{\Delta R}$ είναι ετερόσημα. Ως εκ τούτου το εισόδημα ισορροπίας θα συνιστά ένα θετικό μέγεθος καθώς θα αποτελεί το άθροισμα δύο θετικών όρων.

***(1.γ) 1 – ω = 0 ή $\overline{\Delta R}$ = 0 ή 1 – ω = $\overline{\Delta R}$ = 0* :** Σ' αυτήν την περίπτωση[43], πέραν του δευτέρου κλάσματος της σχέσης (5.226) και το πρώτο κλάσμα της ίδιας σχέσης θα είναι θετικά ορισμένο. Ως εκ τούτου το εισόδημα ισορροπίας $\tilde{Y}_t^{re}$ θα αποτελεί ένα θετικό μέγεθος.

(2) $P_8(\tilde{m}) = 0$

Στην περίπτωση που το πολυώνυμο $P_8(\tilde{m})$ είναι ακριβώς ίσο με το μηδέν το δεύτερο κλάσμα της σχέσης (5.226), και κατά συνέπεια το εισόδημα ισορροπίας $\tilde{Y}_t^{re}$, θα ισούται με το άπειρο.

(3) $P_8(\tilde{m}) < 0$

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, στην περίπτωση που ισχύει ότι $v \notin (v_1^{re}, v_2^{re})$ και $\tilde{m} \in (\rho_1, \rho_2)$ το πολυώνυμο $P_8(\tilde{m})$, και κατά συνέπεια το δεύτερο κλάσμα της σχέσης (5.226), θα είναι αρνητικά ορισμένο. Ως εκ τούτου το πρόσημο του εισοδήματος ισορροπίας εξαρτάται από το πρόσημο του πρώτου κλάσματος και ειδικότερα από το σχετικό μέγεθος των αυτόνομων επενδύσεων (b_0) ως προς το μέγεθος του όρου

---

[42] Θα πρέπει να σημειωθεί ότι πρακτικά κάτι τέτοιο είναι μάλλον απίθανο να συμβεί.

[43] Να σημειωθεί εδώ ότι για 1 – ω = 0 ή ισοδύναμα για ω = 1, το εισόδημα ισορροπίας στο οποίο καταλήγουμε βάσει της σχέσης (5.226) είναι ακριβώς το ίδιο με εκείνο το οποίο περιγράφεται βάσει της σχέσης (5.158).

$b_2(1-\omega)\overline{\Delta R}$. Στη συνέχεια θα διακρίνουμε μεταξύ των παρακάτω τριών υποπεριπτώσεων:

***(3.α) Τα μεγέθη 1 – ω & $\overline{\Delta R}$ είναι ομόσημα*:** Σ' αυτήν την περίπτωση, και εφόσον εξ ορισμού ισχύει ότι $b_2 < 0$, το εισόδημα ισορροπίας $\widetilde{Y}_t^{re}$ θα συνιστά ένα θετικό μέγεθος εφόσον 1ον οι αυτόνομες επενδύσεις είναι μεγαλύτερες από το αρνητικό μέγεθος $b_2(1-\omega)\overline{\Delta R}$, εφόσον δηλαδή ισχύει ότι $b_0 > -b_2(1-\omega)\overline{\Delta R}$, και 2ον εφόσον ικανοποιείται η ακόλουθη σχέση:

$$\frac{b_0 + b_2(1-\omega)\overline{\Delta R}}{1-c_1+\varphi\omega} > -\frac{\varphi\omega}{d_1(1+\varphi\omega)}\frac{M_0\widetilde{m}^{t+2}}{\widetilde{m}^2+\zeta_1\,\widetilde{m}+\zeta_0} \qquad (5.227)$$

***(3.β) Τα μεγέθη 1 – ω & $\overline{\Delta R}$ είναι ετερόσημα*:** Το γεγονός ότι ο συντελεστής b_2 είναι αρνητικά ορισμένος σε συνδυασμό με το αρνητικό πρόσημο του γινομένου $(1-\omega)\overline{\Delta R}$, μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι το πρώτο κλάσμα της σχέσης (5.226) συνιστά ένα θετικό μέγεθος. Ως εκ τούτου το εισόδημα ισορροπίας $\widetilde{Y}_t^{re}$ θα είναι θετικά ορισμένο μόνο εφόσον ικανοποιείται η ανισότητα (5.227).

***(3.γ) 1 – ω = 0 ή $\overline{\Delta R}$ = 0 ή 1 – ω = $\overline{\Delta R}$ = 0* :** Σ' αυτήν την περίπτωση το εισόδημα ισορροπίας $\widetilde{Y}_t^{re}$ θα έχει το αναμενόμενο πρόσημο μόνο εφόσον το πρώτο κλάσμα της σχέσης (5.226) είναι μεγαλύτερο κατ' απόλυτο μέγεθος από το δεύτερο κλάσμα της ίδιας σχέσης.

Έχοντας διερευνήσει τις προϋποθέσεις υπό τις οποίες το εισόδημα ισορροπίας θα συνιστά ένα θετικό μέγεθος, θα προσπαθήσουμε στη συνέχεια να διαπιστώσουμε κατά πόσον ο μηχανισμός των παλινδρομικών προσδοκιών μας οδηγεί σ' ένα επίπεδο εισοδήματος ισορροπίας $\left(\widetilde{Y}_t^{re}\right)$ υψηλότερο ή χαμηλότερο σε σχέση με εκείνο στο οποίο οδηγούμαστε βάσει των μηχανισμών των αναθεωρούμενων $\left(\widetilde{Y}_t^{ae}\right)$ και των στατικών προσδοκιών $\left(\widetilde{Y}_t^{se}\right)$.

Δεδομένου ότι οι μηχανισμοί των στατικών και των αναθεωρούμενων προσδοκιών μας οδηγούν στο ίδιο επίπεδο του εισοδήματος ισορροπίας, θα επιχειρήσουμε να προσδιορίσουμε το πρόσημο της διαφοράς $\widetilde{Y}_t^{re} - \widetilde{Y}_t^{se}$. Πιο συγκεκριμένα αφαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (5.158) και (5.226) προκύπτει ότι:

$$\left.\begin{aligned}
\widetilde{Y}_t^{re} &= \frac{b_0 + b_2(1-\omega)\overline{\Delta R}}{1-c_1+\varphi\omega} + \frac{\varphi\omega}{d_1(1+\varphi\omega)}\frac{M_0\widetilde{m}^{t+2}}{\widetilde{m}^2 - \frac{c_1(1+v)}{1+\varphi\omega}\widetilde{m} + \frac{vc_1}{1+\varphi\omega}} \\
\widetilde{Y}_t^{se} &= \frac{b_0}{1-c_1+\varphi} + \frac{\varphi}{d_1(1+\varphi)}\frac{M_0\widetilde{m}^{t+2}}{\widetilde{m}^2 - \frac{c_1(1+v)}{1+\varphi}\widetilde{m} + \frac{vc_1}{1+\varphi}}
\end{aligned}\right\} \overset{(-)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \widetilde{Y}_t^{re} - \widetilde{Y}_t^{se} = \frac{b_0 + b_2(1-\omega)\overline{\Delta R}}{1-c_1+\varphi\omega} - \frac{b_0}{1-c_1+\varphi} + \frac{\varphi\omega}{d_1}\frac{M_0\widetilde{m}^{t+2}}{(1+\varphi\omega)\widetilde{m}^2 - c_1(1+v)\widetilde{m} + vc_1} -$$

$$-\frac{\varphi}{d_1}\frac{M_0\widetilde{m}^{t+2}}{(1+\varphi)\widetilde{m}^2 - c_1(1+v)\widetilde{m} + vc_1} =$$

$$= \frac{b_0(1-c_1) + b_0\varphi + b_2(1-c_1+\varphi)(1-\omega)\overline{\Delta R} - b_0(1-c_1) - b_0\varphi\omega}{(1-c_1+\varphi\omega)(1-c_1+\varphi)} +$$

$$+\frac{\varphi}{d_1}M_0\widetilde{m}^{t+2}\left\{\frac{\omega}{(1+\varphi\omega)\widetilde{m}^2 - c_1(1+v)\widetilde{m} + vc_1} - \frac{1}{(1+\varphi)\widetilde{m}^2 - c_1(1+v)\widetilde{m} + vc_1}\right\} =$$

$$= (1-\omega)\frac{b_0\varphi + b_2(1-c_1+\varphi)\overline{\Delta R}}{(1-c_1+\varphi\omega)(1-c_1+\varphi)} +$$

$$+\frac{\varphi}{d_1}M_0\widetilde{m}^{t+2}\frac{(\omega+\varphi\omega)\widetilde{m}^2 - c_1(1+v)\omega\,\widetilde{m} + vc_1\omega - (1+\varphi\omega)\widetilde{m}^2 + c_1(1+v)\widetilde{m} - vc_1}{\left[(1+\varphi\omega)\widetilde{m}^2 - c_1(1+v)\widetilde{m} + vc_1\right]\left[(1+\varphi)\widetilde{m}^2 - c_1(1+v)\widetilde{m} + vc_1\right]} =$$

$$= (1-\omega)\frac{b_0\varphi + b_2(1-c_1+\varphi)\overline{\Delta R}}{(1-c_1+\varphi\omega)(1-c_1+\varphi)} +$$

$$+\frac{\varphi}{d_1}M_0\widetilde{m}^{t+2}\frac{-(1-\omega)\widetilde{m}^2 + (1-\omega)c_1(1+v)\widetilde{m} - (1-\omega)vc_1}{\left[(1+\varphi\omega)\widetilde{m}^2 - c_1(1+v)\widetilde{m} + vc_1\right]\left[(1+\varphi)\widetilde{m}^2 - c_1(1+v)\widetilde{m} + vc_1\right]} =$$

$$\Rightarrow \widetilde{Y}_t^{re} - \widetilde{Y}_t^{se} = (1-\omega)\left\{\frac{b_0\varphi + b_2(1-c_1+\varphi)\overline{\Delta R}}{(1-c_1+\varphi\omega)(1-c_1+\varphi)} -\right.$$

$$\left. -\frac{\varphi M_0\widetilde{m}^{t+2}}{d_1(1+\varphi\omega)(1+\varphi)}\frac{\widetilde{m}^2 - c_1(1+v)\widetilde{m} + vc_1}{(\widetilde{m}^2 + \zeta_1\,\widetilde{m} + \zeta_0)(\widetilde{m}^2 + \delta_1\,\widetilde{m} + \delta_0)}\right\} \qquad \textbf{\textit{(5.228)}}$$

Δεδομένου ότι $\omega > 0$, $\varphi > 0$, $b_0 > 0$, $b_2 < 0$, $0 < c_1 < 1$, $M_0 > 0$, $0 < m < 1$, $d_1 > 0$, $\zeta_1 < 0$, $\zeta_0 > 0$, $\delta_1 < 0$, $\delta_0 > 0$ και $\widetilde{m} = 1 + m > 1$, από την παραπάνω σχέση γίνεται αντιληπτό ότι το πρόσημο της διαφοράς $\widetilde{Y}_t^{re} - \widetilde{Y}_t^{se}$ είναι μάλλον απροσδιόριστο. *Εάν υποθέταμε ότι ο εντός του αγκίστρου όρος συνιστά ένα θετικό μέγεθος, τότε το πρόσημο*

της διαφοράς $\widetilde{Y}_t^{re} - \widetilde{Y}_t^{se}$ *θα εξαρτιόταν από το πρόσημο της διαφοράς 1 – ω* και θα διακρίναμε μεταξύ των ακόλουθων περιπτώσεων:

(α) <u>1 – ω > 0 ή ισοδύναμα $\theta_1 < \theta_2$</u> : Στην περίπτωση που η ταχύτητα προσαρμογής της επιτοκιακής διαφοράς της περιόδου t –1 (ΔR_{t-1}) προς την τιμή ισορροπίας της $\left(\overline{\Delta R}\right)$ είναι μεγαλύτερη στην αγορά χρήματος σε σχέση με εκείνη της αγοράς προϊόντος, στην περίπτωση δηλαδή που ισχύει ότι $\theta_2 > \theta_1$, ο μηχανισμός των παλινδρομικών προσδοκιών μας οδηγεί σ' ένα υψηλότερο επίπεδο εισοδήματος ισορροπίας σε σχέση με εκείνο στο οποίο οδηγούμαστε βάσει των μηχανισμών των αναθεωρούμενων και των στατικών προσδοκιών, καθώς για 1 – ω > 0 από τη σχέση (5.228) προκύπτει ότι $\widetilde{Y}_t^{re} - \widetilde{Y}_t^{se} > 0$.

(β) <u>1 – ω < 0 ή ισοδύναμα $\theta_1 > \theta_2$</u> : Εάν η ταχύτητα προσαρμογής είναι μεγαλύτερη στην αγορά προϊόντος, εάν δηλαδή ισχύει ότι $\theta_1 > \theta_2$, τότε το εισόδημα ισορροπίας στο οποίο οδηγούμαστε βάσει του μηχανισμού των παλινδρομικών προσδοκιών είναι μικρότερο από εκείνο στο οποίο καταλήγουμε βάσει του μηχανισμού των αναθεωρούμενων ή των στατικών προσδοκιών. Και αυτό διότι για 1 – ω < 0 από τη σχέση (5.228) προκύπτει ότι $\widetilde{Y}_t^{re} - \widetilde{Y}_t^{se} < 0$.

(γ) <u>1 – ω = 0 ή ισοδύναμα $\theta_1 = \theta_2$</u> : Στην περίπτωση που η ταχύτητα προσαρμογής είναι η ίδια και στις δύο αγορές, στην περίπτωση δηλαδή που ισχύει ότι $\theta_1 = \theta_2$, και οι τρεις μηχανισμοί διαμόρφωσης των προσδοκιών μας οδηγούν στο ίδιο επίπεδο του εισοδήματος ισορροπίας. Και αυτό διότι για 1 – ω = 0 από τη σχέση (5.228) προκύπτει ότι $\widetilde{Y}_t^{re} - \widetilde{Y}_t^{se} = 0$ ή ισοδύναμα $\widetilde{Y}_t^{re} = \widetilde{Y}_t^{se}$

Το ερώτημα που ανακύπτει βέβαια στο σημείο αυτό έχει να κάνει με τις προϋποθέσεις υπό τις οποίες ο εντός των αγκίστρων όρος της σχέσης (5.228) συνιστά ένα θετικό μέγεθος. Στο ερώτημα αυτό θα προσπαθήσουμε να απαντήσουμε υποθέτοντας ότι η τιμή ισορροπίας της επιτοκιακής διαφοράς ισούται με το μηδέν, υποθέτοντας δηλαδή ότι $\overline{\Delta R} = 0$. Βάσει της υπόθεσης αυτής η σχέση (5.228) τροποποιείται και παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$\widetilde{Y}_t^{se} = (1-\omega)\left\{\frac{b_0\varphi}{(1-c_1+\varphi\omega)(1-c_1+\varphi)} - \right.$$

$$\left. - \frac{\varphi M_0 \widetilde{m}^{t+2}}{d_1(1+\varphi\omega)(1+\varphi)} \frac{\widetilde{m}^2 - c_1(1+v)\widetilde{m} + vc_1}{\left(\widetilde{m}^2 + \zeta_1 \widetilde{m} + \zeta_0\right)\left(\widetilde{m}^2 + \delta_1 \widetilde{m} + \delta_0\right)}\right\} \qquad \textbf{\textit{(5.228.1)}}$$

Όπως διαπιστώνουμε από την παραπάνω σχέση, το πρόσημο της διαφοράς $\widetilde{Y}_t^{re} - \widetilde{Y}_t^{se}$ εξαρτάται από το πρόσημο των ακόλουθων κλασμάτων:

$$\Omega_1 = \frac{b_0\varphi}{(1-c_1+\varphi\omega)(1-c_1+\varphi)} \qquad (5.229.1)$$

$$\Omega_2 = \frac{\varphi\, M_0 \tilde{m}^{t+2}}{d_1(1+\varphi\omega)(1+\varphi)} \qquad (5.229.2)$$

&

$$\Omega_3 = \frac{\tilde{m}^2 - c_1(1+v)\tilde{m} + vc_1}{(\tilde{m}^2+\zeta_1\,\tilde{m}+\zeta_0)(\tilde{m}^2+\delta_1\,\tilde{m}+\delta_0)} \qquad (5.229.3)$$

Δεδομένου ότι $b_0 > 0$, $\varphi > 0$, $\omega > 0$, $0 < c_1 < 1$, $M_0 > 0$, $0 < m < 1$ & $d_1 > 0$, τα μεγέθη Ω_1 και Ω_2 είναι θετικά ορισμένα[44]. Το πρόσημο του μεγέθους Ω_3 εξαρτάται από το πρόσημο των πολυωνύμων $P_9(\tilde{m}) = \tilde{m}^2 - c_1(1+v)\tilde{m} + vc_1$, $P_6(\tilde{m}) = \tilde{m}^2 + \delta_1\,\tilde{m} + \delta_0$ & $P_8(\tilde{m}) = \tilde{m}^2 + \zeta_1\,\tilde{m} + \zeta_0$. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, το πολυώνυμο $P_6(\tilde{m})$ θα είναι οπωσδήποτε θετικά ορισμένο εφόσον ο επιταχυντής (v) παίρνει τιμές στο διάστημα (v_1^{se}, v_2^{se}), όπου $v_{2,1}^{se} = \left(\sqrt{u} \pm \sqrt{u-1}\right)^2 = \left(\sqrt{(1+\varphi)/c_1} \pm \sqrt{(1-c_1+\varphi)/c_1}\right)^2$, ενώ το πολυώνυμο $P_8(\tilde{m})$ θα είναι και αυτό οπωσδήποτε θετικά ορισμένο εφόσον ο επιταχυντής παίρνει τιμές στο διάστημα (v_1^{re}, v_2^{re}), όπου $v_{2,1}^{re} = \left(\sqrt{(1+\varphi\omega)/c_1} \pm \sqrt{(1-c_1+\varphi\omega)/c_1}\right)^2$.

Το πολυώνυμο $P_9(\tilde{m})$ θα αποτελεί οπωσδήποτε ένα θετικό μέγεθος εάν η διακρίνουσα (Δ_{10}) της εξίσωσης $P_9(\tilde{m}) = 0$ είναι αρνητική, εάν δηλαδή ισχύει ότι:

$$\Delta_{10} = c_1^2(1+v) - 4\,vc_1 = c_1^2\left[v^2 + 2\left(1-\frac{2}{c_1}\right)v + 1\right] < 0 \qquad (5.230)$$

Όπως προκύπτει από την παραπάνω σχέση, το πρόσημο της διακρίνουσας εξαρτάται από το πρόσημο του ακόλουθου πολυωνύμου:

$$P_2(v) = v^2 + 2\left(1-\frac{2}{c_1}\right)v + 1 \qquad (5.231)$$

Δεδομένου ότι σχέση (5.231) περιγράφει ένα πολυώνυμο δευτέρου βαθμού ως προς v, θα μπορούσαμε να προσδιορίσουμε ένα διάστημα τιμών του επιταχυντή εντός

---

[44] Εάν δεν πραγματοποιούσαμε την υπόθεση ότι $\overline{\Delta R} = 0$, το μέγεθος Ω_1 θα ήταν της μορφής $\Omega_1^* = \frac{b_0\varphi + b_2(1-c_1+\varphi)\overline{\Delta R}}{(1-c_1+\varphi\omega)(1-c_1+\varphi)}$ και το πρόσημό του θα ήταν απροσδιόριστο. Το Ω_1^* θα αποτελεί οπωσδήποτε ένα θετικό πρόσημο στην περίπτωση που ο συντελεστής b_2 και η τιμή $\overline{\Delta R}$ έχουν το ίδιο πρόσημο. Εάν δεν έχουν το ίδιο πρόσημο τότε το μέγεθος Ω_1^* θα είναι θετικά ορισμένο μόνο εφόσον ισχύει ότι $b_0\varphi > -b_2(1-c_1+\varphi)\overline{\Delta R}$, κάτι το οποίο είναι μάλλον αναμενόμενο από οικονομικής απόψεως.

του οποίου θα ισχύει ότι $\Delta_{10} <,=,> 0$. Κάτι τέτοιο θα είναι βέβαια εφικτό μόνο εφόσον η διακρίνουσα (Δ_{11}) της εξίσωσης P(v) = 0 συνιστά ένα θετικό μέγεθος. Το γεγονός ότι

$$\Delta_{11} = 4\left[\left(1-\frac{2}{c_1}\right)^2 - 1\right] = 4\left[\left(1-\frac{2}{c_1}-1\right)\left(1-\frac{2}{c_1}+1\right)\right] = 4\left\{\left(-\frac{2}{c_1}\right)\left[-\frac{2(1-c_1)}{c_1}\right]\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \Delta_{11} = \frac{16(1-c_1)}{c_1^2} > 0 \qquad \textbf{\textit{(5.232)}}$$

μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η εξίσωση $P_2(v) = 0$ θα έχει δύο πραγματικές και διακριτές ρίζες $(\tilde{v}_{1,2})$, οι οποίες και θα ορίζουν ένα διάστημα τιμών εντός του οποίου θα έχουμε ότι $P_2(v)$, $\Delta_{10} < 0$ και κατά συνέπεια θα ισχύει ότι $P_9(\tilde{m}) > 0$. Τα μεγέθη των δύο αυτών ριζών έχουν ως ακολούθως:

$$\tilde{v}_{2,1} = \frac{-2(1-2/c_1) \pm \sqrt{\Delta_{11}}}{2} = \frac{-2\left(\frac{c_1-2}{c_1}\right) \pm \sqrt{\frac{16(1-c_1)}{c_1^2}}}{2} =$$

$$= \frac{-2\left(\frac{c_1-2}{c_1}\right) \pm \frac{4}{c_1}\sqrt{1-c_1}}{2} = \frac{1}{c_1}\left(2-c_1 \pm 2\sqrt{1-c_1}\right) = \frac{1}{c_1}\left(1-c_1 \pm 2\sqrt{1-c_1}+1\right) =$$

$$= \frac{1}{\left(\sqrt{c_1}\right)^2}\left[\left(\sqrt{1-c_1}\right)^2 \pm 2\sqrt{1-c_1}+1\right] \Rightarrow \begin{cases} \tilde{v}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{c_1}} - \sqrt{\frac{1-c_1}{c_1}}\right)^2 > 0 & \textbf{\textit{(5.233.1)}} \\ \tilde{v}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{c_1}} + \sqrt{\frac{1-c_1}{c_1}}\right)^2 > 0 & \textbf{\textit{(5.233.2)}} \end{cases}$$

Προκειμένου να προσδιορίσουμε εκείνο το διάστημα τιμών του επιταχυντή για το οποίο οπωσδήποτε ισχύει ότι $P_i(\tilde{m}) > 0$, $i = 6, 8, 10$, θα πρέπει να βρούμε την τομή των διαστημάτων (v_1^{se}, v_2^{se}), (v_1^{re}, v_2^{re}) και $(\tilde{v}_1, \tilde{v}_2)$. Μπορεί να δειχθεί[45] ότι τα πολυώνυμα $P_i(\tilde{m}) > 0$, $i = 6, 8, 10$, είναι θετικά ορισμένα εφόσον ο επιταχυντής παίρνει τιμές στο διάστημα $(\tilde{v}_1, \tilde{v}_2)$. Ως εκ τούτου για $v \in (\tilde{v}_1, \tilde{v}_2)$, ο εβρισκόμενος εντός του αγκίστρου της σχέσεως (5.228.1) όρος θα είναι θετικά ορισμένος εφόσον ισχύει ότι $\Omega_1 > \Omega_2\ \Omega_3$.

[45] Η θεμελίωση της συγκεκριμένης πρότασης πραγματοποιείται στα πλαίσια του παραρτήματος Ε

5.3.3 Επηρεασμός του εισοδήματος ισορροπίας από μεταβολές των συνιστωσών παραμέτρων του.

Στην παρούσα ενότητα θα επιχειρήσουμε να διαπιστώσουμε τις επιπτώσεις μίας μεταβολής του μεγέθους ενός εκ των σταθερών συντελεστών του υποδείγματος, όπως για παράδειγμα της οριακής ροπής προς κατανάλωση (c_1), του επιταχυντή (v), του ρυθμού νομισματικής επέκτασης (m) κ.τ.λ., πάνω στο επίπεδο του εισοδήματος ισορροπίας το οποίο προσδιορίσαμε στα πλαίσια του μηχανισμού των παλινδρομικών προσδοκιών, υποθέτοντας ότι οι τιμές των υπολοίπων συντελεστών του υποδείγματος παραμένουν αμετάβλητες και ότι οι αγορές αγαθών και χρήματος βρίσκονται σε κατάσταση βραχυχρόνιας ισορροπίας.

Με άλλα λόγια θα επιχειρήσουμε να προσδιορίσουμε το πρόσημο της μερικής παραγώγου του εισοδήματος ισορροπίας $\left(\tilde{Y}_t^{re}\right)$, όπως αυτό περιγράφεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\tilde{Y}_t^{re} = \frac{b_0 + b_2(1-\omega)\overline{\Delta R}}{1 - c_1 + \varphi\omega} + \frac{\varphi\omega}{d_1}\frac{M_0\tilde{m}^{t+2}}{(1+\varphi\omega)\tilde{m}^2 - c_1(1+v)\tilde{m} + vc_1} \qquad \textit{(5.226.1)}$$

ως προς κάθε μία από τις παραμέτρους που το συνιστούν υποθέτοντας ότι $\overline{\Delta R} = 0$ [46].

Οι συναρτήσεις των επενδύσεων και της συνολικής ζήτησης χρήματος, όπως αυτές διαμορφώνονται στα πλαίσια του μηχανισμού των παλινδρομικών προσδοκιών και μετά από την αντικατάσταση της σχέσης (5.188.1) στην (3.6) και των σχέσεων (5.188.2) και (3.2) στη σχέση (3.3), έχουν ως ακολούθως:

$$I_t = \left(b_0 + b_2\theta_1\,\overline{\Delta R} + vc_1\,\Delta Y_{t-1}\right) + b_2(1-\theta_1)\Delta R_{t-1} \qquad \textit{(5.234)}$$

&

$$M_t^d = \left(d_1 Y_t + d_2\theta_2\,\overline{\Delta R}\right) + d_2(1-\theta_2)\Delta R_{t-1} \qquad \textit{(5.235)}$$

ή ισοδύναμα

$$I_t\big|_{\overline{\Delta R}=0} = b_0 + vc_1\,\Delta Y_{t-1} + b_2(1-\theta_1)\Delta R_{t-1} \qquad \textit{(5.234.1)}$$

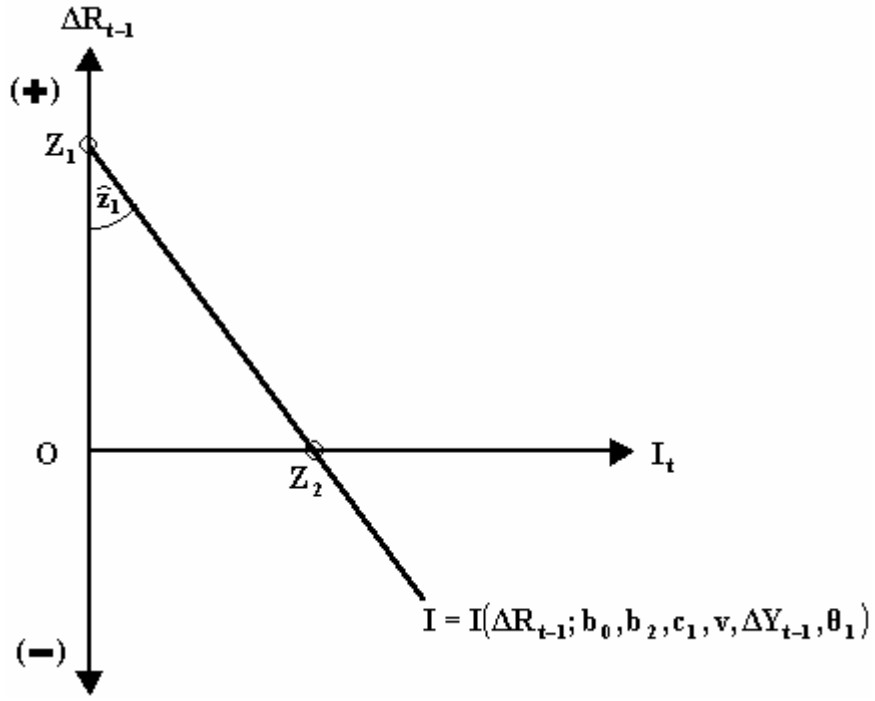
&

$$M_t^d\big|_{\overline{\Delta R}=0} = d_1 Y_t + d_2(1-\theta_2)\Delta R_{t-1} \qquad \textit{(5.235.1)}$$

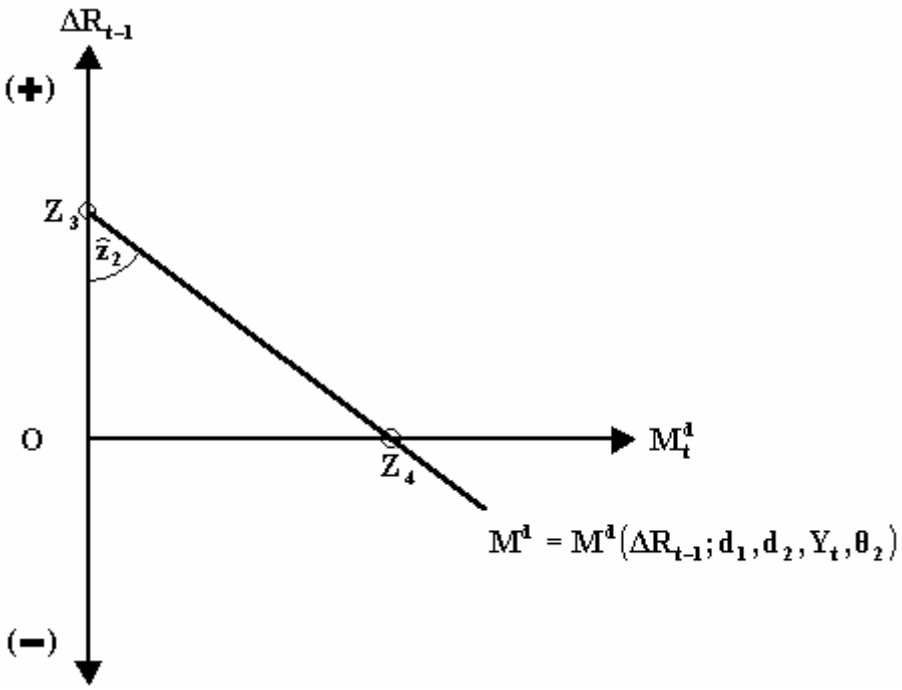
όπου $b_0 > 0$, $b_2 < 0$, $v > 0$, $0 < c_1 < 1$, $d_1 > 0$, $d_2 < 0$, $0 < \theta_i < 1$ με $i = 1$, 2.

---

[46] Ο λόγος για τον οποίο προχωρούμε σ' αυτήν την απλουστευτική υπόθεση είναι η αποφυγή των προβλημάτων που συνδέονται με το πρόσημο του σταθερού όρου της σχέσης (5.226.1). Οι προϋποθέσεις που θα πρέπει να ικανοποιούνται ώστε $\overline{\Delta R} = 0$ διερευνώνται στα πλαίσια του παραρτήματος Θ.


ΔR_{t-1}
(+)
Z_1
$\hat{z}_1$
O
Z_2
I_t
$I = I(\Delta R_{t-1}; b_0, b_2, c_1, v, \Delta Y_{t-1}, \theta_1)$
(−)

Δ – 5.24


ΔR_{t-1}
(+)
Z_3
$\hat{z}_2$
O
Z_4
M_t^d
$M^d = M^d(\Delta R_{t-1}; d_1, d_2, Y_t, \theta_2)$
(−)

Δ – 5.25

Στο γράφημα Δ – 5.24 και μέσω της καμπύλης $I = I(\Delta R_{t-1};\ b_0, b_2, c_1, v, \Delta Y_{t-1}, \theta_1)$ παρουσιάζονται, με δεδομένες τις τιμές των b_0 , b_2 , c_1 , v , ΔY_{t-1} , θ_1 , οι επενδύσεις ως αρνητική συνάρτηση της επιτοκιακής διαφοράς ΔR_{t-1} και. Η καμπύλη I τέμνει τον κατακόρυφο άξονα στο σημείο Z_1 και τον οριζόντιο άξονα στο σημείο Z_2, όπου $Z_1 = -(b_0 + vc_1\ \Delta Y_{t-1})/b_2(1-\theta_1) > 0$ [47] και $Z_2 = b_0 + vc_1\ \Delta Y_{t-1} > 0$. Η κλίση της εν λόγω καμπύλης δίνεται από την εφαπτομένη της γωνίας $\hat{z}_1$ και ισούται με:

$$\varepsilon\varphi\hat{z}_1 = -b_2(1-\theta_1) \qquad \textit{(5.236)}$$

Όπως εύκολα μπορεί να διαπιστώσει κανείς, οι παράμετροι b_0, v & c_1 επηρεάζουν τη θέση της καμπύλης I ενώ οι παράμετροι b_2 και θ_1 επηρεάζουν την κλίση της συγκεκριμένης καμπύλης. Πιο συγκεκριμένα μία αύξηση (μείωση) του μεγέθους των παραμέτρων b_0, v και c_1 θα έχει ως αποτέλεσμα την παράλληλη μετατόπιση της καμπύλης I προς τα πάνω και δεξιά (προς τα κάτω και αριστερά). Από την άλλη μεριά η αύξηση (μείωση) του μεγέθους της παραμέτρου b_2 θα έχει ως συνέπεια την δεξιόστροφη (αριστερόστροφη) περιστροφή της καμπύλης I περί του σημείου Z_2, ενώ η αύξηση (μείωση) της παραμέτρου θ_1 θα έχει ως αποτέλεσμα την αριστερόστροφη (δεξιόστροφη) περιστροφή της καμπύλης των επενδύσεων περί του σημείου Z_2.

Στο γράφημα Δ – 5.25 και μέσω της καμπύλης $M^d = M^d(\Delta R_{t-1}; d_1, d_2, Y_t, \theta_2)$ παρουσιάζεται η συνολική ζήτηση χρήματος ως αρνητική συνάρτηση της επιτοκιακής διαφοράς ΔR_{t-1} και με δεδομένες τις τιμές των παραμέτρων d_1, d_2 και θ_2. Η εν λόγω καμπύλη τέμνει τον κατακόρυφο άξονα στο σημείο $Z_3 = -d_1 Y_t / d_2(1-\theta_2) > 0$, τον οριζόντιο άξονα στο σημείο $Z_4 = d_1 Y_t > 0$ και η κλίση της δίνεται από την εφαπτομένη της γωνίας $\hat{z}_2$ η οποία και ισούται με:

$$\varepsilon\varphi\hat{z}_2 = -d_2(1-\theta_2) \qquad \textit{(5.237)}$$

Όπως γίνεται αντιληπτό η θέση της καμπύλης M^d επηρεάζεται από το μέγεθος της παραμέτρου d_1 ενώ η κλίση της επηρεάζεται από τους συντελεστές d_2 και θ_2. Πιο συγκεκριμένα μία αύξηση (μείωση) της τιμής του συντελεστή d_1 θα έχει ως συνέπεια την παράλληλη μετατόπιση της καμπύλης M^d προς τα επάνω και δεξιά (προς τα κάτω και αριστερά). Από την άλλη μεριά η αύξηση (μείωση) του μεγέθους της παραμέτρου d_2 θα προκαλέσει την δεξιόστροφη (αριστερόστροφη) περιστροφή της καμπύλης M^d περί του σημείου Z_4, ενώ η αύξηση (μείωση) της τιμής του συντελεστή θ_2 θα έχει ως αποτέλεσμα την αριστερόστροφη (δεξιόστροφη) περιστροφή της καμπύλης της συνολικής ζήτησης χρήματος περί του σημείου Z_4.

Στη συνέχεια, και με τη βοήθεια της ανάλυσης που προηγήθηκε, θα προσδιορίσουμε τις επιπτώσεις μίας μόνιμης μεταβολής του μεγέθους μόνο μίας εκ των συνιστωσών παραμέτρων του εισοδήματος ισορροπίας επί του επιπέδου του, ξεκινώντας από εκείνη των αυτόνομων επενδύσεων.

(α) *Οι αυτόνομες επενδύσεις (b_0)*

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, μία μόνιμη αύξηση (μείωση) του ύψους μόνο των αυτόνομων επενδύσεων αναμένεται να οδηγήσει στην αύξηση (μείωση) της συνο-

[47] Δεδομένου ότι το εισόδημα αυξάνεται διαχρονικά, θεωρούμε και εδώ ότι $\Delta Y_{t-1} > 0$.

λικής ζήτησης και κατ' επέκταση του εισοδήματος ισορροπίας. Με άλλα λόγια θα αναμένουμε ότι:

$$\frac{\partial \widetilde{Y}_t^{re}}{\partial b_0} > 0$$

Παίρνοντας τη μερική παράγωγο της σχέσης (5.226) ως προς b_0 βρίσκουμε ότι:

$$\frac{\partial \widetilde{Y}_t^{re}}{\partial b_0} = \frac{1}{1 - c_1 + \varphi\omega} > 0 \qquad \textbf{\textit{(5.238)}}$$

Δεδομένου ότι $0 < c_1 < 1$, $\varphi > 0$ και $\omega > 0$, ***η παραπάνω σχέση επιβεβαιώνει την ύπαρξη θετικής σχέσης μεταξύ των αυτόνομων επενδύσεων και του εισοδήματος ισορροπίας***.

(β) ***Η οριακή ροπή προς κατανάλωση (c_1)***

Μία μόνιμη αύξηση (μείωση) μόνο της τιμής της οριακής ροπής προς κατανάλωση θα προκαλέσει την αύξηση (μείωση) της κατανάλωσης και της συνολικής ζήτησης, οδηγώντας έτσι και στην αύξηση (μείωση) του εισοδήματος ισορροπίας. Με άλλα λόγια αναμένεται η ύπαρξη θετικής σχέσης μεταξύ του εισοδήματος ισορροπίας $\left(\widetilde{Y}_t^{re}\right)$ και της οριακής ροπής προς κατανάλωση (c_1) ή σε μαθηματικούς όρους:

$$\frac{\partial \widetilde{Y}_t^{re}}{\partial c_1} > 0$$

Η παραπάνω μερική παράγωγος, όπως αυτή προκύπτει από τη σχέση (5.226.1), έχει ως ακολούθως:

$$\frac{\partial \widetilde{Y}_t^{re}}{\partial c_1} = -\frac{b_0 + b_2(1-\omega)\overline{\Delta R}}{(1 - c_1 + \varphi\omega)^2} \frac{\partial(1 - c_1 + \varphi\omega)}{\partial c_1} -$$

$$-\frac{\varphi\omega}{d_1} \frac{M_0 \widetilde{m}^{t+2}}{\left[(1+\varphi\omega)\widetilde{m}^2 - c_1(1+v)\widetilde{m} + vc_1\right]^2} \frac{\partial\left[(1+\varphi\omega)\widetilde{m}^2 - c_1(1+v)\widetilde{m} + vc_1\right]}{\partial c_1} =$$

$$= \frac{b_0 + b_2(1-\omega)\overline{\Delta R}}{(1 - c_1 + \varphi\omega)^2} - \frac{\varphi\omega}{d_1(1+\varphi\omega)^2} \frac{M_0 \widetilde{m}^{t+2}\left[0 - (1+v)(1+m) + v\right]}{\left[\widetilde{m}^2 - \frac{c_1(1+v)}{1+\varphi\omega}\widetilde{m} + \frac{vc_1}{1+\varphi\omega}\right]^2} =$$

$$= \frac{b_0 + b_2(1-\omega)\overline{\Delta R}}{(1-c_1+\varphi\omega)^2} - \frac{\varphi\omega}{d_1(1+\varphi\omega)^2}\frac{M_0\tilde{m}^{t+2}\left[-(1+m)-v(1+m-1)\right]}{\left(\tilde{m}^2+\zeta_1\tilde{m}+\zeta_0\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\tilde{Y}_t^{re}}{\partial c_1} = \frac{b_0 + b_2(1-\omega)\overline{\Delta R}}{(1-c_1+\varphi\omega)^2} + \frac{\varphi\omega}{d_1(1+\varphi\omega)^2}\frac{M_0(\tilde{m}+v\,m)\tilde{m}^{t+2}}{\left(\tilde{m}^2+\zeta_1\tilde{m}+\zeta_0\right)^2} \qquad \textbf{\textit{(5.239)}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\frac{\partial\tilde{Y}_t^{re}}{\partial c_1}\right|_{\overline{\Delta R}=0} = \frac{b_0}{(1-c_1+\varphi\omega)^2} + \frac{\varphi\omega}{d_1(1+\varphi\omega)^2}\frac{M_0(\tilde{m}+v\,m)\tilde{m}^{t+2}}{\left(\tilde{m}^2+\zeta_1\tilde{m}+\zeta_0\right)^2} > 0 \qquad \textbf{\textit{(5.239.1)}}$$

Δεδομένου ότι $b_0 > 0$, $\varphi > 0$, $\omega > 0$, $M_0 > 0$, $v > 0$, $0 < m < 1$ και $\tilde{m} = 1 + m > 1$, ***η σχέση (5.239.1) επιβεβαιώνει την ύπαρξη θετικής σχέσης μεταξύ του εισοδήματος ισορροπίας και της οριακής ροπής προς κατανάλωση***.

(γ) ***Ο συντελεστής b_2***

Μία μεταβολή της τιμής του συντελεστή b_2 θα επηρεάσει, κατ' αρχήν, το ύψος των επενδύσεων. Προκειμένου να προσδιορίσουμε την κατεύθυνση προς την οποία θα κινηθούν οι επενδύσεις δεν έχουμε παρά να υπολογίσουμε το πρόσημο της μερικής παραγώγου της συνάρτησης των επενδύσεων ως προς b_2. Το μέγεθος αυτής της μερικής παραγώγου προκύπτει από τη σχέση (5.234) και έχει ως ακολούθως:

$$\frac{\partial I_t}{\partial b_2} = \theta_1\,\overline{\Delta R} + (1-\theta_1)\Delta R_{t-1} \rightarrow \left.\frac{\partial I_t}{\partial b_2}\right|_{\overline{\Delta R}=0} = (1-\theta_1)\Delta R_{t-1} \qquad \textbf{\textit{(5.240)}}$$

Από την παραπάνω σχέση, και δεδομένου ότι $0 < \theta_1 < 1$ ή $0 < 1 - \theta_1 < 1$, εύκολα προκύπτει ότι το πρόσημο της μερικής παραγώγου $\left.(\partial I_t/\partial b_2)\right|_{\overline{\Delta R}=0}$ είναι απροσδιόριστο και εξαρτάται από το πρόσημο της επιτοκιακής διαφοράς ΔR_{t-1}. Ως εκ τούτου απροσδιόριστη αναμένεται να είναι η επίδραση μίας μεταβολής του συντελεστή b_2 και επί του επιπέδου του εισοδήματος ισορροπίας $\tilde{Y}_t^{re}$.

Η μερική παράγωγος του εισοδήματος ισορροπίας ως προς το συντελεστή b_2 έχει ως ακολούθως:

$$\frac{\partial\tilde{Y}_t^{re}}{\partial b_2} = \frac{(1-c_1+\varphi\omega)\dfrac{\partial\left[b_0 + b_2(1-\omega)\overline{\Delta R}\right]}{\partial b_2} - \left[b_0 + b_2(1-\omega)\overline{\Delta R}\right]\dfrac{\partial\left[(1-c_1+\varphi\omega)\right]}{\partial\varphi}\dfrac{\partial\varphi}{\partial b_2}}{(1-c_1+\varphi\omega)^2} +$$

$$+\frac{M_0\tilde{m}^{t+2}}{(1+\varphi\omega)\tilde{m}^2-c_1(1+v)\tilde{m}+vc_1}\frac{\partial(\varphi\omega/d_1)}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial b_2}-$$

$$-\frac{\varphi\omega}{d_1}\frac{M_0\tilde{m}^{t+2}}{\left[(1+\varphi\omega)\tilde{m}^2-c_1(1+v)\tilde{m}+vc_1\right]^2}\frac{\partial\left[(1+\varphi\omega)\tilde{m}^2-c_1(1+v)\tilde{m}+vc_1\right]}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial b_2}=$$

$$=\frac{(1-c_1+\varphi\omega)\left[0+(1-\omega)\overline{\Delta R}\right]-\left[b_0+b_2(1-\omega)\overline{\Delta R}\right]\omega\frac{d_1}{d_2}}{(1-c_1+\varphi\omega)^2}+$$

$$+\frac{M_0\tilde{m}^{t+2}}{(1+\varphi\omega)\tilde{m}^2-c_1(1+v)\tilde{m}+vc_1}\frac{\omega}{d_1}\frac{d_1}{d_2}-$$

$$-\frac{\varphi\omega}{d_1}\frac{M_0\tilde{m}^{t+2}}{\left[(1+\varphi\omega)\tilde{m}^2-c_1(1+v)\tilde{m}+vc_1\right]^2}\left[\frac{\partial(1+\varphi\omega)}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial b_2}\tilde{m}^2-0+0\right]=$$

$$=\frac{-\frac{b_0d_1\omega}{d_2}+(1-c_1+\varphi\omega-\varphi\omega)(1-\omega)\overline{\Delta R}}{(1-c_1+\varphi\omega)^2}+$$

$$+M_0\tilde{m}^{t+2}\left\{\frac{1}{(1+\varphi\omega)\tilde{m}^2-c_1(1+v)\tilde{m}+vc_1}\frac{\omega}{d_2}\right.$$

$$\left.-\frac{\varphi\omega}{d_1}\frac{1}{\left[(1+\varphi\omega)\tilde{m}^2-c_1(1+v)\tilde{m}+vc_1\right]^2}\left(\omega\frac{d_1}{d_2}\tilde{m}^2\right)\right\}=$$

$$=\frac{-b_0\varphi\omega/b_2+(1-c_1)(1-\omega)\overline{\Delta R}}{(1-c_1+\varphi\omega)^2}+$$

$$+\frac{\omega}{d_2}M_0\tilde{m}^{t+2}\left\{\frac{1}{(1+\varphi\omega)\tilde{m}^2-c_1(1+v)\tilde{m}+vc_1}-\right.$$

$$\left.-\frac{\varphi\omega\,\tilde{m}^2}{\left[(1+\varphi\omega)\tilde{m}^2-c_1(1+v)\tilde{m}+vc_1\right]^2}\right\}=$$

$$= \frac{-b_0\varphi\omega/b_2 + (1-c_1)(1-\omega)\overline{\Delta R}}{(1-c_1+\varphi\omega)^2} +$$

$$+ \frac{\omega}{d_2} M_0 \tilde{m}^{t+2} \left\{ \frac{(1+\varphi\omega)\tilde{m}^2 - c_1(1+v)\tilde{m} + vc_1 - \varphi\omega\,\tilde{m}^2}{\left[(1+\varphi\omega)\tilde{m}^2 - c_1(1+v)\tilde{m} + vc_1\right]^2} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \tilde{Y}_t^{re}}{\partial b_2} = \frac{-b_0\varphi\omega/b_2 + (1-c_1)(1-\omega)\overline{\Delta R}}{(1-c_1+\varphi\omega)^2} +$$

$$+ \frac{\omega M_0 \tilde{m}^{t+2}}{d_2} \frac{\tilde{m}^2 - c_1(1+v)\tilde{m} + vc_1}{(1+\varphi\omega)^2(\tilde{m}^2 + \zeta_1\tilde{m} + \zeta_0)^2} \qquad \textbf{\textit{(5.241)}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\frac{\partial \tilde{Y}_t^{re}}{\partial b_2}\right|_{\overline{\Delta R}=0} = \underbrace{\frac{-b_0\varphi\omega}{b_2(1-c_1+\varphi\omega)^2}}_{(+)} + \frac{\overbrace{\omega M_0 \tilde{m}^{t+2}}^{(+)} \left[\tilde{m}^2 - c_1(1+v)\tilde{m} + vc_1\right]}{\underbrace{d_2}_{(-)} \underbrace{(1+\varphi\omega)^2(\tilde{m}^2 + \zeta_1\tilde{m} + \zeta_0)^2}_{(+)}} \qquad \textbf{\textit{(5.241.1)}}$$

Δεδομένου ότι $b_0 > 0$, $b_2 < 0$, $\omega > 0$, $M_0 > 0$, $d_2 < 0$, $0 < c_1 < 1$, $v > 0$, $0 < m < 1$ και $\tilde{m} = 1 + m > 1$, από τη σχέση (5.241.1) γίνεται αντιληπτό ***ότι το πρόσημο της μερικής παραγώγου*** $\left(\partial Y_{re}^* / \partial b_2\right)_{\overline{\Delta R}=0}$ ***είναι απροσδιόριστο*** και εξαρτάται από το πρόσημο του πολυωνύμου[48] $P_9(\tilde{m}) = \tilde{m}^2 - c_1(1+v)\tilde{m} + vc_1$.

(δ) *Ο συντελεστής d_1*

Η μεταβολή της τιμής μόνο του συντελεστή d_1 θα επηρεάσει την ισορροπία που διαμορφώνεται στην αγορά χρήματος. Προκειμένου να διαπιστώσουμε την κατεύθυνση προς την οποία θα κινηθεί το ύψος της επιτοκιακής διαφοράς για την οποία η αγορά χρήματος βρίσκεται σε ισορροπία, δεν έχουμε παρά να προσδιορίσουμε το πρόσημο της μερικής παραγώγου της σχέσης (5.190) ως προς d_1. Δεδομένου ότι:

$$\frac{\partial \Delta R_{t-1}}{\partial d_1} = -\frac{Y_t}{d_2\omega_2} > 0 \qquad \textbf{\textit{(5.242)}}$$

---

[48] Υπενθυμίζουμε ότι το πολυώνυμο $P_9(\tilde{m})$ είναι οπωσδήποτε θετικά ορισμένο εφόσον ο επιταχυντής κινείται στο διάστημα $(\tilde{v}_1, \tilde{v}_2)$, όπου $\tilde{v}_{2,1} = \left(1/\sqrt{c_1} \pm \sqrt{(1-c_1)/c_1}\right)^2$

μία μόνιμη αύξηση (μείωση) της τιμής του συντελεστή d_1 αναμένεται να οδηγήσει στην αύξηση (μείωση) της επιτοκιακής διαφοράς για την οποία η αγορά χρήματος βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας. Ως αποτέλεσμα, οι επενδύσεις θα μειωθούν (αυξηθούν) προκαλώντας περαιτέρω τόσο τη μείωση (αύξηση) της συνολικής ζήτησης όσο και του εισοδήματος ισορροπίας. Με άλλα λόγια αναμένεται η ύπαρξη αρνητικής σχέσης μεταξύ του συντελεστή d_1 και του εισοδήματος ισορροπίας $\left(\tilde{Y}_t^{re}\right)$.

Προκειμένου να επιβεβαιώσουμε ή να απορρίψουμε την παραπάνω θέση, θα υπολογίσουμε το πρόσημο της μερικής παραγώγου του εισοδήματος ισορροπίας ως προς d_1, το μέγεθος της οποίας έχει ως ακολούθως:

$$\frac{\partial \tilde{Y}_t^{re}}{\partial d_1} = -\frac{b_0 + b_2(1-\omega)\overline{\Delta R}}{(1-c_1+\varphi\omega)^2}\frac{\partial(1-c_1+\varphi\omega)}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial d_1} -$$

$$-\frac{b_2\omega}{d_2}\frac{M_0\tilde{m}^{t+2}}{\left[(1+\varphi\omega)\tilde{m}^2 - c_1(1+v)\tilde{m} + vc_1\right]^2}\frac{\partial\left[(1+\varphi\omega)\tilde{m}^2 - c_1(1+v)\tilde{m} + vc_1\right]}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial d_1} =$$

$$= -\frac{b_0 + b_2(1-\omega)\overline{\Delta R}}{(1-c_1+\varphi\omega)^2}\frac{b_2\omega}{d_2} - \frac{b_2\omega}{d_2}\frac{M_0\tilde{m}^{t+2}}{}\left(\omega\tilde{m}^2 - 0 + 0\right)\frac{b_2}{d_2} \Rightarrow$$

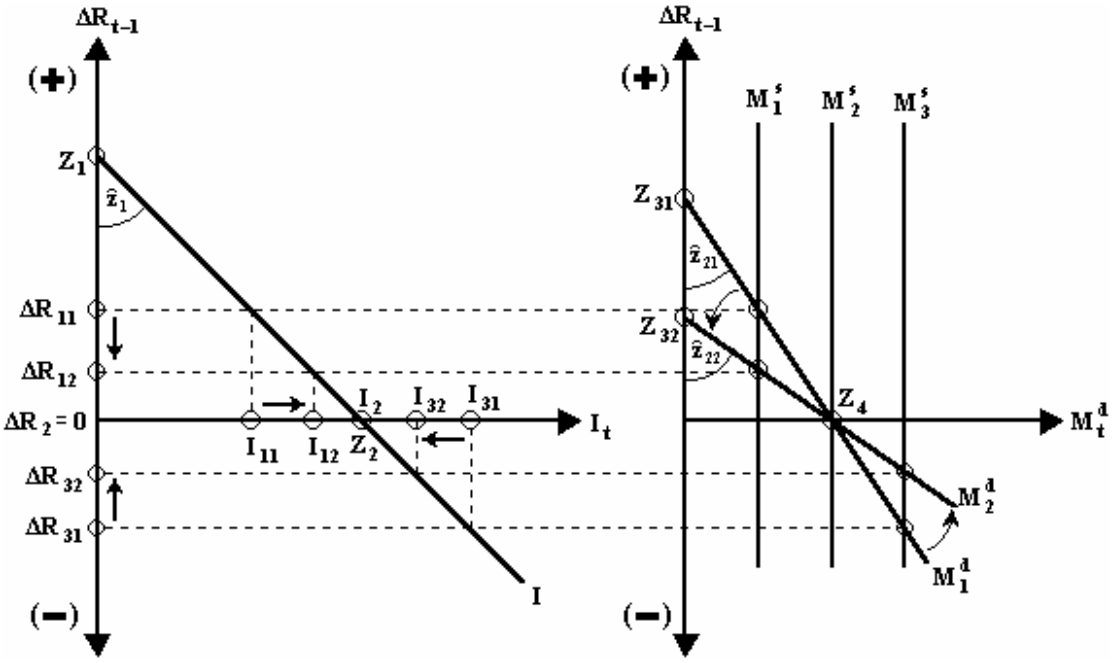
$$\Rightarrow \frac{\partial \tilde{Y}_t^{re}}{\partial d_1} = -\frac{\varphi\omega}{d_1}\left\{\frac{b_0 + b_2(1-\omega)\overline{\Delta R}}{(1-c_1+\varphi\omega)^2} + \frac{\varphi\omega}{d_1}\frac{M_0\tilde{m}^{t+4}}{(1+\varphi\omega)^2\left(\tilde{m}^2+\zeta_1\tilde{m}+\zeta_0\right)^2}\right\} \qquad \textbf{\textit{(5.243)}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\frac{\partial \tilde{Y}_t^{re}}{\partial d_1}\right|_{\overline{\Delta R}=0} = -\underbrace{\frac{\varphi\omega}{d_1}}_{(+)}\left\{\underbrace{\frac{b_0}{(1-c_1+\varphi\omega)^2}}_{(+)} + \underbrace{\frac{\varphi\omega}{d_1}\frac{M_0\tilde{m}^{t+4}}{(1+\varphi\omega)^2\left(\tilde{m}^2+\zeta_1\tilde{m}+\zeta_0\right)^2}}_{(+)}\right\} < 0 \quad \textbf{\textit{(5.243.1)}}$$

Η παραπάνω σχέση επιβεβαιώνει την ύπαρξη αρνητικής σχέσης μεταξύ του συντελεστή d_1 και του εισοδήματος ισορροπίας, καθώς ισχύει ότι: $\tilde{m} = 1 + m > 1$, $\varphi > 0$, $\omega > 0$, $d_1 > 0$, $b_0 > 0$ και $M_0 > 0$.

(ε) ***Ο συντελεστής d_2***

Με τη βοήθεια του γραφήματος Δ – 5.26 που ακολουθεί θα διερευνήσουμε τις επιπτώσεις μίας μείωσης του μεγέθους του συντελεστή d_2 πάνω στην αγορά χρήματος και στο ύψος των επενδύσεων.



Δ – 5.26

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει μία μείωση της τιμής του συντελεστή d_2, έστω από d_{21} σε d_{22}, θα έχει ως συνέπεια την αριστερόστροφη περιστροφή της καμπύλης ζήτησης χρήματος περί του σημείου τομής της με τον οριζόντιο άξονα[49], περί του σημείου δηλαδή Z_4, από την αρχική θέση $M_1^d = M^d(\Delta R_{t-1}, \theta_{21}; d_1, d_2, Y_t)$ στη νέα θέση $M_2^d = M^d(\Delta R_{t-1}, \theta_{22}; d_1, d_2, Y_t)$. Ως εκ τούτου οι επιπτώσεις πάνω στην αγορά χρήματος εξαρτώνται από την θέση της καμπύλης συνολικής προσφοράς χρήματος ως προς το σημείο Z_4. Πιο συγκεκριμένα μπορούμε να διακρίνουμε μεταξύ των παρακάτω περιπτώσεων:

<u>1η περίπτωση:</u> ΔR > 0

Στην περίπτωση που η συνολική προσφορά χρήματος περιγράφεται από την καμπύλη M_1^s, η οποία βρίσκεται αριστερά του σημείου Z_4, τότε προ της μειώσεως του συντελεστή d_2 στην αγορά χρήματος προσδιορίζεται το θετικό βραχυχρόνιο[50] επίπεδο της επιτοκιακής διαφοράς ισορροπίας ΔR_{11}. Η μετατόπιση της καμπύλης ζήτησης χρήματος από τη θέση M_1^d στη θέση M_2^d, η οποία προκύπτει ως αποτέλεσμα

---

[49] Η συγκεκριμένη κίνηση οφείλεται στο γεγονός ότι η μείωση της τιμής του συντελεστή d_2, για παράδειγμα από $d_{21} = -1$ σε $d_{22} = -2$, θα αφήσει ανεπηρέαστο το μέγεθος $Z_4 = d_1 Y_t$ και θα οδηγήσει στη μείωση του μεγέθους Z_3 από $Z_{31} = -d_1 Y_t / d_{21}(1-\theta_2)$ σε $Z_{32} = -d_1 Y_t / d_{22}(1-\theta_2)$. Με άλλα λόγια η συγκεκριμένη μεταβολή του συντελεστή d_2 αφήνει ανεπηρέαστο το σημείο τομής με τον οριζόντιο άξονα και προκαλεί την μετατόπιση του σημείου τομής της καμπύλης M^d με τον κατακόρυφο άξονα από τη θέση Z_{31} στη θέση Z_{32}.

[50] Δεδομένου ότι οι επιπτώσεις της μεταβολής του μεγέθους μόνο μίας εκ των παραμέτρων του υποδείγματος πάνω στο επίπεδο του εισοδήματος ισορροπίας υπολογίζονται θεωρώντας ότι $\overline{\Delta R} = 0$, το επίπεδο της επιτοκιακής διαφοράς ισορροπίας θεωρείται δεδομένο και ίσο με μηδέν.

της μείωσης του συντελεστή d_2 από d_{21} σε d_{22}, θα οδηγήσει στην πτώση της βραχυχρόνιας επιτοκιακής διαφοράς ισορροπίας από ΔR_{11} σε ΔR_{12}. Ως αποτέλεσμα, το επίπεδο των επενδύσεων αυξάνεται από I_{11} σε I_{12} κάτι που αναμένεται να προκαλέσει την αύξηση της συνολικής ζήτησης και του εισοδήματος ισορροπίας. Με άλλα λόγια και σε μαθηματικούς όρους αναμένεται ότι:

$$\frac{\partial \widetilde{Y}_t^{re}}{\partial d_2} < 0$$

<u>2η περίπτωση:</u> ΔR = 0

Εάν η καμπύλη της συνολικής προσφοράς χρήματος διέρχεται από το σημείο Z_4, όπως στην περίπτωση της καμπύλης M_2^s, η αριστερόστροφη περιστροφή της καμπύλης M^d περί του σημείου Z_4 θα αφήσει ανεπηρέαστο την βραχυχρόνια επιτοκιακή διαφορά ισορροπίας στο επίπεδο ΔR_2. Ως εκ τούτου η μείωση της τιμής του συντελεστή d_2 δεν αναμένεται να επηρεάσει τόσο τις επενδύσεις, το ύψος των οποίων θα παραμείνει σταθερό και ίσο με I_2, όσο και τη συνολική ζήτηση. Με άλλα λόγια, και σε μαθηματικούς όρους, θα αναμένουμε ότι:

$$\frac{\partial \widetilde{Y}_t^{re}}{\partial d_2} = 0$$

<u>3η περίπτωση:</u> ΔR < 0

Εάν η καμπύλη της συνολικής προσφοράς χρήματος τέμνει την αρχική καμπύλη ζήτησης χρήματος M_1^d σε κάποιο σημείο το οποίο εντοπίζεται προς τα δεξιά του σημείου Z_4, όπως στην περίπτωση της καμπύλης M_3^s, τότε η αριστερόστροφη περιστροφή της καμπύλης M^d θα οδηγήσει στη μείωση της βραχυχρόνιας επιτοκιακής διαφοράς ισορροπίας από το επίπεδο ΔR_{31} στο ΔR_{32}. Ως αποτέλεσμα οι επενδύσεις μειώνονται από I_{31} σε I_{32}, κάτι που αναμένεται να οδηγήσει στη μείωση της συνολικής ζήτησης και κατ' επέκταση του εισοδήματος ισορροπίας. Με άλλα λόγια, και σε μαθηματικούς όρους, αναμένεται ότι:

$$\frac{\partial \widetilde{Y}_t^{re}}{\partial d_2} > 0$$

Όπως προκύπτει από την παραπάνω ανάλυση, το πρόσημο της μερικής παραγώγου του εισοδήματος ισορροπίας $\widetilde{Y}_t^{re}$ ως προς το συντελεστή d_2 αναμένεται να είναι απροσδιόριστο. Η μερική παράγωγος $\partial \widetilde{Y}_t^{re} / \partial d_2$, όπως αυτή προσδιορίζεται με τη βοήθεια της σχέσης (5.190), έχει ως ακολούθως:

$$\frac{\partial \widetilde{Y}_t^{re}}{\partial d_2} = -\frac{b_0 + b_2(1-\omega)\overline{\Delta R}}{(1-c_1+\varphi\omega)^2} \frac{\partial(1-c_1+\varphi\omega)}{\partial\varphi} \frac{\partial\varphi}{\partial d_2} +$$

$$+\frac{\omega M_0 \tilde{m}^{t+2}}{d_1}\left\{\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial d_2}\left[(1+\varphi\omega)\tilde{m}^2-c_1(1+v)\tilde{m}+vc_1\right]}{\left[(1+\varphi\omega)\tilde{m}^2-c_1(1+v)\tilde{m}+vc_1\right]^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{\varphi\frac{\partial\left[(1+\varphi\omega)\tilde{m}^2-c_1(1+v)\tilde{m}+vc_1\right]}{\partial d_2}}{\left[(1+\varphi\omega)\tilde{m}^2-c_1(1+v)\tilde{m}+vc_1\right]^2}\right\}=$$

$$=\frac{b_0+b_2(1-\omega)\overline{\Delta R}}{(1-c_1+\varphi\omega)^2}\frac{\omega\varphi}{d_2}+\frac{\omega M_0\tilde{m}^{t+2}}{d_1}\left\{\frac{-\frac{b_2 d_1}{d_2^2}\left[(1+\varphi\omega)\tilde{m}^2-c_1(1+v)\tilde{m}+vc_1\right]}{(1+\varphi\omega)^2\left(\tilde{m}^2+\zeta_1\tilde{m}+\zeta_0\right)^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{\varphi\left[\frac{\partial(1+\varphi\omega)}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial d_2}\tilde{m}^2-0+0\right]}{(1+\varphi\omega)^2\left(\tilde{m}^2+\zeta_1\tilde{m}+\zeta_0\right)^2}\right\}=$$

$$=\frac{b_0+b_2(1-\omega)\overline{\Delta R}}{(1-c_1+\varphi\omega)^2}\frac{\varphi\omega}{d_2}+\frac{\omega M_0\tilde{m}^{t+2}}{d_1}\left\{\frac{-\frac{\varphi}{d_2}\left[(1+\varphi\omega)\tilde{m}^2-c_1(1+v)\tilde{m}+vc_1\right]+\frac{\varphi^2\omega}{d_2}\tilde{m}^2}{(1+\varphi\omega)^2\left(\tilde{m}^2+\zeta_1\tilde{m}+\zeta_0\right)^2}\right\}=$$

$$=\frac{b_0+b_2(1-\omega)\overline{\Delta R}}{(1-c_1+\varphi\omega)^2}\frac{\varphi\omega}{d_2}-\frac{\varphi\omega}{d_2 d_1}\frac{M_0\tilde{m}^{t+2}\left[(1+\varphi\omega-\varphi\omega)\tilde{m}^2-c_1(1+v)\tilde{m}+vc_1\right]}{(1+\varphi\omega)^2\left(\tilde{m}^2+\zeta_1\tilde{m}+\zeta_0\right)^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\partial\tilde{Y}_t^{re}}{\partial d_2}=-\frac{\varphi\omega}{d_2}\left\{-\frac{b_0+b_2(1-\omega)\overline{\Delta R}}{(1-c_1+\varphi\omega)^2}+\frac{M_0\tilde{m}^{t+2}\left[\tilde{m}^2-c_1(1+v)\tilde{m}+vc_1\right]}{d_1(1+\varphi\omega)^2\left(\tilde{m}^2+\zeta_1\tilde{m}+\zeta_0\right)^2}\right\}\qquad \textit{(5.244)}\rightarrow$$

$$\rightarrow\left.\frac{\partial\tilde{Y}_t^{re}}{\partial d_2}\right|_{\overline{\Delta R}=0}=-\frac{\varphi\omega}{d_2}\left\{-\frac{b_0}{(1-c_1+\varphi\omega)^2}+\frac{M_0\tilde{m}^{t+2}}{d_1}\frac{\tilde{m}^2-c_1(1+v)\tilde{m}+vc_1}{(1+\varphi\omega)^2\left(\tilde{m}^2+\zeta_1\tilde{m}+\zeta_0\right)^2}\right\}\qquad \textit{(5.244.1)}$$

Δεδομένου ότι $\varphi > 0$, $\omega > 0$, $b_0 > 0$, $0 < c_1 < 1$, $d_1 > 0$, $d_2 < 0$, $v > 0$, $0 < m < 1$, $M_0 > 0$ και $\tilde{m} = 1 + m > 1$, από τη σχέση (5.244.1) γίνεται αντιληπτό ότι ***το πρόσημο της μερικής παραγώγου*** $\left(\partial \tilde{Y}_t^{re} / \partial d_2\right)_{\overline{\Delta R}=0}$ ***είναι πράγματι απροσδιόριστο***.

(στ) ***Ο επιταχυντής (v)***

Μία μόνιμη αύξηση (μείωση) του μεγέθους του επιταχυντή αναμένεται ότι θα προκαλέσει την αύξηση (μείωση) των επενδύσεων, και κατ' επέκταση της συνολικής ζήτησης και του εισοδήματος ισορροπίας. Με άλλα λόγια, και σε μαθηματικούς όρους, αναμένουμε ότι:

$$\frac{\partial \tilde{Y}_t^{re}}{\partial v} > 0$$

Προκειμένου να επιβεβαιώσουμε ή να απορρίψουμε την παραπάνω θέση θα προσδιορίσουμε, με τη βοήθεια της σχέσης (5.226.1), το πρόσημο της μερικής παραγώγου $\partial \tilde{Y}_t^{re} / \partial v$, το μέγεθος της οποίας έχει ως ακολούθως:

$$\frac{\partial \tilde{Y}_t^{re}}{\partial v} = 0 - \frac{\varphi\omega}{d_1} \frac{M_0 \tilde{m}^{t+2}}{\left[(1+\varphi\omega)\tilde{m}^2 - c_1(1+v)\tilde{m} + vc_1\right]^2} \frac{\partial\left[(1+\varphi\omega)\tilde{m}^2 - c_1(1+v)\tilde{m} + vc_1\right]}{\partial v} =$$

$$= -\frac{\varphi\omega}{d_1} \frac{M_0 \tilde{m}^{t+2}}{(1+\varphi\omega)^2\left(\tilde{m}^2 + \zeta_1\tilde{m} + \zeta_0\right)^2}\left[0 - c_1(1+m) + c_1\right] =$$

$$= \frac{c_1\varphi\omega}{d_1} \frac{M_0 \tilde{m}^{t+2}}{(1+\varphi\omega)^2\left(\tilde{m}^2 + \zeta_1\tilde{m} + \zeta_0\right)^2}(1+m-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \tilde{Y}_t^{re}}{\partial v} = \left.\frac{\partial \tilde{Y}_t^{re}}{\partial v}\right|_{\overline{\Delta R}=0} = \frac{c_1 m \varphi \omega}{d_1} \frac{M_0 \tilde{m}^{t+2}}{(1+\varphi\omega)^2\left(\tilde{m}^2 + \zeta_1\tilde{m} + \zeta_0\right)^2} > 0 \qquad \textbf{\textit{(5.245)}}$$

Δεδομένου ότι $\varphi > 0$, $\omega > 0$, $d_1 > 0$, $0 < c_1 < 1$, $M_0 > 0$, $0 < m < 1$, $\tilde{m} = 1 + m > 1$, ***η σχέση (5.245) επιβεβαιώνει την ύπαρξη θετικής σχέσης μεταξύ του επιταχυντή (v) και του εισοδήματος ισορροπίας*** $(\tilde{Y}_t^{re})$.

(ζ) ***Η αρχική ποσότητα χρήματος (M_0)***

Με δεδομένη τη συνολική ζήτηση χρήματος, μία αύξηση (μείωση) της αρχικής ποσότητας χρήματος (M_0) θα οδηγήσει στη μείωση (αύξηση) της βραχυχρόνιας επιτοκιακής διαφοράς ισορροπίας, η οποία με τη σειρά της αναμένεται ότι θα οδηγήσει στην αύξηση (μείωση) των επενδύσεων και κατ' επέκταση της συνολικής ζήτησης και του εισοδήματος ισορροπίας. Με άλλα λόγια, και σε μαθηματικούς όρους, αναμένεται ότι:

$$\frac{\partial \tilde{Y}_t^{re}}{\partial M_0} > 0$$

Παίρνοντας τη μερική παράγωγο της σχέσης (5.226.1) ως προς M_0 βρίσκουμε:

$$\frac{\partial \tilde{Y}_t^{re}}{\partial M_0} = 0 + \frac{\varphi\omega}{d_1} \frac{\tilde{m}^{t+2}}{(1+\varphi\omega)\tilde{m}^2 - c_1(1+v)\tilde{m} + vc_1} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\partial \tilde{Y}_t^{re}}{\partial M_0} = \left.\frac{\partial \tilde{Y}_t^{re}}{\partial M_0}\right|_{\overline{\Delta R}=0} = \frac{\varphi\omega}{d_1(1+\varphi\omega)} \frac{\tilde{m}^{t+2}}{\tilde{m}^2 + \zeta_1 \tilde{m} + \zeta_0} \qquad \textbf{(5.246)}$$

Όπως προκύπτει από την παραπάνω σχέση, και δεδομένου ότι $\tilde{m} = 1 + m > 1$, $\varphi > 0$, $\omega > 0$, $d_1 > 0$, το πρόσημο της μερικής παραγώγου $\partial \tilde{Y}_t^{re} / \partial M_0$ είναι απροσδιόριστο. ***Η εν λόγω μερική παράγωγος θα παρουσιάζει το αναμενόμενο πρόσημο μόνο εφόσον το πολυώνυμο $P_8(\tilde{m}) = \tilde{m}^2 + \zeta_1 \tilde{m} + \zeta_0$ είναι θετικά ορισμένο, συνθήκη η οποία οπωσδήποτε ικανοποιείται εφόσον ο επιταχυντής παίρνει τιμές στο διάστημα (v_1^{re}, v_2^{re}), όπου $v_{2,1}^{re} = \left(\sqrt{(1+\varphi\omega)/c_1} \pm \sqrt{(1-c_1+\varphi\omega)/c_1}\right)^2$.***

(η) ***Ο ρυθμός της νομισματικής επέκτασης (m)***

Προκειμένου να προσδιορίσουμε τις επιπτώσεις μίας αύξησης (μείωσης) του ρυθμού της νομισματικής επέκτασης (m) πάνω στην επιτοκιακή διαφορά για την οποία η αγορά χρήματος βρίσκεται σε βραχυχρόνια ισορροπία, δεν έχουμε παρά να προσδιορίσουμε το πρόσημο της μερικής παραγώγου της σχέσης (5.190).

Το γεγονός ότι:

$$\frac{\partial \Delta R_{t-1}}{\partial m} = \frac{M_0\, t\,(1+m)^{t-1}}{d_2 \omega_2} < 0 \qquad \textbf{(5.247)}$$

μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι μία μόνιμη αύξηση (μείωση) του ρυθμού της νομισματικής επέκτασης θα προκαλέσει τη μείωση (αύξηση) της βραχυχρόνιας επιτοκιακής διαφοράς ισορροπίας, οδηγώντας με τη σειρά της στην αύξηση (μείωση) των επενδύσεων και κατ' επέκταση της συνολικής ζήτησης και του εισοδήματος ισορροπίας. Με άλλα λόγια, και σε μαθηματικούς όρους, αναμένουμε ότι:

$$\frac{\partial \tilde{Y}_t^{re}}{\partial m} > 0$$

Παίρνοντας τη μερική παράγωγο της σχέσης (5.226.1) ως προς m βρίσκουμε ότι:

$$\frac{\partial \tilde{Y}_t^{re}}{\partial m} = 0 + \frac{\varphi\omega M_0}{d_1}\left\{\frac{\left[(1+\varphi\omega)\tilde{m}^2 - c_1(1+v)\tilde{m} + vc_1\right]\frac{\partial\left(\tilde{m}^{t+2}\right)}{\partial m}}{\left[(1+\varphi\omega)\tilde{m}^2 - c_1(1+v)\tilde{m} + vc_1\right]^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{\tilde{m}^{t+2}\,\frac{\partial\left[(1+\varphi\omega)\tilde{m}^2 - c_1(1+v)\tilde{m} + vc_1\right]}{\partial m}}{\left[(1+\varphi\omega)\tilde{m}^2 - c_1(1+v)\tilde{m} + vc_1\right]^2}\right\} =$$

$$= \frac{\varphi\omega M_0}{d_1}\left\{\frac{\left[(1+\varphi\omega)\tilde{m}^2 - c_1(1+v)\tilde{m} + vc_1\right](t+2)\tilde{m}^{t+1}\frac{\partial\tilde{m}}{\partial m}}{(1+\varphi\omega)^2\left(\tilde{m}^2 + \zeta_1\tilde{m} + \zeta_0\right)^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{\tilde{m}^{t+2}\left[2(1+\varphi\omega)\tilde{m}\frac{\partial\tilde{m}}{\partial m} - c_1(1+v) + 0\right]}{(1+\varphi\omega)^2\left(\tilde{m}^2 + \zeta_1\tilde{m} + \zeta_0\right)^2}\right\} =$$

$$= \frac{\varphi\omega M_0}{d_1}\,\frac{\left[(1+\varphi\omega)\tilde{m}^2 - c_1(1+v)\tilde{m} + vc_1\right](t+2)\tilde{m}^{t+1} - \left[2(1+\varphi\omega)\tilde{m} - c_1(1+v)\right]\tilde{m}^{t+2}}{(1+\varphi\omega)^2\left(\tilde{m}^2 + \zeta_1\tilde{m} + \zeta_0\right)^2} =$$

$$= \frac{\varphi\omega M_0\tilde{m}^{t+1}}{d_1}\,\frac{\left[(1+\varphi\omega)\tilde{m}^2 - c_1(1+v)\tilde{m} + vc_1\right](t+2) - \left[2(1+\varphi\omega)\tilde{m}^2 - c_1(1+v)\tilde{m}\right]}{\left[(1+\varphi\omega)\tilde{m}^2 - c_1(1+v)\tilde{m} + vc_1\right]^2} =$$

$$= \frac{\varphi\omega M_0\tilde{m}^{t+1}}{d_1}\left\{\frac{(1+\varphi\omega)\left(\tilde{m}^2 + \zeta_1\tilde{m} + \zeta_0\right)t}{(1+\varphi\omega)^2\left(\tilde{m}^2 + \zeta_1\tilde{m} + \zeta_0\right)^2} + \right.$$

$$+\frac{2\left(1+\varphi\omega\right)\tilde{m}^{2}-2\,c_{1}\left(1+v\right)\tilde{m}+2\,vc_{1}-2\left(1+\varphi\omega\right)\tilde{m}^{2}+c_{1}\left(1+v\right)\tilde{m}}{\left(1+\varphi\omega\right)^{2}\left(\tilde{m}^{2}+\zeta_{1}\tilde{m}+\zeta_{0}\right)^{2}}\Bigg\}=$$

$$=\frac{\varphi\omega\,M_{0}\tilde{m}^{t+1}}{d_{1}}\,\frac{\left(1+\varphi\omega\right)\left(\tilde{m}^{2}+\zeta_{1}\tilde{m}+\zeta_{0}\right)t-c_{1}\left(1+v\right)\tilde{m}+2\,vc_{1}}{\left(1+\varphi\omega\right)^{2}\left(\tilde{m}^{2}+\zeta_{1}\tilde{m}+\zeta_{0}\right)^{2}}=$$

$$=\frac{\varphi\omega\left(1+\varphi\omega\right)M_{0}\tilde{m}^{t+1}}{d_{1}}\,\frac{\left(\tilde{m}^{2}+\zeta_{1}\,\tilde{m}+\zeta_{0}\right)t+\zeta_{1}\,\tilde{m}+2\,\zeta_{0}}{\left(1+\varphi\omega\right)^{2}\left(\tilde{m}^{2}+\zeta_{1}\tilde{m}+\zeta_{0}\right)^{2}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\partial\tilde{Y}_{t}^{re}}{\partial m}=\frac{\varphi\omega\,M_{0}\tilde{m}^{t+1}}{d_{1}\left(1+\varphi\omega\right)}\,\frac{t\,\tilde{m}^{2}+\zeta_{1}\left(1+t\right)\tilde{m}+\zeta_{0}\left(2+t\right)}{\left(\tilde{m}^{2}+\zeta_{1}\,\tilde{m}+\zeta_{0}\right)^{2}}\qquad\textbf{\textit{(5.248)}}$$

Όπως προκύπτει από την παραπάνω σχέση, και εφόσον $M_0 > 0$, $\tilde{m} > 1$, $\varphi > 0$, $\omega > 0$, $t \geq 0$, $d_1 > 0$, $\zeta_1 < 0$ & $\zeta_0 > 0$, ***η μερική παράγωγος*** $\partial\tilde{Y}_t^{re}/\partial m$ ***θα έχει το αναμενόμενο πρόσημο μόνο εφόσον ισχύει ότι*** $P_{10}\left(\tilde{m}\right)=t\,\tilde{m}^{2}+\zeta_{1}\left(1+t\right)\tilde{m}+\zeta_{0}\left(2+t\right)>0$.

(θ) ***Ο χρόνος (t)***

Όπως προκύπτει και από τη συγκεκριμένη συναρτησιακοί μορφή του εισοδήματος ισορροπίας, αναμένεται η ύπαρξη θετικής σχέσης μεταξύ αυτού και του χρόνου. Με άλλα λόγια και σε μαθηματικούς όρους αναμένεται ότι:

$$\partial\tilde{Y}_{t}^{re}/\partial t>0$$

Παίρνοντας τη μερική παράγωγο του εισοδήματος ισορροπίας, όπως αυτό περιγράφεται από τη σχέση (5.226.1), ως προς το χρόνο (t) προκύπτει ότι:

$$\frac{\partial\tilde{Y}_{t}^{re}}{\partial t}=\left.\frac{\partial\tilde{Y}_{t}^{re}}{\partial t}\right|_{\overline{\Delta R}=0}=\frac{\varphi\omega}{d_{1}\left(1+\varphi\omega\right)}\,\frac{M_{0}\tilde{m}^{t+2}\,\ln\left(\tilde{m}\right)}{\tilde{m}^{2}+\zeta_{1}\,\tilde{m}+\zeta_{0}}\qquad\textbf{\textit{(5.249)}}$$

Δεδομένου ότι $\varphi > 0$, $\omega > 0$, $d_1 > 0$, $M_0 > 0$, $0 < m < 1$, και $\tilde{m}=1+m>1$, από την παραπάνω σχέση γίνεται αντιληπτό ότι ***η μερική παράγωγος*** $\partial\tilde{Y}_t^{re}/\partial t$ ***θα έχει το αναμενόμενο πρόσημο εφόσον το πολυώνυμο*** $P_8\left(\tilde{m}\right)=\tilde{m}^{2}+\zeta_{1}\,\tilde{m}+\zeta_{0}$ ***είναι θετικά ορισμένο, συνθήκη η οποία οπωσδήποτε ικανοποιείται εφόσον ο επιταχυντής κινείται στο διάστημα*** (v_1^{re}, v_2^{re})***, όπου*** $v_{2,1}^{re}=\left(\sqrt{\left(1+\varphi\omega\right)/c_{1}}\pm\sqrt{\left(1-c_{1}+\varphi\omega\right)/c_{1}}\right)^{2}$.

(ι) ***Ο συντελεστής θ₁***

Μία μεταβολή της τιμής του συντελεστή θ_1 θα έχει επιπτώσεις στην αγορά προϊόντος και ειδικότερα στο ύψος των επενδύσεων. Προκειμένου να διαπιστώσουμε την κατεύθυνση της επίπτωσης, δεν έχουμε παρά να προσδιορίσουμε το πρόσημο της μερικής παραγώγου $\left(\partial I_t/\partial\theta_1\right)\big|_{\overline{\Delta R}=0}$. Το μέγεθος της εν λόγω μερικής παραγώγου, όπως αυτό προκύπτει από τη σχέση (5.234), έχει ως ακολούθως:

$$\frac{\partial I_t}{\partial\theta_1}=b_2\left(\overline{\Delta R}-\Delta R_{t-1}\right)\rightarrow \qquad \left.\frac{\partial I_t}{\partial\theta_1}\right|_{\overline{\Delta R}=0}=-b_2\Delta R_{t-1} \qquad \textbf{\textit{(5.250)}}$$

Όπως διαπιστώνουμε, το πρόσημο της μερικής παραγώγου $\left(\partial I_t/\partial\theta_1\right)\big|_{\overline{\Delta R}=0}$ είναι μάλλον απροσδιόριστο καθώς εξαρτάται από το πρόσημο της επιτοκιακής διαφοράς. Ως εκ τούτου απροσδιόριστη αναμένεται να είναι και η επίδραση μίας μόνιμης μεταβολής του συντελεστή θ_1 πάνω στο επίπεδο του εισοδήματος ισορροπίας $\widetilde{Y}_t^{re}$.

Η μερική παράγωγος του εισοδήματος ισορροπίας $\widetilde{Y}_t^{re}$ ως προς το συντελεστή θ_1, όπως αυτή προσδιορίζεται με τη βοήθεια της σχέσης (5.226.1), έχει ως ακολούθως:

$$\frac{\partial\widetilde{Y}_t^{re}}{\partial\theta_1}=\frac{\left(1-c_1+\varphi\omega\right)\dfrac{\partial\left[b_0+b_2\left(1-\omega\right)\overline{\Delta R}\right]}{\partial\theta_1}-\left[b_0+b_2\left(1-\omega\right)\overline{\Delta R}\right]\dfrac{\partial\left(1-c_1+\varphi\omega\right)}{\partial\theta_1}}{\left(1-c_1+\varphi\omega\right)^2}+$$

$$+\frac{\varphi M_0\widetilde{m}^{t+2}}{d_1}\left\{\frac{\left[\left(1+\varphi\omega\right)\widetilde{m}^2-c_1\left(1+v\right)\widetilde{m}+vc_1\right]\dfrac{\partial\omega}{\partial\theta_1}}{\left[\left(1+\varphi\omega\right)\widetilde{m}^2-c_1\left(1+v\right)\widetilde{m}+vc_1\right]^2}-\right.$$

$$\left.-\omega\frac{\partial\left[\left(1+\varphi\omega\right)\widetilde{m}^2-c_1\left(1+v\right)\widetilde{m}+vc_1\right]}{\partial\theta_1}\right\}=$$

$$=\frac{\left(1-c_1+\varphi\omega\right)\dfrac{b_2\overline{\Delta R}}{\omega_2}+\dfrac{b_0\varphi+b_2\left(1-\omega\right)\varphi\,\overline{\Delta R}}{\omega_2}}{\left(1-c_1+\varphi\omega\right)^2}+$$

$$+\frac{\varphi M_0\widetilde{m}^{t+2}}{d_1}\,\frac{-\dfrac{\left(1+\varphi\omega\right)\widetilde{m}^2-c_1\left(1+v\right)\widetilde{m}+vc_1}{\omega_2}+\dfrac{\varphi\omega}{\omega_2}\widetilde{m}^2}{\left(1+\varphi\omega\right)^2\left(\widetilde{m}^2+\zeta_1\widetilde{m}+\zeta_0\right)^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \widetilde{Y}_t^{re}}{\partial \theta_1} = \frac{b_0\varphi + (1 - c_1 + \varphi) b_2 \overline{\Delta R}}{\omega_2 (1 - c_1 + \varphi\omega)^2} - \frac{\varphi M_0 \widetilde{m}^{t+2}}{d_1 \omega_2 (1 + \varphi\omega)^2} \frac{\widetilde{m}^2 - c_1 (1 + v) \widetilde{m} + vc_1}{(\widetilde{m}^2 + \zeta_1 \widetilde{m} + \zeta_0)^2} \quad (5.251) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left. \frac{\partial \widetilde{Y}_t^{re}}{\partial \theta_1} \right|_{\overline{\Delta R}=0} = \frac{b_0\varphi}{\omega_2 (1 - c_1 + \varphi\omega)^2} - \frac{\varphi M_0 \widetilde{m}^{t+2}}{d_1 \omega_2 (1 + \varphi\omega)^2} \frac{\widetilde{m}^2 - c_1 (1 + v) \widetilde{m} + vc_1}{(\widetilde{m}^2 + \zeta_1 \widetilde{m} + \zeta_0)^2} \quad (5.251.1)$$

Από τη σχέση (5.251.1), και δεδομένου ότι $\varphi > 0$, $M_0 > 0$, $0 < \omega_2 = 1 - \theta_2 < 1$ και $d_1 > 0$, εύκολα προκύπτει ότι ***το πρόσημο της μερικής παραγώγου*** $\left. \left(\partial \widetilde{Y}_t^{re} / \partial \theta_1 \right) \right|_{\overline{\Delta R}=0}$ ***είναι απροσδιόριστο καθώς αυτό επηρεάζεται από το πρόσημο του πολυωνύμου*** $P_9(\widetilde{m}) = \widetilde{m}^2 - c_1 (1 + v) \widetilde{m} + vc_1$***, το οποίο είναι επίσης απροσδιόριστο***.

(ια) ***Ο συντελεστής*** θ_2

Μία μεταβολή του μεγέθους του συντελεστή θ_2 έχει, όπως θυμόμαστε, ως συνέπεια την περιστροφή της καμπύλης συνολικής ζήτησης χρήματος περί του σημείου τομής της με τον οριζόντιο άξονα. Με τη βοήθεια του γραφήματος Δ – 5.27, θα επιχειρήσουμε να προσδιορίσουμε τις επιπτώσεις μίας μείωσης της τιμής του συντελεστή θ_2 από θ_{21} σε θ_{22}, όπου $\theta_{22} < \theta_{21}$, κατ' αρχήν πάνω στο επίπεδο των επενδύσεων και στη συνέχεια πάνω στο επίπεδο της συνολικής ζήτησης και του εισοδήματος ισορροπίας $\left(\widetilde{Y}_t^{re} \right)$.

Η μείωση της τιμής του συντελεστή θ_2 από θ_{21} σε θ_{22} έχει ως αποτέλεσμα την δεξιόστροφη περιστροφή της καμπύλης συνολικής ζήτησης χρήματος περί του σημείου Z_4, από τη θέση $M_1^d = M^d(\Delta R_{t-1}, \theta_{21}; d_1, d_2, Y_t)$ στη θέση $M_2^d = M^d(\Delta R_{t-1}, \theta_{22}; d_1, d_2, Y_t)$[51]. Γίνεται λοιπόν αντιληπτό ότι οι επιπτώσεις της εν λόγω κίνησης της καμπύλης συνολικής ζήτησης χρήματος επί της επιτοκιακής διαφοράς, και κατά συνέπεια επί του επιπέδου των επενδύσεων, εξαρτάται από τη θέση του σημείου τομής της καμπύλης συνολικής προσφοράς χρήματος ως προς το σημείο Z_4. Βάσει αυτής μπορούμε να διακρίνουμε μεταξύ των παρακάτω περιπτώσεων.

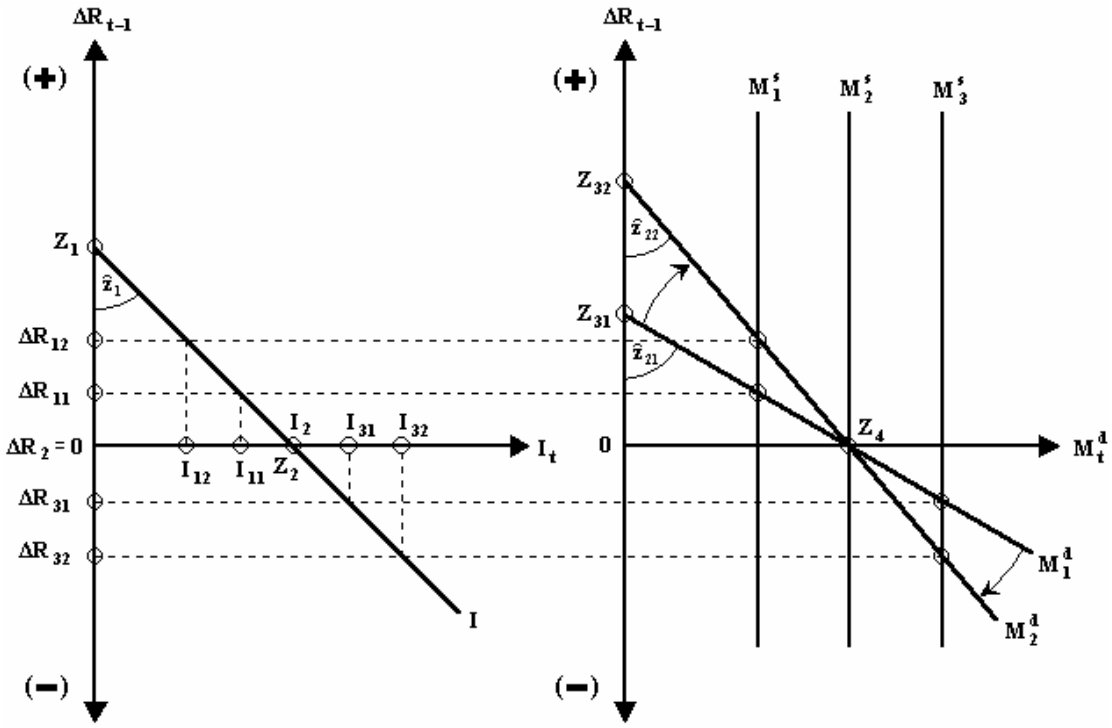
<u>1η περίπτωση</u> **:** $\Delta R_{t-1} > 0$

Εάν η καμπύλη συνολικής προσφοράς χρήματος τέμνει τον οριζόντιο άξονα σε κάποιο σημείο αριστερά του σημείου Z_4, όπως στην περίπτωση της καμπύλης M_1^s, η προκαλούμενη από την μείωση του συντελεστή θ_2 μετατόπιση της καμπύλης συνολικής ζήτησης χρήματος από τη θέση M_1^d στη θέση M_2^d έχει ως αποτέλεσμα την

[51] Η περιστροφή της καμπύλης M^d περί του σημείου Z_4 είναι δεξιόστροφη καθώς για $\theta_{21} < \theta_{22} \Rightarrow$ $\Rightarrow -\theta_{21} > -\theta_{22} \Rightarrow 1 - \theta_{21} > 1 - \theta_{22} \Rightarrow -d_2(1 - \theta_{21}) > -d_2(1 - \theta_{22}) \Rightarrow \varepsilon\varphi\hat{z}_{21} > \varepsilon\varphi\hat{z}_{22} \Rightarrow \hat{z}_{21} > \hat{z}_{22}$. Με άλλα λόγια η μείωση του μεγέθους του συντελεστή θ_2 οδηγεί στη μείωση της γωνίας $\hat{z}_2$, κάτι που μας υποχρεώνει να δεχθούμε ότι η καμπύλη M^d περιστρέφεται δεξιόστροφα περί του σημείου Z_4.

αύξηση της επιτοκιακής διαφοράς από ΔR_{11} σε ΔR_{12}. Ως αποτέλεσμα οι επενδύσεις μειώνονται από I_{11} σε I_{12}, κάτι που αναμένεται να προκαλέσει τη μείωση της συνολικής ζήτησης και του εισοδήματος ισορροπίας. Με άλλα λόγια και σε μαθηματικούς όρους θα αναμένουμε ότι:

$$\frac{\partial \widetilde{Y}_t^{re}}{\partial \theta_2} > 0$$



Δ – 5.27

<u>2η περίπτωση</u> **: $\Delta R_{t-1} = 0$**

Εάν η καμπύλη της συνολικής προσφοράς χρήματος διέρχεται από το σημείο Z_4, όπως στην περίπτωση της καμπύλης M_2^s, η οφειλόμενη στη μόνιμη μείωση του συντελεστή θ_2 περιστροφή της καμπύλης συνολικής ζήτησης χρήματος περί του σημείου Z_4 θα αφήσει ανεπηρέαστη την επιτοκιακή διαφορά στο επίπεδο $\Delta R_2 = 0$. Ως εκ τούτου δεν θα έχουμε καμία επίπτωση τόσο στο ύψος των επενδύσεων όσο και στο επίπεδο της συνολικής ζήτησης και του εισοδήματος ισορροπίας. Με άλλα λόγια και σε μαθηματικούς όρους θα αναμένουμε ότι:

$$\frac{\partial \widetilde{Y}_t^{re}}{\partial \theta_2} = 0$$

3η περίπτωση **: $\Delta R_{t-1} < 0$**

Τέλος, εάν η καμπύλη της συνολικής προσφοράς χρήματος τέμνει τον οριζόντιο άξονα σε κάποιο σημείο δεξιά του Z_4, όπως στην περίπτωση της καμπύλης M_3^s, η οφειλόμενη σε μία μόνιμη μείωση του μεγέθους του συντελεστή θ_2 περιστροφή της καμπύλης M^d από τη θέση M_1^d στη θέση M_2^d, θα οδηγήσει στην μείωση της επιτοκιακής διαφοράς από ΔR_{31} σε ΔR_{32}. Η μείωση της επιτοκιακής διαφοράς αναμένεται ότι αφενός θα προκαλέσει την αύξηση των επενδύσεων από I_{31} σε I_{32}, αφετέρου θα οδηγήσει στην αύξηση της συνολικής ζήτησης και κατ' επέκταση του εισοδήματος ισορροπίας. Με άλλα λόγια και σε μαθηματικούς όρους θα αναμένουμε ότι:

$$\frac{\partial \tilde{Y}_t^{re}}{\partial \theta_2} < 0$$

Όπως προκύπτει από την παραπάνω ανάλυση, το πρόσημο της μερικής παραγώγου $\partial \tilde{Y}_t^{re} / \partial \theta_2$ αναμένεται ότι θα είναι απροσδιόριστο. Προκειμένου να επιβεβαιώσουμε το συμπέρασμα αυτό, δεν έχουμε παρά να υπολογίσουμε με τη βοήθεια της σχέσης (5.226.1) την εν λόγω μερική παράγωγο το μέγεθος της οποίο έχει ως ακολούθως:

$$\frac{\partial \tilde{Y}_t^{re}}{\partial \theta_2} = \frac{(1-c_1+\varphi\omega)\dfrac{\partial\left[b_0 + b_2(1-\omega)\overline{\Delta R}\right]}{\partial \theta_2} - \left[b_0 + b_2(1-\omega)\overline{\Delta R}\right]\dfrac{\partial(1-c_1+\varphi\omega)}{\partial \theta_2}}{(1-c_1+\varphi\omega)^2} + \frac{\varphi M_0 \tilde{m}^{t+2}}{d_1} \times$$

$$\times \left\{ \frac{\left[(1+\varphi\omega)\tilde{m}^2 - c_1(1+v)\tilde{m} + vc_1\right]\dfrac{\partial \omega}{\partial \theta_2}}{\left[(1+\varphi\omega)\tilde{m}^2 - c_1(1+v)\tilde{m} + vc_1\right]^2} - \frac{\omega \dfrac{\partial\left[(1+\varphi\omega)\tilde{m}^2 - c_1(1+v)\tilde{m} + vc_1\right]}{\partial \theta_2}}{\left[(1+\varphi\omega)\tilde{m}^2 - c_1(1+v)\tilde{m} + vc_1\right]^2} \right\} =$$

$$= \frac{-\dfrac{\omega(1-c_1+\varphi\omega)b_2\overline{\Delta R}}{\omega_2} - \dfrac{\varphi\omega\left[b_0 + b_2(1-\omega)\overline{\Delta R}\right]}{\omega_2}}{(1-c_1+\varphi\omega)^2} +$$

$$+ \frac{\varphi M_0 \tilde{m}^{t+2}}{d_1} \frac{\left[(1+\varphi\omega)\tilde{m}^2 - c_1(1+v)\tilde{m} + vc_1\right]\dfrac{\omega}{\omega_2} - \dfrac{\varphi\omega^2}{\omega_2}\tilde{m}^2}{\left[(1+\varphi\omega)\tilde{m}^2 - c_1(1+v)\tilde{m} + vc_1\right]^2} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \tilde{Y}_t^{re}}{\partial \theta_2} = -\frac{\omega}{\omega_2}\left\{ \frac{b_0\varphi + (1-c_1+\varphi)b_2\overline{\Delta R}}{(1-c_1+\varphi\omega)^2} - \frac{\varphi M_0 \tilde{m}^{t+2}}{d_1(1+\varphi\omega)^2} \frac{\tilde{m}^2 - c_1(1+v)\tilde{m} + vc_1}{\left(\tilde{m}^2 + \zeta_1\tilde{m} + \zeta_0\right)^2} \right\} \quad \textbf{\textit{(5.252)}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\frac{\partial \widetilde{Y}_t^{re}}{\partial \theta_2}\right|_{\overline{\Delta R}=0} = -\frac{\omega}{\omega_2}\left[\frac{b_0\varphi}{(1-c_1+\varphi\omega)^2} - \frac{\varphi M_0 \widetilde{m}^{t+2}}{d_1(1+\varphi\omega)^2}\frac{\widetilde{m}^2 - c_1(1+v)\widetilde{m} + vc_1}{\left(\widetilde{m}^2+\zeta_1\widetilde{m}+\zeta_0\right)^2}\right] \qquad \textbf{(5.252.1)}$$

Δεδομένου ότι $\omega > 0$, $0 < \omega_2 < 1$, $b_0 > 0$, $\varphi > 0$ & $M_0 > 0$, από τη σχέση (5.252.1) εύκολα προκύπτει ότι ***το πρόσημο της μερικής παραγώγου*** $\left(\partial \widetilde{Y}_t^{re}/\partial \theta_2\right)\Big|_{\overline{\Delta R}=0}$ ***είναι απροσδιόριστο καθώς αυτό εξαρτάται από το ευρισκόμενο εντός της αγκύλης μέγεθος, το πρόσημο του οποίου είναι επίσης απροσδιόριστο.***

5.3.4 Προσδιορισμός της γενικής λύσης του υποδείγματος υπό καθεστώς παλινδρομικών προσδοκιών και διερεύνηση της ευστάθειάς της

Έχοντας διερευνήσει τις επιπτώσεις πάνω στο ύψος του εισοδήματος ισορροπίας, οι οποίες προκύπτουν ως αποτέλεσμα μίας απειροελάχιστης μεταβολής του μεγέθους μίας μόνο εκ των συνιστωσών παραμέτρων του, θα εξάγουμε στην τρέχουσα υποενότητα τη μαθηματική μορφή της γενικής λύσης του υποδείγματος, όπως αυτή διαμορφώνεται στα πλαίσια του μηχανισμού των παλινδρομικών προσδοκιών, και θα διερευνήσουμε την ευστάθειά της.

Προκειμένου να εξάγουμε τις κατά Routh ικανές και αναγκαίες συνθήκες ευστάθειας του υποδείγματος, θα ξεκινήσουμε αντικαθιστώντας τη σχέση (5.65) στη χαρακτηριστική εξίσωση (5.195). Από την αντικατάσταση αυτή προκύπτει ότι:

$$P_3(\lambda) = \lambda^2 + \zeta_1\lambda + \zeta_0 = 0 \Rightarrow \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2 + \zeta_1\left(\frac{z+1}{z-1}\right) + \zeta_0 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{(z+1)^2 + \zeta_1(z+1)(z-1) + \zeta_0(z-1)^2}{(z-1)^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad z^2 + 2z + 1 + \zeta_1\left(z^2-1\right) + \zeta_0\left(z^2 - 2z + 1\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \left(1+\zeta_0+\zeta_1\right)z^2 + 2\left(1-\zeta_0\right)z + \left(1+\zeta_0-\zeta_1\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad P_3(z) = \beta_0^{re} z^2 + \beta_1^{re} z + \beta_2^{re} = 0 \qquad \textbf{(5.253)}$$

όπου $\beta_0^{re} = 1+\zeta_0+\zeta_1$, $\beta_1^{re} = 2(1-\zeta_0)$ και $\beta_2^{re} = 1+\zeta_0-\zeta_1$.

Σύμφωνα με το κατά Routh θεώρημα ευστάθειας όλες οι χαρακτηριστικές ρίζες θα έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος, και κατά συνέπεια θα εντοπίζονται εντός του μοναδιαίου κύκλου καθιστώντας έτσι το υπόδειγμα ευσταθές, εφόσον ικανοποιείται το ακόλουθο σύστημα ανισοτήτων:

$$\left.\begin{array}{c}\beta_0^{re}>0\\ O_1^{re}=\beta_1^{re}>0\\ O_2^{re}=\begin{vmatrix}\beta_1^{re} & \beta_3^{re}\\ \beta_0^{re} & \beta_2^{re}\end{vmatrix}>0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{c}1+\zeta_0+\zeta_1>0\\ 2(1-\zeta_0)>0\\ \begin{vmatrix}\beta_1^{re} & 0\\ \beta_0^{re} & \beta_2^{re}\end{vmatrix}>0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{c}1+\zeta_0+\zeta_1>0\\ 1-\zeta_0>0\\ \beta_1^{re}\,\beta_2^{re}>0\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{c}1+\zeta_0+\zeta_1>0\\ 1-\zeta_0>0\\ 2(1-\zeta_0)(1+\zeta_0-\zeta_1)>0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{ll}1+\zeta_0+\zeta_1>0 & \textbf{\textit{(5.254.1)}}\\ 1+\zeta_0-\zeta_1>0 & \textbf{\textit{(5.254.2)}}\\ 1-\zeta_0>0 & \textbf{\textit{(5.254.3)}}\end{array}\right\}\qquad \textbf{\textit{(Σ − 5.6)}}$$

Η περιγραφόμενη μέσω της ανισότητας (5.254.2) συνθήκη ευστάθειας ικανοποιείται καθώς για τις σταθερές ζ_0 και ζ_1 γνωρίζουμε ότι $\zeta_0 = vc_1/(1+\varphi\omega) > 0$ και $\zeta_1 = -c_1(1+v)/(1+\varphi\omega) < 0$. Αντικαθιστώντας τώρα τα μεγέθη των σταθερών ζ_0 και ζ_1 στη συνθήκη ευστάθειας (5.254.1) βρίσκουμε ότι:

$$1+\zeta_0+\zeta_1>0\Rightarrow 1+\frac{vc_1}{1+\varphi\omega}-\frac{c_1(1+v)}{1+\varphi\omega}>0\Rightarrow 1+\varphi\omega+vc_1-c_1(1+v)>0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\qquad 1-c_1+\varphi\omega>0$$

Η παραπάνω ανισότητα ικανοποιείται δεδομένου ότι $0 < c_1 < 1$, $\varphi > 0$ και $\omega > 0$.

Όπως γίνεται φανερό, η μοναδική συνθήκη που θα πρέπει να ικανοποιείται προκειμένου η γενική λύση του υποδείγματος να χαρακτηρίζεται ως ευσταθής περιγράφεται από την ανισότητα (5.254.3), η οποία έπειτα από την αντικατάσταση τη σταθεράς ζ_0 παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$1-\zeta_0>0\Rightarrow 1-\frac{vc_1}{1+\varphi\omega}>0\Rightarrow 1+\varphi\omega-vc_1>0\Rightarrow\quad v<\frac{1+\varphi\omega}{c_1}=v_{re}^{s}\qquad \textbf{\textit{(5.255)}}$$

Βάσει της παραπάνω σχέσης, και δεδομένου ότι $v_{re}^{s}>1$, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι έπειτα από μία εξωγενή διαταραχή ***το εισόδημα θα συγκλίνει προς τη βραχυχρόνια τιμή ισορροπίας του ($\widetilde{Y}_t^{re}$) εφόσον ο επιταχυντής παίρνει μία τιμή η οποία κινείται εντός του διαστήματος $(0, v_{re}^{s})$. Αντιθέτως, στην περίπτωση που***

ισχύει ότι $v \in [v_{re}^{s}, +\infty)$ ***το εισόδημα θα αποκλίνει, έπειτα από μία εξωγενή διαταραχή, από τη βραχυχρόνια τιμή ισορροπίας του***.

Το ερώτημα που ανακύπτει ωστόσο σ' αυτό το σημείο, έχει να κάνει με το εάν και κατά πόσο ο μηχανισμός των παλινδρομικών προσδοκιών διευρύνει το πεδίο τιμών του επιταχυντή για το οποίο επιτυγχάνεται σύγκλιση του εισοδήματος προς τη βραχυχρόνια τιμή ισορροπίας του, συγκριτικά με εκείνο στο οποίο καταλήγουμε τόσο στα πλαίσια του αρχικού υποδείγματος του Samuelson, όσο και εκείνου το οποίο προκύπτει στα πλαίσια των μηχανισμών των αναθεωρούμενων και των στατικών προσδοκιών.

Όπως θυμόμαστε, η συνθήκη ευστάθειας του αρχικού υποδείγματος του Samuelson και εκείνη που εξειδικεύσαμε στα πλαίσια των μηχανισμών των αναθεωρούμενων και των στατικών προσδοκιών περιγράφονται αντιστοίχως από τις δύο ακόλουθες ανισότητες:

$$v < \frac{1}{c_1} = v_{sn}^{s} \qquad \textbf{\textit{(2.7)}}$$

$$v < \frac{1+\varphi}{c_1} = v_{se}^{s} \qquad \textbf{\textit{(5.187.2)}}$$

Το γεγονός ότι:

$$\left.\begin{array}{l} v_{se}^{s} - v_{sn}^{s} = \dfrac{1+\varphi}{c_1} - \dfrac{1}{c_1} = \dfrac{\varphi}{c_1} \\ v_{re}^{s} - v_{sn}^{s} = \dfrac{1+\varphi\omega}{c_1} - \dfrac{1}{c_1} = \dfrac{\varphi\omega}{c_1} \end{array}\right\} \underset{\omega>0}{\overset{\varphi>0}{\Rightarrow}} \left.\begin{array}{l} v_{se}^{s} - v_{sn}^{s} > 0 \\ v_{re}^{s} - v_{sn}^{s} > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{ll} v_{se}^{s} > v_{sn}^{s} & \textbf{\textit{(5.256)}} \\ v_{re}^{s} > v_{sn}^{s} & \textbf{\textit{(5.257)}} \end{array}\right\}$$

μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι *το διάστημα τιμών του επιταχυντή για το οποίο εξασφαλίζεται ότι, έπειτα από μία εξωγενή διαταραχή, το εισόδημα θα συγκλίνει προς τη βραχυχρόνια τιμή ισορροπίας του και το οποίο εξειδικεύσαμε στα πλαίσια τόσο των αναθεωρούμενων (στατικών) όσο και των παλινδρομικών προσδοκιών, είναι μεγαλύτερο εκείνου στο οποίο καταλήξαμε στα πλαίσια του αρχικού υποδείγματος του Samuelson*.

Προκειμένου να διαπιστώσουμε εάν ο μηχανισμός των παλινδρομικών προσδοκιών διευρύνει το πεδίο τιμών του επιταχυντή στο οποίο καταλήξαμε στα πλαίσια των αναθεωρούμενων και των στατικών προσδοκιών και για το οποίο επιτυγχάνεται ευστάθεια του υποδείγματος, θα τροποποιήσουμε ελαφρώς τη σχέση (5.255) δίνοντάς της την ακόλουθη μορφή:

$$v < \frac{1+\varphi\omega+\varphi-\varphi}{c_1} \Rightarrow v < \frac{1+\varphi-\varphi(1-\omega)}{c_1} \Rightarrow v < \frac{1+\varphi}{c_1} - \frac{\varphi(1-\omega)}{c_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad v < v_{se}^{s} - \frac{\varphi(1-\omega)}{c_1} = v_{re}^{s} \qquad \textbf{\textit{(5.255.1)}}$$

Το πρόσημο της διαφοράς 1 – ω εξαρτάται από τα μεγέθη των συντελεστών θ_1 και θ_2. Βάσει αυτών, και δεδομένου ότι $\omega = (1 - \theta_1)/(1 - \theta_2)$ μπορούμε να διακρίνουμε μεταξύ των ακόλουθων περιπτώσεων:

$$\left.\begin{array}{l}
\text{Εάν } \theta_1 < \theta_2 \rightarrow 1-\omega < 0 \Rightarrow \dfrac{\varphi(1-\omega)}{c_1} < 0 \Rightarrow -\dfrac{\varphi(1-\omega)}{c_1} > 0 \Rightarrow v_{re}^{s} - v_{se}^{s} > 0 \\[2ex]
\text{Εάν } \theta_1 = \theta_2 \rightarrow 1-\omega = 0 \Rightarrow \dfrac{\varphi(1-\omega)}{c_1} = 0 \Rightarrow -\dfrac{\varphi(1-\omega)}{c_1} = 0 \Rightarrow v_{re}^{s} - v_{se}^{s} = 0 \\[2ex]
\text{Εάν } \theta_1 > \theta_2 \rightarrow 1-\omega > 0 \Rightarrow \dfrac{\varphi(1-\omega)}{c_1} > 0 \Rightarrow -\dfrac{\varphi(1-\omega)}{c_1} < 0 \Rightarrow v_{re}^{s} - v_{se}^{s} < 0
\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases}
v_{re}^{s} > v_{se}^{s} \quad \text{εάν} \quad \theta_1 < \theta_2 & \textbf{\textit{(5.258.1)}} \\[2ex]
v_{re}^{s} = v_{se}^{s} \quad \text{εάν} \quad \theta_1 = \theta_2 & \textbf{\textit{(5.258.2)}} \\[2ex]
v_{re}^{s} < v_{se}^{s} \quad \text{εάν} \quad \theta_1 > \theta_2 & \textbf{\textit{(5.258.3)}}
\end{cases}$$

Όπως προκύπτει από τις παραπάνω σχέσεις, το εάν και κατά πόσον ο μηχανισμός των παλινδρομικών προσδοκιών διευρύνει το διάστημα τιμών του επιταχυντή για το οποίο επιτυγχάνεται σύγκλιση του εισοδήματος, πάντα συγκριτικά με εκείνο στο οποίο καταλήγουμε βάσει του μηχανισμού των αναθεωρούμενων ή των στατικών προσδοκιών, εξαρτάται από το μέγεθος των συντελεστών θ_1 και θ_2.

Στον πίνακα που ακολουθεί, και μέσω της σκιαγραφημένης επιφάνειας παρουσιάζεται το διάστημα τιμών του επιταχυντή για το οποίο στο αρχικό και στο διευρυμένο με τις προσδοκίες υπόδειγμα του Samuelson επιτυγχάνεται σύγκλιση του εισοδήματος προς τη μακροχρόνια τιμή ισορροπίας του έπειτα από μία διαταραχή. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι *ο μηχανισμός των παλινδρομικών προσδοκιών οδηγεί σε διεύρυνση (συρρίκνωση) του πεδίου τιμών του επιταχυντή για το οποίο επιτυγχάνεται σύγκλιση, μόνο στην περίπτωση που ο συντελεστής θ_1 είναι μικρότερος (μεγαλύτερος) από το συντελεστή θ_2. Στην περίπτωση που η ταχύτητα προσαρμογής της επιτοκιακής διαφοράς ΔR_{t-1} προς την τιμή ισορροπίας της είναι η ίδια τόσο στην αγορά προϊόντος όσο και στην αγορά χρήματος*, στην περίπτωση δηλαδή που ισχύει ότι $\theta_1 = \theta_2$, *το πεδίο τιμών του επιταχυντή για το οποίο επιτυγχάνεται σύγκλιση στα πλαίσια του διευρυμένου υποδείγματος δεν επηρεάζεται από τη χρήση διαφορετικών μηχανισμών διαμόρφωσης των προσδοκιών*.

Πίνακας 5.6 : Διαστήματα τιμών του επιταχυντή για τα οποία επιτυγχάνεται σύγκλιση στα πλαίσια του αρχικού και του διευρυμένου υποδείγματος του Samuelson

			0	v^s_{sn}	$v^s_{re}(\theta_1 > \theta_2)$	v^s_{se}	$v^s_{re}(\theta_1 < \theta_2)$	$+\infty$
Αρχικό υπόδειγμα								
Διευρυμένο υπόδειγμα	**AE/SE**							
	RE	$\theta_1 > \theta_2$						
		$\theta_1 < \theta_2$						
		$\theta_1 = \theta_2$						

όπου AE: Adaptive Expectations, SE: Static Expectations & RE: Regressive Expectations

Όπως θυμόμαστε, η γενική λύση του υποδείγματος (Y_t) αποτελεί το άθροισμα της συμπληρωματικής λύσης $\left(Y_t^c\right)$ και μίας μερικής του λύσης $\left(Y_t^p \text{ ή } \widetilde{Y}_t^{re}\right)$. Δεδομένου ότι η μορφή της συμπληρωματικής λύσης διαφοροποιείτε ανάλογα με το πρόσημο της διακρίνουσας (Δ_8) της χαρακτηριστικής εξίσωσης (5.195), γίνεται αντιληπτό ότι κάτι ανάλογο θα συμβαίνει και στην περίπτωση της γενικής λύσης της βασικής εξίσωσης διαφορών. Στον πίνακα 5.7 παρουσιάζονται οι μορφές της γενικής λύσης του υποδεί-γματος, όπως αυτές προκύπτουν από το συνδυασμό των σχέσεων (5.209), (5.213), (5.220) και (5.226).

Πίνακας 5.7: Μορφές της συμπληρωματικής λύσης βάσει του προσήμου της διακρίνουσας Δ_8

$\Delta_8 > 0$	$Y_t = \widetilde{Y}_t^{re} + A_1\left[\dfrac{c_1\left(1+v-\sqrt{\Delta_8}\right)}{2\left(1+\varphi\omega\right)}\right]^t + A_2\left[\dfrac{c_1\left(1+v+\sqrt{\Delta_8}\right)}{2\left(1+\varphi\omega\right)}\right]^t$
$\Delta_8 = 0$	$Y_t = \widetilde{Y}_t^{re} + \left(A_1 + A_2 t\right)\left[\dfrac{c_1\left(1+v\right)}{2\left(1+\varphi\omega\right)}\right]^t$
$\Delta_8 < 0$	$Y_t = \widetilde{Y}_t^{re} + \sqrt{\zeta_0^t}\left[A_3\cos\left(\chi_{re}t\right) + A_4\sin\left(\chi_{re}t\right)\right]$

Παρατήρηση: Οι σταθερές A_i, i = 1, …. ,4, μπορούν να προσδιορισθούν με τη βοήθεια δύο αρχικών συνθηκών

Ένα ερώτημα που τίθεται στο σημείο αυτό έχει να κάνει με τα εάν μπορούμε να προσδιορίσουμε κάποιες συνθήκες, οι οποίες θα μας πληροφορούν αναφορικά με τη μορφή της διαχρονικής πορείας του εισοδήματος έπειτα από μία εξωγενή διαταραχή.

Όπως θυμόμαστε, στην περίπτωση που ο επιταχυντής παίρνει τιμές στο διάστημα $\left(v_1^{re}, v_2^{re}\right)$ η διαχρονική πορεία του εισοδήματος θα χαρακτηρίζεται από ταλαντώσεις, ενώ η ύπαρξη σύγκλισης εξαρτάται από την ικανοποίηση της (5.255). Γίνεται λοιπόν αντιληπτό ότι θα μπορούσαμε να εξειδικεύσουμε εκείνα τα διαστήματα τιμών του επιταχυντή, για τα οποία έπειτα από μία διαταραχή το εισόδημα θα συγκλίνει ή θα αποκλίνει εκθετικά ή ημιτονοειδώς από τη βραχυχρόνια τιμή ισορροπίας του.

Προκειμένου να τοποθετήσουμε τα μεγέθη των v_1^{re}, v_2^{re} και v_{re}^{s} σ' ένα άξονα τιμών θα προσδιορίσουμε στη συνέχεια το πρόσημο των διαφορών $v_1^{re} - v_{re}^{s}$ και $v_2^{re} - v_{re}^{s}$. Ειδικότερα:

1ον

$$v_2^{re} - v_{re}^{s} = \left(\sqrt{\frac{1+\varphi\omega}{c_1}} + \sqrt{\frac{1+\varphi\omega}{c_1} - 1}\right)^2 - \frac{1+\varphi\omega}{c_1} =$$

$$= \frac{1+\varphi\omega}{c_1} + \frac{2\sqrt{(1+\varphi\omega)(1-c_1+\varphi\omega)}}{c_1} + \frac{1+\varphi\omega}{c_1} - 1 - \frac{1+\varphi\omega}{c_1} =$$

$$= \frac{1-c_1+\varphi\omega}{c_1} + \frac{2\sqrt{(1+\varphi\omega)(1-c_1+\varphi\omega)}}{c_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tilde{v}_2 - v_{re}^{s} = \underbrace{\frac{1-c_1+\varphi\omega}{c_1}}_{(+)} \underbrace{\left(1 + 2\sqrt{\frac{1+\varphi\omega}{1-c_1+\varphi\omega}}\right)}_{(+)} > 0 \qquad \textbf{\textit{(5.259)}}$$

και

2ον

$$v_1^{re} - v_{re}^{s} = \left(\sqrt{\frac{1+\varphi\omega}{c_1}} - \sqrt{\frac{1+\varphi\omega}{c_1} - 1}\right)^2 - \frac{1+\varphi\omega}{c_1} = \frac{1+\varphi\omega}{c_1} - \frac{2\sqrt{(1+\varphi\omega)(1-c_1+\varphi\omega)}}{c_1} +$$

$$+ \frac{1+\varphi\omega}{c_1} - 1 - \frac{1+\varphi\omega}{c_1} = \frac{1-c_1+\varphi\omega}{c_1} - \frac{2\sqrt{(1+\varphi\omega)(1-c_1+\varphi\omega)}}{c_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad v_1^{re} - v_{re}^{s} = \underbrace{\frac{1-c_1+\varphi\omega}{c_1}}_{(+)} \left(1 - 2\sqrt{\frac{1+\varphi\omega}{1-c_1+\varphi\omega}}\right) \qquad \textbf{\textit{(5.260)}}$$

Δεδομένου ότι:

$$1+\varphi\omega > 1-c_1+\varphi\omega \Rightarrow \frac{1+\varphi\omega}{1-c_1+\varphi\omega} > 1 \Rightarrow \sqrt{\frac{1+\varphi\omega}{1-c_1+\varphi\omega}} > 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2\sqrt{\frac{1+\varphi\omega}{1-c_1+\varphi\omega}} < -2 \Rightarrow 1-2\sqrt{\frac{1+\varphi\omega}{1-c_1+\varphi\omega}} < -1 \qquad \textit{(5.261)}$$

από το συνδυασμό των σχέσεων (5.260) και (5.261) συμπεραίνουμε ότι:

$$v_1^{re} - v_{re}^{s} = \underbrace{\frac{1-c_1+\varphi\omega}{c_1}}_{(+)} \underbrace{\left(1-2\sqrt{\frac{1+\varphi\omega}{1-c_1+\varphi\omega}}\right)}_{(-)} < 0 \qquad \textit{(5.262)}$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (5.259) και (5.262) οδηγούμαστε στο ακόλουθο συμπέρασμα:

$$\left.\begin{array}{l} v_1^{re} - v_{re}^{s} < 0 \\ \\ v_2^{re} - v_{re}^{s} > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} v_1^{re} < v_{re}^{s} \\ \\ v_{re}^{s} < v_2^{re} \end{array}\right\} \Rightarrow \qquad v_1^{re} < v_{re}^{s} < v_1^{re} \qquad \textit{(5.263)}$$

Βάσει της παραπάνω σχέσης, και στηριζόμενοι στην ανάλυση που προηγήθηκε, κατασκευάσαμε τον πίνακα 5.8, στα πλαίσια του οποίου εξειδικεύουμε τη μορφή και την κατεύθυνση της διαχρονικής πορείας του εισοδήματος έπειτα από μία διαταραχή.

<u>Πίνακας 5.8</u> : Εξειδίκευση της μορφής της διαχρονικής πορείας του εισοδήματος έπειτα από μία εξωγενή διαταραχή

	0	v_1^{re}	v_{re}^{s}	v_2^{re} $+\infty$
Μορφή διαχρονικής πορείας	***Μονοτονική Σύγκλιση***	***Ημιτονοειδής Σύγκλιση***	***Ημιτονοειδής Απόκλιση***	***Μονοτονική Απόκλιση***

5.4 Εξαγωγή της βασικής εξίσωσης διαφορών του υποδείγματος στα πλαίσια του μηχανισμού των ορθολογικών προσδοκιών

Στα πλαίσια της τρέχουσας θεματικής ενότητας, θα διερευνήσουμε τις επιπτώσεις της χρήσης του μηχανισμού των ορθολογικών προσδοκιών τόσο πάνω στη μορφή της εξίσωσης που περιγράφει τη διαχρονική εξέλιξη του εισοδήματος, όσο και στις δυναμικές ιδιότητες του υποδείγματος που προκύπτει από τη χρήση του συγκεκριμένου μηχανισμού διαμόρφωσης των προσδοκιών.

Αν θεωρήσουμε ότι τα οικονομούντα άτομα διαμορφώνουν τις προσδοκίες την περίοδο t – 1 κάνοντας χρήση του συνόλου των διαθέσιμων πληροφοριών κατά τη συγκεκριμένη χρονική περίοδο, αν δηλαδή θεωρήσουμε ο μηχανισμός διαμόρφωσης των προσδοκιών περιγράφεται από τη σχέση (4.9), οι βασικές σχέσεις ισορροπίας (3.7) και (3.15) τροποποιούνται λαμβάνοντας την ακόλουθη μορφή:

$$\left.\begin{aligned} Y_t - c_1(1+v)Y_{t-1} + vc_1Y_{t-2} &= b_0 + b_2\Delta R_t^e \\ M_0(1+m)^t &= d_1Y_t + d_2\Delta R_t^e \end{aligned}\right\} \underset{(3.12)}{\overset{(4.9)}{\Rightarrow}}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} Y_t - c_1(1+v)Y_{t-1} + vc_1Y_{t-2} &= b_0 + b_2E_{t-1}(\Delta R_t) \\ M_t^s &= d_1Y_t + d_2E_{t-1}(\Delta R_t) \end{aligned}\right\} \overset{(3.5)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Y_t - c_1(1+v)Y_{t-1} + vc_1Y_{t-2} = b_0 + b_2E_{t-1}(\Delta R_t) & \textit{(3.7.1)} \\ (1+m)\,M_{t-1}^s = d_1Y_t + d_2E_{t-1}(\Delta R_t) & \textit{(3.15.1)} \end{cases}$$

Προκειμένου να προσδιορίσουμε το μέγεθος του όρου $E_{t-1}(\Delta R_t)$, θα πάρουμε την μαθηματική ελπίδα των σχέσεων (3.7.1) και (3.15.1) και θα επιλύσουμε το προκύπτον σύστημα ως προς $E_{t-1}(Y_t)$ και $E_{t-1}(\Delta R_t)$. Πιο συγκεκριμένα[52]:

$$\left.\begin{aligned} E_{t-1}\left[Y_t - c_1(1+v)\,Y_{t-1} + vc_1Y_{t-2}\right] &= E_{t-1}\left[b_0 + b_2E_{t-1}(\Delta R_t)\right] \\ E_{t-1}\left[(1+m)\,M_{t-1}^s\right] &= E_{t-1}\left[d_1Y_t + d_2E_{t-1}(\Delta R_t)\right] \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

[52] Για τον προσδιορισμό του συγκεκριμένου συστήματος εξισώσεων γίνεται χρήση των παρακάτω δύο ιδιοτήτων: (α) $E_{t-i}(c\,X_t) = c\,E_{t-i}(X_t)$ & (β) $E_{t-i}(X_{t-j}) = X_{t-j}$, όπου i = 0 , 1 , 2 , …. & $i \le j$.

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{c} E_{t-1}(Y_t) - c_1(1+v)\,Y_{t-1} + vc_1 Y_{t-2} = b_0 + b_2 E_{t-1}(\Delta R_t) \\ \\ (1+m)\,M^s_{t-1} = d_1 E_{t-1}(Y_t) + d_2 E_{t-1}(\Delta R_t) \end{array}\right\} \underset{(3.12)}{\overset{(3.5)}{\Rightarrow}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E_{t-1}(Y_t) - b_2 E_{t-1}(\Delta R_t) = b_0 + c_1(1+v)\,Y_{t-1} - vc_1 Y_{t-2} & \textbf{\textit{(5.264.1)}} \\ \\ d_1 E_{t-1}(Y_t) + d_2 E_{t-1}(\Delta R_t) = M_0(1+m)^t & \textbf{\textit{(5.264.2)}} \end{cases}$$

Με τη χρήση πινάκων το παραπάνω σύστημα εξισώσεων τροποποιείται λαμβάνοντας την παρακάτω μορφή:

$$\begin{bmatrix} 1 & -b_2 \\ d_1 & d_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{t-1}(Y_t) \\ \\ E_{t-1}(\Delta R_t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 + c_1(1+v)\,Y_{t-1} - vc_1 Y_{t-2} \\ \\ M_0(1+m)^t \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} E_{t-1}(Y_t) \\ \\ E_{t-1}(\Delta R_t) \end{bmatrix} = \frac{1}{d_2 + b_2 d_1} \begin{bmatrix} d_2 & b_2 \\ -d_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 + c_1(1+v)\,Y_{t-1} - vc_1 Y_{t-2} \\ \\ M_0(1+m)^t \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} E_{t-1}(Y_t) \\ \\ E_{t-1}(\Delta R_t) \end{bmatrix} = \frac{1}{d_2(1+\varphi)} \begin{bmatrix} d_2\left[b_0 + c_1(1+v)\,Y_{t-1} - vc_1 Y_{t-2}\right] + b_2 M_0(1+m)^t \\ \\ M_0(1+m)^t - d_1\left[b_0 + c_1(1+v)\,Y_{t-1} - vc_1 Y_{t-2}\right] \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E_{t-1}(Y_t) = \dfrac{1}{1+\varphi}\left[b_0 + c_1(1+v)\,Y_{t-1} - vc_1 Y_{t-2} + \dfrac{\varphi}{d_1} M_0(1+m)^t\right] & \textbf{\textit{(5.265)}} \\ \\ E_{t-1}(\Delta R_t) = -\dfrac{\varphi}{b_2(1+\varphi)}\left[b_0 + c_1(1+v)\,Y_{t-1} - vc_1 Y_{t-2} - \dfrac{M_0(1+m)^t}{d_1}\right] & \textbf{\textit{(5.266)}} \end{cases}$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (5.266) στη σχέση (3.7.1) και κινούμενοι στη συνέχεια προς τα εμπρός κατά δύο περιόδους, προκύπτει η βασική εξίσωση διαφορών του υποδείγματος όταν οι προσδοκίες διαμορφώνονται ορθολογικά:

$$Y_t - c_1(1+v)Y_{t-1} + vc_1Y_{t-2} = b_0 + b_2E_{t-1}(\Delta R_t) \overset{(5.266)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow Y_t - c_1(1+v)Y_{t-1} + vc_1Y_{t-2} =$$

$$= b_0 - \frac{\varphi}{1+\varphi}\left[b_0 + c_1(1+v)\,Y_{t-1} - vc_1Y_{t-2} - \frac{M_0(1+m)^t}{d_1}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y_t - \left(1-\frac{\varphi}{1+\varphi}\right)c_1(1+v)Y_{t-1} + \left(1-\frac{\varphi}{1+\varphi}\right)vc_1Y_{t-2} =$$

$$= \left(1-\frac{\varphi}{1+\varphi}\right)b_0 + \frac{\varphi}{1+\varphi}\frac{M_0(1+m)^t}{d_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y_t - \frac{c_1(1+v)}{1+\varphi}Y_{t-1} + \frac{vc_1}{1+\varphi}Y_{t-2} = \frac{b_0}{1+\varphi} + \frac{\varphi}{1+\varphi}\frac{M_0(1+m)^t}{d_1} \xrightarrow{+2\ \text{χρονικές περίοδοι}}$$

$$\rightarrow \qquad Y_{t+2} + \delta_1 Y_{t+1} + \delta_0 Y_t = G(t) \qquad \textbf{\textit{(5.267)}}$$

όπου $\delta_1 = -\frac{c_1(1+v)}{1+\varphi}$, $\delta_0 = \frac{vc_1}{1+\varphi}$ και $G(t) = \frac{b_0}{1+\varphi} + \frac{\varphi}{1+\varphi}\frac{M_0(1+m)^{t+2}}{d_1}$

Όπως διαπιστώνουμε, στα πλαίσια του υποδείγματός μας και βάσει του μηχανισμού των ορθολογικών προσδοκιών προκύπτει μία εξίσωση διαφορών δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές, η γενική λύση της οποίας (Y_t) αποτελεί το άθροισμα μίας μερικής λύσης της (Y_t^p) με τη συμπληρωματική της λύση (Y_t^c), με τη γενική δηλαδή λύση της ομογενούς εξίσωσης διαφορών:

$$Y_{t+2} + \delta_1 Y_{t+1} + \delta_0 Y_t = 0 \qquad \textbf{\textit{(5.268)}}$$

Με άλλα λόγια η γενική λύση της βασικής εξίσωσης διαφορών θα έχει ως εξής:

$$Y_t = Y_t^p + Y_t^c \qquad \textbf{\textit{(5.269)}}$$

Στη συνέχεια της ανάλυσης μας θα εξειδικεύσουμε τη μαθηματική μορφή τόσο της μερικής όσο και της συμπληρωματικής λύσης της βασικής εξίσωσης διαφορών, κατόπιν θα διερευνήσουμε τις δυναμικές ιδιότητες του υποδείγματός μας και τέλος θα επιχειρήσουμε να προσδιορίσουμε τις επιπτώσεις επί του εισοδήματος ισορροπίας οι οποίες προκύπτουν ως συνέπεια της μεταβολής του μεγέθους μίας εκ των συνιστωσών παραμέτρων του.

5.4.1 Προσδιορισμός της γενικής λύσης και διερεύνηση των δυναμικών ιδιοτήτων του υποδείγματος στα πλαίσια του μηχανισμού των ορθολογικών προσδοκιών.

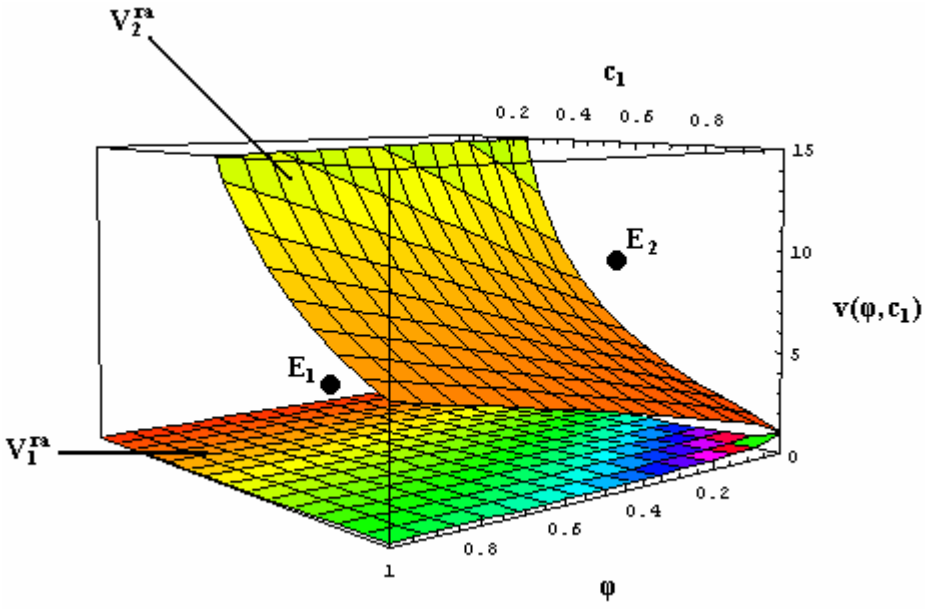
Συγκρίνοντας τις σχέσεις (5.128) και (5.267) γίνεται αντιληπτό ότι οι μηχανισμοί των στατικών και των ορθολογικών προσδοκιών μας οδηγούν στην ίδια βασική εξίσωση διαφορών. Αυτό σημαίνει ότι τόσο η γενική λύση όσο και οι δυναμικές ιδιότητες των υποδειγμάτων τα οποία αναπτύσσονται βάσει των δύο αυτών μηχανισμών είναι πανομοιότυπες. Ως εκ τούτου η μερική λύση, και συνάμα η σχέση που περιγράφει τη βραχυχρόνια τιμή ισορροπίας του εισοδήματος, η οποία εξειδικεύεται στα πλαίσια του μηχανισμού των ορθολογικών προσδοκιών έχει την ακόλουθη μορφή:

$$\tilde{Y}_t^{ra} = \tilde{Y}_t^{se} = \frac{b_0}{1 - c_1 + \varphi} + \frac{\varphi}{1+\varphi}\frac{M_0}{d_1}\frac{\tilde{m}^{t+2}}{\tilde{m}^2 + \delta_1\tilde{m} + \delta_0} \qquad (5.270)$$

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει το μέγεθος του εισοδήματος ισορροπίας θα συνιστά ένα θετικό μέγεθος για κάθε t, εφόσον το πολυώνυμο $P_6(\tilde{m}) = \tilde{m}^2 + \delta_1\tilde{m} + \delta_0$ είναι θετικά ορισμένο. Κάτι τέτοιο διασφαλίζεται εφόσον η διακρίνουσα (Δ_5) της εξίσωσης $P_6(\tilde{m}) = 0$ συνιστά ένα αρνητικό μέγεθος, εφόσον δηλαδή ο επιταχυντής παίρνει τιμές στο διάστημα $\left(v_1^{ra}, v_2^{ra}\right)$ όπου

$$\left.\begin{array}{ll} v_1^{ra} = v_1^{se} = \left(\sqrt{u} - \sqrt{u-1}\right)^2 > 0 & (5.271.1) \\ \& & \\ v_2^{ra} = v_2^{se} = \left(\sqrt{u} + \sqrt{u-1}\right)^2 > 0 & (5.271.2) \end{array}\right\} \text{ με } u = \frac{1+\varphi}{c_1}$$

Οι σχέσεις (5.271.1) και (5.271.2) παρουσιάζονται γραφικά στο διάγραμμα Δ – 5.28 μέσω των επιφανειών V_1^{ra} & V_2^{ra}. Οι δύο αυτές επιφάνειες αποτελούν το γεωμετρικό τόπο των συνδυασμών (φ,c_1,v) για τους οποίους ισχύει ότι $\Delta_5 = 0$. Για σημεία του χώρου των τριών διαστάσεων τα οποία εντοπίζονται μεταξύ των δύο επιφανειών, όπως για παράδειγμα το E_1, η διακρίνουσα Δ_5 είναι αρνητική ($\Delta_5 < 0$). Από την άλλη πλευρά σημεία τα οποία εντοπίζονται είτε κάτω από την επιφάνεια V_1^{ra} είτε πάνω από την επιφάνεια V_2^{ra}, όπως για παράδειγμα το E_2, περιγράφουν συνδυασμούς (φ,c_1,v) για τους οποίους ισχύει ότι ($\Delta_5 > 0$).



Δ – 5.28

Το γεγονός ότι η Δ_5 αποτελεί διακρίνουσα όχι μόνο της εξίσωσης $P_6(\tilde{m}) = 0$ αλλά και της χαρακτηριστικής εξίσωσης $\lambda^2 + \delta_1\lambda + \delta_0 = 0$, το παραπάνω γράφημα θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί και για την περιγραφή της διαχρονικής εξέλιξης του εισοδήματος. Έτσι σημεία του χώρου των τριών διαστάσεων τα οποία εντοπίζονται μεταξύ των δύο επιφανειών, όπως το E_1, περιγράφουν συνδυασμούς (φ, c_1, v) για τους οποίους όχι μόνο διασφαλίζεται το θετικό πρόσημο του εισοδήματος ισορροπίας, αλλά και για τους οποίους η διαχρονική εξέλιξη του εισοδήματος θα χαρακτηρίζεται από ταλαντώσεις. Όλα τα υπόλοιπα σημεία του χώρου των τριών διαστάσεων, περιγράφουν συνδυασμούς (φ, c_1, v) για τους οποίους το εισόδημα συγκλίνει ή αποκλίνει εκθετικά από τη βραχυχρόνια τιμή ισορροπίας του, όπως αυτή περιγράφεται από τη σχέση (5.270).

Ο πίνακας που ακολουθεί αποτελεί αναπαραγωγή του πίνακα 5.4 και στα πλαίσια αυτού παρουσιάζονται βάσει του προσήμου της διακρίνουσας Δ_5 οι μορφές της γενικής λύσης της βασικής εξίσωσης διαφορών (5.267).

<u>Πίνακας 5.9</u>: Μορφές της γενικής λύσης βάσει του προσήμου της διακρίνουσας Δ_5

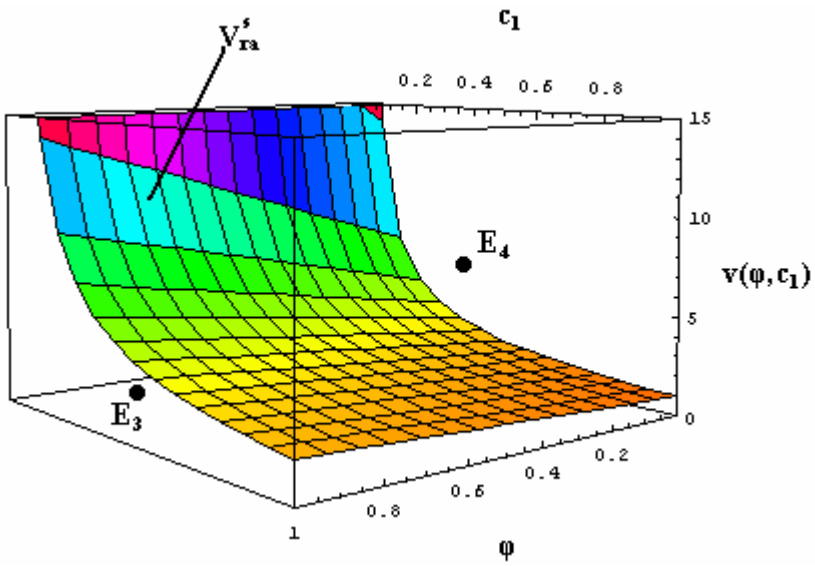
$\Delta_5 > 0$	$Y_t = \tilde{Y}_t^{se} + A_1\left[\dfrac{1+v-\sqrt{(v-v_1^{se})(v-v_2^{se})}}{2u}\right]^t + A_2\left[\dfrac{1+v+\sqrt{(v-v_1^{se})(v-v_2^{se})}}{2u}\right]^t$
$\Delta_5 = 0$	$Y_t = \tilde{Y}_t^{se} + (A_1 + A_2 t)(-\delta_1/2)^t$
$\Delta_5 < 0$	$Y_t = \tilde{Y}_t^{se} + \sqrt{\delta_0^t}\,[A_3\cos(\chi_{se}t) + A_4\sin(\chi_{se}t)]$

<u>Παρατήρηση</u>: Οι σταθερές A_i, i = 1, …. ,4, μπορούν να προσδιορισθούν με τη βοήθεια δύο αρχικών συνθηκών

Η ασυμπτωτική ευστάθεια της γενικής λύσης της βασικής εξίσωσης διαφορών (5.267) διασφαλίζεται εφόσον ικανοποιείται η ακόλουθη ανισότητα:

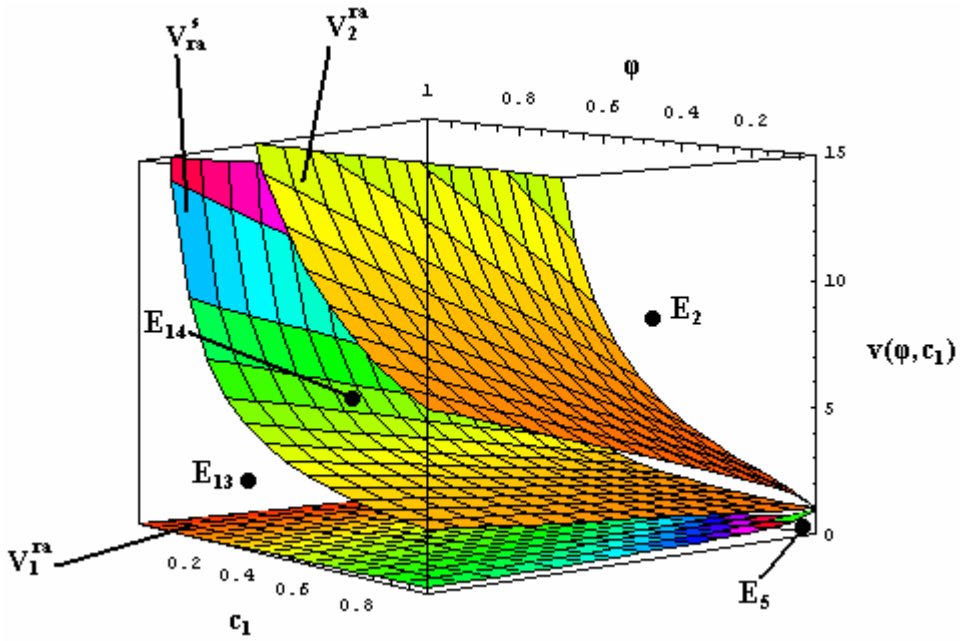
$$v < v_{ra}^{s} = \frac{1+\varphi}{c_1} = v_{se}^{s} \qquad (5.272)$$

Στα πλαίσια του γραφήματος Δ – 5.29, οι συνδυασμοί (φ,c_1,v) για τους οποίους η γενική λύση της βασικής εξίσωσης διαφορών χαρακτηρίζεται ως ασυμπτωτικά ευσταθής εντοπίζονται κάτω από την επιφάνεια V_{ra}^{s}, η οποία αποτελεί τη γραφική απεικόνιση της σχέσης $v_{ra}^{s} = (1+\varphi)/c_1$. Με άλλα λόγια για σημεία του χώρου των τριών διαστάσεων, όπως το E_3, η γενική λύση θα είναι ευσταθής, ενώ για σημεία τα οποία εντοπίζονται πάνω από την επιφάνεια V_{ra}^{s}, όπως το E_4, η γενική λύση θα είναι ασταθής.



Δ – 5.29

Στη συνέχεια και με τη βοήθεια του γραφήματος Δ – 5.30 θα διερευνήσουμε από κοινού τη μορφή της διαχρονικής εξέλιξης του εισοδήματος και την ευστάθεια της γενικής λύσης της βασικής εξίσωσης διαφορών. Πιο συγκεκριμένα, σημεία του τρισδιάστατου χώρου τα οποία εντοπίζονται μεταξύ των επιφανειών V_{ra}^{s} & V_1^{ra} (V_{ra}^{s} & V_2^{ra}), όπως το E_{13} (E_{14}), περιγράφουν συνδυασμούς (φ,c_1,v) για τους οποίους το εισόδημα θα συγκλίνει (αποκλίνει) από τη βραχυχρόνια τιμή ισορροπίας του μέσω ταλαντώσεων. Από την άλλη πλευρά, σημεία του χώρου των τριών διαστάσεων τα οποία εντοπίζονται κάτω (πάνω) από τις επιφάνειες V_{ra}^{s} & V_1^{ra} (V_{ra}^{s} & V_2^{ra}), όπως για παράδειγμα το σημείο E_5 (E_2) περιγράφουν συνδυασμούς (φ,c_1,v) για τους οποίους το εισόδημα θα συγκλίνει (αποκλίνει) εκθετικά από τη βραχυχρόνια τιμή ισορροπίας του.



Δ – 5.30

6. Θεμελίωση των θεωρητικών συμπερασμάτων της ανάλυσής μας με τη χρήση της μεθόδου της προσομοίωσης.

Έχοντας προσδιορίσει τη μορφή της συνάρτησης που περιγράφει τη διαχρονική εξέλιξη του εισοδήματος, όπως αυτή προκύπτει έπειτα από τη χρήση διαφορετικών μηχανισμών διαμόρφωσης των προσδοκιών, και έχοντας διερευνήσει τις δυναμικές ιδιότητες που διέπουν τη συμπεριφορά του, ήρθε η ώρα να διερευνήσουμε την ισχύ των θεωρητικών συμπερασμάτων στα οποία καταλήξαμε με τη βοήθεια της μεθόδου της προσομοίωσης. Πιο συγκεκριμένα, θα ξεκινήσουμε αποδίδοντας συγκεκριμένες τιμές στις παραμέτρους που χρησιμοποιούνται στα πλαίσια της ανάλυσης που πραγματοποιείται για κάθε έναν από τους τέσσερις διαφορετικούς μηχανισμούς διαμόρφωσης των προσδοκιών. Στη συνέχεια θα επιχειρήσουμε να θεμελιώσουμε την ισχύ των θεωρητικών συμπερασμάτων στα οποία καταλήξαμε, αναφορικά με τη μορφή της γενικής λύσης της βασικής εξίσωσης διαφορών και των δυναμικών ιδιοτήτων που διέπουν τη διαχρονική συμπεριφορά του εισοδήματος.

6.1 Αποτελέσματα της διαδικασίας προσομοίωσης στα πλαίσια του μηχανισμού των αναθεωρούμενων προσδοκιών.

Στα πλαίσια της τρέχουσας παραγράφου θα θεωρήσουμε τις παρακάτω τιμές αναφορικά με τις παραμέτρους του υποδείγματος: $c_1 = 0.75$, $v = 1$, $b_2 = -0.75$, $d_1 = 4/3$, $d_2 = -2$, $\gamma = 0.5$, $b_0 = 0.2$, $M_0 = 0.5$, $m = 0.05$, $Y_0 = 0.6$, $Y_1 = 0.52$, $Y_2 = 0.4$. Βάσει αυτών των δεδομένων μπορούμε να υπολογίσουμε μια σειρά μεγεθών, η γνώση των οποίων θα μας βοηθήσει στο σχηματισμό της βασικής εξίσωσης διαφορών του υποδείγματος, όταν οι προσδοκίες διαμορφώνονται βάσει του μηχανισμού των αναθεωρούμενων προσδοκιών. Πιο συγκεκριμένα βρίσκουμε ότι:

$$\varphi = \frac{b_2\, d_1}{d_2} = \frac{1}{2} \qquad (6.1) \qquad h = 1 - \gamma = \frac{1}{2} \qquad (6.2)$$

$$\tilde{m} = 1 + m = \frac{21}{20} \qquad (6.3) \qquad u = \frac{1+\varphi}{c_1} = 2 \qquad (6.4)$$

$$\frac{b_0}{1 - c_1 + \varphi} = \frac{4}{15} \qquad (6.5) \qquad \frac{\varphi}{1+\varphi}\,\frac{\gamma + m}{d_1}\, M_0 = \frac{11}{160} \qquad (6.6)$$

$$a_0 = -\frac{v\, c_1 h}{1+\varphi} = -\frac{1}{4} \qquad (6.7) \qquad a_1 = \frac{c_1\left[v + (1+v)h\right]}{1+\varphi} = 1 \qquad (6.8)$$

$$a_2 = -\frac{c_1(1+v) + h\,(1+\varphi)}{1+\varphi} = -\frac{3}{2} \qquad (6.9)$$

$$g(t) = \frac{\gamma\, b_0}{1+\varphi} + \frac{\varphi\,(\gamma + m)}{d_1(1+\varphi)}\, M_0 \tilde{m}^{t+2} = \frac{1}{15} + \frac{11}{160}\left(\frac{21}{20}\right)^{t+2} \qquad (6.10)$$

$$P_1(21/20) = (21/20)^3 + a_2(21/20)^2 + a_1(21/20) + a_0 = \frac{2431}{8000} \qquad (6.11)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (5.8) , (6.1) ~ (6.4) και (6.7) ~ (6.10) προκύπτει η βασική εξίσωση διαφορών του υποδείγματος η οποία και έχει την ακόλουθη μορφή:

$$Y_{t+3} - \frac{3}{2}\, Y_{t+2} + Y_{t+1} - \frac{1}{4}\, Y_t = \frac{1}{15} + \frac{11}{160}\left(\frac{21}{20}\right)^{t+2} \qquad (6.12)$$

Συνδυάζοντας στη συνέχεια τις σχέσεις (5.47) , (6.3) , (6.5) , (6.6) και (6.11) προκύπτει η μερική λύση της βασικής εξίσωσης διαφορών (6.12):

$$\tilde{Y}_t^{ae} = \frac{4}{15} + \frac{50}{221}\left(\frac{21}{20}\right)^{t+2} \qquad (6.13)$$

Το γεγονός ότι $\tilde{Y}_0^{ae} \cong 0.516101 \neq 0.6 = Y_0$, $\tilde{Y}_1^{ae} \cong 0.528573 \neq 0.52 = Y_1$ και $\tilde{Y}_2^{ae} \cong$ $\cong 0.541668 \neq 0.4 = Y_1$ μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι κατά τις χρονικές στιγμές t = 0 , 1 και 2, το σύστημα βρίσκεται εκτός ισορροπίας. Το πρώτο λοιπόν ερώτημα που τίθεται στο σημείο αυτό σχετίζεται με το εάν και κατά πόσον ικανοποιούνται οι συνθήκες ευστάθειας, κατά πόσον δηλαδή το εισόδημα θα συγκλίνει τελικά προς την τιμή ισορροπίας του, όπως αυτή περιγράφεται από τη σχέση (6.13). Στο ερώτημα αυτό θα επιχειρήσουμε να απαντήσουμε διερευνώντας την ικανοποίηση του συστήματος των ανισοτήτων (Σ – 5.3).

Στα πλαίσια της παραγράφου 5.1.3 είδαμε ότι το σύστημα των συνθηκών ευστάθειας (Σ – 5.3), και πιο συγκεκριμένα οι συνθήκες ευστάθειας (5.67.2) και (5.67.3), θα ικανοποιούνται εφόσον η τιμή του επιταχυντή είναι τέτοια ώστε να ικανοποιείται η ακόλουθη ανισότητα: $v < v^s_{ae,2} = u < v^s_{ae,1} < v^s_{ae,3}$. Η συγκεκριμένη ανισότητα πράγματι ικανοποιείται καθώς ισχύει ότι: $v = 1 < v^s_{ae,2} = 2 < v^s_{ae,1} = 3.5 < v^s_{ae,3} = 6$. Ως εκ τούτου το εισόδημα θα συγκλίνει με το πέρασμα του χρόνου προς την τιμή ισορροπίας του, η οποία όπως είπαμε περιγράφεται από τη σχέση (6.13).

Προκειμένου να διαπιστώσουμε τη μορφή της διαχρονικής πορείας του εισοδήματος καθώς αυτό θα συγκλίνει προς την τιμή ισορροπίας του, θα προσδιορίσουμε με τη βοήθεια της σχέσης (5.14) το μέγεθος, και συνακολούθως το πρόσημο, της διακρίνουσας D. Για τον υπολογισμό της τελευταίας χρειαζόμαστε τις τιμές των παραμέτρων Q και P, το μέγεθος των οποίων έχει ως εξής:

$$Q = \frac{1}{12} \qquad \textbf{\textit{(6.14)}} \qquad \& \qquad P = 0 \qquad \textbf{\textit{(6.15)}}$$

Από το συνδυασμό των σχέσεων (5.14) , (6.14) και (6.15) εύκολα προκύπτει ότι:

$$D = Q^3 + P^2 = \frac{1}{1728} \cong 0.0006 > 0 \qquad \textbf{\textit{(6.16)}}$$

Το γεγονός ότι η διακρίνουσα D έχει θετικό πρόσημο σημαίνει ότι η διαχρονική πορεία του εισοδήματος θα χαρακτηρίζεται από ταλαντώσεις. Επιπροσθέτως το γεγονός ότι D > 0 μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η χαρακτηριστική εξίσωση, η οποία προκύπτει από το ομογενές κομμάτι της βασικής εξίσωσης διαφορών θα έχει μία πραγματική και δύο συζυγείς μιγαδικές ρίζες.

Η συγκεκριμένη μορφή της χαρακτηριστικής εξίσωσης προκύπτει από το συνδυασμό των σχέσεων (5.12) και (6.7) ~ (6.9). Πιο συγκεκριμένα έχουμε ότι:

$$\lambda^3 - \frac{3}{2}\lambda^2 + \lambda - \frac{1}{4} = 0 \qquad \textbf{\textit{(6.17)}}$$

Με τη βοήθεια των σχέσεων (5.13.1) ~ (5.13.3) θα μπορούσαμε να προσδιορίσουμε τις τρεις χαρακτηριστικές ρίζες της παραπάνω εξίσωσης εφόσον γνωρίζαμε το μέγεθος των παραμέτρων S και T. Δεδομένου ότι:

$$S = \sqrt[3]{P + \sqrt{D}} = \frac{\sqrt{3}}{6} \qquad \textbf{\textit{(6.18)}} \qquad \& \qquad T = \sqrt[3]{P - \sqrt{D}} = -\frac{\sqrt{3}}{6} \qquad \textbf{\textit{(6.19)}}$$

από το συνδυασμό των σχέσεων (5.13.1) ~ (5.13.3) , (6.18) και (6.19) προκύπτει ότι:

$$\lambda_1 = S + T - \frac{a_2}{3} = \frac{1}{2} \qquad \textbf{\textit{(6.20)}} \qquad \& \qquad \lambda_{2,3} = \frac{1}{2}(1 \pm i) \qquad \textbf{\textit{(6.21)}} \quad , \quad i = \sqrt{-1}$$

Η απόλυτη τιμή των μιγαδικών ριζών δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\Re = \sqrt{(1/2)^2 + (1/2)^2} = \sqrt{2}/2 \qquad \textbf{\textit{(6.22)}}$$

Το γεγονός ότι $0 < \lambda_1 < 1$ και $0 < \Re \cong 0.707 < 1$, το γεγονός δηλαδή ότι κατά απόλυτη τιμή οι χαρακτηριστικές ρίζες είναι μικρότερες της μονάδας, έρχεται να επιβεβαιώσει τα συμπεράσματα στα οποία καταλήξαμε αναφορικά με την ευστάθεια του υποδείγματος.

Η συμπληρωματική λύση της βασικής εξίσωσης διαφορών (6.12) θα προσδιορισθεί με τη βοήθεια των σχέσεων (5.35), (6.20), (6.22) και (5.34). Το μέγεθος της γωνίας χ_{ae} προσδιορίζεται με τη βοήθεια των σχέσεων (5.34), (6.9), (6.18) και (6.19) από το συνδυασμό των οποίων προκύπτει ότι:

$$\chi_{ae} = \arctan\left[\frac{3\sqrt{3}\left(T - S\right)}{3\left(S + T\right) + 2\,a_2}\right] = \arctan(1) = \frac{\pi}{4} \qquad \textit{(6.23)}$$

Συνδυάζοντας στη συνέχεια τις σχέσεις (5.35), (6.20), (6.22) και (6.23) προκύπτει η μορφή της συμπληρωματικής λύσης η οποία και έχει ως ακολούθως:

$$Y_t^c = A_1 (1/2)^t + \left(\sqrt{2}/2\right)^t \left[A_4 \cos(\pi\, t/4) + A_5 \sin(\pi\, t/4)\right] \qquad \textit{(6.24)}$$

όπου $A_4 = A_2 + A_3$ & $A_5 = \left(A_2 - A_3\right) i$

Από το άθροισμα των σχέσεων (6.13) και (6.24) προκύπτει η γενική λύση της βασικής εξίσωσης διαφορών (6.12), η μαθηματική μορφή της οποίας έχει ως εξής:

$$Y_t = \frac{4}{15} + \frac{50}{221}\left(\frac{21}{20}\right)^{t+2} + A_1\left(\frac{1}{2}\right)^t + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^t \left[A_4 \cos\left(\frac{\pi\, t}{4}\right) + A_5 \sin\left(\frac{\pi\, t}{4}\right)\right] \qquad \textit{(6.25)}$$

Με τη βοήθεια της παραπάνω σχέσης και των τριών αρχικών συνθηκών, της τιμής δηλαδή του εισοδήματος κατά τις χρονικές στιγμές t = 0 , 1 και 2, θα προσδιορίσουμε στη συνέχεια τις τιμές των σταθερών A_1 , A_4 και A_5. Οι τιμές αυτών των σταθερών θα προσδιορισθούν επιλύοντας το σύστημα των τριών εξισώσεων που σχηματίζουν οι αρχικές συνθήκες ως προς τις άγνωστες σταθερές A_1 , A_4 και A_5. Πιο συγκεκριμένα έχουμε ότι:

$$\left.\begin{array}{l} Y_0 = 3/5 \\ Y_1 = 13/25 \\ Y_2 = 2/5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} \dfrac{4}{15} + \dfrac{50}{221}\left(\dfrac{21}{20}\right)^2 + A_1 + (A_4 + 0) = \dfrac{3}{5} \\ \dfrac{4}{15} + \dfrac{50}{221}\left(\dfrac{21}{20}\right)^3 + A_1\left(\dfrac{1}{2}\right) + \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\left[A_4 \cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + A_5 \sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right] = \dfrac{13}{25} \\ \dfrac{4}{15} + \dfrac{50}{221}\left(\dfrac{21}{20}\right)^4 + A_1\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 (0 + A_5) = \dfrac{2}{5} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} A_1 = -\dfrac{35}{96} \cong -0.365 & \textbf{\textit{(6.26)}} \\[2ex] A_4 = \dfrac{9515}{21216} \cong 0.449 & \textbf{\textit{(6.27)}} \\[2ex] A_5 = -\dfrac{26797}{265200} \cong -0.101 & \textbf{\textit{(6.28)}} \end{cases}$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των παραπάνω σταθερών στη σχέση (6.25) προκύπτει η τελική μορφή της γενικής λύσης της βασικής εξίσωσης διαφορών η οποία και έχει ως εξής:

$$Y_t = \frac{4}{15} + \frac{50}{221}\left(\frac{21}{20}\right)^{t+2} - 0.365\left(\frac{1}{2}\right)^t + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^t \left[0.449\cos\left(\frac{\pi t}{4}\right) - 0.101\sin\left(\frac{\pi t}{4}\right)\right] \quad \textbf{\textit{(6.29)}}$$

Στον πίνακα 6.1 που ακολουθεί παρουσιάζεται η διαχρονική εξέλιξη του εισοδήματος ισορροπίας και του τρέχοντος εισοδήματος, όπως αυτά περιγράφονται από τις σχέσεις (6.13) και (6.29) αντιστοίχως, της κατανάλωσης και των επενδύσεων. Σε γεωμετρικούς όρους, η ταλάντωση του εισοδήματος και τελικώς η σύγκλισή του προς την τιμή ισορροπίας του παρουσιάζεται στο γράφημα Δ – 6.1. Όπως διαπιστώνουμε η σύγκλιση του εισοδήματος επιτυγχάνεται σχετικά σύντομα, κάτι που οφείλεται στο γεγονός ότι οι τιμές τόσο της πραγματικής χαρακτηριστικής ρίζας (λ_1), όσο και της απόλυτης τιμής των συζυγών μιγαδικών ριζών ($\Re$), δεν εντοπίζονται πολύ κοντά στο άνω άκρο του διαστήματος (0,1).

Βάσει της ανάλυσης που πραγματοποιείται στα πλαίσια του παραρτήματος ΣΤ, το πρόσημο της επιτοκιακής διαφοράς ισορροπίας $\left(\overline{\Delta R}_t^{ae}\right)$ αποτελεί συνάρτηση του χρόνου. Πιο συγκεκριμένα, το γεγονός ότι αφενός ο επιταχυντής κινείται εντός του διαστήματος $\left(\overline{v}_1^{ae}, \overline{v}_2^{ae}\right)$, όπου $\overline{v}_1^{ae} = 1/3$ και $\overline{v}_2^{ae} = 3$, και αφετέρου ότι η παράμετρος $\tilde{m}$ είναι μεγαλύτερη της ρίζας $\tilde{m}_1^{ae}$ $\left(\tilde{m} = 1.05 > 0.5 = \tilde{m}_1^{ae}\right)$, μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι το πρόσημο της επιτοκιακής διαφοράς ισορροπίας θα προσδιορίζεται με τη βοήθεια της σχέσης (6.30):

$$\begin{cases} \overline{\Delta R}_t^{ae} > 0 \quad \forall \quad t < \Omega_7 \\[2ex] \overline{\Delta R}_t^{ae} = 0 \quad \text{για} \quad t = \Omega_7 \\[2ex] \overline{\Delta R}_t^{ae} < 0 \quad \forall \quad t > \Omega_7 \end{cases} \qquad \textbf{\textit{(6.30)}}$$

όπου $\Omega_7 = \dfrac{\ln(-\Omega_6/\Omega_4) - \ln(\Omega_5)}{\ln(\tilde{m})} = \dfrac{\ln\left[-(8/45)/(-11/40)\right] - \ln(74/221)}{\ln(21/20)} = 13.484 \cong 14$

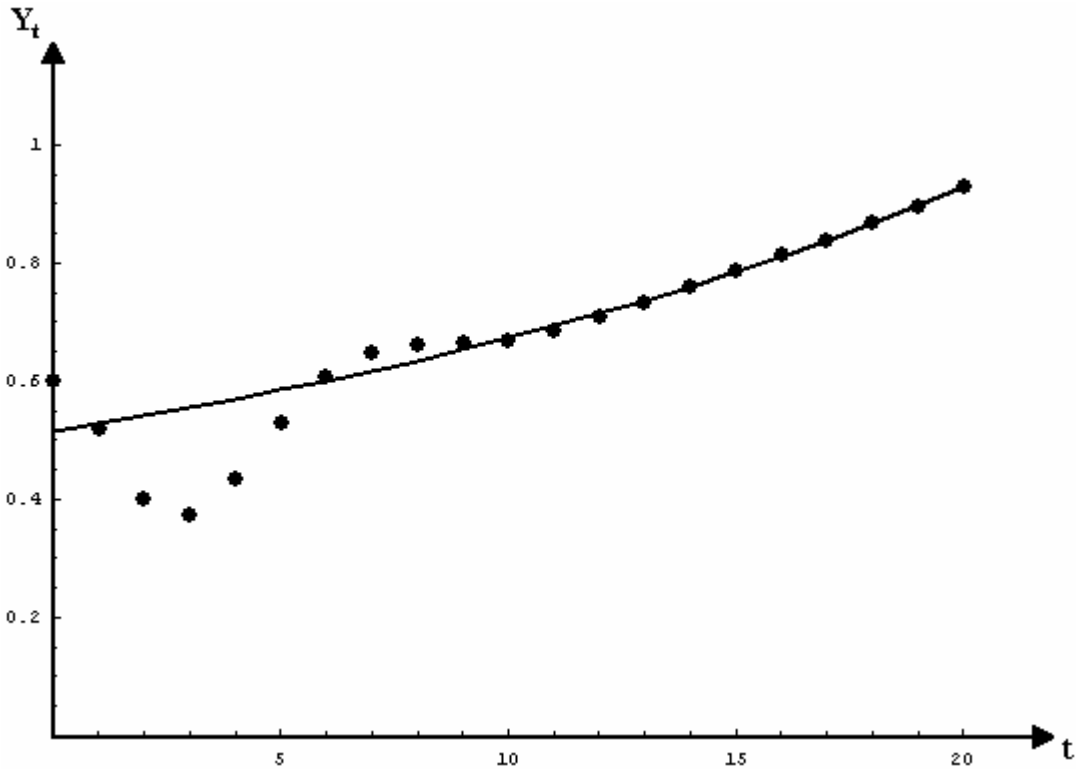
<u>Πίνακας 6.1</u>: Η διαχρονική εξέλιξη του εισοδήματος της κατανάλωσης και των επενδύσεων καθώς του μεγέθους του εισοδήματος ισορροπίας.

t	$\widetilde{Y}_t^{ae}$	Y_t	C_t	I_t
0	0.516101	0.60	0.243438	0.356563
1	0.528573	0.52	0.45	0.07
2	0.541668	0.40	0.39	0.01
3	0.555418	0.372464	0.30	0.072464
4	0.569856	0.434949	0.279348	0.155601
5	0.585015	0.530192	0.326212	0.203981
6	0.600933	0.607867	0.397644	0.210222
7	0.617646	0.649143	0.455900	0.193243
8	0.635195	0.661801	0.486857	0.174944
9	0.653621	0.663767	0.496351	0.167416
10	0.672969	0.669455	0.497825	0.171630
11	0.693284	0.684520	0.502091	0.182428
12	0.714615	0.707518	0.513390	0.194129
13	0.737012	0.734254	0.530639	0.203615
14	0.760530	0.761297	0.550690	0.210607
15	0.785223	0.787358	0.570973	0.216386
16	0.811151	0.812897	0.590519	0.222378
17	0.838375	0.839051	0.609673	0.229378
18	0.866960	0.866762	0.629288	0.237474
19	0.896975	0.896438	0.650071	0.246366
20	0.928490	0.928052	0.672328	0.255724
21	0.961582	0.961412	0.696039	0.265373
22	0.996327	0.996377	0.721059	0.275318
23	1.032810	1.032940	0.747282	0.285662
24	1.071120	1.071230	0.774708	0.296519
25	1.111340	1.111380	0.803420	0.307962

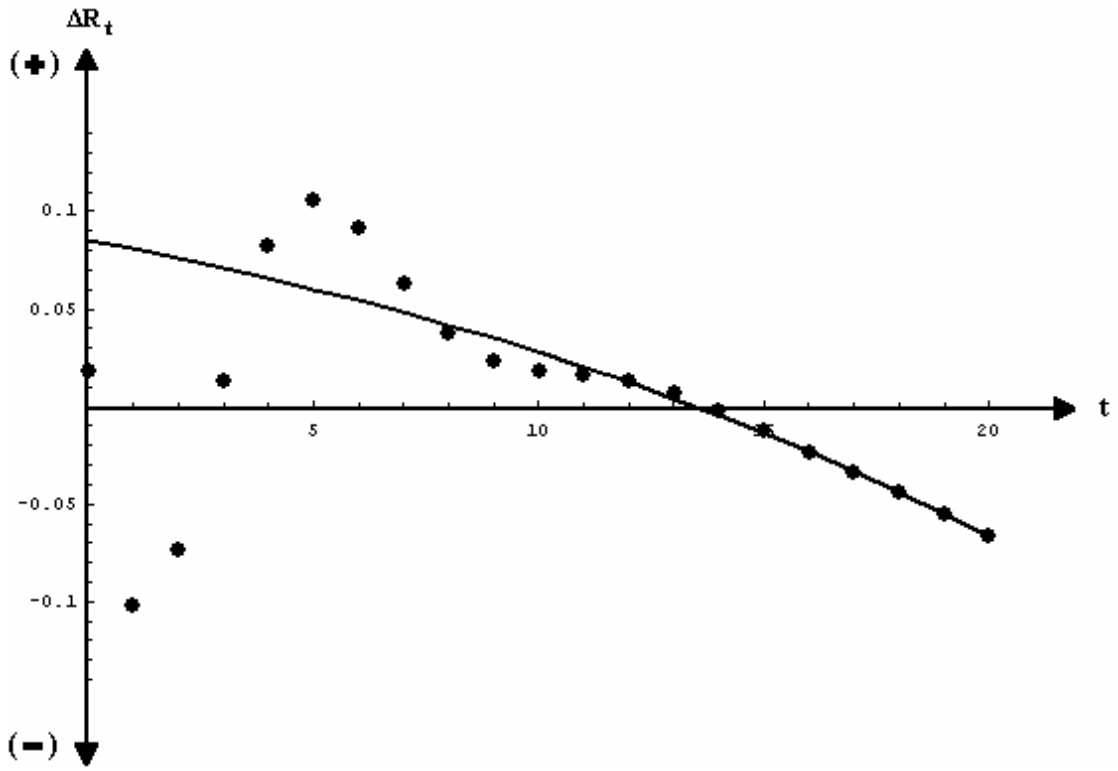
Σύμφωνα με τη σχέση (6.30) η επιτοκιακή διαφορά ισορροπίας θα αποτελεί ένα θετικό μέγεθος για $t < 14$. Για $t = 14$ η επιτοκιακή διαφορά ισορροπίας θα μηδενίζεται ενώ για $t > 14$ η επιτοκιακή διαφορά ισορροπίας θα συνιστά ένα αρνητικό μέγεθος. Το συμπέρασμα αυτό επιβεβαιώνεται και από το γράφημα Δ – 6.2 στο οποίο παρουσιάζεται, μέσω της συνεχούς καμπύλης, η διαχρονική εξέλιξη της επιτοκιακής διαφοράς ισορροπίας, όπως αυτή προσδιορίζεται για κάθε χρονική στιγμή βάσει της σχέσης[53]

$$\overline{\Delta R_t^{ae}} = \frac{8}{45} - \frac{407}{4420}\left(\frac{21}{20}\right)^t \qquad (6.31)$$

[53] Η συγκεκριμένη μορφή της σχέσης (6.31) προκύπτει από τη σχέση (ΣΤ.3) του έκτου παραρτήματος θέτοντας όπου $\Omega_4 = -11/40$, $\Omega_5 = 74/221$, $\Omega_6 = 8/45$ και $1 + m = 21/20$.



Δ – 6.1



Δ – 6.2

καθώς και η τρέχουσα τιμή της επιτοκιακής διαφοράς, το μέγεθος της οποίας προσδιορίζεται με τη βοήθεια της ακόλουθης σχέσης[54]:

$$\Delta R_t = \frac{20\left[7072 - 3663\left(\frac{21}{20}\right)^t\right] - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^t\left[53594\cos\left(\frac{\pi t}{4}\right) + 237875\sin\left(\frac{\pi t}{4}\right)\right]}{795600} \qquad (6.32)$$

Σε αριθμητικούς όρους το μέγεθος της επιτοκιακής διαφοράς, όπως αυτή προσδιορίζεται βάσει των σχέσεων (6.31) & (6.32), παρουσιάζεται στα πλαίσια του πίνακα 6.2.

<u>Πίνακας 6.2</u>: Διαχρονική εξέλιξη της τρέχουσας επιτοκιακής διαφοράς και του μεγέθους ισορροπίας της.

t	ΔR_t^{ae}	$\overline{\Delta R}_t^{ae}$
0	0.0183333	0.0856963
1	– 0.1020830	0.0810923
2	– 0.0732361	0.0762580
3	0.0132757	0.0711820
4	0.0826930	0.0658522
5	0.1060500	0.0602559
6	0.0917534	0.0543798
7	0.0626865	0.0482099
8	0.0375214	0.0417315
9	0.0234808	0.0349292
10	0.0184434	0.0277868
11	0.0166681	0.0202873
12	0.0134653	0.0124127
13	0.0070066	0.0041445
14	– 0.0022014	– 0.0045372
15	– 0.0127482	– 0.0136529
16	– 0.0234876	– 0.0232245
17	– 0.0339901	– 0.0332746
18	– 0.0444112	– 0.0438272
19	– 0.0551337	– 0.0549075
20	– 0.0664759	– 0.0665417
21	– 0.0785788	– 0.0787577
22	– 0.0914385	– 0.0915845
23	– 0.1049960	– 0.1050530
24	– 0.1192110	– 0.1191940
25	– 0.1340870	– 0.1340430

[54] Η συγκεκριμένη σχέση προκύπτει έπειτα από το συνδυασμό των σχέσεων (6.29) και (5.5)

6.2 Αποτελέσματα της διαδικασίας προσομοίωσης στα πλαίσια του μηχανισμού των στατικών προσδοκιών.

Στην τρέχουσα παράγραφο θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα της προσομοίωσης που πραγματοποιείται στα πλαίσια του μηχανισμού των στατικών προσδοκιών, θεωρώντας τις παρακάτω τιμές αναφορικά με τις παραμέτρους και τις αρχικές συνθήκες του υποδείγματος: $c_1 = 0.99$, $v = 11/9$, $b_2 = -0.75$, $d_1 = 4/3$, $d_2 = -1/3$, $b_0 = 0$, $M_0 = 1$, $m = 0.1$, $Y_0 = 0.5$ & $Y_1 = 0.9$.

Προκειμένου να διευκολυνθούμε στην εξειδίκευση της βασικής εξίσωσης διαφορών και της γενικής της λύσης, θα χρησιμοποιήσουμε τις τιμές των παραμέτρων που μόλις παραθέσαμε προκειμένου να προσδιορίσουμε τις αριθμητικές τιμές μίας σειράς μεγεθών όπως:

$$\varphi = \frac{b_2 d_1}{d_2} = 3 \qquad (6.33) \qquad \tilde{m} = 1 + m = \frac{11}{10} \qquad (6.34)$$

$$u = \frac{1+\varphi}{c_1} = \frac{400}{99} \qquad (6.35) \qquad \frac{\varphi}{1+\varphi}\frac{M_0}{d_1} = \frac{9}{16} \qquad (6.36)$$

$$\delta_0 = \frac{v\,c_1}{1+\varphi} = \frac{121}{400} \qquad (6.37) \qquad \delta_1 = -\frac{c_1(1+v)}{1+\varphi} = -\frac{11}{20} \qquad (6.38)$$

$$v_1^{se} = \left(\sqrt{u} - \sqrt{u-1}\right)^2 \cong 0.071 \qquad (6.39) \qquad v_2^{se} = \left(\sqrt{u} + \sqrt{u-1}\right)^2 \cong 14.091 \qquad (6.40)$$

$$\frac{b_0}{1 - c_1 + \varphi} = 0 \qquad (6.41) \qquad \bar{v}_2^{se} = \frac{\left(1+\sqrt{1-c_1}\right)^2}{c_1} = \frac{11}{9} \qquad (6.42)$$

$$G(t) = \frac{b_0}{1+\varphi} + \frac{\varphi}{1+\varphi}\frac{M_0}{d_1}\tilde{m}^{t+2} = \frac{9}{16}\left(\frac{11}{10}\right)^{t+2} \qquad (6.43)$$

$$P_6(11/10) = (11/10)^2 + \delta_1(11/10) + \delta_0 = \frac{363}{400} \qquad (6.44)$$

Από το συνδυασμό των σχέσεων (5.128) , (6.37) , (6.38) και (6.43) προκύπτει η βασική εξίσωση διαφορών του υποδείγματος η οποία και έχει την ακόλουθη μορφή:

$$Y_{t+2} - \frac{11}{20}Y_{t+1} + \frac{121}{400} = \frac{9}{16}\left(\frac{11}{10}\right)^{t+2} \qquad (6.45)$$

Αντικαθιστώντας στη συνέχεια τις σχέσεις (6.34) , (6.36) , (6.41) & (6.44) στη σχέση (5.158) παίρνουμε τη μερική λύση της παραπάνω εξίσωσης διαφορών η μορφή της οποίας έχει ως εξής:

$$\widetilde{Y}_t^{se} = \frac{3}{4}\left(\frac{11}{10}\right)^t \qquad \textbf{\textit{(6.46)}}$$

Με τη βοήθεια της παραπάνω σχέσης μπορούμε εύκολα να προσδιορίσουμε τις τιμές ισορροπίας του εισοδήματος κατά τις χρονικές στιγμές t = 0 & t = 1. Το γεγονός ότι $Y_0 = 0.5 < 0.75 = \widetilde{Y}_0^{se}$ και $Y_1 = 0.9 > 0.825 = \widetilde{Y}_1^{se}$, μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι κατά τις χρονικές στιγμές t = 0 και t = 1 το σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση ανισορροπίας. Βάσει αυτής της διαπίστωσης προκύπτουν στο σημείο αυτό δύο ερωτήματα. Το πρώτο σχετίζεται με την ευστάθεια της γενικής λύσης της βασικής εξίσωσης διαφορών (6.45). Το δεύτερο ερώτημα σχετίζεται με τη συγκεκριμένη μορφή που θα παρουσιάζει η διαχρονική πορεία του εισοδήματος, το εάν δηλαδή θα χαρακτηρίζεται από ταλαντώσεις ή θα είναι εκθετική.

Προκειμένου να απαντήσουμε στο πρώτο ερώτημα θα πρέπει να διερευνήσουμε κατά πόσο ικανοποιείται η συνθήκη ευστάθειας (5.187.2). Το γεγονός ότι $v \cong 1.222 < 4.04 \cong u = v_{se}^{s}$ μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η συνθήκη ευστάθειας, η οποία εξειδικεύτηκε στα πλαίσια του μηχανισμού των στατικών προσδοκιών, ικανοποιείται. Αυτό σημαίνει ότι το εισόδημα θα συγκλίνει με το πέρασμα του χρόνου προς την τιμή ισορροπίας του, όπως αυτή περιγράφεται από τη σχέση (6.46).

Η μορφή που θα έχει η πορεία του εισοδήματος θα εξαρτηθεί από το πρόσημο της διακρίνουσας της χαρακτηριστικής εξίσωσης. Η μορφή της τελευταίας προκύπτει από το συνδυασμό των σχέσεων (5.133) , (6.37) και (6.38) και έχει ως εξής:

$$\lambda^2 - \frac{11}{20}\lambda + \frac{121}{400} = 0 \qquad \textbf{\textit{(6.47)}}$$

Με τη βοήθεια των σχέσεων (6.39) και (6.40) μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι η τιμή του επιταχυντή κινείται εντός του διαστήματος $(v_1^{se}, v_2^{se}) = (0.071, 14.091)$. Αυτό σημαίνει, βάσει της ανάλυσης που πραγματοποιήσαμε στην παράγραφο 5.2.1, ότι η διακρίνουσα της χαρακτηριστικής εξίσωσης έχει αρνητικό πρόσημο. Πράγματι, το μέγεθος της τελευταίας έχει ως εξής:

$$\Delta_5 = -3\left(\frac{11}{20}\right)^2 = -\frac{363}{400} < 0 \qquad \textbf{\textit{(6.48)}}$$

Δεδομένου του αρνητικού προσήμου της διακρίνουσας της χαρακτηριστικής εξίσωσης, η συμπληρωματική λύση της βασικής εξίσωσης διαφορών (6.45) θα περιγράφεται από τη σχέση (5.155):

$$Y_t^c = \sqrt{\delta_0^t}\left[A_3 \cos(\chi_{se} t) + A_4 \sin(\chi_{se} t)\right] \qquad \textbf{\textit{(5.155)}}$$

όπου:

$$\chi_{se} = -\arctan\left(\sqrt{-\Delta_5}/\delta_1\right) \underset{(6.48)}{\overset{(6.38)}{=}} \arctan\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3} \qquad \textbf{\textit{(6.49)}}$$

Η αντικατάσταση των σχέσεων (6.37) και (6.49) στη σχέση (5.155) έχει ως συνέπεια την τροποποίηση της τελευταίας, η οποία και λαμβάνει την ακόλουθη μορφή:

$$Y_t^c = (11/20)^t \left[A_3 \cos(\pi\, t/3) + A_4 \sin(\pi\, t/3)\right] \qquad \textbf{\textit{(6.50)}}$$

Η γενική λύση της βασικής εξίσωσης διαφορών δίνεται από το άθροισμα των σχέσεων (6.46) και (6.50) και έχει την ακόλουθη μορφή:

$$Y_t = \tilde{Y}_t^{se} + Y_t^c = \frac{3}{4}\left(\frac{11}{10}\right)^t + \left(\frac{11}{20}\right)^t \left[A_3 \cos\left(\frac{\pi\, t}{3}\right) + A_4 \sin\left(\frac{\pi\, t}{3}\right)\right] \qquad \textbf{\textit{(6.51)}}$$

Στη συνέχεια, και με τη βοήθεια της παραπάνω σχέσης, θα προσδιορίσουμε τις τιμές των αυθαίρετων σταθερών A_3 και A_4, επιλύοντας το σύστημα των εξισώσεων που συγκροτούν οι δύο αρχικές συνθήκες $Y_0 = 0.5$ και $Y_1 = 0.9$ ως προς τις δύο άγνωστες σταθερές. Πιο συγκεκριμένα:

$$\left.\begin{array}{l} Y_0 = \dfrac{1}{2} \\ Y_1 = \dfrac{9}{10} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} \dfrac{3}{4} + A_3 + 0 = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{33}{40} + \dfrac{11}{20}\left(\dfrac{A_3}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} A_4\right) = \dfrac{9}{10} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} A_3 = -\dfrac{1}{4} \\ A_3 + \sqrt{3}\, A_4 = \dfrac{3}{11} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{ll} A_3 = -\dfrac{1}{4} & \textbf{\textit{(6.52)}} \\ A_4 = \dfrac{23\sqrt{3}}{132} & \textbf{\textit{(6.53)}} \end{array}\right\}$$

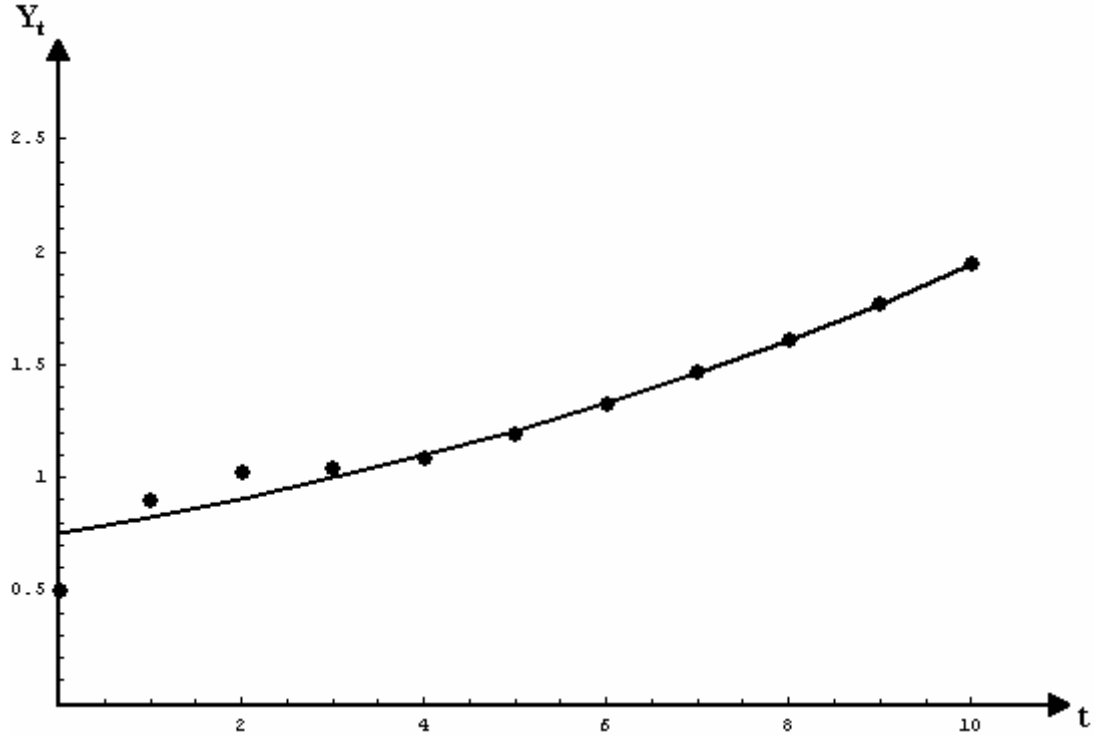
Αντικαθιστώντας τις τιμές των δύο σταθερών που μόλις προσδιορίσαμε στη σχέση (6.51), παίρνουμε την τελική μορφή της γενικής λύσης της βασικής εξίσωσης διαφορών η οποία έχει ως ακολούθως:

$$Y_t = \frac{3}{4}\left(\frac{11}{10}\right)^t + \left(\frac{11}{20}\right)^t \left[\frac{23\sqrt{3}}{132} \sin\left(\frac{\pi\, t}{3}\right) - \frac{1}{4} \cos\left(\frac{\pi\, t}{3}\right)\right] \qquad \textbf{\textit{(6.54)}}$$

<u>Πίνακας 6.3</u>: Η διαχρονική εξέλιξη του εισοδήματος ισορροπίας, του τρέχοντος εισοδήματος, της κατανάλωσης, των επενδύσεων, της επιτοκιακής διαφοράς ισορροπίας και της τρέχουσας επιτοκιακής διαφοράς.

t	$\widetilde{Y}_t^{se}$	Y_t	C_t	I_t	$\overline{\Delta R}_t^{se}$	ΔR_t
0	0.75	0.5	0.025	0.025	0	0.3
1	0.825	0.9	0.495	0.405	0	0.4675
2	0.9075	1.02438	0.891	0.133375	0	0.1663750
3	0.99825	1.03984	1.01413	0.025713	0	– 0.04991250
4	1.09808	1.08560	1.02945	0.056152	0	– 0.07778030
5	1.20788	1.18844	1.07474	0.113697	0	– 0.02768060
6	1.32867	1.32175	1.17655	0.145198	0	0.00830420
7	1.46154	1.46361	1.30853	0.155081	0	0.01294070
8	1.60769	1.61093	1.44898	0.161949	0	0.00460537
9	1.76846	1.76961	1.59482	0.174795	0	– 0.00138161
10	1.94531	1.94496	1.75192	0.193045	0	– 0.00215301
11	2.13984	2.13930	1.92551	0.213787	0	– 0.0007662180
12	2.35382	2.35363	2.11791	0.235723	0	0.0002298650
13	2.58920	2.58926	2.33009	0.259167	0	0.0003582070
14	2.84812	2.84821	2.56337	0.284845	0	0.0001274790
15	3.13294	3.13297	2.81973	0.313237	0	– 0.0000382438
16	3.44623	3.44622	3.10164	0.344582	0	– 0.0000595967
17	3.79085	3.79084	3.41176	0.379080	0	– 0.0000212094
18	4.16994	4.16993	3.75293	0.417003	0	6.36282×10^{-6}
19	4.58693	4.58693	4.12823	0.458700	0	9.91540×10^{-6}
20	5.04562	5.04563	4.54106	0.504563	0	3.52871×10^{-6}
21	5.55019	5.55019	4.99517	0.555017	0	-1.05861×10^{-6}
22	6.10521	6.10521	5.49469	0.610519	0	-1.64967×10^{-6}
23	6.71573	6.71573	6.04415	0.671573	0	-5.87090×10^{-7}
24	7.38730	7.38730	6.64857	0.738730	0	1.76127×10^{-7}
25	8.12603	8.12603	7.31343	0.812603	0	2.74464×10^{-7}

Στον παραπάνω πίνακα παρουσιάζεται, μεταξύ των άλλων, η διαχρονική εξέλιξη του μεγέθους του εισοδήματος ισορροπίας $\left(\widetilde{Y}_t^{se}\right)$ και του τρέχοντος εισοδήματος (Y_t), όπως αυτά προσδιορίζονται μέσω των σχέσεων (6.46) και (6.54) αντιστοίχως, της κατανάλωσης και των επενδύσεων. Η εξέλιξη του μεγέθους του εισοδήματος ισορροπίας και του τρέχοντος εισοδήματος παρουσιάζεται γραφικά στο διάγραμμα Δ – 6.3. Όπως διαπιστώνουμε το εισόδημα ακολουθεί μία ημιτονοειδή πορεία συγκλίνοντας προς την τιμή ισορροπίας του, ενώ η ταλάντωσή του γύρω από αυτό «σβήνει» αρκετά γρήγορα. Η υψηλή ταχύτητα σύγκλισης του τρέχοντος εισοδήματος προς την τιμή ισορροπίας του οφείλεται στο γεγονός ότι η απόλυτη τιμή των μιγαδικών ριζών ($\Re = \sqrt{\delta_0} = 11/20$) εντοπίζεται στο μέσο περίπου του διαστήματος (0,1).



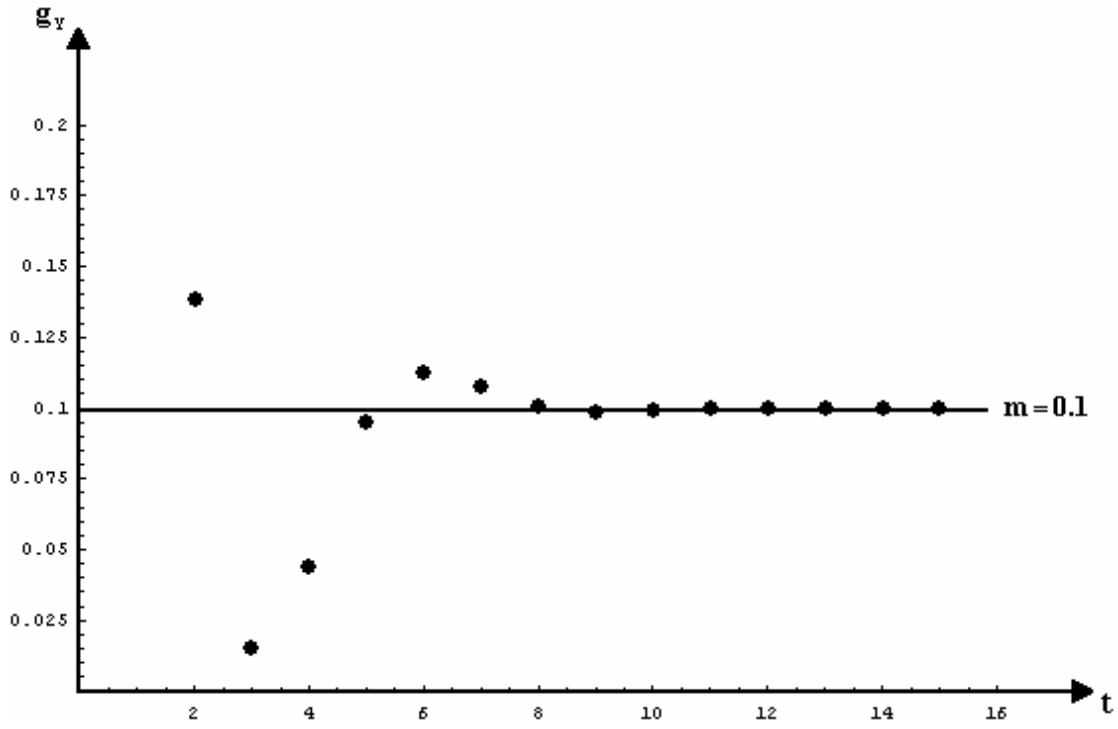
Δ – 6.3

Αξίζει να σημειωθεί εδώ ότι καθώς το εισόδημα θα συγκλίνει προς την τιμή ισορροπίας του, ο ρυθμός αύξησης του εισοδήματος θα προσεγγίζει τον σταθερό ρυθμό μεγέθυνσης της ονομαστικής προσφοράς χρήματος. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι οι αυτόνομες επενδύσεις είναι μηδενικές, κάτι που σημαίνει ότι ο ρυθμός μεταβολής του εισοδήματος ισορροπίας, όπως αυτό περιγράφεται από τη σχέση (5.158), προσδιορίζεται με τη βοήθεια της ακόλουθης σχέσης[55]:

$$g_{\tilde{Y}^{se}} = \frac{\Delta \tilde{Y}_t^{se}}{\tilde{Y}_{t-1}^{se}} = \frac{\dfrac{\varphi}{1+\varphi}\,\dfrac{M_0\, m}{d_1}\,\dfrac{\tilde{m}^{t+1}}{P_6(\tilde{m})}}{\dfrac{\varphi}{1+\varphi}\,\dfrac{M_0}{d_1}\,\dfrac{\tilde{m}^{t+1}}{P_6(\tilde{m})}} = m \qquad \textit{(6.55)}$$

Η σύγκλιση του ρυθμού μεταβολής του εισοδήματος προς το αριθμητικό μέγεθος του ρυθμού της νομισματικής επέκτασης (m = 0.1) παρουσιάζεται γραφικά στα πλαίσια του διαγράμματος Δ – 6.4

[55] Δεδομένου ότι το εισόδημα ισορροπίας το οποίο προσδιορίζεται στα πλαίσια των μηχανισμών των αναθεωρούμενων, των στατικών και των ορθολογικών προσδοκιών είναι ακριβώς το ίδιο, η σχέση (6.55) αναμένεται να περιγράφει το ρυθμό μεταβολής του εισοδήματος ισορροπίας στα πλαίσια τόσο των αναθεωρούμενων όσο και των ορθολογικών προσδοκιών .



Δ – 6.4

Στην έκτη και έβδομη στήλη του πίνακα 6.3 παρουσιάζονται αντιστοίχως οι τιμές της επιτοκιακής διαφοράς ισορροπίας $\left(\overline{\Delta R}_t^{se}\right)$ και της τρέχουσας επιτοκιακής διαφοράς. Η σχέση βάσει της οποίας προέκυψαν οι τιμές της πρώτης εξειδικεύτηκε στα πλαίσια του εβδόμου παραρτήματος, όπου και διερευνήθηκαν οι συνθήκες που διέπουν την εναλλαγή του προσήμου της επιτοκιακής διαφοράς ισορροπίας με το πέρασμα του χρόνου. Η συγκεκριμένη σχέση έχει την ακόλουθη μορφή:

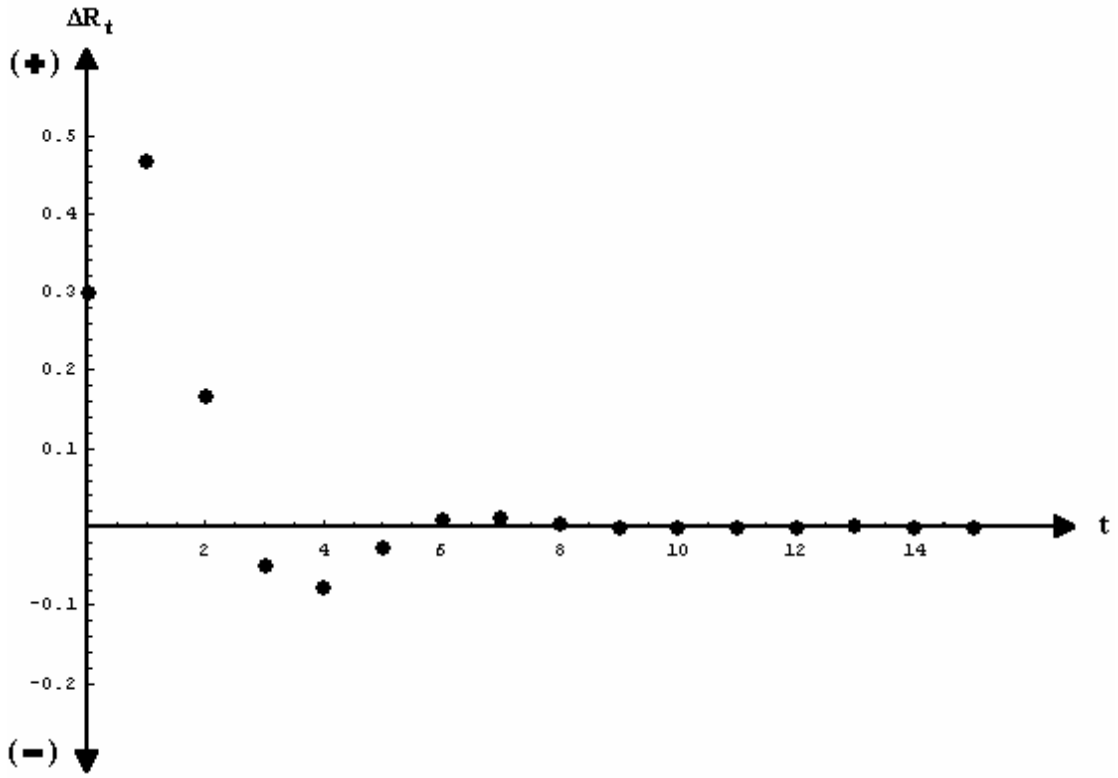
$$\overline{\Delta R}_t^{se}\Big|_{b_0=0} = \Omega_8\ \Omega_9\ \tilde{m}^t \qquad \textit{(Z.12)}$$

όπου $\Omega_8 = \dfrac{M_0}{d_2} < 0$ και $\Omega_9 = 1 - \dfrac{\varphi}{1+\varphi}\dfrac{\tilde{m}^2}{P_6(\tilde{m})}$

Η ικανοποίηση ωστόσο των σχέσεων $v = \overline{v}_2^{se} = 11/9$ & $\tilde{m} = \tilde{m}_{3,4}^{se} = 11/10$ μας οδηγεί, βάσει της ανάλυσης που πραγματοποιείται στα πλαίσια του εβδόμου παραρτήματος, στο συμπέρασμα ότι το μέγεθος Ω_9 ισούται με το μηδέν. Με άλλα λόγια σε κατάσταση ισορροπίας η τιμή της επιτοκιακής διαφοράς θα ισούται με το μηδέν. Όπως προκύπτει από την έβδομη στήλη του πίνακα 6.3, το μέγεθος της επιτοκιακής διαφοράς, το οποίο προσδιορίζεται με τη βοήθεια της σχέσης (5.169) ή ισοδύναμα μέσω της σχέσης:

$$\Delta R_t = \frac{1}{d_2}\left(M_0 \tilde{m}^{t+1} - d_1 Y_{t+1}\right) \qquad (6.56)$$

τείνει προς το μηδέν καθώς το εισόδημα κινείται προς την τιμή ισορροπίας του. Η σύγκλιση της επιτοκιακής διαφοράς προς την τιμή ισορροπίας της παρουσιάζεται γραφικά στα πλαίσια του διαγράμματος Δ – 6.5 .



Δ – 6.5

6.3 Αποτελέσματα της διαδικασίας προσομοίωσης στα πλαίσια του μηχανισμού των ορθολογικών προσδοκιών.

Στην παρούσα παράγραφο θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα της προσομοίωσης που προκύπτουν στα πλαίσια του μηχανισμού των ορθολογικών προσδοκιών. Πιο συγκεκριμένα, γνωρίζοντας ότι $c_1 = 9/10$, $v = \left(1+\sqrt{3}\right)/2$, $b_2 = -2\left(9\sqrt{3}-11\right)/5$, $d_1 = 1/2$, $d_2 = -4$, $b_0 = 1/2$, $M_0 = 3/4$, $m = 5\,\%\,(=1/20)$, $Y_0 = 5/2$ και $Y_1 = 14/5$, θα ξεκινήσουμε εξειδικεύοντας τη βασική εξίσωση διαφορών. Στη συνέχεια θα προσδιορίσουμε τη γενική της λύση και θα διερευνήσουμε τη διαχρονική εξέλιξη των μακροοικονομικών μεταβλητών του υποδείγματος. Τέλος, θα διερευνήσουμε την ισχύ της βασικής υπόθεσης που πραγματοποιούμε στα πλαίσια του μηχανισμού των ορθολογικών προσδοκιών, θα διερευνήσουμε δηλαδή το βαθμό επαλήθευσης των προσδοκιών που σχηματίζουν τα άτομα της οικονομίας.

Η εξειδίκευση της μορφής της βασικής εξίσωσης διαφορών και της γενικής της λύσης θα πραγματοποιηθεί με τη βοήθεια των ακόλουθων αριθμητικών μεγεθών:

$$\varphi = \frac{b_2 d_1}{d_2} = \frac{9\sqrt{3}-11}{20} \qquad (6.57) \qquad \tilde{m} = 1 + m = \frac{21}{20} \qquad (6.58)$$

$$u = \frac{1+\varphi}{c_1} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \qquad (6.59) \qquad \frac{\varphi}{1+\varphi}\frac{M_0}{d_1} = \frac{9\sqrt{3}-11}{6\left(1+\sqrt{3}\right)} \qquad (6.60)$$

$$\delta_0 = \frac{v\, c_1}{1+\varphi} = 1 \qquad (6.61) \qquad \delta_1 = -\frac{c_1(1+v)}{1+\varphi} = -\sqrt{3} \qquad (6.62)$$

$$\frac{b_0}{1-c_1+\varphi} = \frac{10}{9\left(\sqrt{3}-1\right)} \qquad (6.63)$$

$$v_1^{ra} = \left(\sqrt{u}-\sqrt{u-1}\right)^2 = \sqrt{3}-\sqrt{2} \cong 0.318 \qquad (6.64)$$

$$v_2^{ra} = \left(\sqrt{u}+\sqrt{u-1}\right)^2 = \sqrt{3}+\sqrt{2} \cong 3.146 \qquad (6.65)$$

$$G(t) = \frac{b_0}{1+\varphi} + \frac{\varphi}{1+\varphi}\frac{M_0}{d_1}\tilde{m}^{t+2} = \frac{10}{9\left(1+\sqrt{3}\right)} + \frac{147\left(9\sqrt{3}-11\right)}{800\left(1+\sqrt{3}\right)}\left(\frac{21}{20}\right)^t \qquad (6.66)$$

$$P_6(21/20) = (21/20)^2 + \delta_1(21/20) + \delta_0 = \frac{421\sqrt{3}-419}{400\left(1+\sqrt{3}\right)} \qquad (6.67)$$

Η βασική εξίσωση διαφορών, όπως αυτή προκύπτει από το συνδυασμό των σχέσεων (5.267), (6.61), (6.62) & (6.66), έχει την ακόλουθη μορφή:

$$Y_{t+2} - \sqrt{3}\, Y_{t+1} + Y_t = \frac{10}{9\left(1+\sqrt{3}\right)} + \frac{147\left(9\sqrt{3}-11\right)}{800\left(1+\sqrt{3}\right)}\left(\frac{21}{20}\right)^t \qquad (6.68)$$

Η γενική λύση της παραπάνω εξίσωσης διαφορών αποτελεί, όπως γνωρίζουμε, το άθροισμα μίας μερικής της λύσης με τη γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης διαφορών:

$$Y_{t+2} - \sqrt{3}\, Y_{t+1} + Y_t = 0 \qquad (6.69)$$

Η μερική λύση της (6.68) προκύπτει από το συνδυασμό των σχέσεων (5.270) , (6.58) , (6.60) , (6.63) & (6.67) και έχει την ακόλουθη μορφή:

$$\widetilde{Y}_t^{ra} = \frac{5\left(1+\sqrt{3}\right)}{9} + \frac{147\left(9\sqrt{3}-11\right)}{2\left(421\sqrt{3}-419\right)}\left(\frac{21}{20}\right)^t \qquad \textbf{\textit{(6.70)}}$$

Η συγκεκριμένη μορφή της συμπληρωματικής λύσης της βασικής εξίσωσης διαφορών, θα εξαρτηθεί από το πρόσημο της διακρίνουσας της ακόλουθης χαρακτηριστικής εξίσωσης:

$$\lambda^2 - \sqrt{3}\,\lambda + 1 = 0 \qquad \textbf{\textit{(6.71)}}$$

Το γεγονός ότι η τιμή του επιταχυντή $[\,v = (1+\sqrt{3})/2 \cong 1.366\,]$ εντοπίζεται στο διάστημα $\left(v_1^{ra}\,,\,v_2^{ra}\right) = (0.318\,,3.146)$, μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η διακρίνουσα της χαρακτηριστικής εξίσωσης (Δ_5) θα έχει αρνητικό πρόσημο. Πράγματι, από το συνδυασμό των σχέσεων (5.135) , (6.61) και (6.62) προκύπτει ότι το αριθμητικό μέγεθος της διακρίνουσας έχει ως εξής:

$$\Delta_5 = \delta_1^2 - 4\,\delta_0 = -1 \qquad \textbf{\textit{(6.72)}}$$

Γίνεται λοιπόν φανερό ότι η συμπληρωματική λύση της βασικής εξίσωσης διαφορών θα έχει την ακόλουθη γενική μορφή:

$$Y_t^c = \sqrt{\delta_0^t}\,\left[A_3\,\cos\left(\chi_{ra}\,t\right) + A_4\,\sin\left(\chi_{ra}\,t\right)\right] \qquad \textbf{\textit{(6.73)}}$$

όπου

$$\chi_{ra} = -\arctan\left(\frac{\sqrt{-\Delta_5}}{\delta_1}\right) = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{6} \qquad \textbf{\textit{(6.74)}}$$

ή ισοδύναμα

$$Y_t^c = A_3\,\cos\left(\frac{\pi\,t}{6}\right) + A_4\,\sin\left(\frac{\pi\,t}{6}\right) \qquad \textbf{\textit{(6.75)}}$$

Το άθροισμα των σχέσεων (6.70) & (6.75) μας δίνει τη γενική λύση της βασικής εξίσωσης διαφορών η μορφή της οποίας έχει ως ακολούθως:

$$Y_t = \frac{5\,(1+\sqrt{3}\,)}{9} + \frac{147\,(\,9\sqrt{3}-11\,)}{2\,(\,421\sqrt{3}-419\,)}\left(\frac{21}{20}\right)^t + A_3\,\cos\left(\frac{\pi\,t}{6}\right) + A_4\,\sin\left(\frac{\pi\,t}{6}\right) \qquad \textbf{\textit{(6.76)}}$$

Οι τιμές των σταθερών τιμών A_3 και A_4 εξαρτώνται από το ύψος του εισοδήματος κατά τις χρονικές στιγμές t = 0 και t = 1. Στην περίπτωση που ξεκινούμε από μία κατάσταση ισορροπίας, στην περίπτωση δηλαδή κατά την οποία ισχύει ότι $Y_0 = \widetilde{Y}_0^{ra} \cong$ $\cong 2.605$ και $Y_1 = \widetilde{Y}_1^{ra} \cong 2.659$, οι τιμές των δύο αυθαίρετων σταθερών θα ήταν ίσες με το μηδέν ($A_3 = A_4 = 0$). Από τις αρχικές ωστόσο συνθήκες που έχουμε στη διάθεσή μας, γνωρίζουμε ότι δεν ξεκινούμε από μία κατάσταση ισορροπίας καθώς ισχύει ότι $Y_0 = 2.5 \neq 2.605 \cong \widetilde{Y}_0^{ra}$ και $Y_1 = 2.8 \neq 2.659 \cong \widetilde{Y}_1^{ra}$. Προκειμένου να προσδιορίσουμε τις, μη μηδενικές, τιμές των αυθαίρετων σταθερών A_3 και A_4, θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση (6.76) και θα επιλύσουμε το σύστημα των δύο εξισώσεων που συγκροτείται βάσει αυτής και των δύο αρχικών συνθηκών, ως προς τις άγνωστες σταθερές. Έτσι βρίσκουμε ότι:

$$\left.\begin{aligned} Y_0 &= \frac{5(1+\sqrt{3})}{9} + \frac{147(9\sqrt{3}-11)}{2(421\sqrt{3}-419)}\left(\frac{21}{20}\right)^0 + A_3\cos(0) + A_4\sin(0) \\ Y_1 &= \frac{5(1+\sqrt{3})}{9} + \frac{147(9\sqrt{3}-11)}{2(421\sqrt{3}-419)}\left(\frac{21}{20}\right)^1 + A_3\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + A_4\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{5}{2} &= \frac{5(1+\sqrt{3})}{9} + \frac{147(9\sqrt{3}-11)}{2(421\sqrt{3}-419)} + A_3 + 0 \\ \frac{14}{5} &= \frac{5(1+\sqrt{3})}{9} + \frac{147(9\sqrt{3}-11)}{2(421\sqrt{3}-419)}\frac{21}{20} + \frac{\sqrt{3}}{2}A_3 + \frac{1}{2}A_4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} A_3 &= \frac{8449-4940\sqrt{3}}{7569-3780\sqrt{3}} \cong -0.105 \qquad \textbf{\textit{(6.77)}} \\ A_4 &= \frac{700051-398710\sqrt{3}}{151380-75600\sqrt{3}} \cong 0.463 \qquad \textbf{\textit{(6.78)}} \end{aligned}\right\}$$

Από το συνδυασμό των σχέσεων (6.76) ~ (6.78) προκύπτει η τελική μορφή της γενικής λύσης της βασικής εξίσωσης διαφορών (6.67) η οποία και έχει ως εξής:

$$Y_t = \frac{5(1+\sqrt{3})}{9} + \frac{147(9\sqrt{3}-11)}{2(421\sqrt{3}-419)}\left(\frac{21}{20}\right)^t - 0.105\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right) + 0.463\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right) \qquad \textbf{\textit{(6.79)}}$$

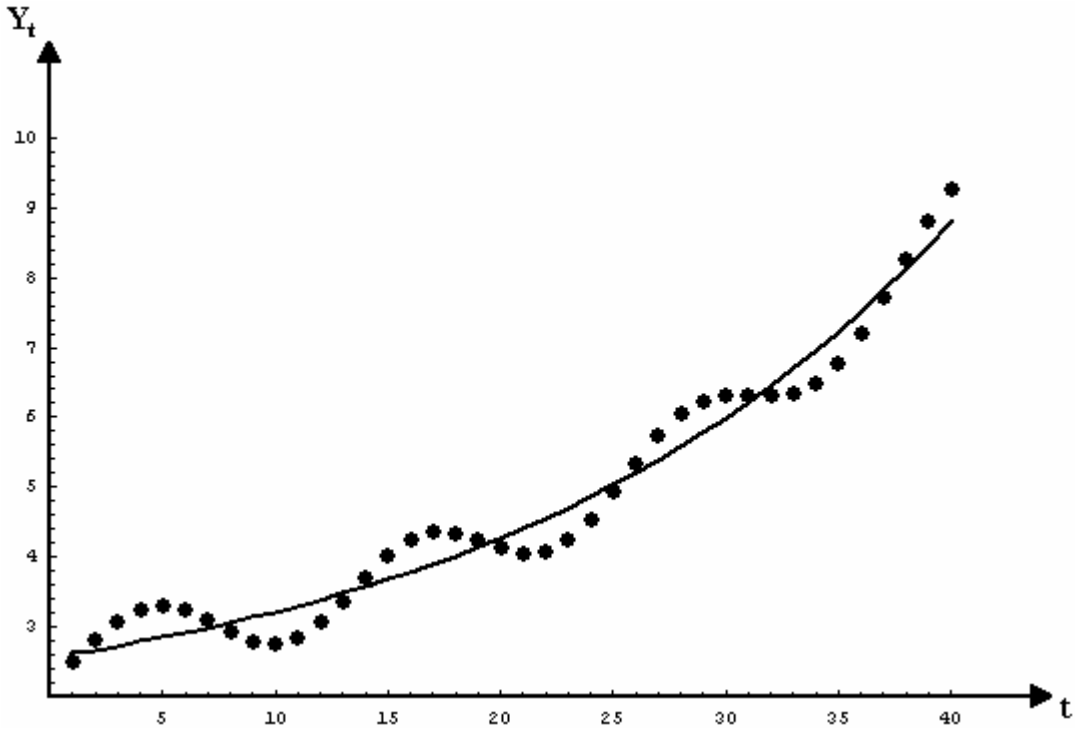
Στον πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζονται οι τιμές του εισοδήματος ισορροπίας και του τρέχοντος εισοδήματος, όπως αυτές προσδιορίζονται από τις σχέσεις (6.70) και (6.79), καθώς και εκείνες της κατανάλωσης και των επενδύσεων.

<u>Πίνακας 6.4</u>: Η διαχρονική εξέλιξη του εισοδήματος ισορροπίας, του τρέχοντος εισοδήματος, της κατανάλωσης και των επενδύσεων.

t	$\widetilde{Y}_t^{ra}$	Y_t	C_t	I_t
0	2.60504	2.5	2.00766	0.492340
1	2.65940	2.8	2.25	0.55
2	2.71648	3.06504	2.52	0.545044
3	2.77641	3.23954	2.75854	0.481004
4	2.83934	3.29294	2.91559	0.377355
5	2.90542	3.22795	2.96365	0.264299
6	2.97480	3.07983	2.90515	0.174681
7	3.04765	2.90705	2.77185	0.135195
8	3.12414	2.77557	2.61634	0.159232
9	3.20446	2.74132	2.49802	0.243308
10	3.28879	2.83519	2.46719	0.367995
11	3.37734	3.05481	2.55167	0.503140
12	3.47032	3.36528	2.74933	0.615952
13	3.56794	3.70854	3.02875	0.679792
14	3.67045	4.01901	3.33769	0.681325
15	3.77808	4.24121	3.61711	0.624100
16	3.89109	4.34470	3.81709	0.527605
17	4.00976	4.33229	3.91023	0.422062
18	4.13436	4.23939	3.89906	0.340332
19	4.26518	4.12458	3.81545	0.309128
20	4.40255	4.05398	3.71212	0.341863
21	4.54679	4.08366	3.64859	0.435070
22	4.69824	4.24463	3.67529	0.569345
23	4.85726	4.53473	3.82017	0.714557
24	5.02423	4.91920	4.08126	0.837940
25	5.19955	5.34016	4.42728	0.912879
26	5.38364	5.73221	4.80614	0.926067
27	5.57693	6.04006	5.15899	0.881079
28	5.77989	6.23349	5.43606	0.797433
29	5.99299	6.31552	5.61014	0.705381
30	6.21675	6.32179	5.68397	0.637818
31	6.45170	6.31110	5.68961	0.621488
32	6.69839	6.34983	5.67999	0.669840
33	6.95742	6.49429	5.71484	0.779446
34	7.22940	6.77580	5.84486	0.930940
35	7.51498	7.19245	6.09822	1.094230
36	7.81484	7.70981	6.47321	1.236600
37	8.12970	8.27030	6.93883	1.331470
38	8.46029	8.80886	7.44327	1.365590
39	8.80741	9.27055	7.92797	1.342580
40	9.17189	9.62550	8.34349	1.282010

Η διαχρονική εξέλιξη του τρέχοντος εισοδήματος και του εισοδήματος ισορροπίας παρουσιάζεται, σε γεωμετρικούς όρους, στα πλαίσια του γραφήματος Δ – 6.6 που ακολουθεί. Όπως διαπιστώνουμε η διαχρονική πορεία του εισοδήματος χαρακτηρίζεται από σταθερού εύρους ταλαντώσεις γύρω από την τιμή ισορροπίας του. Το συγκεκριμένο μοτίβο κίνησης οφείλεται στο γεγονός ότι η απόλυτη τιμή των συζυγών μιγαδικών χαρακτηριστικών ριζών ισούται με τη μονάδα $\left(\Re = \sqrt{\delta_0} = 1\right)$. Η περίοδος της ταλάντωσης, ο χρόνος δηλαδή που απαιτείται προκειμένου να ολοκληρωθεί μία ταλάντωση του εισοδήματος γύρω από τη μακροχρόνια τιμή ισορροπίας του, δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\widetilde{P}_{ra} = \frac{4\pi}{\sqrt{-\Delta_5}} = 12.6 \cong 13 \qquad \textbf{\textit{(6.80)}}$$



Δ – 6.6

Η χρήση του μηχανισμού των ορθολογικών προσδοκιών στα πλαίσια προσδιοριστικών υποδειγμάτων, όπως το παρόν, υπονοεί την ύπαρξη τέλειας προβλεπτικής ικανότητας (*perfect foresight*). Αυτό σημαίνει ότι τα οικονομούντα άτομα, αφού διαμορφώσουν τις προσδοκίες τους για το ύψος μίας οικονομικής μεταβλητής (X_t) λαμβάνοντας υπόψη το σύνολο των διαθέσιμων πληροφοριών, δεν πραγματοποιούν σφάλματα πρόβλεψης (*forecasting errors*). Με άλλα λόγια, και σε μαθηματικούς όρους, αναμένουμε την ικανοποίηση της ακόλουθης σχέσης:

$$FE_t = E_{t-1}\left(X_t\right) - X_t = 0 \qquad \textbf{\textit{(6.81)}}$$

Όπως θυμόμαστε, οι προσδοκώμενες τιμές του εισοδήματος και της επιτοκιακής διαφοράς προσδιορίζονται με τη βοήθεια των σχέσεων (5.265) και (5.266). Αναδιατάσοντας τους όρους που βρίσκονται στο δεξί μέλος αυτών των συναρτήσεων, οι δύο παραπάνω σχέσεις τροποποιούνται λαμβάνοντας, αντιστοίχως την ακόλουθη μορφή:

$$E_{t-1}(Y_t) = \frac{1}{1+\varphi}\left\{ b_0 + c_1\left[(1+v)\,Y_{t-1} - v\,Y_{t-2}\right] + \frac{\varphi}{d_1} M_0 (1+m)^t \right\} \qquad \textbf{(5.265)}$$

$$E_{t-1}(\Delta R_t) = -\frac{\varphi}{b_2(1+\varphi)}\left\{ b_0 + c_1\left[(1+v)\,Y_{t-1} - v\,Y_{t-2}\right] - \frac{M_0(1+m)^t}{d_1} \right\} \qquad \textbf{(5.266)}$$

Όπως γίνεται αντιληπτό από τις δύο παραπάνω σχέσεις, απαραίτητη προϋπόθεση για τον προσδιορισμό των προσδοκώμενων τιμών του εισοδήματος και της επιτοκιακής διαφοράς είναι η γνώση της γενικής λύσης της βασικής εξίσωσης διαφορών που αντιμετωπίζουμε. Δεδομένου ότι στα πλαίσια της προσομοίωσης η διακρίνουσα της χαρακτηριστικής εξίσωσης ήταν αρνητική, η γενική μορφή της συνάρτησης που περιγράφει τη διαχρονική εξέλιξη του μεγέθους του εισοδήματος έχει ως εξής:

$$Y_t = \frac{b_0}{1-c_1+\varphi} + \frac{\varphi}{1+\varphi}\frac{M_0}{d_1}\frac{\tilde{m}^{t+2}}{P_6(\tilde{m})} + R_{ra}^{t}\left[A_3\cos(\chi_{ra}t) + A_4\sin(\chi_{ra}t)\right] \qquad \textbf{(6.82)}$$

$$\text{όπου}: \tilde{Y}_t^{ra} = \tilde{Y}_t^{se} = \frac{b_0}{1-c_1+\varphi} + \frac{\varphi}{1+\varphi}\frac{M_0}{d_1}\frac{\tilde{m}^{t+2}}{P_6(\tilde{m})}\ ,\ P_6(\tilde{m}) = \tilde{m}^2 + \delta_1\tilde{m} + \delta_0\ ,\ \tilde{m} = 1+m\ ,$$

$$\delta_1 = -\frac{c_1(1+v)}{1+\varphi}\ ,\ \delta_0 = \frac{v\,c_1}{1+\varphi}\ ,\ R_{ra} = \sqrt{\delta_0}\ \text{ και }\ \chi_{ra} = -\arctan\left(\frac{\sqrt{4\delta_0 - \delta_1^2}}{\delta_1}\right)$$

Προκειμένου να διευκολυνθούμε στην ανάλυσή μας, θα προσδιορίσουμε στη συνέχεια και με τη βοήθεια της σχέσης (6.82) τα μεγέθη των Y_{t-1} και ΔY_{t-1}. Πιο συγκεκριμένα έχουμε ότι:

$$Y_{t-1} = \frac{b_0}{1-c_1+\varphi} + \frac{\varphi}{1+\varphi}\frac{M_0}{d_1}\frac{\tilde{m}^{t+1}}{P_6(\tilde{m})} + R_{ra}^{t-1}\left\{A_3\cos[\chi_{ra}(t-1)] + A_4\sin[\chi_{ra}(t-1)]\right\} =$$

$$= \frac{b_0}{1-c_1+\varphi} + \frac{\varphi}{1+\varphi}\frac{M_0}{d_1}\frac{\tilde{m}^{t+1}}{P_6(\tilde{m})} + R_{ra}^{t-1}\left\{\cos(\chi_{ra})\left[A_3\cos(\chi_{ra}t) + A_4\sin(\chi_{ra}t)\right] + \right.$$

$$\left. + \sin(\chi_{ra})\left[A_3\sin(\chi_{ra}t) - A_4\cos(\chi_{ra}t)\right]\right\} =$$

$$= \frac{b_0}{1-c_1+\varphi} + \frac{\varphi}{1+\varphi}\frac{M_0}{d_1}\frac{\tilde{m}^{t+1}}{P_6(\tilde{m})} + R_{ra}^{t-1}\left\{\frac{k_{ra}}{R_{ra}}\left[A_3\cos(\chi_{ra}t) + A_4\sin(\chi_{ra}t)\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{n_{ra}}{R_{ra}}\left[A_3\sin(\chi_{ra}t) - A_4\cos(\chi_{ra}t)\right]\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y_{t-1} = \frac{b_0}{1-c_1+\varphi} + \frac{\varphi}{1+\varphi}\frac{M_0}{d_1}\frac{\tilde{m}^{t+1}}{P_6(\tilde{m})} + R_{ra}^{t-2}\left[\left(k_{ra}A_3 - n_{ra}A_4\right)\cos(\chi_{ra}t) + \right.$$

$$\left. + \left(k_{ra}A_4 + n_{ra}A_3\right)\sin(\chi_{ra}t)\right] \qquad \textit{(6.83)}$$

και

$$Y_{t-2} = \frac{b_0}{1-c_1+\varphi} + \frac{\varphi}{1+\varphi}\frac{M_0}{d_1}\frac{\tilde{m}^{t}}{P_6(\tilde{m})} + R_{ra}^{t-2}\left\{A_3\cos\left[\chi_{ra}(t-2)\right] + A_4\sin\left[\chi_{ra}(t-2)\right]\right\} =$$

$$= \frac{b_0}{1-c_1+\varphi} + \frac{\varphi}{1+\varphi}\frac{M_0}{d_1}\frac{\tilde{m}^{t}}{P_6(\tilde{m})} + R_{ra}^{t-2}\left\{\cos(2\chi_{ra})\left[A_3\cos(\chi_{ra}t) + A_4\sin(\chi_{ra}t)\right] + \right.$$

$$\left. + \sin(2\chi_{ra})\left[A_3\sin(\chi_{ra}t) - A_4\cos(\chi_{ra}t)\right]\right\} =$$

$$= \frac{b_0}{1-c_1+\varphi} + \frac{\varphi}{1+\varphi}\frac{M_0}{d_1}\frac{\tilde{m}^{t}}{P_6(\tilde{m})} +$$

$$+ R_{ra}^{t-2}\left\{\left[\cos^2(\chi_{ra}) - \sin^2(\chi_{ra})\right]\left[A_3\cos(\chi_{ra}t) + A_4\sin(\chi_{ra}t)\right] + \right.$$

$$\left. + 2\sin(\chi_{ra})\cos(\chi_{ra})\left[A_3\sin(\chi_{ra}t) - A_4\cos(\chi_{ra}t)\right]\right\} =$$

$$= \frac{b_0}{1-c_1+\varphi} + \frac{\varphi}{1+\varphi}\frac{M_0}{d_1}\frac{\tilde{m}^t}{P_6(\tilde{m})} +$$

$$+ R_{ra}^{t-2}\left\{\frac{k_{ra}^2 - n_{ra}^2}{R_{ra}^2}\left[A_3\cos(\chi_{ra}t) + A_4\sin(\chi_{ra}t)\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{2\,k_{ra}n_{ra}}{R_{ra}^2}\left[A_3\sin(\chi_{ra}t) - A_4\cos(\chi_{ra}t)\right]\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y_{t-2} = \frac{b_0}{1-c_1+\varphi} + \frac{\varphi}{1+\varphi}\frac{M_0}{d_1}\frac{\tilde{m}^t}{P_6(\tilde{m})} +$$

$$+ R_{ra}^{t-4}\left\{\left[\left(k_{ra}^2 - n_{ra}^2\right)A_3 - 2\,k_{ra}n_{ra}A_4\right]\cos(\chi_{ra}t) + \right.$$

$$\left. + \left[\left(k_{ra}^2 - n_{ra}^2\right)A_4 + 2\,k_{ra}n_{ra}A_3\right]\sin(\chi_{ra}t)\right\} \qquad \textbf{\textit{(6.84)}}$$

Από το συνδυασμό των σχέσεων (5.265) , (6.83) και (6.84) παίρνουμε με τον ακόλουθο τρόπο το μέγεθος της προσδοκώμενης τιμής του εισοδήματος:

$$E_{t-1}\left(Y_t\right) = \frac{1}{1+\varphi}\left\{b_0 + c_1\left[(1+v)\,Y_{t-1} - v\,Y_{t-2}\right] + \frac{\varphi}{d_1}M_0(1+m)^t\right\} =$$

$$= \frac{b_0}{1+\varphi} + \frac{c_1}{1+\varphi}\left\{\frac{(1+v)\,b_0 - v\,b_0}{1-c_1+\varphi} + (1+v)\frac{\varphi}{1+\varphi}\frac{M_0}{d_1}\frac{\tilde{m}^{t+1}}{P_6(\tilde{m})} - v\frac{\varphi}{1+\varphi}\frac{M_0}{d_1}\frac{\tilde{m}^t}{P_6(\tilde{m})} + \right.$$

$$+ (1+v)\,R_{ra}^{t-2}\left[\left(k_{ra}A_3 - n_{ra}A_4\right)\cos(\chi_{ra}t) + \left(k_{ra}A_4 + n_{ra}A_3\right)\sin(\chi_{ra}t)\right] -$$

$$- v\,R_{ra}^{t-4}\left\{\left[\left(k_{ra}^2 - n_{ra}^2\right)A_3 - 2\,k_{ra}n_{ra}A_4\right]\cos(\chi_{ra}t) + \right.$$

$$\left.\left. + \left[\left(k_{ra}^2 - n_{ra}^2\right)A_4 + 2\,k_{ra}n_{ra}A_3\right]\sin(\chi_{ra}t)\right\}\right\} + \frac{\varphi}{1+\varphi}\frac{M_0}{d_1}\tilde{m}^t =$$

$$= \frac{b_0}{1+\varphi} + \frac{c_1 b_0}{(1+\varphi)(1-c_1+\varphi)} +$$

$$+ \frac{1}{1+\varphi}\left\{\frac{\varphi}{1+\varphi}\frac{M_0}{d_1}\frac{\tilde{m}^t}{P_6(\tilde{m})}\left[(1+v)\tilde{m}-v\right] + \varphi\frac{M_0}{d_1}\tilde{m}^t\right\} +$$

$$+ R_{ra}^{t-2}\left\{\frac{c_1(1+v)}{1+\varphi}\left[\left(k_{ra}A_3 - n_{ra}A_4\right)\cos(\chi_{ra}t) + \left(k_{ra}A_4 + n_{ra}A_3\right)\sin(\chi_{ra}t)\right] -\right.$$

$$\left. - \frac{v\,c_1}{1+\varphi}\left[\frac{\left(k_{ra}^2 - n_{ra}^2\right)A_3 - 2\,k_{ra}n_{ra}A_4}{R_{ra}^2}\cos(\chi_{ra}t) + \frac{\left(k_{ra}^2 - n_{ra}^2\right)A_4 + 2\,k_{ra}n_{ra}A_3}{R_{ra}^2}\sin(\chi_{ra}t)\right]\right\}$$

$$= \frac{(1+\varphi)\,b_0}{(1+\varphi)(1-c_1+\varphi)} + \frac{\varphi}{1+\varphi}\frac{M_0}{d_1}\tilde{m}^t\left[\frac{c_1(1+v)\tilde{m} - v\,c_1}{(1+\varphi)\tilde{m}^2 - c_1(1+v)\tilde{m} + v\,c_1} + 1\right] +$$

$$+ R_{ra}^{t-2}\left\{-\delta_1\left(k_{ra}A_3 - n_{ra}A_4\right)\cos(\chi_{ra}t) - \delta_1\left(k_{ra}A_4 + n_{ra}A_3\right)\sin(\chi_{ra}t) -\right.$$

$$- \delta_0\frac{\left(k_{ra}^2 - n_{ra}^2\right)A_3 - 2\,k_{ra}n_{ra}A_4}{k_{ra}^2 + n_{ra}^2}\cos(\chi_{ra}t) -$$

$$\left. - \delta_0\frac{\left(k_{ra}^2 - n_{ra}^2\right)A_4 + 2\,k_{ra}n_{ra}A_3}{k_{ra}^2 + n_{ra}^2}\sin(\chi_{ra}t)\right\} \Rightarrow$$

$$E_{t-1}\left(Y_t\right) = \frac{b_0}{1-c_1+\varphi} +$$

$$+ \frac{\varphi}{1+\varphi}\frac{M_0}{d_1}\tilde{m}^t\left[\frac{c_1(1+v)\tilde{m} - v\,c_1 + (1+\varphi)\tilde{m}^2 - c_1(1+v)\tilde{m} + v\,c_1}{(1+\varphi)\tilde{m}^2 - c_1(1+v)\tilde{m} + v\,c_1}\right] +$$

$$+ R_{ra}^{t-2}\left\{\left[\left(-\delta_1 k_{ra} - \delta_0\frac{k_{ra}^2 - n_{ra}^2}{k_{ra}^2 + n_{ra}^2}\right)A_3 + \left(\delta_1 n_{ra} + 2\,\delta_0\frac{k_{ra}n_{ra}}{k_{ra}^2 + n_{ra}^2}\right)A_4\right]\cos(\chi_{ra}t) +\right.$$

$$\left. + \left[\left(-\delta_1 n_{ra} - 2\,\delta_0\frac{k_{ra}n_{ra}}{k_{ra}^2 + n_{ra}^2}\right)A_3 + \left(-\delta_1 k_{ra} - \delta_0\frac{k_{ra}^2 - n_{ra}^2}{k_{ra}^2 + n_{ra}^2}\right)A_4\right]\sin(\chi_{ra}t)\right\} \quad \textbf{\textit{(6.85)}}$$

Δεδομένου ότι :

$$k_{ra} = -\frac{\delta_1}{2} \qquad (6.86) \qquad , \qquad n_{ra} = \frac{\sqrt{4\,\delta_0 - \delta_1^2}}{2} \qquad (6.87)$$

$$k_{ra}^2 - n_{ra}^2 = \frac{\delta_1^2 - 2\,\delta_0}{2} \qquad (6.88) \qquad , \qquad k_{ra}^2 + n_{ra}^2 = \delta_0 \qquad (6.89)$$

&

$$k_{ra} n_{ra} = -\frac{\delta_1 \sqrt{4\,\delta_0 - \delta_1^2}}{4} \qquad (6.90)$$

η σχέση (6.85) τροποποιείται ως ακολούθως:

$$E_{t-1}(Y_t) = \frac{b_0}{1 - c_1 + \varphi} + \frac{\varphi}{1+\varphi}\frac{M_0}{d_1}\tilde{m}^t \left[\frac{(1+\varphi)\,\tilde{m}^2}{(1+\varphi)\,P_6(\tilde{m})}\right] +$$

$$+ R_{ra}^{t-2}\left\{\left[\left(\frac{\delta_1^2}{2} - \delta_0\,\frac{\delta_1^2 - 2\,\delta_0}{2\,\delta_0}\right)A_3 + \left(\frac{\delta_1\sqrt{4\,\delta_0 - \delta_1^2}}{2} - 2\,\delta_0\,\frac{\delta_1\sqrt{4\,\delta_0 - \delta_1^2}}{4\,\delta_0}\right)A_4\right]\cos(\chi_{ra}\,t) +\right.$$

$$\left. + \left[\left(-\frac{\delta_1\sqrt{4\,\delta_0 - \delta_1^2}}{2} + 2\,\delta_0\,\frac{\delta_1\sqrt{4\,\delta_0 - \delta_1^2}}{4\,\delta_0}\right)A_3 + \left(\frac{\delta_1^2}{2} - \delta_0\,\frac{\delta_1^2 - 2\,\delta_0}{2\,\delta_0}\right)A_4\right]\sin(\chi_{ra}\,t)\right\} =$$

$$= \frac{b_0}{1 - c_1 + \varphi} + \frac{\varphi}{1+\varphi}\frac{M_0}{d_1}\frac{\tilde{m}^{t+2}}{P_6(\tilde{m})} +$$

$$+ R_{ra}^{t-2}\left\{\left[\frac{\delta_1^2 - \delta_1^2 + 2\,\delta_0}{2}A_3 + \left(\frac{\delta_1\sqrt{4\,\delta_0 - \delta_1^2}}{2} - \frac{\delta_1\sqrt{4\,\delta_0 - \delta_1^2}}{2}\right)A_4\right]\cos(\chi_{ra}\,t) +\right.$$

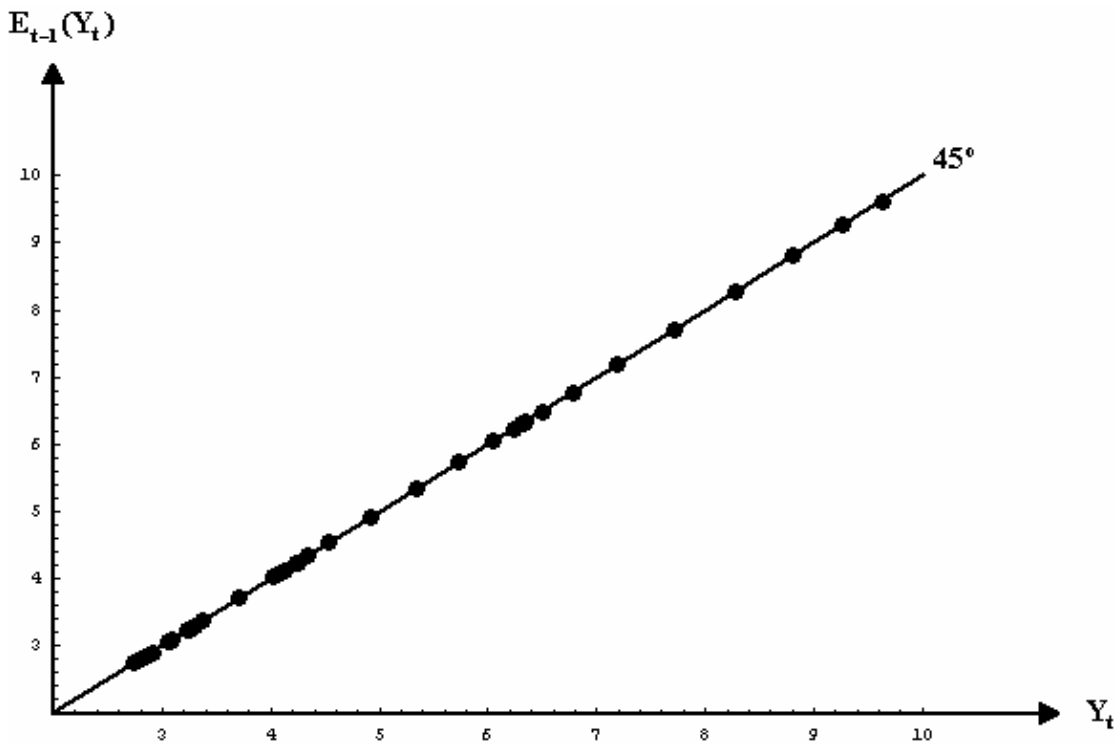
$$\left. + \left[\left(-\frac{\delta_1\sqrt{4\,\delta_0 - \delta_1^2}}{2} + \frac{\delta_1\sqrt{4\,\delta_0 - \delta_1^2}}{2}\right)A_3 + \frac{\delta_1^2 - \delta_1^2 + 2\,\delta_0}{2}A_4\right]\sin(\chi_{ra}\,t)\right\} =$$

$$= \qquad \widetilde{Y}_t^{ra} + R_{ra}^{t-2}\left[\delta_0\ A_3\ \cos(\chi_{ra}t) + \delta_0\ A_4\ \sin(\chi_{ra}t)\right] =$$

$$= \qquad \widetilde{Y}_t^{ra} + R_{ra}^{t-2}\left(\sqrt{\delta_0}\right)^2\left[A_3\ \cos(\chi_{ra}t) + A_4\ \sin(\chi_{ra}t)\right] \Rightarrow$$

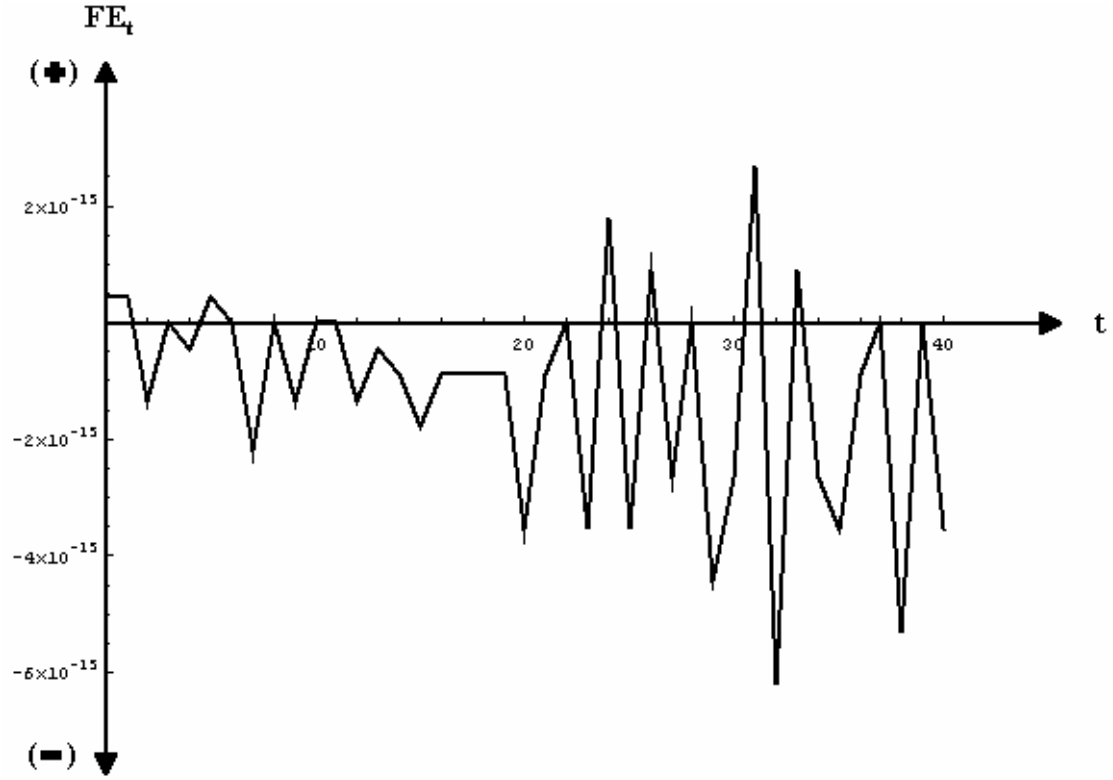
$$\Rightarrow E_{t-1}\left(Y_t\right) = \widetilde{Y}_t^{ra} + R_{ra}^{t}\left[A_3\ \cos(\chi_{ra}t) + A_4\ \sin(\chi_{ra}t)\right] = Y_t \qquad \textbf{\textit{(6.91)}}$$

Σύμφωνα με την παραπάνω σχέση, η προσδοκία των οικονομούντων ατόμων αναφορικά με το ύψος του εισοδήματος επαληθεύεται, ανεξάρτητα από το μέγεθος των επί μέρους σταθερών παραμέτρων που χρησιμοποιούνται στο υπόδειγμα. Το συμπέρασμα αυτό επιβεβαιώνεται και από το παρακάτω διάγραμμα, στο οποίο παρουσιάζεται η κατανομή των συνδυασμών (Y_t , $E_{t-1}(Y_t)$) που προκύπτουν στα πλαίσια της προσομοίωσης, γύρω από τη γραμμή των 45°.



Δ – 6.7

Η ισχύς της σχέσης (6.91) υπονοεί ότι το σφάλμα πρόβλεψης του εισοδήματος θα είναι διαχρονικά μηδενικό. Στο διάγραμμα Δ – 6.8 παρουσιάζεται η εξέλιξη του μεγέθους του σφάλματος πρόβλεψης του εισοδήματος, όπως αυτό προσδιορίζεται στα πλαίσια της πραγματοποιηθείσας προσομοίωσης, και όπως διαπιστώνουμε το ύψος του σφάλματος πρόβλεψης το οποίο τελικά πραγματοποιείται είναι ουσιαστικά ίσο με το μηδέν.



Δ – 6.8

Συνδυάζοντας στη συνέχεια τις σχέσεις (5.266) , (6.83) και (6.84) θα προσδιορίσουμε τη συναρτησιακή μορφή της σχέσης βάσει της οποίας τα οικονομούντα άτομα διαμορφώνουν τις προσδοκίες αναφορικά με την επιτοκιακή διαφορά. Πιο συγκεκριμένα βρίσκουμε:

$$E_{t-1}(\Delta R_t) = -\frac{\varphi}{b_2(1+\varphi)}\left[b_0 + c_1(1+v)\,Y_{t-1} - v\,c_1\,Y_{t-2} - \frac{M_0(1+m)^t}{d_1}\right] =$$

$$= -\frac{b_0}{b_2}\frac{\varphi}{1+\varphi} + \frac{\varphi}{b_2}\left[-\frac{c_1(1+v)}{1+\varphi}Y_{t-1} + \frac{v\,c_1}{1+\varphi}Y_{t-2}\right] + \frac{\varphi}{b_2(1+\varphi)}\frac{M_0}{d_1}\tilde{m}^t =$$

$$= -\frac{b_0}{b_2}\frac{\varphi}{1+\varphi} + \frac{\varphi}{b_2}\left\{\frac{(\delta_1+\delta_0)\,b_0}{1-c_1+\varphi} + \delta_1\frac{\varphi}{1+\varphi}\frac{M_0}{d_1}\frac{\tilde{m}^{t+1}}{P_6(\tilde{m})} + \delta_0\frac{\varphi}{1+\varphi}\frac{M_0}{d_1}\frac{\tilde{m}^t}{P_6(\tilde{m})}\right\} +$$

$$+ R_{ra}^{t-2}\left[\delta_1(k_{ra}A_3 - n_{ra}A_4)\cos(\chi_{ra}t) + \delta_1(k_{ra}A_4 + n_{ra}A_3)\sin(\chi_{ra}t)\right] +$$

$$+R_{ra}^{t-4}\left\{\delta_0\left[\left(k_{ra}^2-n_{ra}^2\right)A_3-2\,k_{ra}n_{ra}A_4\right]\cos(\chi_{ra}t)+\right.$$

$$\left.+\delta_0\left[\left(k_{ra}^2-n_{ra}^2\right)A_4+2\,k_{ra}n_{ra}A_3\right]\sin(\chi_{ra}t)\right\}+\frac{\varphi}{b_2(1+\varphi)}\frac{M_0}{d_1}\tilde{m}^t=$$

$$=-\frac{b_0}{b_2}\frac{\varphi}{1+\varphi}+\frac{\varphi}{b_2}\frac{b_0\left[-c_1(1+v)+v\,c_1\right]}{(1-c_1+\varphi)(1+\varphi)}+\frac{\varphi}{1+\varphi}\frac{M_0\tilde{m}^t}{b_2d_1}\left[\frac{-c_1(1+v)\,\varphi\,\tilde{m}+v\,c_1\varphi}{(1+\varphi)\,P_6(\tilde{m})}+1\right]+$$

$$+R_{ra}^{t-2}\left\{\left[\left(\delta_1k_{ra}+\delta_0\frac{k_{ra}^2-n_{ra}^2}{R_{ra}^2}\right)A_3+\left(-\delta_1n_{ra}-2\,\delta_0\frac{k_{ra}n_{ra}}{R_{ra}^2}\right)A_4\right]\cos(\chi_{ra}t)+\right.$$

$$\left.+\left[\left(\delta_1n_{ra}+2\,\delta_0\frac{k_{ra}n_{ra}}{R_{ra}^2}\right)A_3+\left(\delta_1k_{ra}+\delta_0\frac{k_{ra}^2-n_{ra}^2}{R_{ra}^2}\right)A_4\right]\sin(\chi_{ra}t)\right\}=$$

$$\underset{(6.88),(6.89),(6.90)}{\overset{(6.86),(6.87)}{=}}-\frac{b_0}{b_2}\frac{\varphi}{1+\varphi}\left(1+\frac{c_1}{1-c_1+\varphi}\right)+$$

$$+\frac{\varphi}{1+\varphi}\frac{M_0\tilde{m}^t}{b_2d_1}\left[\frac{-c_1(1+v)\,\varphi\,\tilde{m}+v\,c_1\varphi+(1+\varphi)\,\tilde{m}^2-c_1(1+v)\,\tilde{m}+v\,c_1}{(1+\varphi)\,P_6(\tilde{m})}\right]+$$

$$+R_{ra}^{t-2}\left\{\left[\left(-\frac{\delta_1^2}{2}+\delta_0\frac{\delta_1^2-2\,\delta_0}{2\,\delta_0}\right)A_3+\right.\right.$$

$$\left.+\left(-\frac{\delta_1\sqrt{4\,\delta_0-\delta_1^2}}{2}+2\,\delta_0\frac{\delta_1\sqrt{4\,\delta_0-\delta_1^2}}{4\,\delta_0}\right)A_4\right]\cos(\chi_{ra}t)+$$

$$\left.+\left[\left(\frac{\delta_1\sqrt{4\,\delta_0-\delta_1^2}}{2}-2\,\delta_0\frac{\delta_1\sqrt{4\,\delta_0-\delta_1^2}}{4\,\delta_0}\right)A_3+\left(-\frac{\delta_1^2}{2}+\delta_0\frac{\delta_1^2-2\,\delta_0}{2\,\delta_0}\right)A_4\right]\sin(\chi_{ra}t)\right\}=$$

$$=-\frac{b_0}{b_2}\frac{\varphi}{1-c_1+\varphi}+\frac{M_0\tilde{m}^t}{d_2(1+\varphi)}\left\{\frac{(1+\varphi)\left[\tilde{m}^2-c_1(1+v)\,\tilde{m}+v\,c_1\right]}{(1+\varphi)\,P_6(\tilde{m})}\right\}+$$

$$+ R_{ra}^{t-2} \left\{ \left[\left(\frac{-\delta_1^2 + \delta_1^2 - 2\,\delta_0}{2} \right) A_3 + 0 \right] \cos(\chi_{ra} t) + \right.$$

$$\left. + \left[0 + \left(\frac{-\delta_1^2 + \delta_1^2 - 2\,\delta_0}{2} \right) A_4 \right] \sin(\chi_{ra} t) \right\} =$$

$$= -\frac{b_0}{b_2} \frac{\varphi}{1 - c_1 + \varphi} + \frac{M_0 \tilde{m}^t}{d_2 (1+\varphi)} \frac{P_{12}(\tilde{m})}{P_6(\tilde{m})} + R_{ra}^{t-2} \left[-\delta_0 A_3 \cos(\chi_{ra} t) - \delta_0 A_4 \sin(\chi_{ra} t) \right] =$$

$$= -\frac{b_0}{b_2} \frac{\varphi}{1 - c_1 + \varphi} + \frac{M_0 \tilde{m}^t}{d_2 (1+\varphi)} \frac{P_{12}(\tilde{m})}{P_6(\tilde{m})} - R_{ra}^{t-2} \left(\sqrt{\delta_0} \right)^2 \left[A_3 \cos(\chi_{ra} t) + A_4 \sin(\chi_{ra} t) \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_{t-1}(\Delta R_t) = \Omega_6 + \Omega_{11}\, \Omega_{12}\, \tilde{m}^t - R_{ra}^t \left[A_3 \cos(\chi_{ra} t) + A_4 \sin(\chi_{ra} t) \right] \qquad \textbf{\textit{(6.92)}}$$

όπου $\Omega_6 = -\frac{b_0}{b_2} \frac{\varphi}{1 - c_1 + \varphi} > 0$, $\Omega_{11} = \frac{1}{1+\varphi} \frac{M_0}{d_2} < 0$, $\Omega_{12} = \frac{P_{12}(\tilde{m})}{P_6(\tilde{m})}$ με $P_{12}(\tilde{m}) =$

$$= \tilde{m}^2 + \eta_3\, \tilde{m} + \eta_4 \;\; , \;\; \eta_3 = -c_1 (1 + v) \;\; , \;\; \eta_4 = v\, c_1 \;\; \& \;\; P_6(\tilde{m}) = \tilde{m}^2 + \delta_1 \tilde{m} + \delta_0 \neq 0$$

Σε κατάσταση ισορροπίας το μέγεθος της επιτοκιακής διαφοράς προσδιορίζεται με τη βοήθεια της ακόλουθης σχέσης[56]:

$$E_{t-1}(\overline{\Delta R}_t) = \Omega_6 + \Omega_{11}\, \Omega_{12}\, \tilde{m}^t \qquad \textbf{\textit{(6.93)}}$$

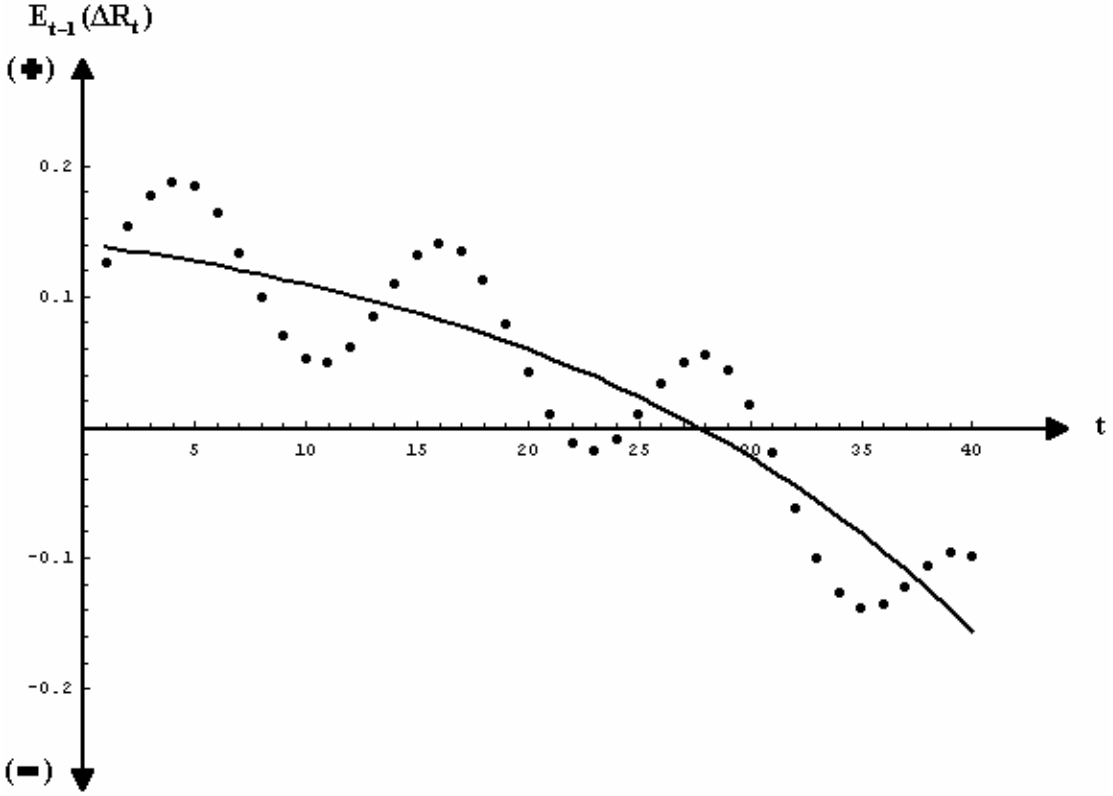
Βάσει των δεδομένων που χρησιμοποιούμε στα πλαίσια της προσομοίωσης, οι τιμές των πολυωνύμων $P_6(\tilde{m})$ και $P_{12}(\tilde{m})$ είναι ίσες με 0.284 και 0.096 αντιστοίχως. Το γεγονός ότι τα δύο αυτά πολυώνυμα είναι ομόσημα μας οδηγεί, βάσει της ανάλυσης που πραγματοποιείται στο παράρτημα, στο συμπέρασμα ότι η εναλλαγή του προσήμου της επιτοκιακής διαφοράς ισορροπίας περιγράφεται από την ακόλουθη σχέση:

---

[56] Ο ακριβής τρόπος εξαγωγής της συγκεκριμένης σχέσης καθώς και η διερεύνηση του προσήμου της επιτοκιακής διαφοράς ισορροπίας παρουσιάζονται αναλυτικά στα πλαίσια όγδοου παραρτήματος.

$$\begin{cases} E_{t-1}\left(\overline{\Delta R}_t\right) > 0 & \forall \quad t < \Omega_{13} \\ E_{t-1}\left(\overline{\Delta R}_t\right) = 0 & \text{για} \quad t = \Omega_{13} \\ E_{t-1}\left(\overline{\Delta R}_t\right) < 0 & \forall \quad t > \Omega_{13} \end{cases} \quad , \quad \Omega_{13} = \frac{\ln\left(\Omega_6/\Omega_{12}\right) - \ln\left(-\Omega_{11}\right)}{\ln(\tilde{m})} \cong 27 \qquad \textbf{\textit{(6.94)}}$$

Στο γράφημα που ακολουθεί παρουσιάζεται διαγραμματικά η διαχρονική εξέλιξη των μεγεθών της προσδοκώμενης επιτοκιακής διαφοράς [όπως αυτή προσδιορίζεται από τη σχέση (6.92)] και της προσδοκώμενης επιτοκιακής διαφοράς ισορροπίας [όπως αυτή προσδιορίζεται από τη σχέση (6.93)]. Όπως διαπιστώνουμε, η προσδοκώμενη επιτοκιακή διαφορά ακολουθεί μία πορεία που χαρακτηρίζεται από σταθερού εύρους ταλαντώσεις γύρω από την τιμή ισορροπίας της. Η τελευταία έχει θετικό πρόσημο στο διάστημα [0 , 27), τη χρονική στιγμή t = 27 μηδενίζεται και στη συνέχεια παίρνει αρνητικές τιμές για κάθε t > 27, επιβεβαιώνοντας έτσι και τα συμπεράσματα τα οποία εξάγαμε βάσει της σχέσης (6.94).



Δ – 6.9

Στον πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζονται οι αριθμητικές τιμές του σφάλματος πρόβλεψης που πραγματοποιείται αναφορικά με το ύψος του εισοδήματος, καθώς και εκείνες της επιτοκιακής διαφοράς και της επιτοκιακής διαφοράς ισορροπίας.

<u>Πίνακας 6.5</u>: Η διαχρονική εξέλιξη του σφάλματος πρόβλεψης, της προσδοκώμενης επιτοκιακής διαφοράς και της τιμής ισορροπίας της.

t	FE_t	$E_{t-1}(\Delta R_t)$	$E_{t-1}(\overline{\Delta R}_t)$
0	4.44089×10^{-16}	0.1250000	0.1381300
1	4.44089×10^{-16}	0.1531250	0.1355500
2	-1.33227×10^{-15}	0.1764120	0.1328410
3	0	0.1878880	0.1299970
4	-4.44089×10^{-16}	0.1837110	0.1270100
5	4.44089×10^{-16}	0.1641910	0.1238740
6	0	0.1337110	0.1205820
7	-2.22045×10^{-15}	0.0995494	0.1171250
8	0	0.0699238	0.1134950
9	-1.33227×10^{-15}	0.0517915	0.1096830
10	0	0.0489806	0.1056810
11	0	0.0611624	0.1014790
12	-1.33227×10^{-15}	0.0839368	0.0970663
13	-4.44089×10^{-16}	0.1100090	0.0924334
14	-8.88178×10^{-16}	0.1311400	0.0875687
15	-1.77636×10^{-15}	0.1403520	0.0824609
16	-8.88178×10^{-16}	0.1337980	0.0770977
17	-8.88178×10^{-16}	0.1117830	0.0714662
18	-8.88178×10^{-16}	0.0786828	0.0655533
19	-8.88178×10^{-16}	0.0417694	0.0593446
20	-3.55271×10^{-15}	0.0092548	0.0528256
21	-8.88178×10^{-16}	−0.0119110	0.0459806
22	0	−0.0179070	0.0387933
23	-3.55271×10^{-15}	−0.0090696	0.0312467
24	1.77636×10^{-15}	0.0101932	0.0233228
25	-3.55271×10^{-15}	0.0325779	0.0150026
26	8.88178×10^{-16}	0.0498373	0.0062664
27	-2.66454×10^{-15}	0.0549851	−0.0029065
28	0	0.0441622	−0.0125381
29	-4.44089×10^{-15}	0.0176650	−0.0226513
30	-2.66454×10^{-15}	−0.0201407	−0.0332702
31	2.66454×10^{-15}	−0.0619953	−0.0444200
32	-6.21725×10^{-15}	−0.0996981	−0.0561273
33	8.88178×10^{-16}	−0.1263110	−0.0684199
34	-2.66454×10^{-15}	−0.1380280	−0.0813272
35	-3.55271×10^{-15}	−0.1351960	−0.0948798
36	-8.88178×10^{-16}	−0.1222400	−0.1091100
37	0	−0.1064770	−0.1240520
38	-5.32907×10^{-15}	−0.0961700	−0.1397410
39	0	−0.0983226	−0.1562140
40	-3.55271×10^{-15}	−0.1168110	−0.1735110

6.4 Αποτελέσματα της διαδικασίας προσομοίωσης στα πλαίσια του μηχανισμού των παλινδρομικών προσδοκιών.

Στα πλαίσια της τρέχουσας παραγράφου θα παρουσιασθούν τα αποτελέσματα της προσομοίωσης, τα οποία προκύπτουν βάσει του μηχανισμού των παλινδρομικών προσδοκιών. Τα συγκεκριμένα αποτελέσματα προσδιορίζονται γνωρίζοντας ότι η επιτοκιακή διαφορά ισορροπίας συνιστά διαχρονικά ένα σταθερό μέγεθος, και ότι οι αριθμητικές τιμές των επί μέρους παραμέτρων του υποδείγματος έχουν ως εξής: $c_1 = 99/100, v = 11/9, b_0 = 0,\ b_2 = -1, d_1 = 4/5, d_2 = -2/5, M_0 = 4/5, \theta_1 = 3/4\ \&\ \theta_2 = 1/2$.

Με βάση τα παραπάνω δεδομένα, και κάνοντας χρήση των δύο αρχικών συνθηκών $Y_0 = 0.8$ και $Y_1 = 1.2$, θα προσδιορίσουμε τη συγκεκριμένη μορφή της βασικής εξίσωσης διαφορών, θα εξάγουμε τη γενική της λύση καθώς και τη συναρτησιακή μορφή του εισοδήματος ισορροπίας και τέλος θα διερευνήσουμε τη διαχρονική εξέλιξη του μεγέθους των επενδύσεων, της κατανάλωσης και της επιτοκιακής διαφοράς.

Η βασική εξίσωση διαφορών την οποία εξειδικεύσαμε στα πλαίσια της παραγράφου 5.3 είχε την ακόλουθη μορφή:

$$Y_{t+2} + \zeta_1 Y_{t+1} + \zeta_0 Y_t = \Gamma(t) \qquad \textit{(5.191)}$$

όπου $\zeta_1 = -\dfrac{c_1(1+v)}{1+\varphi\omega} < 0$, $\zeta_0 = \dfrac{vc_1}{1+\varphi\omega} > 0$, $\varphi = \dfrac{b_2 d_1}{d_2} > 0$, $\omega = \dfrac{\omega_1}{\omega_2} = \dfrac{1-\theta_1}{1-\theta_2} > 0$ και

$$\Gamma(t) = \frac{b_0 + b_2(1-\omega)\overline{\Delta R}}{1+\varphi\omega} + \frac{\varphi\omega}{d_1(1+\varphi\omega)} M_0 \tilde{m}^{t+2}$$

Όπως γίνεται αμέσως αντιληπτό, το ερώτημα στο οποίο θα πρέπει να απαντήσουμε προκειμένου να προχωρήσουμε στην εξειδίκευση της γενικής λύσης της παραπάνω εξίσωσης διαφορών, έχει να κάνει με το αριθμητικό μέγεθος της επιτοκιακής διαφοράς ισορροπίας $\left(\overline{\Delta R}_t^{re}\right)$ και του σταθερού ρυθμού μεταβολής της ποσότητας του χρήματος (m).

Προκειμένου να απαντήσουμε στα παραπάνω ερωτήματα, θα κάνουμε χρήση των δεδομένων πληροφοριών ότι το μέγεθος των αυτόνομων επενδύσεων είναι μηδενικό και ότι η επιτοκιακή διαφορά ισορροπίας είναι διαχρονικά ένα σταθερό μέγεθος. Βάσει της ανάλυσης που πραγματοποιείται στα πλαίσια του ένατου παραρτήματος, η επιτοκιακή διαφορά ισορροπίας θα αποτελεί διαχρονικά ένα σταθερό μέγεθος εφόσον ικανοποιείται η ακόλουθη σχέση:

$$P_{12}(\tilde{m}) = \tilde{m}^2 + \eta_3\, \tilde{m} + \eta_4 = 0 \qquad \textit{(6.95)}$$

Το γεγονός ότι η τιμή του επιταχυντή είναι ακριβώς ίση με εκείνη για την οποία η διακρίνουσα (Δ_{13}) της παραπάνω εξίσωσης ισούται με το μηδέν, η τιμή δηλαδή του επιταχυντή είναι εκείνη για την οποία ικανοποιείται η σχέση:

$$\bar{v}_2^{se} = \frac{\left(1+\sqrt{1-c_1}\right)^2}{c_1} = \frac{\left(1+\sqrt{1/100}\right)^2}{99/100} = \frac{121/100}{99/100} = \frac{11}{9} = v \qquad \textbf{\textit{(6.96)}}$$

η εξίσωση $P_{12}(\tilde{m}) = 0$ θα έχει δύο πραγματικές και ίσες ρίζες, το μέγεθος των οποίων έχει ως ακολούθως:

$$\tilde{m} = \frac{c_1(1+v)}{2} \qquad \textbf{\textit{(6.97)}}$$

Από το συνδυασμό των σχέσεων (6.96) και (6.97) προκύπτει η σχέση βάσει της οποίας θα προσδιορισθεί το μέγεθος του σταθερού ρυθμού αύξησης της προσφοράς χρήματος[57]:

$$\tilde{m} = \frac{c_1(1+v)}{2} = \frac{c_1 + 1 + 2\sqrt{1-c_1} + 1 - c_1}{2} = \frac{2\left(1+\sqrt{1-c_1}\right)}{2} = 1 + \sqrt{1-c_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad m = \sqrt{1-c_1} = \frac{1}{10} \qquad \textbf{\textit{(6.98)}}$$

Το γεγονός ότι m = 0.1 μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η επιτοκιακή διαφορά ισορροπίας θα προσδιορίζεται βάση της σχέσης (Θ.2) του ένατου παραρτήματος, η οποία και έχει ως εξής:

$$\overline{\Delta R}_t^{re}\Big|_{P_{12}(\tilde{m})=0} = -\frac{b_0\varphi}{b_2(1-c_1+\varphi)} > 0 \qquad \textbf{\textit{(6.99)}}$$

Από την παραπάνω σχέση, και δεδομένου ότι οι αυτόνομες επενδύσεις είναι μηδενικές, εύκολα προκύπτει ότι το μέγεθος της επιτοκιακής διαφοράς ισορροπίας ισούται με το μηδέν:

$$\overline{\Delta R}_t^{re} = 0 \quad , \quad \forall\, t \qquad \textbf{\textit{(6.100)}}$$

---

[57] Το μέγεθος της διακρίνουσας Δ_{13} είναι ίσο με το μηδέν στην περίπτωση που ισχύει ότι $v = \bar{v}_1^{se} = \left(1-\sqrt{1-c_1}\right)^2 / c_1$ ή $v = \bar{v}_2^{se}$. Θα πρέπει ωστόσο να σημειωθεί ότι η αντικατάσταση του μεγέθους $\bar{v}_1^{se}$ στη σχέση (6.97) οδηγεί στην εξειδίκευση μίας αρνητικής τιμής αναφορικά με το ύψος του σταθερού ρυθμού μεταβολής της προσφοράς χρήματος, το οποίο θα προσδιοριζόταν στη συγκεκριμένη περίπτωση μέσω της σχέσης $m = -\sqrt{1-c_1}$.

Έχοντας προσδιορίσει το αριθμητικό μέγεθος του σταθερού ρυθμού μεταβολής της προσφοράς χρήματος και της επιτοκιακής διαφοράς ισορροπίας, θα στραφούμε στη συνέχεια στην εξειδίκευση της μορφής της βασικής εξίσωσης διαφορών, της γενικής λύσης της καθώς και της μορφής της διαχρονικής εξέλιξης του εισοδήματος. Προκειμένου να διευκολυνθούμε στην ανάλυσή μας θα κάνουμε χρήση των παρακάτω σχέσεων:

$$\omega_1 = 1 - \theta_1 = \frac{1}{4} \qquad (6.101)$$

$$\omega_2 = 1 - \theta_2 = \frac{1}{2} \qquad (6.102)$$

$$\omega = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1}{2} \qquad (6.103)$$

$$\tilde{m} = 1 + m = \frac{11}{10} \qquad (6.104)$$

$$\varphi = \frac{b_2 d_1}{d_2} = 2 \qquad (6.105)$$

$$\varphi\,\omega = 1 \qquad (6.106)$$

$$\zeta_0 = \frac{v\,c_1}{1+\varphi\,\omega} = \frac{121}{200} \qquad (6.107)$$

$$\zeta_1 = -\frac{c_1(1+v)}{1+\varphi\,\omega} = -\frac{11}{10} \qquad (6.108)$$

$$\Delta_8 = \zeta_1^2 - 4\,\zeta_0 = -\frac{121}{100} \qquad (6.109)$$

$$v_{re}^{s} = \frac{1+\varphi\omega}{c_1} = \frac{200}{99} \qquad (6.110)$$

$$\chi_{re} = -\arctan\left(\frac{\sqrt{-\Delta_8}}{\zeta_1}\right) = \frac{\pi}{4} \qquad (6.111)$$

$$v_1^{re} = \left(\sqrt{\frac{1+\varphi\omega}{c_1}} - \sqrt{\frac{1-c_1+\varphi\omega}{c_1}}\right)^2 = \frac{301-20\sqrt{202}}{99} \cong 0.169 \qquad (6.112)$$

$$v_2^{ra} = \left(\sqrt{\frac{1+\varphi\omega}{c_1}} + \sqrt{\frac{1-c_1+\varphi\omega}{c_1}}\right)^2 = \frac{301+20\sqrt{202}}{99} \cong 5.912 \qquad (6.113)$$

$$\Gamma(t) = \frac{b_0 + b_2(1-\omega)\overline{\Delta R}}{1+\varphi\omega} + \frac{\varphi\omega}{d_1(1+\varphi\omega)} M_0 \tilde{m}^{t+2} = \frac{121}{200}\left(\frac{11}{10}\right)^t \qquad (6.114)$$

$$\frac{\varphi\omega}{d_1(1+\varphi\omega)} \frac{M_0 \tilde{m}^2}{\tilde{m}^2 + \zeta_1\,\tilde{m} + \zeta_0} = 1 \qquad (6.115)$$

Η μορφή της βασικής εξίσωσης διαφορών, όπως αυτή προκύπτει από το συνδυασμό των σχέσεων (5.191) , (6.107) , (6.108) και (6.114), έχει ως ακολούθως:

$$Y_{t+2} - \frac{11}{10} Y_{t+1} + \frac{121}{200} Y_t = \frac{121}{200}\left(\frac{11}{10}\right)^t \qquad \textbf{\textit{(6.116)}}$$

Βάσει της παραπάνω σχέσης προκύπτει η συγκεκριμένη μορφή της χαρακτηριστικής εξίσωσης η οποία και έχει ως ακολούθως:

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \frac{11}{10}\lambda + \frac{121}{200} = 0 \qquad \textbf{\textit{(6.117)}}$$

Το γεγονός ότι η τιμή του επιταχυντή (1.222) εντοπίζεται εντός του διαστήματος $\left(v_1^{re}, v_2^{re}\right) = \left(0.169, 5.912\right)$ σημαίνει, βάσει της ανάλυσης που πραγματοποιήθηκε στα πλαίσια της παραγράφου 5.3.1, ότι η διακρίνουσα της χαρακτηριστικής εξίσωσης (Δ_8) θα έχει αρνητικό πρόσημο. Το αναμενόμενο αυτό αποτέλεσμα επιβεβαιώνεται από τη σχέση (6.109). Το αρνητικό πρόσημο της διακρίνουσας αφενός μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η διαχρονική πορεία του εισοδήματος θα χαρακτηρίζεται από ταλαντώσεις και αφετέρου, σηματοδοτεί την ύπαρξη δύο συζυγών μιγαδικών χαρακτηριστικών ριζών. Το μέγεθος αυτών των ριζών έχει ως ακολούθως:

$$\lambda_{2,1} = k_{re} \pm n_{re} i \qquad \textbf{\textit{(6.118)}}$$

όπου

$$k_{re} = n_{re} = \frac{11}{20} \qquad \textbf{\textit{(6.119)}}$$

ενώ η απόλυτη τιμή των μιγαδικών ριζών έχει ως εξής:

$$R_{re} = \sqrt{k_{re}^2 + n_{re}^2} = \frac{11\sqrt{2}}{20} \cong 0.778 \qquad \textbf{\textit{(6.120)}}$$

Η συμπληρωματική λύση της βασικής εξίσωσης διαφορών (6.116) προκύπτει από το συνδυασμό των σχέσεων (5.220) , (6.107) , (6.111) και έχει την ακόλουθη μορφή:

$$Y_t^c = \left(\frac{11\sqrt{2}}{20}\right)^t \left[A_3 \cos\left(\frac{\pi t}{4}\right) + A_4 \sin\left(\frac{\pi t}{4}\right)\right] \qquad \textbf{\textit{(6.121)}}$$

όπου $A_3 = A_1 + A_2$ & $A_4 = i\,(A_2 - A_1)$.

Η συνάρτηση που περιγράφει τη διαχρονική εξέλιξη του εισοδήματος ισορροπίας, η συμπληρωματική δηλαδή λύση της (6.116), προκύπτει από το συνδυασμό των σχέσεων[58] (5.226) , (6.100) και (6.115) και έχει την ακόλουθη μορφή:

$$\widetilde{Y}_t^{re} = \left(\frac{11}{10}\right)^t \qquad \textbf{\textit{(6.122)}}$$

Η γενική λύση της βασικής εξίσωσης διαφορών (6.116) προκύπτει από το άθροισμα της συμπληρωματικής και της μερικής λύσης και έχει ως ακολούθως:

$$Y_t = \left(\frac{11}{10}\right)^t + \left(\frac{11\sqrt{2}}{20}\right)^t \left[A_3 \cos\left(\frac{\pi t}{4}\right) + A_4 \sin\left(\frac{\pi t}{4}\right)\right] \qquad \textbf{\textit{(6.123)}}$$

Στην περίπτωση που κατά τις χρονικές στιγμές t = 0 και t = 1 βρισκόμαστε σε κατάσταση ισορροπίας, οι τιμές των αυθαίρετων σταθερών A_3 και A_4 θα είναι ίσες με το μηδέν ($A_3 = A_4 = 0$) και επιπροσθέτως θα ισχύει ότι $Y_t = \widetilde{Y}_t^{re}$ για t = 0 &1. Συγκρίνοντας ωστόσο τις δύο αρχικές συνθήκες που έχουμε στη διάθεσή μας, με τις τιμές που προκύπτουν από τη σχέση (6.122) για t = 0 και t = 1 διαπιστώνουμε ότι $\widetilde{Y}_0^{re} = 1 \neq$ $\neq 0.8 = Y_0$ και $\widetilde{Y}_1^{re} = 1.1 \neq 1.2 = Y_1$. Με άλλα λόγια διαπιστώνουμε ότι η υποθετική οικονομία που διερευνούμε ξεκινά από μία κατάσταση ανισορροπίας. Ως εκ τούτου οι τιμές των δύο αυθαίρετων σταθερών A_3 και A_4 θα είναι διάφορες του μηδενός και προκειμένου να προσδιορίσουμε το αριθμητικό τους μέγεθος, θα επιλύσουμε ως προς A_3 και A_4 το σύστημα των εξισώσεων που σχηματίζεται βάσει των δύο αρχικών συνθηκών και της γενικής λύσης (6.123). Πιο συγκεκριμένα έχουμε ότι:

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{11}{10}\right)^0 + \left(\frac{11\sqrt{2}}{20}\right)^0 \left[A_3 \cos(0) + A_4 \sin(0)\right] = \frac{8}{10} \\ &\frac{11}{10} + \frac{11\sqrt{2}}{20}\left[A_3 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + A_4 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = \frac{12}{10} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} &1 + (A_3 + 0) = \frac{4}{5} \\ &\frac{11}{10} + \frac{11\sqrt{2}}{20}\left[A_3 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + A_4 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = \frac{6}{5} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} &A_3 = -\frac{1}{5} \\ &11\sqrt{2}\left[A_3 \frac{\sqrt{2}}{2} + A_4 \frac{\sqrt{2}}{2}\right] = 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

[58] Υπενθυμίζεται ότι $b_0 = 0$ και $m = 0.1$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} A_3 = -\dfrac{1}{5} \\ \dfrac{\left(\sqrt{2}\right)^2}{2}\left(-\dfrac{1}{5} + A_4\right) = \dfrac{2}{11} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{ll} A_3 = -\dfrac{1}{5} & \textbf{\textit{(6.125)}} \\ A_4 = \dfrac{21}{55} & \textbf{\textit{(6.126)}} \end{array}\right\}$$

Από το συνδυασμό των σχέσεων (6.123) , (6.124) και (6.125) προκύπτει η τελική μορφή της συνάρτησης η οποία περιγράφει τη διαχρονική εξέλιξη του εισοδήματος και η οποία έχει ως ακολούθως:

$$Y_t = \left(\frac{11}{10}\right)^t + \left(\frac{11\sqrt{2}}{20}\right)^t \left[-\frac{1}{5}\cos\left(\frac{\pi\, t}{4}\right) + \frac{21}{55}\sin\left(\frac{\pi\, t}{4}\right)\right] \qquad \textbf{\textit{(6.126)}}$$

Το γεγονός ότι η απόλυτη τιμή των συζυγών μιγαδικών ριζών είναι μικρότερη της μονάδας (R_{re} = 0.778 < 1), εγγυάται την επίτευξη ασυμπτωτικής ευστάθειας. Με άλλα λόγια το εισόδημα θα συγκλίνει με το πέρασμα του χρόνου προς την τιμή ισορροπίας του[59], όπως αυτή προσδιορίζεται βάσει της σχέσης (6.122).

Στο γράφημα Δ – 6.10 που ακολουθεί παρουσιάζεται η διαχρονική εξέλιξη του εισοδήματος, όπως αυτό προσδιορίζεται βάσει της σχέσης (6.126), ενώ μέσω της συνεχούς καμπύλης παρουσιάζεται η εξέλιξη του εισοδήματος ισορροπίας. Όπως διαπιστώνουμε, το εισόδημα πράγματι συγκλίνει μέσω ταλαντώσεων προς τη βραχυχρόνια τιμή ισορροπίας του. Στο γράφημα Δ – 6.11 παρουσιάζεται η διαχρονική εξέλιξη του ρυθμού μεταβολής του εισοδήματος, όπως αυτός προσδιορίζεται βάσει της σχέσης (6.126), ο οποίος και συγκλίνει προς το μέγεθος του ρυθμού μεταβολής της ονομαστικής προσφοράς χρήματος. Με άλλα λόγια σε κατάσταση ισορροπίας το εισόδημα και η προσφορά χρήματος μεταβάλλονται με τον ίδιο σταθερό ρυθμό[60].

Ένα ερώτημα που τίθεται στο σημείο αυτό, έχει να κάνει με το κατά πόσον η επιτοκιακή διαφορά συγκλίνει με το πέρασμα του χρόνου προς την τιμή ισορροπίας της, δηλαδή προς το μηδέν. Όπως θυμόμαστε, το μέγεθος της επιτοκιακής διαφοράς προσδιορίζεται μέσω της σχέσης (5.190). Αν από τη σχέση αυτή κινηθούμε προς τα εμπρός κατά μία περίοδο και αντικαταστήσουμε στη συνέχεια το μέγεθος του εισοδήματος με εκείνο που προκύπτει από τη σχέση (6.126) παίρνουμε:

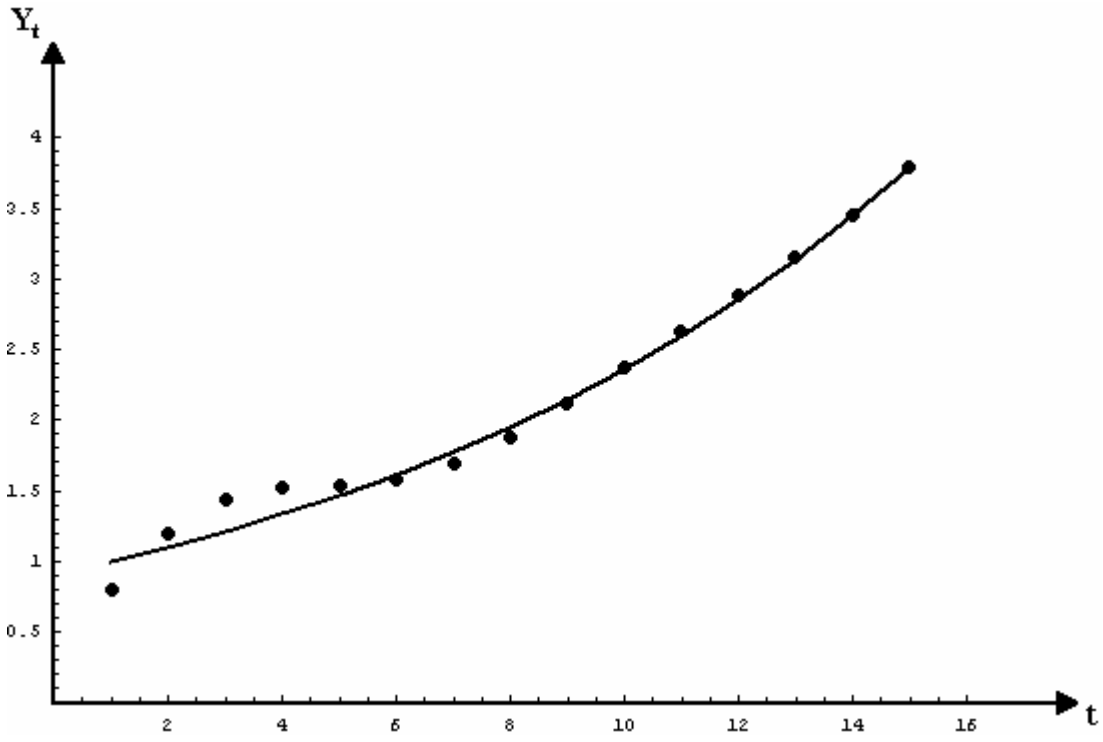
$$\Delta R_t = \frac{\sqrt{2}}{25} R_{re}^t \left\{-11\cos\left[\frac{\pi\,(1+t)}{4}\right] + 21\sin\left[\frac{\pi\,(1+t)}{4}\right]\right\} \qquad \textbf{\textit{(6.127)}}$$

Από την παραπάνω σχέση, και δεδομένου ότι $R_{re} \cong 0.778 < 1$, γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι με το πέρασμα του χρόνου η επιτοκιακή διαφορά θα συγκλίνει προς το μηδέν. Το συμπέρασμα αυτό επιβεβαιώνεται γραφικά και από το διάγραμμα Δ – 6.12.

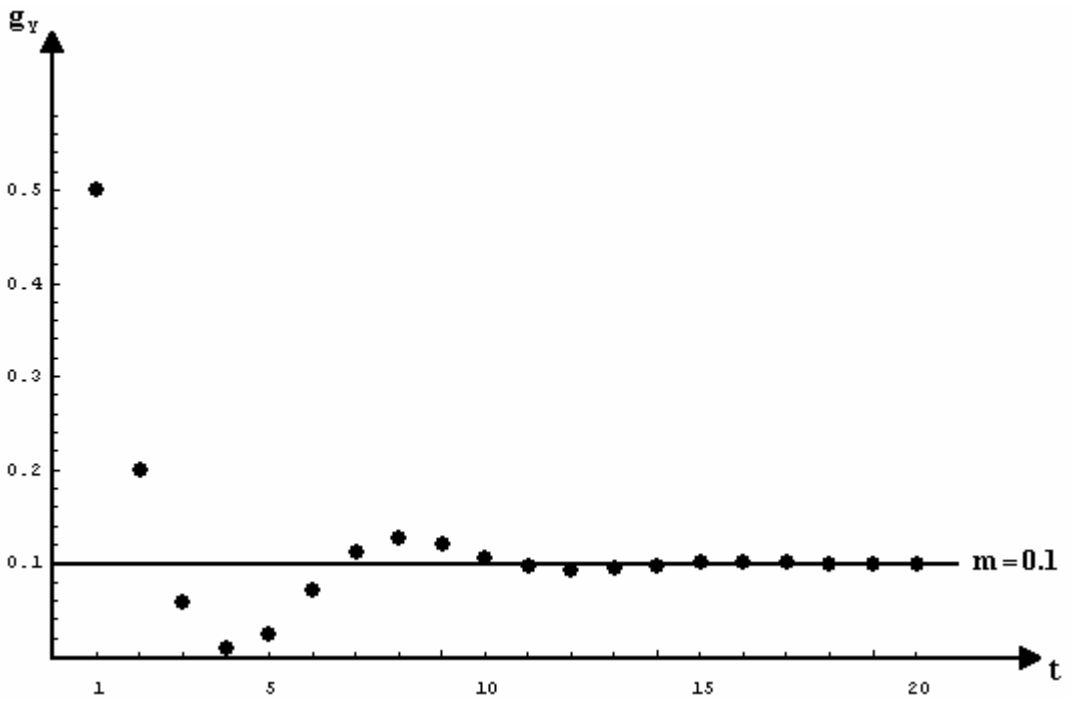
---

[59] Στο ίδιο συμπέρασμα θα καταλήγαμε εάν συγκρίναμε την τιμή του επιταχυντή με το μέγεθος v_{re}^s ($v = 11/9 < 200/99 = v_{re}^s$)

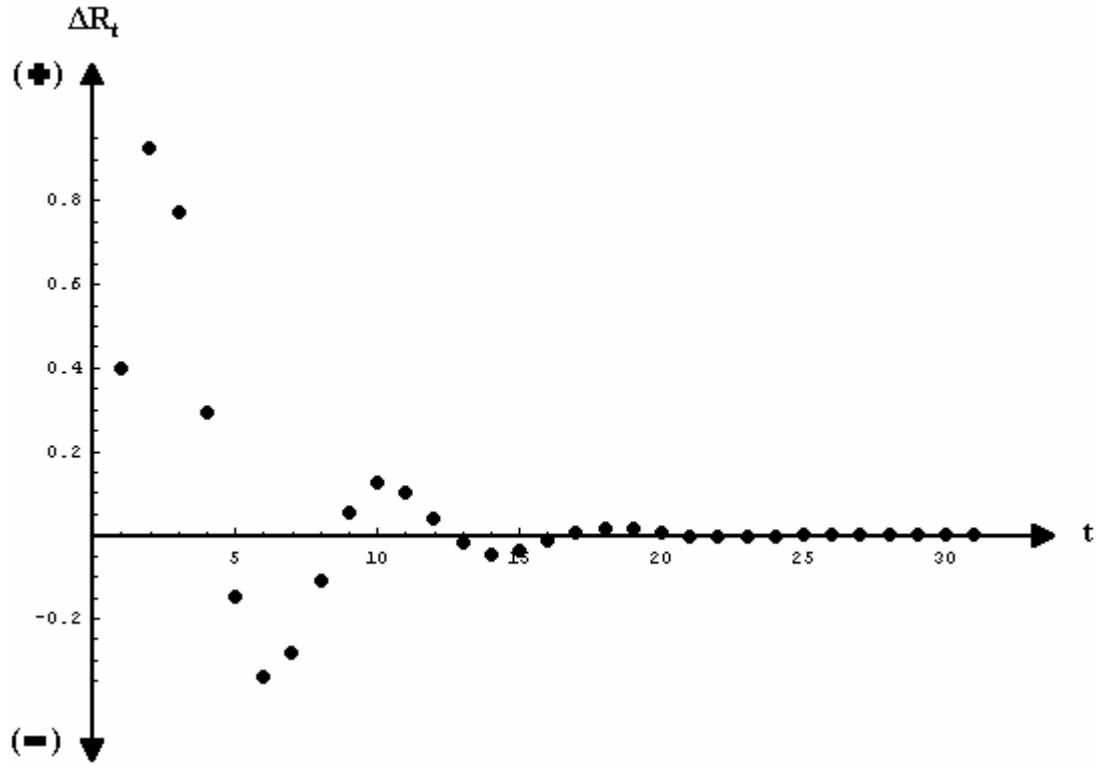
[60] Αυτό συμβαίνει μόνο στην περίπτωση που ισχύει ότι $b_0 = \overline{\Delta R}_t^{re} = 0 \;\forall\, t$.


Y_t
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
2
4
6
8
10
12
14
16
t

Δ – 6.10


g_Y
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
m = 0.1
1
5
10
15
20
t

Δ – 6.11



Δ – 6.12

Στον πίνακα 6.6 παρουσιάζεται η διαχρονική εξέλιξη των αριθμητικών μεγεθών του εισοδήματος ισορροπίας [όπως αυτό προσδιορίζεται βάσει της σχέσης (6.122)], του τρέχοντος εισοδήματος [όπως αυτό προσδιορίζεται βάσει της σχέσης (6.123)], της επιτοκιακής διαφοράς [όπως αυτό προσδιορίζεται βάσει της σχέσης (6.127)], της κατανάλωσης, των επενδύσεων. Οι μαθηματική μορφή των συναρτήσεων της κατανάλωσης και των επενδύσεων οι οποίες προσδιορίζονται στα πλαίσια της προσομοίωσης έχουν αντιστοίχως ως εξής:

$$C_t = \frac{9}{550}\left(\frac{11\sqrt{2}}{20}\right)^t\left[55\sqrt{2^t} - 32\cos\left(\frac{\pi t}{4}\right) + 10\sin\left(\frac{\pi t}{4}\right)\right] \qquad \textit{(6.128)}$$

&

$$I_t = \frac{1}{550}\left(\frac{11\sqrt{2}}{20}\right)^t\left[55\sqrt{2^t} + 178\cos\left(\frac{\pi t}{4}\right) + 120\sin\left(\frac{\pi t}{4}\right)\right] \qquad \textit{(6.129)}$$

<u>Πίνακας 6.6</u>: Η διαχρονική εξέλιξη του εισοδήματος ισορροπίας, του τρέχοντος εισοδήματος, της κατανάλωσης, των επενδύσεων και της επιτοκιακής διαφοράς

t	$\tilde{Y}_t^{re}$	Y_t	C_t	I_t	ΔR_t
0	1.0000	0.8000	0.3764	0.4236	0.4
1	1.1000	1.2000	0.7920	0.4080	0.924
2	1.2100	1.4410	1.1880	0.2530	0.7744
3	1.3310	1.5246	1.4266	0.0980	0.29282
4	1.4641	1.5373	1.5094	0.0280	– 0.146410
5	1.6105	1.5739	1.5219	0.0520	– 0.338207
6	1.7716	1.6870	1.5582	0.1288	– 0.283450
7	1.9487	1.8779	1.6701	0.2077	– 0.107179
8	2.1436	2.1168	1.8591	0.2577	0.0535897
9	2.3580	2.3714	2.0956	0.2757	0.1237920
10	2.5937	2.6247	2.3476	0.2771	0.1037500
11	2.8531	2.8791	2.5984	0.2806	0.0392304
12	3.1384	3.1482	2.8503	0.2980	– 0.0196152
13	3.4523	3.4474	3.1168	0.3306	– 0.0453111
14	3.7975	3.7862	3.4129	0.3733	– 0.0379750
15	4.1773	4.1678	3.7483	0.4194	– 0.0143593
16	4.5950	4.5914	4.1261	0.4653	0.0071796
17	5.0545	5.0563	4.5455	0.5108	0.0165850
18	5.5599	5.5641	5.0057	0.5584	0.0138998
19	6.1159	6.1194	5.5084	0.6110	0.0052559
20	6.7275	6.7288	6.0582	0.6706	– 0.00262793
21	7.4003	7.3996	6.6615	0.7381	– 0.00607052
22	8.1403	8.1388	7.3256	0.8132	– 0.00508767
23	8.9543	8.9530	8.0574	0.8957	– 0.00192378
24	9.8497	9.8493	8.8635	0.9858	0.00096199
25	10.8347	10.8349	9.7508	1.0842	0.00222196
26	11.9182	11.9187	10.7266	1.1921	0.00186222
27	13.1100	13.1105	11.7995	1.3109	0.00070415
28	14.4210	14.4212	12.9794	1.4418	– 0.000352075
29	15.8631	15.8630	14.2770	1.5861	– 0.000813293
30	17.4494	17.4492	15.7044	1.7448	– 0.000681617
31	19.1943	19.1942	17.2747	1.9195	– 0.000257737
32	21.1138	21.1137	19.0022	2.1115	0.000128868
33	23.2252	23.2252	20.9026	2.3226	0.000297686
34	25.5477	25.5477	22.9929	2.5548	0.000249489
35	28.1024	28.1025	25.2923	2.8102	0.000094338
36	30.9127	30.9127	27.8215	3.0912	– 0.0000471690
37	34.0039	34.0039	30.6036	3.4004	– 0.0001089600
38	37.4043	37.4043	33.6639	3.7404	– 0.0000913190
39	41.1448	41.1448	37.0303	4.1145	– 0.0000345301
40	45.2593	45.2592	40.7333	4.5259	0.0000172650

7. Συμπεράσματα

Στα πλαίσια της ανάλυσής μας επιχειρήθηκε η διερεύνηση των βραχυχρόνιων επιπτώσεων οι οποίες απορρέουν από την εισαγωγή του νομισματικού παράγοντα και από τη χρήση της έννοιας των προσδοκιών, πάνω στο υπόδειγμα επιχειρηματικών κύκλων του Samuelson.

Η δόμηση της αγοράς χρήματος ακολουθεί εν πολλοίς την κεϋνσιανή οικονομική θεώρηση, με το επίπεδο τιμών να θεωρείται ως δεδομένο και σταθερό και τη ζήτηση χρήματος για συναλλακτικούς σκοπούς να αποτελεί συνάρτηση του εισοδήματος. Η ζήτηση χρήματος για κερδοσκοπία θεωρήθηκε, ωστόσο, ότι αποτελεί μία αρνητική συνάρτηση όχι του επιτοκίου αλλά της προσδοκώμενης επιτοκιακής μεταβολής. Και αυτό διότι τα οικονομούντα άτομα που ζητούν χρήμα για την άσκηση κερδοσκοπίας κατά την περίοδο t θεωρείται ότι στηρίζονται στις προσδοκίες που διαμορφώνουν κατά την περίοδο t – 1 αναφορικά με την εξέλιξη της τιμής του επιτοκίου μεταξύ των δύο περιόδων. Τέλος η προσφορά χρήματος θεωρείται ότι αυξάνεται διαχρονικά με ένα σταθερό ρυθμό, το μέγεθος του οποίου ορίζεται εξωγενώς από την Κεντρική Τράπεζα. Πίσω από την τελευταία αυτή υπόθεση κρύβεται η βασική κεϋνσιανή παραδοχή, ότι το τρέχων επίπεδο των τιμών είναι μεγαλύτερο της τιμής ισορροπίας του. Με άλλα λόγια θεωρούμε ότι η πραγματική ποσότητα χρήματος κατά την περίοδο t είναι μικρότερη από την τιμή ισορροπίας της. Δεδομένης της υπόθεσης περί σταθερότητας των τιμών, η πραγματική προσφορά χρήματος θα ήταν δυνατό να πλησιάσει την τιμή ισορροπίας της εφόσον η ονομαστική προσφορά χρήματος αυξανόταν με το πέρασμα του χρόνου.

Η δομή της αγοράς του προϊόντος ακολουθεί σε πολύ μεγάλο βαθμό εκείνη του αρχικού υποδείγματος του Samuelson. Πιο συγκεκριμένα η τρέχουσα κατανάλωση θεωρείται ως μία θετική συνάρτηση του εισοδήματος της προηγούμενης περιόδου. Η συνάρτηση ωστόσο των επενδύσεων τροποποιείται, θεωρώντας ότι το τρέχων ύψος των επενδύσεων επηρεάζεται όχι μόνο από τις αυτόνομες επενδύσεις και την μεταβολή του ύψους της κατανάλωσης μεταξύ των περιόδων t και t – 1, όπως στο αρχικό υπόδειγμα, αλλά και από τις προσδοκίες που διαμορφώνουν οι επιχειρηματίες κατά την περίοδο t – 1 αναφορικά με την εξέλιξη του ύψους του επιτοκίου μεταξύ των περιόδων t και t – 1.

Οι παρεμβάσεις που πραγματοποιήθηκαν στο αρχικό υπόδειγμα, είχαν ως συνέπεια τον επηρεασμό τόσο των δυναμικών του ιδιοτήτων όσο και της φύσης του εισοδήματος ισορροπίας. Πιο συγκεκριμένα, η παραδοχή ότι η ονομαστική προσφορά χρήματος αυξάνεται διαχρονικά με ένα σταθερό ρυθμό, είχε ως συνέπεια το εισόδημα ισορροπίας να μην αποτελεί ένα σταθερό και θετικό μέγεθος, όπως συνέβαινε στα πλαίσια του αρχικού υποδείγματος, αλλά μία συνάρτηση του χρόνου. Το μέγεθος του εισοδήματος ισορροπίας το οποίο εξειδικεύτηκε στα πλαίσια τεσσάρων διαφορετικών μηχανισμών διαμόρφωσης των προσδοκιών, και ειδικότερα των αναθεωρούμενων (A.E.), των στατικών (S.E.), των ορθολογικών (RA) και των παλινδρομικών (R.E.) προσδοκιών, παρουσιάζεται στον πίνακα 7.1 που ακολουθεί, μαζί με το μέγεθος του εισοδήματος ισορροπίας που εξειδικεύτηκε στα πλαίσια του αρχικού υποδείγματος του Samuelson (S). Να σημειωθεί εδώ ότι το εισόδημα ισορροπίας που προσδιορίζεται στα πλαίσια του μηχανισμού των παλινδρομικών προσδοκιών, στηρίζεται στην υπόθεση ότι η επιτοκιακή διαφορά ισορροπίας συνιστά ένα μέγεθος ανεξάρτητο του χρόνου.

<u>Πίνακας 7.1</u>: Το εισόδημα ισορροπίας, όπως αυτό εξειδικεύεται στα πλαίσια του διευρυμένου με τις προσδοκίες και το νομισματικό παράγοντα υποδείγματος του Samuelson, βάσει των διαφορετικών μηχανισμών διαμόρφωσης των προσδοκιών.

S	$\tilde{Y} = \dfrac{b_0}{1 - c_1}$
A.E.	$\tilde{Y}_t^{ae} = \dfrac{b_0}{1 - c_1 + \varphi} + \dfrac{\varphi}{1 + \varphi} \dfrac{M_0(\gamma + m)}{d_1} \dfrac{\tilde{m}^{t+2}}{\tilde{m}^3 + a_2\tilde{m}^2 + a_1\tilde{m} + a_0}$
RA & S.E.	$\tilde{Y}_t^{i} = \dfrac{b_0}{1 - c_1 + \varphi} + \dfrac{\varphi}{1 + \varphi} \dfrac{M_0}{d_1} \dfrac{\tilde{m}^{t+2}}{\tilde{m}^2 + \delta_1\tilde{m} + \delta_0}$
R.E.	$\tilde{Y}_t^{re} = \dfrac{b_0 + b_2(1 - \omega)\overline{\Delta R}^{re}}{1 - c_1 + \varphi\omega} + \dfrac{\varphi\omega}{1 + \varphi\omega} \dfrac{M_0}{d_1} \dfrac{\tilde{m}^{t+2}}{\tilde{m}^2 + \zeta_1\tilde{m} + \zeta_0}$

Σημείωση: όπου i = RA , S.E.

Όπως διαπιστώνουμε, το εισόδημα ισορροπίας το οποίο προκύπτει, ανεξαρτήτως του μηχανισμού διαμόρφωσης των προσδοκιών, στα πλαίσια του διευρυμένου υποδείγματος, δεν συνιστά ένα σταθερό και θετικό μέγεθος, όπως συνέβαινε στο αρχικό υπόδειγμα του Samuelson, αλλά αποτελεί μία συνάρτηση του χρόνου. Η διαφοροποίηση αυτή οφείλεται στην παραδοχή που κάναμε ότι η ονομαστική προσφορά χρήματος αυξάνεται διαχρονικά με σταθερό ρυθμό.

Το μέγεθος του εισοδήματος ισορροπίας το οποίο προκύπτει στα πλαίσια των αναθεωρούμενων, των στατικών και των ορθολογικών προσδοκιών αποδεικνύεται ότι είναι ταυτόσημο. Το μέγεθος του εισοδήματος ισορροπίας που προκύπτει στα πλαίσια του μηχανισμού των παλινδρομικών προσδοκιών είναι διαφορετικό από εκείνο που προκύπτει στα πλαίσια των άλλων μηχανισμών, εφόσον το μέγεθος του συντελεστή ο οποίος εκφράζει την ταχύτητα προσαρμογής της επιτοκιακής διαφοράς της περιόδου t – 1 προς την τιμή ισορροπίας της, είναι διαφορετικό στις αγορές αγαθών και χρήματος. Στην ειδική περίπτωση που ο συντελεστής ταχύτητας είναι ο ίδιος στις δύο αγορές, το εισόδημα ισορροπίας που προσδιορίζεται στα πλαίσια του μηχανισμού των παλινδρομικών προσδοκιών είναι ταυτόσημο με εκείνο που προκύπτει στα πλαίσια των υπολοίπων μηχανισμών διαμόρφωσης των προσδοκιών. Με άλλα λόγια, εάν υπάρχει απόλυτη ταύτιση των μηχανισμών διαμόρφωσης των προσδοκιών στις αγορές αγαθών και χρήματος, το εισόδημα ισορροπίας που προκύπτει στα πλαίσια του διευρυμένου υποδείγματος του Samuelson είναι το ίδιο ανεξάρτητα από το είδος του χρησιμοποιούμενου μηχανισμού διαμόρφωσης των προσδοκιών[61].

Στο αρχικό υπόδειγμα του Samuelson οι αυτόνομες επενδύσεις (κρατικές δαπάνες) συνιστούν ένα θετικό και μη μηδενικό μέγεθος[62]. Στα πλαίσια ωστόσο του διευρυμένου υποδείγματος που παρουσιάσαμε, ο μηδενισμός του εν λόγω μεγέθους,

[61] Η συγκεκριμένη περίπτωση είναι δυνατό να υφίσταται μόνο εφόσον υπάρχει ταύτιση μεταξύ των ατόμων που δραστηριοποιούνται στις αγορές αγαθών και χρήματος.

[62] Στην περίπτωση που στα πλαίσια του αρχικού υποδείγματος του Samuelson θέταμε τις αυτόνομες επενδύσεις ίσες με το μηδέν, το εισόδημα ισορροπίας που θα προέκυπτε θα ήταν ίσο με το μηδέν.

καθώς και εκείνου της επιτοκιακής διαφοράς ισορροπίας το οποίο προσδιορίζεται στα πλαίσια του μηχανισμού των παλινδρομικών προσδοκιών, έχει ως συνέπεια το εισόδημα ισορροπίας να αυξάνεται διαχρονικά με τον ίδιο ρυθμό με τον οποίο αυξάνεται η ποσότητα του χρήματος. Δεδομένου ότι το μέγεθος του ρυθμού μεταβολής της ποσότητας χρήματος καθορίζεται από την Κεντρική Τράπεζα, γίνεται αμέσως αντιληπτό ότι στην ειδική περίπτωση που $b_0 = \overline{\Delta R}^{re} = 0$, η Κεντρική Τράπεζα μπορεί να καθορίσει όχι μόνο το ρυθμό μεγέθυνσης της ποσότητας χρήματος, αλλά και το ρυθμό μεγέθυνσης του εισοδήματος ισορροπίας.

Η επίδραση πάνω στο επίπεδο του εισοδήματος ισορροπίας, η οποία προκύπτει ως συνέπεια της απειροελάχιστης μεταβολής του μεγέθους μίας μόνο εκ των παραμέτρων που το συνιστούν, παρουσιάζεται[63] στα πλαίσια του πίνακα 7.2. Όπως διαπιστώνουμε, ανεξαρτήτως του μηχανισμού διαμόρφωσης των προσδοκιών στα πλαίσια του οποίου προσδιορίζεται το μέγεθος του εισοδήματος ισορροπίας, η απειροελάχιστη μεταβολή του μεγέθους των παραμέτρων b_0 , c_1 , v και M_0 επιδρά θετικά πάνω στο ύψος του εισοδήματος ισορροπίας. Ακριβώς το αντίθετο συμβαίνει στην περίπτωση του συντελεστή d_1, η απειροελάχιστη μεταβολή του οποίου επιδρά αρνητικά πάνω στο ύψος του εισοδήματος ισορροπίας. Το πρόσημο της επίδρασης πάνω στο εισόδημα ισορροπίας είναι απροσδιόριστο στην περίπτωση των συντελεστών b_2 , d_2 , m , γ , θ_1 και θ_2.

<u>Πίνακας 7.2</u> : Επηρεασμός του εισοδήματος ισορροπίας από μία απειροελάχιστη μεταβολή του μεγέθους μίας εκ των συνιστωσών παραμέτρων του.

	A.E.	S.E. / RA	R.E.
b_0	+	+	+
c_1	+	+	+
v	+	+	+
b_2	?	?	?
d_1	–	–	–
d_2	?	?	?
m	?	?	?
M_0	+	+	+
γ	?	~	~
θ_1	~	~	?
θ_2	~	~	?

***Σημείωση*:** Με το σύμβολο "+" ("–") επισημαίνεται η θετική (αρνητική) επίδραση πάνω στο επίπεδο του εισοδήματος ισορροπίας, με το σύμβολο "?" επισημαίνεται η αδυναμία προσδιορισμού του πρόσημου της επίδρασης και τέλος με το σύμβολο "~" επισημαίνεται η μη διερεύνηση του πρόσημου της επίδρασης λόγω μη χρήσης του συντελεστή στα πλαίσια των μηχανισμών διαμόρφωσης των προσδοκιών.

[63] Τα παρουσιαζόμενα στον πίνακα 7.2 αποτελέσματα στηρίζονται στην παραδοχή ότι τα πολυώνυμα $P_1(\tilde{m}) = \tilde{m}^3 + a_2\tilde{m}^2 + a_1\tilde{m} + a_0$, $P_6(\tilde{m}) = \tilde{m}^2 + \delta_1\tilde{m} + \delta_0$ & $P_8(\tilde{m}) = \tilde{m}^2 + \zeta_1\tilde{m} + \zeta_0$ είναι θετικά ορισμένα, κάτι που διασφαλίζει και το θετικό πρόσημο του εισοδήματος ισορροπίας για κάθε t.

Πέραν της εξέλιξης του εισοδήματος ισορροπίας ενδιαφέρον παρουσιάζει και η εξέλιξη της επιτοκιακής διαφοράς ισορροπίας, όπως αυτή προσδιορίζεται στα πλαίσια των διαφορετικών μηχανισμών διαμόρφωσης των προσδοκιών. Όπως είδαμε, η απαραίτητη προϋπόθεση που πρέπει να ικανοποιείται, ανεξαρτήτως του μηχανισμού διαμόρφωσης των προσδοκιών, προκειμένου το μέγεθος της επιτοκιακής διαφοράς ισορροπίας να ισούται με το μηδέν, είναι οι αυτόνομες επενδύσεις να συνιστούν ένα μηδενικό μέγεθος. Στην περίπτωση που ικανοποιείται η βασική αυτή προϋπόθεση, το εάν και κατά πόσον η επιτοκιακή διαφορά ισορροπίας θα συνιστά ένα μηδενικό μέγεθος εξαρτάται από το μέγεθος του επιταχυντή, της οριακής ροπής προς κατανάλωση και του σταθερού ρυθμού της νομισματικής επέκτασης. Στον πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζονται οι προϋποθέσεις που πρέπει να ικανοποιούνται στα πλαίσια των διαφορετικών μηχανισμών των προσδοκιών. Όπως γίνεται αντιληπτό εάν οι αυτόνομες επενδύσεις συνιστούν ένα μηδενικό μέγεθος, η Κεντρική Τράπεζα έχει την ευχέρεια να ορίσει, βάσει του μεγέθους του επιταχυντή και της οριακής ροπής προς κατανάλωση, το μέγεθος του ρυθμού μεταβολής της ποσότητας χρήματος κατά τρόπο, ώστε το μέγεθος της επιτοκιακής διαφοράς ισορροπίας να είναι διαχρονικά σταθερό και ίσο με το μηδέν.

<u>Πίνακας 7.3</u>: Προϋποθέσεις μηδενισμού της επιτοκιακής διαφοράς ισορροπίας

A.E.	$b_0 = 0$	$v \in \left(\bar{v}_1^{ae}, \bar{v}_2^{ae}\right)$	$m = S_1 + T_1 - \frac{1}{3}\eta_2 - 1$
		$v = \bar{v}_1^{ae}$ ή $v = \bar{v}_2^{ae}$	$m = 2\sqrt[3]{P_1} - \frac{1}{3}\eta_2 - 1$
		$v \notin \left(\bar{v}_1^{ae}, \bar{v}_2^{ae}\right)$	$m = 2\sqrt{-Q_1}\cos\left(\frac{\tilde{\theta}_1}{3}\right) - \frac{\eta_2}{3} - 1$ ή $m = 2\sqrt{-Q_1}\cos\left(\frac{\tilde{\theta}_1 + 2\pi}{3}\right) - \frac{\eta_2}{3} - 1$ ή $m = 2\sqrt{-Q_1}\cos\left(\frac{\tilde{\theta}_1 + 4\pi}{3}\right) - \frac{\eta_2}{3} - 1$
S.E.	$b_0 = 0$	$v \in \left(\bar{v}_1^{ae}, \bar{v}_2^{ae}\right)$	$m = \frac{c_1}{2}\left[1 + v \pm \sqrt{P_3(v)}\right] - 1$
RA		$v \notin \left(\bar{v}_1^{ae}, \bar{v}_2^{ae}\right)$	
R.E.		$v = \bar{v}_2^{ae}$	$m = \sqrt{1 - c_1}$

όπου: $\bar{v}_{2,1}^{ae} = \left(1 \pm \sqrt{1 - c_1}\right)^2 / c_1$, $S_1 = \sqrt[3]{P_1 + \sqrt{D_1}}$, $T_1 = \sqrt[3]{P_1 - \sqrt{D_1}}$, $D_1 = Q_1^3 + P_1^2$,

$Q_1 = \left(3\eta_1 - \eta_2^2\right)/9$, $P_1 = \left(9\eta_1\eta_2 - 27\eta_0 - 2\eta_2^3\right)/54$, $\eta_0 = -(1-\gamma)\, v\, c_1$,

$\eta_1 = c_1\left[(1-\gamma)(1+v) + v\right]$, $\eta_2 = -\left[1 - \gamma + c_1(1+v)\right]$, $\tilde{\theta}_1 = \arccos\left(P_1 / \sqrt{-Q_1^3}\right)$,

$P_3(v) = v^2 + 2(1 - 2/c_1)\, v + 1$

Οι επιπτώσεις της εισαγωγής του νομισματικού παράγοντα και της έννοιας των προσδοκιών στο υπόδειγμα επιχειρηματικών κύκλων του Samuelson, παρουσιάζονται συνοπτικά στα πλαίσια του πίνακα 7.4 . Όπως διαπιστώνουμε, το διευρυμένο υπόδειγμα το οποίο παρουσιάσθηκε στα πλαίσια της παρούσας διατριβής είναι πιο ευσταθές συγκριτικά με το αρχικό υπόδειγμα του Samuelson. Και αυτό διότι ανεξάρτητα από το μηχανισμό διαμόρφωσης των προσδοκιών που χρησιμοποιείται, το διάστημα τιμών του επιταχυντή για το οποίο επιτυγχάνεται σύγκλιση του εισοδήματος προς την τιμή ισορροπίας του, διευρύνεται στα πλαίσια του διευρυμένου υποδείγματος.

Μεταξύ των διαφορετικών μηχανισμών διαμόρφωσης των προσδοκιών που χρησιμοποιούνται, οι μηχανισμοί των αναθεωρούμενων, των στατικών και των ορθολογικών προσδοκιών οδηγούν στην εξειδίκευση του ίδιου διαστήματος τιμών του επιταχυντή, για το οποίο η γενική λύση του διευρυμένου υποδείγματος χαρακτηρίζεται ως ευσταθής. Στο ίδιο διάστημα τιμών οδηγούμαστε και στα πλαίσια του μηχανισμού των παλινδρομικών προσδοκιών, εφόσον οι συντελεστές που περιγράφουν την ταχύτητα προσαρμογής της επιτοκιακής διαφοράς προς την τιμή ισορροπίας της, έχουν τις ίδιες τιμές στις αγορές αγαθών και χρήματος. Εάν το μέγεθος του συντελεστή ταχύτητας στην αγορά αγαθών είναι μικρότερο (μεγαλύτερο) από εκείνο της αγοράς χρήματος, τότε ο μηχανισμός των παλινδρομικών προσδοκιών καθιστά το διευρυμένο υπόδειγμα περισσότερο (λιγότερο) ευσταθές, συγκριτικά με τους υπόλοιπους μηχανισμούς διαμόρφωσης των προσδοκιών. Και αυτό διότι οδηγούμαστε στην εξειδίκευση ενός μεγαλύτερου (μικρότερου) διαστήματος τιμών του επιταχυντή, για το οποίο η γενική λύση του διευρυμένου υποδείγματος χαρακτηρίζεται ως ευσταθής.

Πίνακας 7.4 : Διαστήματα τιμών του επιταχυντή για τα οποία επιτυγχάνεται σύγκλιση στα πλαίσια του αρχικού και του διευρυμένου υποδείγματος του Samuelson

			0	v^s_{sn}	$v^s_{re}(\theta_1 > \theta_2)$	v^s_i	$v^s_{re}(\theta_1 < \theta_2)$	$+\infty$
Αρχικό υπόδειγμα								
Διευρυμένο υπόδειγμα	AE/SE/RA							
	RE	$\theta_1 > \theta_2$						
		$\theta_1 < \theta_2$						
		$\theta_1 = \theta_2$						

Σημείωση: $i = AE, SE, RA$

Τα θεωρητικά συμπεράσματα της ανάλυσης μας επιβεβαιώθηκαν με τη χρήση της μεθόδου της προσομοίωσης, στα πλαίσια των οποίων εξειδικεύτηκε, για κάθε ένα από τους χρησιμοποιούμενους μηχανισμούς διαμόρφωσης των προσδοκιών, η συναρτησιακή μορφή των σχέσεων που περιγράφουν τη διαχρονική εξέλιξη του εισοδήματος.

Παράρτημα Α

Από τη σχέση (37) προκύπτει ότι:

$$Q^3=\left\{-\frac{1}{9}\frac{v^2+\left[2-u(3+h)\right]v+\left(1-hu+h^2u^2\right)}{u^2}\right\}^3=$$

$$=-\frac{1}{729}\frac{\left(v^2+2v+1-3uv-huv-hu+h^2u^2\right)^3}{u^6}=-\frac{1}{729u^6}-\frac{2v}{243u^6}+$$

$$+\frac{h}{243u^5}-\frac{5v^2}{243u^6}-\frac{h^2}{243u^4}+\frac{v}{81u^5}+\frac{7h^3}{729u^3}+\frac{4v^2}{81u^5}-\frac{20v^3}{729u^6}+\frac{2v^3}{27u^5}-$$

$$-\frac{v^2}{27u^4}-\frac{2h^4}{243u^2}+\frac{4v^4}{81u^5}+\frac{v^5}{81u^5}-\frac{v^4}{27u^4}-\frac{2v^3}{27u^4}+\frac{v^3}{27u^3}+\frac{h^5}{243u}-$$

$$-\frac{h^6}{729}-\frac{5v^4}{243u^6}-\frac{2v^5}{243u^6}-\frac{v^6}{729u^6}+\frac{5hv}{243u^5}+\frac{10hv^3}{243u^5}+\frac{10hv^2}{243u^5}-\frac{8h^2v}{243u^4}-$$

$$-\frac{2hv}{81u^4}-\frac{4h^2v^2}{81u^4}-\frac{2hv^2}{27u^4}+\frac{h^2v}{27u^3}+\frac{7h^3v}{243u^3}+\frac{hv^5}{243u^5}+\frac{7h^3v^2}{243u^3}+\frac{5hv^4}{243u^5}-$$

$$-\frac{8h^2v^3}{243u^4}-\frac{2hv^3}{27u^4}-\frac{2h^2v^4}{243u^4}-\frac{2hv^4}{81u^4}+\frac{h^2v^3}{27u^3}+\frac{7h^3v^3}{729u^3}-\frac{2h^4v^2}{243u^2}-\frac{2h^3v}{81u^2}+$$

$$+\frac{2h^2v^2}{27u^3}+\frac{hv^2}{27u^3}+\frac{hv^3}{27u^3}-\frac{h^2v^2}{27u^2}-\frac{2h^3v^2}{81u^2}+\frac{h^4v}{81u}-\frac{4h^4v}{243u^2}+\frac{h^5v}{243u} \qquad (A.1)$$

Από τη σχέση τώρα (38) προκύπτει ότι:

$$P^2=\left\{\frac{1}{54}(v+1-2hu)\frac{2v^2+\left[4+(h-9)u\right]v+\left(2+hu-h^2u^2\right)}{u^3}\right\}^2=$$

$$=\frac{1}{2916}(v+1-2hu)^2\frac{\left(2v^2+4v+huv-9uv+2+hu-h^2u^2\right)^2}{u^6}=$$

$$=\frac{1}{729u^6}+\frac{2v}{243u^6}-\frac{h}{243u^5}+\frac{5v^2}{243u^6}-\frac{h^2}{972u^4}-\frac{v}{81u^5}+\frac{13h^3}{1458u^3}-\frac{4v^2}{81u^5}+$$

$$+\frac{20\,v^3}{729\,u^6}-\frac{2\,v^3}{27\,u^5}+\frac{v^2}{36\,u^4}-\frac{h^4}{972\,u^2}-\frac{4\,v^4}{81\,u^5}-\frac{v^5}{81\,u^5}+\frac{v^4}{36\,u^4}+\frac{v^3}{18\,u^4}-\frac{h^5}{243\,u}+$$

$$+\frac{h^6}{729}+\frac{5\,v^4}{243\,u^6}+\frac{2\,v^5}{243\,u^6}+\frac{v^6}{729\,u^6}-\frac{5\,hv}{243\,u^5}-\frac{10\,hv^3}{243\,u^5}-\frac{10\,hv^2}{243\,u^5}-\frac{h^2v}{243\,u^4}+$$

$$+\frac{7\,hv}{162\,u^4}-\frac{h^2v^2}{162\,u^4}+\frac{7\,hv^2}{54\,u^4}-\frac{h^2v}{54\,u^3}+\frac{13\,h^3v}{486\,u^3}-\frac{hv^5}{243\,u^5}+\frac{13\,h^3v^2}{486\,u^3}-\frac{5\,hv^4}{243\,u^5}-$$

$$-\frac{h^2v^3}{243\,u^4}+\frac{7\,hv^3}{54\,u^4}-\frac{h^2v^4}{972\,u^4}+\frac{7\,hv^4}{162\,u^4}-\frac{h^2v^3}{54\,u^3}+\frac{13\,h^3v^3}{1458\,u^3}-\frac{h^4v^2}{972\,u^2}-\frac{4\,h^3v}{81\,u^2}-$$

$$-\frac{h^2v^2}{27\,u^3}-\frac{hv^2}{9\,u^3}-\frac{hv^3}{9\,u^3}+\frac{h^2v^2}{9\,u^2}-\frac{4\,h^3v^2}{81\,u^2}+\frac{2\,h^4v}{81\,u}-\frac{h^4v}{486\,u^2}-\frac{h^5v}{243\,u} \qquad \textit{(A.2)}$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (Α.1) και (Α.2) στη σχέση (36) βρίσκουμε το μέγεθος της διακρίνουσας D το οποίο και έχει ως ακολούθως:

$$D=Q^3+P^2=-\frac{h^2}{243\,u^4}-\frac{h^2}{972\,u^4}+\frac{7\,h^3}{729\,u^3}+\frac{13\,h^3}{1458\,u^3}-\frac{v^2}{27\,u^4}+\frac{v^2}{36\,u^4}-$$

$$-\frac{2\,h^4}{243\,u^2}-\frac{h^4}{972\,u^2}-\frac{v^4}{27\,u^4}+\frac{v^4}{36\,u^4}-\frac{2\,v^3}{27\,u^4}+\frac{v^3}{18\,u^4}+\frac{v^3}{27\,u^3}-$$

$$-\frac{8\,h^2v}{243\,u^4}-\frac{h^2v}{243\,u^4}-\frac{2\,hv}{81\,u^4}+\frac{7\,hv}{162\,u^4}-\frac{4\,h^2v^2}{81\,u^4}-\frac{h^2v^2}{162\,u^4}-\frac{2\,hv^2}{27\,u^4}+\frac{7\,hv^2}{54\,u^4}+$$

$$+\frac{h^2v}{27\,u^3}-\frac{h^2v}{54\,u^3}+\frac{7\,h^3v}{243\,u^3}+\frac{13\,h^3v}{486\,u^3}+\frac{7\,h^3v^2}{243\,u^3}+\frac{13\,h^3v^2}{486\,u^3}-\frac{8\,h^2v^3}{243\,u^4}-\frac{h^2v^3}{243\,u^4}-$$

$$-\frac{2\,hv^3}{27\,u^4}+\frac{7\,hv^3}{54\,u^4}-\frac{2\,h^2v^4}{243\,u^4}-\frac{h^2v^4}{972\,u^4}-\frac{2\,hv^4}{81\,u^4}+\frac{7\,hv^4}{162\,u^4}+\frac{h^2v^3}{27\,u^3}-\frac{h^2v^3}{54\,u^3}+$$

$$+\frac{7\,h^3v^3}{729\,u^3}+\frac{13h^3v^3}{1458\,u^3}-\frac{2\,h^4v^2}{243\,u^2}-\frac{h^4v^2}{972\,u^2}-\frac{2\,h^3v}{81\,u^2}-\frac{4\,h^3v}{81\,u^2}+\frac{2\,h^2v^2}{27\,u^3}-\frac{h^2v^2}{27\,u^3}+$$

$$+\frac{hv^2}{27\,u^3}-\frac{hv^2}{9\,u^3}+\frac{hv^3}{27\,u^3}-\frac{hv^3}{9\,u^3}-\frac{h^2v^2}{27\,u^2}+\frac{h^2v^2}{9\,u^2}-\frac{2\,h^3v^2}{81\,u^2}-\frac{4\,h^3v^2}{81\,u^2}+$$

$$+\frac{h^4 v}{81\,u}+\frac{2\,h^4 v}{81\,u}-\frac{4\,h^4 v}{243\,u^2}-\frac{h^4 v}{486\,u^2}\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow D=-\frac{h^2}{108\,u^4}+\frac{h^3}{54\,u^3}-\frac{v^2}{108\,u^4}-\frac{h^4}{108\,u^2}-\frac{v^4}{108\,u^4}-\frac{v^3}{54\,u^4}+\frac{v^3}{27\,u^3}-\frac{h^2 v}{27\,u^4}+$$

$$+\frac{hv}{54\,u^4}-\frac{h^2 v^2}{18\,u^4}+\frac{hv^2}{18\,u^4}+\frac{h^2 v}{54\,u^3}+\frac{h^3 v}{18\,u^3}+\frac{h^3 v^2}{18\,u^3}-\frac{h^2 v^3}{27\,u^4}+\frac{hv^3}{18\,u^4}-$$

$$-\frac{h^2 v^4}{108\,u^4}+\frac{hv^4}{54\,u^4}+\frac{h^2 v^3}{54\,u^3}+\frac{h^3 v^3}{54\,u^3}-\frac{h^4 v^2}{108\,u^2}-\frac{2\,h^3 v}{27\,u^2}+\frac{h^2 v^2}{27\,u^3}-\frac{2\,hv^2}{27\,u^3}-$$

$$-\frac{2\,hv^3}{27\,u^3}+\frac{2\,h^2 v^2}{27\,u^2}-\frac{2\,h^3 v^2}{27\,u^2}+\frac{h^4 v}{27\,u}-\frac{h^4 v}{54\,u^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow D=-\frac{1}{108\,u^4}\Big(h^2+v^2+v^4+2\,v^3+4\,h^2 v-2\,hv+6\,h^2 v^2-6\,hv^2+4\,h^2 v^3-6\,hv^3+$$

$$+h^2 v^4-2\,hv^4-2\,h^3 u+h^4 u^2-4\,uv^3-2\,h^2 uv-6\,h^3 uv-6\,h^3 uv^2-$$

$$-2\,h^2 uv^3-2\,h^3 uv^3+h^4 u^2 v^2+8\,h^3 u^2 v-4\,h^2 uv^2+8\,huv^2+8\,huv^3-$$

$$-8\,h^2 u^2 v^2+8\,h^3 u^2 v^2-4\,h^4 u^3 v+2\,h^4 u^2 v\Big)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow D=-\frac{1}{108\,u^4}\Big(1+v^2+2\,v-4\,uv\Big)\Big(v^2+h^2 v^2-2\,hv^2-2\,h^3 uv+2\,h^2 uv+2\,h^2 v-$$

$$-2\,hv+h^2+h^4 u^2-2\,h^3 u\Big)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow D=-\frac{1}{108}\Big[\,v^2+2\,(1-2\,u)\,v+1\,\Big]\,\frac{\left(-v+h+hv-h^2 u\right)^2}{u^4}\qquad\textit{(A.3)}$$

<u>Παράρτημα Β</u>

Προκειμένου να θεμελιώσουμε τη σχέση (5.51) θα προσδιορίσουμε, με τη βοήθεια των σχέσεων (5.29.1) ~ (5.29.3), το πρόσημο των διαφορών $\tilde{m}_1 - \tilde{m}_2$ και $\tilde{m}_1 - \tilde{m}_3$. Πιο συγκεκριμένα έχουμε ότι:

$$\tilde{m}_1 - \tilde{m}_2 = 2\sqrt{-Q}\cos\left(\frac{\theta}{3}\right) - \frac{a_2}{3} - \left[2\sqrt{-Q}\cos\left(\frac{\theta}{3} + 120^o\right) - \frac{a_2}{3}\right] =$$

$$= 2\sqrt{-Q}\left[\cos\left(\frac{\theta}{3}\right) - \cos\left(\frac{\theta}{3} + 120^o\right)\right] =$$

$$= 2\sqrt{-Q}\left[\cos\left(\frac{\theta}{3}\right) - \cos\left(\frac{\theta}{3}\right)\cos\left(120^o\right) + \sin\left(\frac{\theta}{3}\right)\sin\left(120^o\right)\right] =$$

$$= 2\sqrt{-Q}\left[\cos\left(\frac{\theta}{3}\right) - \cos\left(\frac{\theta}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] =$$

$$= 2\sqrt{-Q}\left[\frac{3}{2}\cos\left(\frac{\theta}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{\theta}{3}\right)\right] = \sqrt{-3Q}\left[\frac{3}{\sqrt{3}}\cos\left(\frac{\theta}{3}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{3}\right)\right] =$$

$$= \sqrt{-3Q}\left[\sqrt{3}\cos\left(\frac{\theta}{3}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{3}\right)\right] = \sqrt{-3Q}\left[\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\theta}{3}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{3}\right)\right] =$$

$$= \sqrt{-3Q}\left[\frac{\sin(\pi/3)\cos(\theta/3) + \cos(\pi/3)\sin(\theta/3)}{\cos(\pi/3)}\right] = \sqrt{-3Q}\left[\frac{\sin(\pi/3 + \theta/3)}{1/2}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \tilde{m}_1 - \tilde{m}_2 = 2\sqrt{-3Q}\sin\left(\frac{\pi + \theta}{3}\right) \qquad \textbf{\textit{(B.1)}}$$

Στα πλαίσια της διερευνούμενης περίπτωσης ισχύει ότι:

$$\left.\begin{array}{l} D < 0 \Rightarrow Q^3 + P^2 < 0 \Rightarrow P^2 < -Q^3 \\ Q < 0 \Rightarrow Q^3 < 0 \Rightarrow -Q^3 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{P^2}{-Q^3} < 1 \Rightarrow \sqrt{\frac{P^2}{-Q^3}} < 1 \Rightarrow \frac{P}{\sqrt{-Q^3}} < 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\left[\arccos\left(\frac{P}{\sqrt{-Q^3}}\right)\right] < 1 \Rightarrow \qquad \cos\left(\tilde{\theta}\right) < 1 \qquad \textbf{\textit{(B.2)}}$$

Η σχέση (Β.2) ικανοποιείται για κάθε τόξο στο διάστημα[64] (0,π). Με άλλα λόγια ισχύει ότι:

$$0 < \tilde{\theta} < \pi \qquad \textbf{\textit{(B.3)}}$$

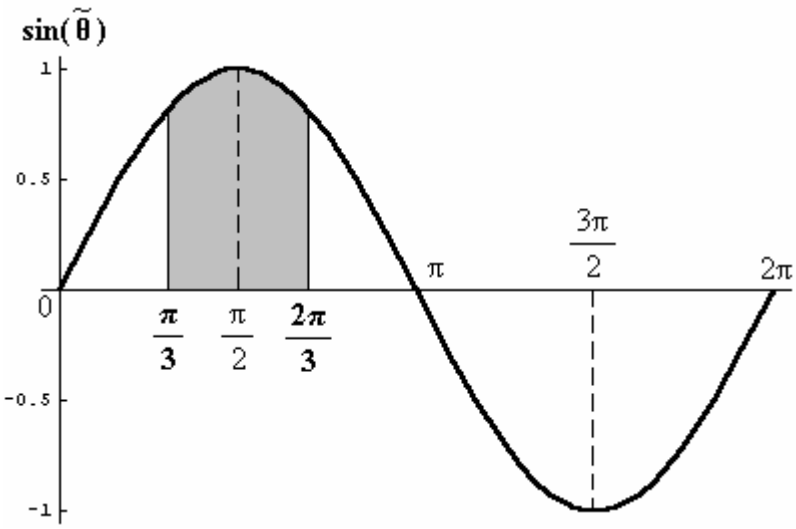
Από την παραπάνω σχέση προκύπτει τώρα ότι:

$$0 < \tilde{\theta} < \pi \Rightarrow \pi < \pi + \tilde{\theta} < 2\pi \Rightarrow \qquad \frac{\pi}{3} < \frac{\pi + \tilde{\theta}}{3} < \frac{2\pi}{3} \qquad \textbf{\textit{(B.4)}}$$

Όπως προκύπτει και από το γράφημα Δ – Β.1, στο διάστημα (π/3,2π/3) η συνάρτηση του ημιτόνου παίρνει θετικές τιμές. Ως εκ τούτου οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι:

$$\sin\left(\frac{\pi + \tilde{\theta}}{3}\right) > 0 \Rightarrow 2\sqrt{-3Q}\,\sin\left(\frac{\pi + \tilde{\theta}}{3}\right) > 0 \overset{(B.1)}{\Rightarrow} \tilde{m}_1 - \tilde{m}_2 > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \tilde{m}_1 > \tilde{m}_2 \qquad \textbf{\textit{(B.5)}}$$



Δ – Β.1

Ας δούμε τώρα τη σχέση μεταξύ των ριζών $\tilde{m}_1$ & $\tilde{m}_3$, προσδιορίζοντας το πρόσημο της μεταξύ τους διαφοράς. Πιο συγκεκριμένα έχουμε ότι:

$$\tilde{m}_1 - \tilde{m}_3 = 2\sqrt{-Q}\cos\left(\frac{\theta}{3}\right) - \frac{a_2}{3} - \left[2\sqrt{-Q}\cos\left(\frac{\theta}{3} + 240^{o}\right) - \frac{a_2}{3}\right] =$$

[64] Στην πραγματικότητα η σχέση (Β.2) ικανοποιείται για κάθε τόξο στο διάστημα (0,2π). Το γεγονός ωστόσο ότι το πεδίο τιμών της συνάρτησης arccos(x) είναι το (0,π), μας υποχρεώνει να περιορίσουμε την ανάλυσή μας στο συγκεκριμένο πεδίο.

$$= 2\sqrt{-Q}\left[\cos\left(\frac{\theta}{3}\right) - \cos\left(\frac{\theta}{3} + 240^{o}\right)\right] =$$

$$= 2\sqrt{-Q}\left[\cos\left(\frac{\theta}{3}\right) - \cos\left(\frac{\theta}{3}\right)\cos\left(240^{o}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{3}\right)\sin\left(240^{o}\right)\right] =$$

$$= 2\sqrt{-Q}\left[\cos\left(\frac{\theta}{3}\right) - \cos\left(\frac{\theta}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{3}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] =$$

$$= 2\sqrt{-Q}\left[\frac{3}{2}\cos\left(\frac{\theta}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{\theta}{3}\right)\right] = \sqrt{-3Q}\left[\frac{3}{\sqrt{3}}\cos\left(\frac{\theta}{3}\right) - \sin\left(\frac{\theta}{3}\right)\right] =$$

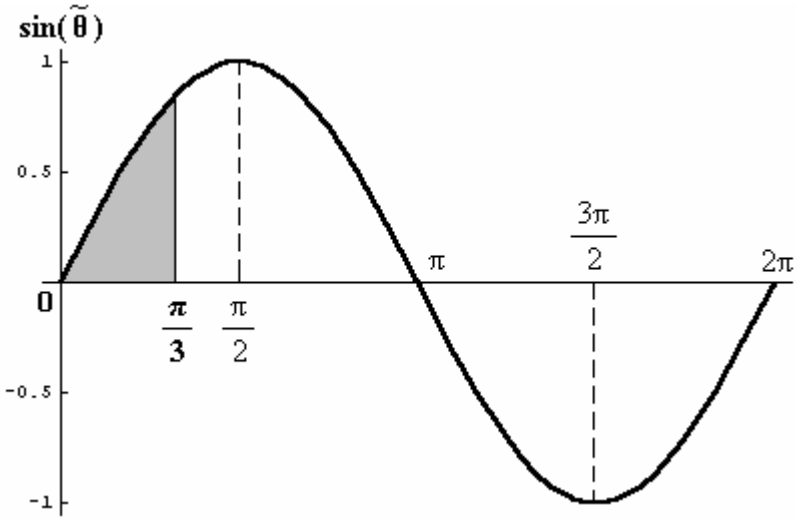
$$= \sqrt{-3Q}\left[\sqrt{3}\cos\left(\frac{\theta}{3}\right) - \sin\left(\frac{\theta}{3}\right)\right] = \sqrt{-3Q}\left[\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\theta}{3}\right) - \sin\left(\frac{\theta}{3}\right)\right] =$$

$$= \sqrt{-3Q}\left[\frac{\sin(\pi/3)\cos(\theta/3) - \cos(\pi/3)\sin(\theta/3)}{\cos(\pi/3)}\right] = \sqrt{-3Q}\left[\frac{\sin(\pi/3 - \theta/3)}{1/2}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \tilde{m}_1 - \tilde{m}_3 = 2\sqrt{-3Q}\,\sin\left[\left(\pi - \tilde{\theta}\right)/3\right] \qquad \textbf{\textit{(B.6)}}$$

Από τη σχέση τώρα (B.3) παίρνουμε ότι:

$$0 < \tilde{\theta} < \pi \Rightarrow -\pi < -\tilde{\theta} < 0 \Rightarrow 0 < \pi - \tilde{\theta} < \pi \Rightarrow \qquad 0 < \frac{\pi - \tilde{\theta}}{3} < \frac{\pi}{3} \qquad \textbf{\textit{(B.7)}}$$



Δ – B.2

Όπως προκύπτει και από το γράφημα Δ – Β.2, η συνάρτηση του ημιτόνου είναι θετικά ορισμένη για οποιοδήποτε τόξο στο διάστημα (0,π/3). Έτσι οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι:

$$\sin\left(\frac{\pi-\tilde{\theta}}{3}\right)>0 \Rightarrow 2\sqrt{-3\,Q}\,\sin\left(\frac{\pi-\tilde{\theta}}{3}\right)>0 \overset{(B.6)}{\Rightarrow} \tilde{m}_1-\tilde{m}_3>0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \tilde{m}_1>\tilde{m}_3 \qquad \textbf{\textit{(B.8)}}$$

Προκειμένου να διαπιστώσουμε τη σχέση που υπάρχει μεταξύ των ριζών $\tilde{m}_2$ & $\tilde{m}_3$, θα προσδιορίσουμε το πρόσημο της διαφοράς τους. Αναλυτικότερα:

$$\tilde{m}_2-\tilde{m}_3=2\sqrt{-Q}\cos\left(\frac{\tilde{\theta}}{3}+120^{o}\right)-\frac{a_2}{3}-\left[2\sqrt{-Q}\cos\left(\frac{\tilde{\theta}}{3}+240^{o}\right)-\frac{a_2}{3}\right]=$$

$$=2\sqrt{-Q}\left[\cos\left(\frac{\tilde{\theta}}{3}+120^{o}\right)-\cos\left(\frac{\tilde{\theta}}{3}+240^{o}\right)\right]=$$

$$=2\sqrt{-Q}\left[\cos\left(\frac{\tilde{\theta}}{3}\right)\cos(120^{o})-\sin\left(\frac{\tilde{\theta}}{3}\right)\sin(120^{o})-\cos\left(\frac{\tilde{\theta}}{3}\right)\cos(240^{o})+\right.$$
$$\left.+\sin\left(\frac{\tilde{\theta}}{3}\right)\sin(240^{o})\right]=$$

$$=2\sqrt{-Q}\left[\cos\left(\frac{\tilde{\theta}}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)-\sin\left(\frac{\tilde{\theta}}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\cos\left(\frac{\tilde{\theta}}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)+\sin\left(\frac{\tilde{\theta}}{3}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]=$$

$$=2\sqrt{-Q}\left[-\frac{2\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{\tilde{\theta}}{3}\right)\right]\Rightarrow \qquad \tilde{m}_2-\tilde{m}_3=-2\sqrt{-3\,Q}\,\sin\left(\frac{\tilde{\theta}}{3}\right) \qquad \textbf{\textit{(B.9)}}$$

Από τη σχέση (Β.3) προκύπτει ότι:

$$0<\frac{\tilde{\theta}}{3}<\frac{\pi}{3} \qquad \textbf{\textit{(B.10)}}$$

Όπως έχουμε ήδη διαπιστώσει (βλέπε γράφημα Δ – Β.2), η συνάρτηση του ημιτόνου είναι θετικά ορισμένη για οποιοδήποτε τόξο στο διάστημα (0,π/3). Ως εκ τούτου θα ισχύει ότι:

$$\sin\left(\frac{\tilde{\theta}}{3}\right) > 0 \Rightarrow -2\sqrt{-3\,Q}\,\sin\left(\frac{\tilde{\theta}}{3}\right) < 0 \overset{(B.9)}{\Rightarrow} \tilde{m}_2 - \tilde{m}_3 < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \tilde{m}_3 > \tilde{m}_2 \qquad \textbf{\textit{(B.11)}}$$

Από το συνδυασμό των σχέσεων (B.5) , (B.8) και (B.11) εύκολα προκύπτει ότι:

$$\tilde{m}_2 < \tilde{m}_3 < \tilde{m}_1 \qquad \textbf{\textit{(B.12)}}$$

<u>Παράρτημα Γ</u>

Δεδομένου ότι $a_2 < 0$, και κατά συνέπεια $-a_2/3 > 0$, το πρόσημο της περιγραφόμενης μέσω της σχέσης (5.56) ρίζας $\tilde{m}$ θα εξαρτάται από το πρόσημο του αθροίσματος των όρων S και T. Δεδομένου ότι $S = \sqrt[3]{P+\sqrt{D}}$ και $T = \sqrt[3]{P-\sqrt{D}}$, το μέγεθος του αθροίσματος S + T έχει ως ακολούθως:

$$S + T = \sqrt[3]{P+\sqrt{D}} + \sqrt[3]{P-\sqrt{D}} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt[3]{P+\sqrt{D}} + \sqrt[3]{P-\sqrt{D}}\right)\left[\sqrt[3]{\left(P+\sqrt{D}\right)^2} - \sqrt[3]{\left(P+\sqrt{D}\right)\left(P-\sqrt{D}\right)} + \sqrt[3]{\left(P-\sqrt{D}\right)^2}\right]}{\sqrt[3]{\left(P+\sqrt{D}\right)^2} - \sqrt[3]{\left(P+\sqrt{D}\right)\left(P-\sqrt{D}\right)} + \sqrt[3]{\left(P-\sqrt{D}\right)^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{\left(P+\sqrt{D}\right)^3} + \sqrt[3]{\left(P-\sqrt{D}\right)^3}}{\sqrt[3]{\left(P+\sqrt{D}\right)^2} - \sqrt[3]{P^2 - D} + \sqrt[3]{\left(P-\sqrt{D}\right)^2}} \overset{(5.14)}{=}$$

$$= \frac{P+\sqrt{D}+P-\sqrt{D}}{\sqrt[3]{\left(P+\sqrt{D}\right)^2} - \sqrt[3]{P^2 - \left(Q^3 - P^2\right)} + \sqrt[3]{\left(P-\sqrt{D}\right)^2}} =$$

$$= \frac{2\,P}{\sqrt[3]{\left(P+\sqrt{D}\right)^2} - \sqrt[3]{-Q^3} + \sqrt[3]{\left(P-\sqrt{D}\right)^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad S + T = \frac{2\,P}{\sqrt[3]{\left(P+\sqrt{D}\right)^2} + Q + \sqrt[3]{\left(P-\sqrt{D}\right)^2}} \qquad \textbf{\textit{(Γ.1)}}$$

Από τη σχέση (Γ.1) γίνεται αμέσως αντιληπτό ότι το άθροισμα S + T, και κατά συνέπεια η ρίζα $\tilde{m}$, θα είναι οπωσδήποτε θετικά ορισμένο εφόσον ισχύει ότι P > 0 και συγχρόνως έχουμε ότι Q > 0. Ας δούμε τώρα τις προϋποθέσεις υπό τις οποίες οι δύο αυτές παράμετροι είναι θετικά ορισμένες, ξεκινώντας από την παράμετρο Q.

Η παράμετρος Q δίνεται όπως θυμόμαστε από τη σχέση (5.15) από την οποία με ελαφρά αναδιάταξη των όρων παίρνουμε την ακόλουθη σχέση:

$$Q = -\frac{1}{9}\frac{v^2 + [2 - u(3+h)]v + (1 - hu + h^2u^2)}{u^2} =$$

$$= -\frac{1}{9}\frac{-hu - huv - 3uv + 1 + 2v + v^2 + h^2u^2}{u^2} =$$

$$= -\frac{1}{9}\frac{u^2\left[h^2 - \frac{h}{u} - \frac{hv}{u} - \frac{3v}{u} + \frac{(1+v)^2}{u^2}\right]}{u^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q = -\frac{1}{9}\left[h^2 - \frac{(1+v)}{u}h + \frac{(1+v)^2 - 3uv}{u^2}\right] \qquad \textbf{\textit{(Γ.2)}}$$

Όπως προκύπτει από την παραπάνω σχέση, η παράμετρος Q θα είναι θετικά ορισμένη εφόσον ισχύει η ακόλουθη ανισότητα:

$$h^2 - \frac{(1+v)}{u}h + \frac{(1+v)^2 - 3uv}{u^2} < 0 \qquad \textbf{\textit{(Γ.3)}}$$

Δεδομένου ότι το αριστερό σκέλος της παραπάνω ανισότητας αποτελεί ένα πολυώνυμο δευτέρου βαθμού ως προς h, θα μπορούσαμε να προσδιορίσουμε κάποια διαστήματα τιμών της συγκεκριμένης παραμέτρου για τα οποία θα ικανοποιείται η ανισότητα (Γ.3). Για να το πετύχουμε αυτό θα πρέπει καταρχήν να προσδιορίσουμε τις ρίζες της ακόλουθης εξίσωσης:

$$P(h) = h^2 - \frac{(1+v)}{u}h + \frac{(1+v)^2 - 3uv}{u^2} = 0 \qquad \textbf{\textit{(Γ.4)}}$$

Η διακρίνουσα της παραπάνω εξίσωσης έχει ως ακολούθως:

$$\Delta = \left[-\frac{(1+v)}{u}\right]^2 - 4\left[\frac{(1+v)^2 - 3uv}{u^2}\right] = \frac{(1+v)^2}{u^2} - 4\frac{(1+v)^2}{u^2} + 12\frac{uv}{u^2} =$$

$$= -3\frac{1 + 2v + v^2}{u^2} + 12\frac{uv}{u^2} \Rightarrow \Delta = -3\frac{v^2 + 2(1-2u)v + 1}{u^2} \qquad \textbf{\textit{(Γ.5)}}$$

Όπως διαπιστώνουμε από τη σχέση (Γ.5), το πρόσημο της διακρίνουσας της εξίσωσης (Γ.4) εξαρτάται από το μέγεθος $\Xi = v^2 + 2(1-2u)v + 1$, το πρόσημο του οποίου όπως θυμόμαστε[65] είναι αρνητικό στο διάστημα $\left(v_1^{ae}, v_2^{ae}\right)$. Με άλλα λόγια για $v \in \left(v_1^{ae}, v_2^{ae}\right)$ έχουμε ότι Ξ < 0, κάτι που σημαίνει ότι Δ > 0 και ως εκ τούτου η εξίσωση (Γ.4) θα έχει δύο πραγματικές και διακριτές ρίζες οι οποίες και έχουν ως ακολούθως:

$$h_{1,2} = \frac{-\left(-\frac{1+v}{u}\right) \pm \sqrt{\Delta}}{2} \overset{(\Gamma.5)}{=} \frac{\frac{1+v}{u} \pm \sqrt{\frac{-3\left[v^2 + 2(1-2u)v + 1\right]}{u^2}}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} h_1 = \dfrac{1+v-\sqrt{-3\left[v^2+2(1-2u)v+1\right]}}{2u} & \textbf{\textit{(Γ.6)}} \\[2ex] h_2 = \dfrac{1+v+\sqrt{-3\left[v^2+2(1-2u)v+1\right]}}{2u} & \textbf{\textit{(Γ.7)}} \end{cases}$$

Η ανισότητα (Γ.3) θα ικανοποιείται, και κατά συνέπεια θα έχουμε ότι Q > 0, μόνο στην περίπτωση που ισχύει ότι $h \in (h_1, h_2)$. Εάν αντιθέτως $h \notin (h_1, h_2)$ τότε θα έχουμε Q < 0.

Έχοντας διερευνήσει τις προϋποθέσεις υπό τις οποίες το Q θα συνιστά ένα θετικό μέγεθος, ας στραφούμε τώρα στον προσδιορισμό του προσήμου της παραμέτρου P το μέγεθος της οποίας δίνεται, όπως θυμόμαστε, από την ακόλουθη σχέση:

$$P = \frac{1}{54}(v+1-2hu)\frac{2v^2 + [4+(h-9)u]v + (2+hu-h^2u^2)}{u^3} \qquad \textbf{\textit{(Γ.8)}}$$

Από την παραπάνω σχέση γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι το πρόσημο της παραμέτρου P εξαρτάται από το πρόσημο των εξής δύο όρων:

$$K = v + 1 - 2hu \qquad \textbf{\textit{(Γ.9)}}$$

&

$$\Lambda = 2v^2 + [4+(h-9)u]v + (2+hu-h^2u^2) \qquad \textbf{\textit{(Γ.10)}}$$

Ο όρος K συνιστά ένα θετικό (αρνητικό) μέγεθος για v > 2hu – 1 (v < 2hu – 1). Δεδομένου ότι ο όρος Λ αποτελεί ένα πολυώνυμο δευτέρου βαθμού ως προς v, θα μπορούσαμε να προσδιορίσουμε εκείνα τα διαστήματα τιμών της συγκεκριμένης

[65] Το πρόσημο του μεγέθους Ξ είχε διερευνηθεί στις σελίδες 19 & 20, στα πλαίσια του προσδιορισμού του προσήμου της διακρίνουσας D.

παραμέτρου για τα οποία ισχύει ότι Λ > 0. Για να το πετύχουμε αυτό δεν έχουμε παρά να προσδιορίσουμε τις ρίζες της ακόλουθης δευτεροβάθμιας εξίσωσης:

$$2\,v^2 + \left[4 + (h-9)\,u\right] v + \left(2 + hu - h^2u^2\right) = 0 \qquad \textbf{\textit{(Γ.11)}}$$

Η διακρίνουσα της παραπάνω εξίσωσης έχει ως ακολούθως:

$$\Delta^* = \left[4 + (h-9)u\right]^2 - 8\left(2 + hu - h^2u^2\right) = 16 + 8\,(h-9)u + (h-9)^2u^2 - 16 - 8\,hu + 8\,h^2u^2 =$$

$$= 8\,hu - 72\,u + h^2u^2 - 18\,hu^2 + 81\,u^2 - 8\,hu + 8\,h^2u^2 = 9\left(h^2u^2 - 2\,hu^2 + 9\,u^2 - 8\,u\right) =$$

$$= 9\left[\left(h^2u^2 - 2\,hu^2 + u^2\right) + \left(8\,u^2 - 8\,u\right)\right] \Rightarrow \Delta^* = 9\left[(h-1)^2u^2 + 8u(u-1)\right] > 0 \qquad \textbf{\textit{(Γ.12)}}$$

Εφόσον η διακρίνουσα είναι ένας θετικός αριθμός, η εξίσωση (Γ.11) θα έχει δύο πραγματικές και διακριτές ρίζες οι οποίες και έχουν ως ακολούθως:

$$v^*_{1,2} = \frac{-\left[4 + (h-9)\,u\right] \pm \sqrt{9\left[(h-1)^2u^2 + 8\,u\,(u-1)\right]}}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v^*_1 = \dfrac{(9-h)\,u - 4 - 3\sqrt{\left[(h-1)^2u^2 + 8\,u\,(u-1)\right]}}{4} & \textbf{\textit{(Γ.13)}} \\ \& & \\ v^*_2 = \dfrac{(9-h)\,u - 4 + 3\sqrt{\left[(h-1)^2u^2 + 8\,u\,(u-1)\right]}}{4} & \textbf{\textit{(Γ.14)}} \end{cases}$$

Ως εκ τούτου για $v \in (v^*_1, v^*_2)$ θα έχουμε ότι Λ < 0, ενώ η παράμετρος Λ θα είναι θετική εκτός του συγκεκριμένου διαστήματος.

Όπως προκύπτει από την παραπάνω ανάλυση η παράμετρος P θα αποτελεί ένα θετικό μέγεθος εφόσον ισχύει ότι $v > 2hu - 1$ και $v \notin (v^*_1, v^*_2)$. Εάν πέραν αυτών των συνθηκών ισχύει επιπροσθέτως ότι $h \in (h_1, h_2)$, τότε θα έχουμε S + T > 0, κάτι που σημαίνει ότι η σχέση (5.56) περιγράφει ένα θετικό μέγεθος. Στην περίπτωση που έχουμε ότι $v < 2hu - 1$ ή/και $v \in (v^*_1, v^*_2)$ ή/και $h \notin (h_1, h_2)$, η σχέση (5.56) θα περιγράφει οπωσδήποτε ένα θετικό μέγεθος μόνο εφόσον ισχύει ότι $S + T > a_2/3$.

Παράρτημα Δ

Προκειμένου να αποδείξουμε ότι $v_{ae,2}^{s} < v_{ae,3}^{s}$, θα υπολογίσουμε τη διαφορά των δύο ριζών και στη συνέχεια θα προσδιορίσουμε το πρόσημο της συγκεκριμένης διαφοράς. Πιο συγκεκριμένα αφαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (97.1) & (97.2) προκύπτει:

$$v_{ae,2}^{s} - v_{ae,3}^{s} = u - \frac{u-h}{h(1-h)} = \frac{hu(1-h)-u+h}{h(1-h)} = \frac{hu-h^2u-u+h}{h(1-h)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad v_{ae,2}^{s} - v_{ae,3}^{s} = -u\,\frac{h^2-(1+1/u)h+1}{h(1-h)} \qquad \textbf{\textit{(Δ.1)}}$$

Όπως εύκολα διαπιστώνει κανείς από την παραπάνω σχέση, το πρόσημο της διαφοράς $v_{ae,2}^{s} - v_{ae,3}^{s}$ εξαρτάται από το πρόσημο του ακόλουθου δευτεροβάθμιου ως προς h πολυωνύμου:

$$P(h) = h^2 - \frac{1+u}{u}h + 1 \qquad \textbf{\textit{(Δ.2)}}$$

Το παραπάνω ωστόσο πολυώνυμο συνιστά ένα θετικό μέγεθος για κάθε τιμή της παραμέτρου h. Και αυτό διότι η διακρίνουσα της εξίσωσης P(h) = 0, η οποία ισούται με:

$$\Delta = \left(-\frac{1+u}{u}\right)^2 - 4 = \left(\frac{1+u}{u}\right)^2 - 4 = \left(\frac{1+u}{u}-2\right)\left(\frac{1+u}{u}+2\right) = \frac{(1+u-2u)(1+u+2u)}{u^2} =$$

$$= \frac{(1-u)(1+3u)}{u^2} = \frac{-(u-1)(1+3u)}{u^2}$$

είναι μικρότερη από το μηδέν για κάθε u > 0, κάτι που σημαίνει ότι το πολυώνυμο P(h) θα είναι ομόσημο του συντελεστή (+1) του όρου h^2.

Το γεγονός ωστόσο ότι P(h) > 0 μας οδηγεί, βάσει τη σχέσης (Δ.1), στο συμπέρασμα ότι:

$$v_{ae,2}^{s} - v_{ae,3}^{s} < 0$$

ή ισοδύναμα

$$v_{ae,2}^{s} < v_{ae,3}^{s}$$

<u>Παράρτημα Ε</u>

Για την κατασκευή του πίνακα 5.6 προσδιορίσαμε το πρόσημο των ακόλουθων διαφορών (α) $v_1^s - \tilde{v}_1$, (β) $v_2^s - \tilde{v}_2$, (γ) $v_1^{re} - \tilde{v}_1$, (δ) $v_2^{re} - \tilde{v}_2$, (ε) $v_1^{se} - v_1^{re}$, (στ) $v_2^{se} - v_2^{re}$ και (ζ) $v_2^{se} - v_1^{re}$. Τα μεγέθη των εν λόγω διαφορών έχουν ως ακολούθως:

(α)

$$v_1^s - \tilde{v}_1 = \left(\sqrt{\frac{1+\varphi}{c_1}} - \sqrt{\frac{1-c_1+\varphi}{c_1}}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{c_1}} - \sqrt{\frac{1-c_1}{c_1}}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{c_1}\left(\underbrace{\sqrt{1+\varphi} - \sqrt{1-c_1+\varphi}}_{(+)} + \underbrace{1 - \sqrt{1-c_1}}_{(+)}\right) \times \left(\underbrace{\sqrt{1+\varphi} - \sqrt{1-c_1+\varphi}}_{(+)} + \underbrace{\sqrt{1-c_1} - 1}_{(-)}\right) =$$

$$= \frac{1}{c_1}\left(\sqrt{1+\varphi} - \sqrt{1-c_1+\varphi} + 1 - \sqrt{1-c_1}\right) \times$$

$$\times \frac{\sqrt{1+\varphi} - \sqrt{1-c_1+\varphi} + \sqrt{1-c_1} - 1}{\sqrt{1+\varphi} + \sqrt{1-c_1+\varphi} + \sqrt{1-c_1} + 1} \times \left(\sqrt{1+\varphi} + \sqrt{1-c_1+\varphi} + \sqrt{1-c_1} + 1\right) =$$

$$= \frac{1}{c_1}\left(\sqrt{1+\varphi} - \sqrt{1-c_1+\varphi} + 1 - \sqrt{1-c_1}\right) \times \frac{\left(\sqrt{1+\varphi} + \sqrt{1-c_1}\right)^2 - \left(\sqrt{1-c_1+\varphi} + 1\right)^2}{\sqrt{1+\varphi} + \sqrt{1-c_1+\varphi} + \sqrt{1-c_1} + 1} =$$

$$= \frac{1}{c_1}\left(\sqrt{1+\varphi} - \sqrt{1-c_1+\varphi} + 1 - \sqrt{1-c_1}\right) \times$$

$$\times \frac{1+\varphi + 2\sqrt{(1+\varphi)(1-c_1)} + 1 - c_1 - (1-c_1+\varphi) - 2\sqrt{1-c_1+\varphi} - 1}{\sqrt{1+\varphi} + \sqrt{1-c_1+\varphi} + \sqrt{1-c_1} + 1} =$$

$$= \frac{1}{c_1}\left(\sqrt{1+\varphi} - \sqrt{1-c_1+\varphi} + 1 - \sqrt{1-c_1}\right) \times$$

$$\times \frac{(1+\varphi+1-c_1-1+c_1-\varphi-1) + 2\left[\sqrt{(1+\varphi)(1-c_1)} - \sqrt{1-c_1+\varphi}\right]}{\sqrt{1+\varphi} + \sqrt{1-c_1+\varphi} + \sqrt{1-c_1} + 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_1^s - \tilde{v}_1 = \frac{2}{c_1}\underbrace{\left(\underbrace{\sqrt{1+\varphi}-\sqrt{1-c_1+\varphi}}_{(+)}+\underbrace{1-\sqrt{1-c_1}}_{(+)}\right)}_{(+)}\times$$

$$\times\underbrace{\frac{\overbrace{\sqrt{1-c_1+\varphi-\varphi c_1}-\sqrt{1-c_1+\varphi}}^{(-)}}{\sqrt{1+\varphi}+\sqrt{1-c_1+\varphi}+\sqrt{1-c_1}+1}}_{(+)}<0 \qquad \textbf{\textit{(E.1)}}$$

(β)

$$v_2^s - \tilde{v}_2 = \left(\sqrt{\frac{1+\varphi}{c_1}}+\sqrt{\frac{1-c_1+\varphi}{c_1}}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{c_1}}+\sqrt{\frac{1-c_1}{c_1}}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_2^s - \tilde{v}_2 = \frac{1}{c_1}\underbrace{\left(\sqrt{1+\varphi}+\sqrt{1-c_1+\varphi}+1+\sqrt{1-c_1}\right)}_{(+)}\times$$

$$\times\underbrace{\left(\underbrace{\sqrt{1+\varphi}-1}_{(+)}+\underbrace{\sqrt{1-c_1+\varphi}-\sqrt{1-c_1}}_{(+)}\right)}_{(+)}>0 \qquad \textbf{\textit{(E.2)}}$$

(γ)

$$v_1^{re} - \tilde{v}_1 = \left(\sqrt{\frac{1+\varphi\omega}{c_1}}-\sqrt{\frac{1-c_1+\varphi\omega}{c_1}}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{c_1}}-\sqrt{\frac{1-c_1}{c_1}}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{c_1}\underbrace{\left(\underbrace{\sqrt{1+\varphi\omega}-\sqrt{1-c_1+\varphi\omega}}_{(+)}+\underbrace{1-\sqrt{1-c_1}}_{(+)}\right)}_{(+)}\times\left(\underbrace{\sqrt{1+\varphi\omega}-\sqrt{1-c_1+\varphi\omega}}_{(+)}+\underbrace{\sqrt{1-c_1}-1}_{(-)}\right)=$$

$$=\frac{1}{c_1}\left(\sqrt{1+\varphi\omega}-\sqrt{1-c_1+\varphi\omega}+1-\sqrt{1-c_1}\right)\times$$

$$\times\frac{\left(\sqrt{1+\varphi\omega}-\sqrt{1-c_1+\varphi\omega}+\sqrt{1-c_1}-1\right)\left(\sqrt{1+\varphi\omega}+\sqrt{1-c_1+\varphi\omega}+\sqrt{1-c_1}+1\right)}{\sqrt{1+\varphi\omega}+\sqrt{1-c_1+\varphi\omega}+\sqrt{1-c_1}+1}=$$

$$=\frac{1}{c_1}\left(\sqrt{1+\varphi\omega}-\sqrt{1-c_1+\varphi\omega}+1-\sqrt{1-c_1}\right)\frac{\left(\sqrt{1+\varphi\omega}+\sqrt{1-c_1}\right)^2-\left(\sqrt{1-c_1+\varphi\omega}+1\right)^2}{\sqrt{1+\varphi\omega}+\sqrt{1-c_1+\varphi\omega}+\sqrt{1-c_1}+1}=$$

$$=\frac{1}{c_1}\left(\sqrt{1+\varphi\omega}-\sqrt{1-c_1+\varphi\omega}+1-\sqrt{1-c_1}\right)\times$$

$$\times\frac{1+\varphi\omega+2\sqrt{(1+\varphi\omega)(1-c_1)}+1-c_1-(1-c_1+\varphi\omega)-2\sqrt{1-c_1+\varphi\omega}-1}{\sqrt{1+\varphi\omega}+\sqrt{1-c_1+\varphi\omega}+\sqrt{1-c_1}+1}=$$

$$=\frac{1}{c_1}\left(\sqrt{1+\varphi\omega}-\sqrt{1-c_1+\varphi\omega}+1-\sqrt{1-c_1}\right)\times$$

$$\times\frac{(1+\varphi\omega+1-c_1-1+c_1-\varphi\omega-1)+2\left[\sqrt{(1+\varphi\omega)(1-c_1)}-\sqrt{1-c_1+\varphi\omega}\right]}{\sqrt{1+\varphi\omega}+\sqrt{1-c_1+\varphi\omega}+\sqrt{1-c_1}+1}=$$

$$=\frac{2}{c_1}\frac{\sqrt{1+\varphi\omega}-\sqrt{1-c_1+\varphi\omega}+1-\sqrt{1-c_1}}{\sqrt{1+\varphi\omega}+\sqrt{1-c_1+\varphi\omega}+\sqrt{1-c_1}+1}\times$$

$$\times\frac{\left[\sqrt{(1+\varphi\omega)(1-c_1)}-\sqrt{1-c_1+\varphi\omega}\right]\left[\sqrt{(1+\varphi\omega)(1-c_1)}+\sqrt{1-c_1+\varphi\omega}\right]}{\sqrt{(1+\varphi\omega)(1-c_1)}+\sqrt{1-c_1+\varphi\omega}}=$$

$$=\frac{2}{c_1}\frac{\sqrt{1+\varphi\omega}-\sqrt{1-c_1+\varphi\omega}+1-\sqrt{1-c_1}}{\sqrt{1+\varphi\omega}+\sqrt{1-c_1+\varphi\omega}+\sqrt{1-c_1}+1}\;\frac{\left[\sqrt{(1+\varphi\omega)(1-c_1)}\right]^2-\left[\sqrt{1-c_1+\varphi\omega}\right]^2}{\sqrt{(1+\varphi\omega)(1-c_1)}+\sqrt{1-c_1+\varphi\omega}}=$$

$$= \frac{2}{c_1} \frac{\sqrt{1+\varphi\omega} - \sqrt{1-c_1+\varphi\omega} + 1 - \sqrt{1-c_1}}{\sqrt{1+\varphi\omega} + \sqrt{1-c_1+\varphi\omega} + \sqrt{1-c_1} + 1}$$

$$\times \frac{1-c_1+\varphi\omega - c_1\varphi\omega - (1-c_1+\varphi\omega)}{\sqrt{(1+\varphi\omega)(1-c_1)} + \sqrt{1-c_1+\varphi\omega}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_1^{re} - \tilde{v}_1 = \underbrace{\frac{-2\,\varphi\omega}{\sqrt{1+\varphi\omega} + \sqrt{1-c_1+\varphi\omega} + \sqrt{1-c_1} + 1}}_{(-)} \times$$

$$\times \frac{\underbrace{\underbrace{\sqrt{1+\varphi\omega} - \sqrt{1-c_1+\varphi\omega}}_{(+)} + \underbrace{1 - \sqrt{1-c_1}}_{(+)}}_{(+)}}{\underbrace{\sqrt{(1+\varphi\omega)(1-c_1)} + \sqrt{1-c_1+\varphi\omega}}_{(+)}} < 0 \qquad \textit{(E.3)}$$

(δ) $$v_2^{re} - \tilde{v}_2 = \left(\sqrt{\frac{1+\varphi\omega}{c_1}} + \sqrt{\frac{1-c_1+\varphi\omega}{c_1}}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{c_1}} + \sqrt{\frac{1-c_1}{c_1}}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{c_1}\left(\underbrace{\sqrt{1+\varphi\omega} + \sqrt{1-c_1+\varphi\omega} + 1 + \sqrt{1-c_1}}_{(+)}\right) \times$$

$$\times \underbrace{\left(\underbrace{\sqrt{1+\varphi\omega} - 1}_{(+)} + \underbrace{\sqrt{1-c_1+\varphi\omega} - \sqrt{1-c_1}}_{(+)}\right)}_{(+)} > 0 \qquad \textit{(E.4)}$$

(ε) $$v_1^{se} - v_1^{re} = \left(\sqrt{\frac{1+\varphi}{c_1}} - \sqrt{\frac{1-c_1+\varphi}{c_1}}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{1+\varphi\omega}{c_1}} - \sqrt{\frac{1-c_1+\varphi\omega}{c_1}}\right)^2 =$$

$$=\frac{1}{c_1}\underbrace{\left(\underbrace{\sqrt{1+\varphi}-\sqrt{1-c_1+\varphi}}_{(+)}+\underbrace{\sqrt{1+\varphi\omega}-\sqrt{1-c_1+\varphi\omega}}_{(+)}\right)}_{(+)}\times$$

$$\times\left(\underbrace{\sqrt{1+\varphi}-\sqrt{1-c_1+\varphi}}_{(+)}+\underbrace{\sqrt{1-c_1+\varphi\omega}-\sqrt{1+\varphi\omega}}_{(-)}\right)=$$

$$=\frac{1}{c_1}\left(\sqrt{1+\varphi}-\sqrt{1-c_1+\varphi}+\sqrt{1+\varphi\omega}-\sqrt{1-c_1+\varphi\omega}\right)\times$$

$$\times\left[\left(\sqrt{1+\varphi}+\sqrt{1-c_1+\varphi\omega}\right)-\left(\sqrt{1-c_1+\varphi}+\sqrt{1+\varphi\omega}\right)\right]\times$$

$$\times\frac{\left(\sqrt{1+\varphi}+\sqrt{1-c_1+\varphi\omega}\right)+\left(\sqrt{1-c_1+\varphi}+\sqrt{1+\varphi\omega}\right)}{\left(\sqrt{1+\varphi}+\sqrt{1-c_1+\varphi\omega}\right)+\left(\sqrt{1-c_1+\varphi}+\sqrt{1+\varphi\omega}\right)}=$$

$$=\frac{1}{c_1}\left(\sqrt{1+\varphi}-\sqrt{1-c_1+\varphi}+\sqrt{1+\varphi\omega}-\sqrt{1-c_1+\varphi\omega}\right)\times$$

$$\times\frac{\left(\sqrt{1+\varphi}+\sqrt{1-c_1+\varphi\omega}\right)^2-\left(\sqrt{1-c_1+\varphi}+\sqrt{1+\varphi\omega}\right)^2}{\sqrt{1+\varphi}+\sqrt{1-c_1+\varphi\omega}+\sqrt{1-c_1+\varphi}+\sqrt{1+\varphi\omega}}=$$

$$=\frac{1}{c_1}\left(\sqrt{1+\varphi}-\sqrt{1-c_1+\varphi}+\sqrt{1+\varphi\omega}-\sqrt{1-c_1+\varphi\omega}\right)\times$$

$$\times\left\{\frac{1+\varphi+2\sqrt{(1+\varphi)(1-c_1+\varphi\omega)}+1-c_1+\varphi\omega}{\sqrt{1+\varphi}+\sqrt{1-c_1+\varphi\omega}+\sqrt{1-c_1+\varphi}+\sqrt{1+\varphi\omega}}+\right.$$

$$\left.+\frac{-(1-c_1+\varphi)-2\sqrt{(1-c_1+\varphi)(1+\varphi\omega)}-1-\varphi\omega}{\sqrt{1+\varphi}+\sqrt{1-c_1+\varphi\omega}+\sqrt{1-c_1+\varphi}+\sqrt{1+\varphi\omega}}\right\}=$$

$$=\frac{1}{c_1}\left(\sqrt{1+\varphi}-\sqrt{1-c_1+\varphi}+\sqrt{1+\varphi\omega}-\sqrt{1-c_1+\varphi\omega}\right)\times$$

$$\times\left\{\frac{1+\varphi+(1-c_1)+\varphi\omega-(1-c_1)-\varphi-1-\varphi\omega}{\sqrt{1+\varphi}+\sqrt{1-c_1+\varphi\omega}+\sqrt{1-c_1+\varphi}+\sqrt{1+\varphi\omega}}+\right.$$

$$\left.+\frac{2\left[\sqrt{(1+\varphi)(1-c_1+\varphi\omega)}-\sqrt{(1-c_1+\varphi)(1+\varphi\omega)}\right]}{\sqrt{1+\varphi}+\sqrt{1-c_1+\varphi\omega}+\sqrt{1-c_1+\varphi}+\sqrt{1+\varphi\omega}}\right\}$$

$$=\frac{2}{c_1}\frac{\sqrt{1+\varphi}-\sqrt{1-c_1+\varphi}+\sqrt{1+\varphi\omega}-\sqrt{1-c_1+\varphi\omega}}{\sqrt{(1+\varphi)(1-c_1+\varphi\omega)}+\sqrt{(1-c_1+\varphi)(1+\varphi\omega)}}\times$$

$$\times\frac{\sqrt{(1+\varphi)(1-c_1+\varphi\omega)}-\sqrt{(1-c_1+\varphi)(1+\varphi\omega)}}{\sqrt{1+\varphi}+\sqrt{1-c_1+\varphi\omega}+\sqrt{1-c_1+\varphi}+\sqrt{1+\varphi\omega}}\times$$

$$\times\left[\sqrt{(1+\varphi)(1-c_1+\varphi\omega)}+\sqrt{(1-c_1+\varphi)(1+\varphi\omega)}\right]=$$

$$=\frac{2}{c_1}\frac{\sqrt{1+\varphi}-\sqrt{1-c_1+\varphi}+\sqrt{1+\varphi\omega}-\sqrt{1-c_1+\varphi\omega}}{\sqrt{(1+\varphi)(1-c_1+\varphi\omega)}+\sqrt{(1-c_1+\varphi)(1+\varphi\omega)}}\times$$

$$\times\frac{\left[\sqrt{(1+\varphi)(1-c_1+\varphi\omega)}\right]^2-\left[\sqrt{(1-c_1+\varphi)(1+\varphi\omega)}\right]^2}{\sqrt{1+\varphi}+\sqrt{1-c_1+\varphi\omega}+\sqrt{1-c_1+\varphi}+\sqrt{1+\varphi\omega}}=$$

$$=\frac{2}{c_1}\frac{\sqrt{1+\varphi}-\sqrt{1-c_1+\varphi}+\sqrt{1+\varphi\omega}-\sqrt{1-c_1+\varphi\omega}}{\sqrt{(1+\varphi)(1-c_1+\varphi\omega)}+\sqrt{(1-c_1+\varphi)(1+\varphi\omega)}}\times$$

$$\times\frac{(1+\varphi)(1-c_1+\varphi\omega)-(1-c_1+\varphi)(1+\varphi\omega)}{\sqrt{1+\varphi}+\sqrt{1-c_1+\varphi\omega}+\sqrt{1-c_1+\varphi}+\sqrt{1+\varphi\omega}}=$$

$$=\frac{2}{c_1}\frac{\sqrt{1+\varphi}-\sqrt{1-c_1+\varphi}+\sqrt{1+\varphi\omega}-\sqrt{1-c_1+\varphi\omega}}{\sqrt{(1+\varphi)(1-c_1+\varphi\omega)}+\sqrt{(1-c_1+\varphi)(1+\varphi\omega)}}\times$$

$$\times\frac{1-c_1+\varphi\omega+\varphi-c_1\varphi+\varphi^2\omega-1+c_1-\varphi-\varphi\omega+c_1\varphi\omega-\varphi^2\omega}{\sqrt{1+\varphi}+\sqrt{1-c_1+\varphi\omega}+\sqrt{1-c_1+\varphi}+\sqrt{1+\varphi\omega}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_1^{se} - v_1^{re} = \underbrace{\frac{-2\,\varphi\,(1-\omega)}{\sqrt{(1+\varphi)(1-c_1+\varphi\omega)}+\sqrt{(1-c_1+\varphi)(1+\varphi\omega)}}}_{\substack{(+)\,\text{εάν}\,1-\omega<0\\(-)\,\text{εάν}\,1-\omega>0}}\times$$

$$\times\frac{\underbrace{\sqrt{1+\varphi}-\sqrt{1-c_1+\varphi}}_{(+)}+\underbrace{\sqrt{1+\varphi\omega}-\sqrt{1-c_1+\varphi\omega}}_{(+)}}{\underbrace{\sqrt{1+\varphi}+\sqrt{1-c_1+\varphi\omega}+\sqrt{1-c_1+\varphi}+\sqrt{1+\varphi\omega}}_{(+)}}$$

$$\Rightarrow \qquad \begin{cases} v_1^{se} - v_1^{re} > 0 \;\text{εάν}\; \omega > 1 \\ v_1^{se} - v_1^{re} = 0 \;\text{εάν}\; \omega = 1 \\ v_1^{se} - v_1^{re} < 0 \;\text{εάν}\; \omega < 1 \end{cases} \qquad \textit{(E.5)}$$

(στ)

$$v_2^{se} - v_2^{re} = \left(\sqrt{\frac{1+\varphi}{c_1}}+\sqrt{\frac{1-c_1+\varphi}{c_1}}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{1+\varphi\omega}{c_1}}+\sqrt{\frac{1-c_1+\varphi\omega}{c_1}}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{c_1}\left(\sqrt{1+\varphi}+\sqrt{1-c_1+\varphi}+\sqrt{1+\varphi\omega}+\sqrt{1-c_1+\varphi\omega}\right)\times$$

$$\times\left(\sqrt{1+\varphi}-\sqrt{1+\varphi\omega}+\sqrt{1-c_1+\varphi}-\sqrt{1-c_1+\varphi\omega}\right)=$$

$$= \frac{1}{c_1}\underbrace{\left(\sqrt{1+\varphi}+\sqrt{1-c_1+\varphi}+\sqrt{1+\varphi\omega}+\sqrt{1-c_1+\varphi\omega}\right)}_{(+)}\times$$

$$\times\left[\underbrace{\sqrt{1+\varphi}-\sqrt{1+\varphi-\varphi(1-\omega)}}_{\substack{(+)\,\text{εάν}\,1-\omega>0\\(-)\,\text{εάν}\,1-\omega<0}}+\underbrace{\sqrt{1-c_1+\varphi}-\sqrt{1-c_1+\varphi-\varphi(1-\omega)}}_{\substack{(+)\,\text{εάν}\,1-\omega>0\\(-)\,\text{εάν}\,1-\omega<0}}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \begin{cases} v_2^{se} - v_2^{re} > 0 \quad \text{εάν} \quad \omega < 1 \\ v_2^{se} - v_2^{re} = 0 \quad \text{εάν} \quad \omega = 1 \\ v_2^{se} - v_2^{re} < 0 \quad \text{εάν} \quad \omega > 1 \end{cases} \qquad \textit{(E.6)}$$

(ζ)

$$v_2^{se} - v_1^{re} = \left(\sqrt{\frac{1+\varphi}{c_1}} + \sqrt{\frac{1-c_1+\varphi}{c_1}}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{1+\varphi\omega}{c_1}} - \sqrt{\frac{1-c_1+\varphi\omega}{c_1}}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{c_1}\underbrace{\left(\underbrace{\sqrt{1+\varphi} + \sqrt{1-c_1+\varphi}}_{(+)} + \underbrace{\sqrt{1+\varphi\omega} - \sqrt{1-c_1+\varphi\omega}}_{(+)}\right)}_{(+)} \times$$

$$\times \left(\underbrace{\sqrt{1+\varphi} - \sqrt{1+\varphi\omega}}_{(-)} + \underbrace{\sqrt{1-c_1+\varphi} + \sqrt{1-c_1+\varphi\omega}}_{(+)}\right) =$$

$$= \frac{1}{c_1}\frac{\sqrt{1+\varphi} + \sqrt{1-c_1+\varphi} + \sqrt{1+\varphi\omega} - \sqrt{1-c_1+\varphi\omega}}{\sqrt{1+\varphi} + \sqrt{1+\varphi\omega} + \sqrt{1-c_1+\varphi} + \sqrt{1-c_1+\varphi\omega}} \times$$

$$\times \left(\sqrt{1+\varphi} - \sqrt{1+\varphi\omega} + \sqrt{1-c_1+\varphi} + \sqrt{1-c_1+\varphi\omega}\right) \times$$

$$\times \left(\sqrt{1+\varphi} + \sqrt{1+\varphi\omega} + \sqrt{1-c_1+\varphi} + \sqrt{1-c_1+\varphi\omega}\right) =$$

$$= \frac{1}{c_1}\frac{\sqrt{1+\varphi} + \sqrt{1-c_1+\varphi} + \sqrt{1+\varphi\omega} - \sqrt{1-c_1+\varphi\omega}}{\sqrt{1+\varphi} + \sqrt{1+\varphi\omega} + \sqrt{1-c_1+\varphi} + \sqrt{1-c_1+\varphi\omega}} \times$$

$$\times \left[\left(\sqrt{1+\varphi} + \sqrt{1-c_1+\varphi} + \sqrt{1-c_1+\varphi\omega}\right)^2 - \left(\sqrt{1+\varphi\omega}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{c_1}\frac{\sqrt{1+\varphi} + \sqrt{1-c_1+\varphi} + \sqrt{1+\varphi\omega} - \sqrt{1-c_1+\varphi\omega}}{\sqrt{1+\varphi} + \sqrt{1+\varphi\omega} + \sqrt{1-c_1+\varphi} + \sqrt{1-c_1+\varphi\omega}} \times$$

$$\times \left\{1 + \varphi + 2\sqrt{1+\varphi}\left(\sqrt{1-c_1+\varphi} + \sqrt{1-c_1+\varphi\omega}\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\sqrt{1-c_1+\varphi} + \sqrt{1-c_1+\varphi\omega}\right)^2 - 1 - \varphi\omega\right\} =$$

$$= \frac{1}{c_1} \frac{\sqrt{1+\varphi} + \sqrt{1-c_1+\varphi} + \sqrt{1+\varphi\omega} - \sqrt{1-c_1+\varphi\omega}}{\sqrt{1+\varphi} + \sqrt{1+\varphi\omega} + \sqrt{1-c_1+\varphi} + \sqrt{1-c_1+\varphi\omega}} \times$$

$$\times \left\{ 1+\varphi-1-\varphi\omega + 2\sqrt{1+\varphi}\left(\sqrt{1-c_1+\varphi} + \sqrt{1-c_1+\varphi\omega}\right) + \right.$$

$$\left. +1-c_1+\varphi + 2\sqrt{(1-c_1+\varphi)(1-c_1+\varphi\omega)} + 1-c_1+\varphi\omega \right\} =$$

$$= \frac{1}{c_1} \frac{\sqrt{1+\varphi} + \sqrt{1-c_1+\varphi} + \sqrt{1+\varphi\omega} - \sqrt{1-c_1+\varphi\omega}}{\sqrt{1+\varphi} + \sqrt{1+\varphi\omega} + \sqrt{1-c_1+\varphi} + \sqrt{1-c_1+\varphi\omega}} \times$$

$$\times \left\{ \varphi-\varphi\omega+1-c_1+\varphi+1-c_1+\varphi\omega + \right.$$

$$\left. +2\left[\sqrt{1+\varphi}\left(\sqrt{1-c_1+\varphi} + \sqrt{1-c_1+\varphi\omega}\right) + \sqrt{(1-c_1+\varphi)(1-c_1+\varphi\omega)}\right] \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_2^{se} - v_1^{re} = \frac{2}{c_1} \underbrace{\frac{\sqrt{1+\varphi} + \sqrt{1-c_1+\varphi} + \sqrt{1+\varphi\omega} - \sqrt{1-c_1+\varphi\omega}}{\sqrt{1+\varphi} + \sqrt{1+\varphi\omega} + \sqrt{1-c_1+\varphi} + \sqrt{1-c_1+\varphi\omega}}}_{(+)} \times \left\{ \underbrace{(1-c_1+\varphi)}_{(+)} + \right.$$

$$\left. + \underbrace{\left[\sqrt{1+\varphi}\left(\sqrt{1-c_1+\varphi} + \sqrt{1-c_1+\varphi\omega}\right) + \sqrt{(1-c_1+\varphi)(1-c_1+\varphi\omega)}\right]}_{(+)} \right\} > 0 \qquad \textit{(E.7)}$$

Από τις σχέσεις (Ε.1) ~ (Ε.7) και βάσει του προσήμου της διαφοράς 1 – ω κατάσκευάσαμε τους πίνακες Ε.1, Ε.2 και Ε.3 στους οποίους και παρουσιάζονται τα πρόσημα τόσο των πολυωνύμων $P_i(\tilde{m}), i = 6, 8, 10$, όσο και του όρου $\frac{P_9(\tilde{m})}{P_6(\tilde{m})P_8(\tilde{m})}$. Στους ίδιους πίνακες και μέσω των σκιαγραφημένων περιοχών παρουσιάζονται εκείνα τα διαστήματα τιμών του επιταχυντή για τα οποία τα εν λόγω μεγέθη είναι είτε θετικά είτε αρνητικά.

Όπως προκύπτει από τους παρακάτω πίνακες, ανεξάρτητα από το πρόσημο της διαφοράς 1 – ω, ο όρος $P_9(\tilde{m})/P_6(\tilde{m})P_8(\tilde{m})$ είναι οπωσδήποτε θετικός εφόσον ο επιταχυντής κινείται στο διάστημα[66] $(\tilde{v}_1, \tilde{v}_2)$.

---

[66] Ο όρος $P_9(\tilde{m})/P_6(\tilde{m})P_8(\tilde{m})$ μπορεί να είναι θετικά ορισμένος και εκτός του διαστήματος $(\tilde{v}_1, \tilde{v}_2)$. Το εάν είναι ή όχι εξαρτάται από τα διαστήματα τιμών της παραμέτρου $\tilde{m}$ για τα οποία τα πολυώνυμα $P_i(\tilde{m})$, i = 6,8,9 , είναι έτσι ορισμένα ώστε να ισχύει ότι $P_9(\tilde{m})/P_6(\tilde{m})P_8(\tilde{m}) > 0$.

$\omega > 1$	0	v_1^{re}	v_1^{se}	$\tilde{v}_1$	$\tilde{v}_2$	v_2^{se}	v_2^{re}	$+\infty$
$P_9(\tilde{m})$				+				
$P_6(\tilde{m})$		+	+	+	+	+		
$P_8(\tilde{m})$			+	+	+			
$\frac{P_9(\tilde{m})}{P_6(\tilde{m})P_8(\tilde{m})}$				+				

Πίνακας Ε.1

$\omega = 1$	0	$v_1^{se}=v_1^{re}$	$\tilde{v}_1$	$\tilde{v}_2$	$v_2^{se}=v_2^{re}$	$+\infty$
$P_9(\tilde{m})$			+			
$P_6(\tilde{m})$		+	+	+		
$P_8(\tilde{m})$		+	+	+		
$\frac{P_9(\tilde{m})}{P_6(\tilde{m})P_8(\tilde{m})}$			+			

Πίνακας Ε.2

$\omega < 1$	0	v_1^{se}	v_1^{re}	$\tilde{v}_1$	$\tilde{v}_2$	v_2^{re}	v_2^{se}	$+\infty$
$P_9(\tilde{m})$				+				
$P_6(\tilde{m})$			+	+	+			
$P_8(\tilde{m})$		+	+	+	+	+		
$\frac{P_9(\tilde{m})}{P_6(\tilde{m})P_8(\tilde{m})}$				+				

Πίνακας Ε.3

Παράρτημα ΣΤ

Το εισόδημα ισορροπίας, όπως αυτό προσδιορίζεται στα πλαίσια του μηχανισμού των αναθεωρούμενων προσδοκιών, περιγράφεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\tilde{Y}_t^{ae} = \frac{b_0}{1-c_1+\varphi} + \frac{\varphi}{1+\varphi}\frac{\gamma+m}{d_1}\frac{M_0\,\tilde{m}^{t+2}}{P_1(\tilde{m})} \qquad \textit{(5.47)}$$

$$\text{όπου}: P_1(\tilde{m}) = \tilde{m}^3 + a_2\tilde{m}^2 + a_1\tilde{m} + a_0\ ,\ a_2 = -\left(\frac{1+v}{u}+h\right),\ a_1 = \frac{h\,(1+v)+v}{u},\ a_0 = -\frac{h\,v}{u},$$

$$u = \frac{1+\varphi}{c_1},\ \varphi = \frac{b_2 d_1}{d_2},\ h = 1-\gamma\ \&\ \tilde{m} = 1+m.$$

Βάσει της παραπάνω σχέσης προκύπτουν με ευκολία τα παρακάτω μεγέθη:

$$\tilde{Y}_{t-1}^{ae} = \frac{b_0}{1-c_1+\varphi} + \frac{\varphi}{1+\varphi}\frac{\gamma+m}{d_1}\frac{M_0\,\tilde{m}^{t+1}}{P_1(\tilde{m})} \qquad \textit{(ΣΤ.1)}$$

&

$$\Delta\widetilde{Y}_t^{ae} = \frac{\varphi}{1+\varphi}\,\frac{\gamma+m}{d_1}\,\frac{M_0\,\widetilde{m}^{t+1}}{P_1(\widetilde{m})}\,m \qquad \textbf{\textit{(ΣΤ.2)}}$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (ΣΤ.1) και (ΣΤ.2) στη σχέση (5.5) προκύπτει η σχέση που περιγράφει το μέγεθος της επιτοκιακής διαφοράς ισορροπίας ($\Delta\widetilde{R}_t^{ae}$) ως συνάρτηση του χρόνου. Πιο συγκεκριμένα έχουμε ότι:

$$\overline{\Delta R}_{t-1}^{ae} = \frac{\gamma+m}{\gamma\, d_2}\,M_0\widetilde{m}^{t-1} - \frac{\varphi}{b_2\gamma}\left(\Delta\widetilde{Y}_t^{ae} + \gamma\,\widetilde{Y}_{t-1}^{ae}\right) \underset{(\Sigma T.2)}{\overset{(\Sigma T.1)}{\Rightarrow}}$$

$$\Rightarrow \overline{\Delta R}_{t-1}^{ae} = \frac{\gamma+m}{\gamma\, d_2}\,M_0\widetilde{m}^{t-1} -$$

$$-\frac{\varphi}{b_2\gamma}\left[\frac{\varphi}{1+\varphi}\,\frac{\gamma+m}{d_1}\,\frac{M_0\,\widetilde{m}^{t+1}}{P_1(\widetilde{m})}\,m + \frac{\gamma\, b_0}{1-c_1+\varphi} + \frac{\gamma\,\varphi}{1+\varphi}\,\frac{\gamma+m}{d_1}\,\frac{M_0\,\widetilde{m}^{t+1}}{P_1(\widetilde{m})}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{\Delta R}_{t-1}^{ae} = \frac{\gamma+m}{\gamma\, d_2}\,M_0\widetilde{m}^{t-1} - \frac{\varphi^2}{1+\varphi}\,\frac{\gamma+m}{b_2 d_1\gamma}\,\frac{M_0\,\widetilde{m}^{t+1}}{P_1(\widetilde{m})}\,(\gamma+m) - \frac{\varphi\, b_0}{b_2(1-c_1+\varphi)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{\Delta R}_{t-1}^{ae} = \frac{\gamma+m}{\gamma\, d_2}\,M_0\widetilde{m}^{t-1} - \frac{\varphi^2}{1+\varphi}\,\frac{(\gamma+m)^2}{\varphi\, d_2\gamma}\,\frac{M_0\,\widetilde{m}^{t+1}}{P_1(\widetilde{m})} - \frac{\varphi\, b_0}{b_2(1-c_1+\varphi)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{\Delta R}_{t-1}^{ae} = \frac{\gamma+m}{\gamma\, d_2}\,M_0\widetilde{m}^{t-1}\left[1 - \frac{\varphi}{1+\varphi}\,\frac{\gamma+m}{P_1(\widetilde{m})}\,\widetilde{m}^2\right] - \frac{\varphi\, b_0}{b_2(1-c_1+\varphi)} \xrightarrow{+1\ \text{χρονική περίοδο}}$$

$$\rightarrow \qquad \overline{\Delta R}_t^{ae} = \Omega_4\,\Omega_5\,\widetilde{m}^t + \Omega_6 \qquad \textbf{\textit{(ΣΤ.3)}}$$

όπου $\Omega_4 = \dfrac{\gamma+m}{\gamma\, d_2}\,M_0 < 0$, $\Omega_5 = 1 - \dfrac{\varphi}{1+\varphi}\,\dfrac{\gamma+m}{P_1(\widetilde{m})}\,\widetilde{m}^2$ & $\Omega_6 = -\dfrac{\varphi\, b_0}{b_2(1-c_1+\varphi)} > 0$

Δεδομένου ότι $\Omega_4 < 0$ και $\Omega_6 > 0$, το πρόσημο της επιτοκιακής διαφοράς ισορροπίας εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από το πρόσημο του όρου Ω_5. Προκειμένου να προσδιορίσουμε το πρόσημο του όρου αυτού, θα το εξισώσουμε αρχικά με το μηδέν

και στη συνέχεια επιλύοντας την προκύπτουσα εξίσωση ως προς $\tilde{m}$, θα προσδιορίσουμε τα διαστήματα τιμών της εν λόγω παραμέτρου βάσει των οποίων επιτυγχάνεται η διαφοροποίηση του προσήμου του όρου Ω_5. Πιο συγκεκριμένα θα έχουμε ότι:

$$\Omega_5 = 0 \Rightarrow 1 - \frac{\varphi}{1+\varphi}\,\frac{\gamma + m}{P_1(\tilde{m})}\,\tilde{m}^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi\left[1 + m - (1-\gamma)\right]\tilde{m}^2 = (1+\varphi)\,(\tilde{m}^3 + a_2\tilde{m}^2 + a_1\tilde{m} + a_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi\,(\tilde{m} - h)\,\tilde{m}^2 = (1+\varphi)\,\tilde{m}^3 - \left[\frac{1+v}{(1+\varphi)/c_1}(1+\varphi) + h\,(1+\varphi)\right]\tilde{m}^2 +$$

$$+\frac{h\,(1+v)+v}{(1+\varphi)/c_1}(1+\varphi)\,\tilde{m} - \frac{h\,v}{(1+\varphi)/c_1}(1+\varphi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1+\varphi)\,\tilde{m}^3 - \varphi\,\tilde{m}^3 - \left[c_1(1+v) + h\,(1+\varphi)\right]\tilde{m}^2 + \varphi\,h\,\tilde{m}^2 +$$

$$+\,c_1\left[h\,(1+v) + v\right]\tilde{m} - h\,v\,c_1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \tilde{m}^3 - \left[h + c_1(1+v)\right]\tilde{m}^2 + c_1\left[h\,(1+v) + v\right]\tilde{m} - h\,v\,c_1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad P_{11}(\tilde{m}) = \tilde{m}^3 + \eta_2\,\tilde{m}^2 + \eta_1\,\tilde{m} + \eta_0 = 0 \qquad \textbf{\textit{(ΣΤ.4)}}$$

όπου $\eta_0 = -\,h\,v\,c_1 < 0$, $\eta_1 = c_1\left[h\,(1+v) + v\right] > 0$, $\eta_2 = -\left[h + c_1(1+v)\right] < 0$

Η τριτοβάθμια εξίσωση $P_{11}(\tilde{m}) = 0$ θα έχει τρεις ρίζες. Η φύση αυτών, το εάν δηλαδή θα είναι πραγματικές ή συζυγείς μιγαδικές, εξαρτάται από το πρόσημο του ακόλουθου μεγέθους:

$$D_1 = Q_1^3 + P_1^2 \qquad \textbf{\textit{(ΣΤ.5)}}$$

όπου:

$$Q_1 = \frac{3\,\eta_1 - \eta_2^2}{9} \qquad \textbf{\textit{(ΣΤ.6)}} \qquad \& \qquad P_1 = \frac{9\,\eta_1\,\eta_2 - 27\,\eta_0 - 2\,\eta_2^3}{54} \qquad \textbf{\textit{(ΣΤ.7)}}$$

Από το συνδυασμό των σχέσεων (ΣΤ.5) , (ΣΤ.6) και (ΣΤ.7) και έπειτα από την αντικατάσταση σ' αυτές των σταθερών η_i , i = 0 , 1 , 2 , η σχέση (ΣΤ.5) τροποποιείται λαμβάνοντας την ακόλουθη μορφή:

$$D_1 = -\frac{1}{108}\,c_1^2\left[(1+v)^2 - \frac{4\,v}{c_1}\right]\left\{h^2 + c_1\left[v - h\,(1+v)\right]\right\}^2 \qquad \textbf{\textit{(ΣΤ.8)}}$$

Όπως προκύπτει από την παραπάνω σχέση, το πρόσημο της διακρίνουσας D_1 εξαρτάται από το πρόσημο του εντός της αγκύλης μεγέθους. Εξισώνοντας το μέγεθος αυτό με το μηδέν και επιλύοντας στη συνέχεια την εξίσωση που προκύπτει ως προς v, θα υπολογίσουμε τα διαστήματα τιμών του επιταχυντή για τα οποία το πρόσημο της διακρίνουσας D_1 διαφοροποιείται. Πιο συγκεκριμένα έχουμε ότι:

$$(1+v)^2 - \frac{4\,v}{c_1} = 0 \Rightarrow \qquad P_3(v) = v^2 + 2\left(1 - \frac{2}{c_1}\right)v + 1 = 0 \qquad \textbf{\textit{(ΣΤ.9)}}$$

Η διακρίνουσα της παραπάνω δευτεροβάθμιας εξίσωσης έχει ως ακολούθως:

$$\Delta_{12} = \left(4/c_1\right)^2(1 - c_1) \qquad \textbf{\textit{(ΣΤ.10)}}$$

Με τη βοήθεια της παραπάνω σχέσης μπορούμε εύκολα να προσδιορίσουμε τις ρίζες της εξίσωσης $P_3(v) = 0$ το μέγεθος των οποίων έχει ως εξής:

$$\overline{v}_{2,1}^{ae} = \frac{-2\left(1 - 2/c_1\right) \pm \sqrt{\Delta_{12}}}{2} \overset{(ΣΤ.10)}{=} \frac{-2\left(1 - 2/c_1\right) \pm \left(4/c_1\right)\sqrt{1 - c_1}}{2} = \frac{2}{c_1} - 1 \pm \frac{2}{c_1}\sqrt{1 - c_1} =$$

$$= \frac{1}{c_1}\left(2 - c_1 \pm 2\sqrt{1 - c_1}\right) = \frac{1}{c_1}\left[1 \pm 2\sqrt{1 - c_1} + \left(\sqrt{1 - c_1}\right)^2\right] = \frac{\left(1 \pm \sqrt{1 - c_1}\right)^2}{c_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \begin{cases} \overline{v}_1^{ae} = \dfrac{\left(1 - \sqrt{1 - c_1}\right)^2}{c_1} > 0 & \textbf{\textit{(ΣΤ.11)}} \\[2ex] \overline{v}_2^{ae} = \dfrac{\left(1 + \sqrt{1 - c_1}\right)^2}{c_1} > 0 & \textbf{\textit{(ΣΤ.12)}} \end{cases}$$

Βάσει των δύο παραπάνω ριζών θα διακρίνουμε στη συνέχεια μεταξύ τριών περιπτώσεων αναφορικά με το πρόσημο της διακρίνουσας D_1 και κατ' επέκταση το πρόσημο του πολυωνύμου $P_{11}(\tilde{m})$ και του μεγέθους Ω_5.

<u>1η Περίπτωση</u>: $\boldsymbol{v \in \left(\bar{v}_1^{ae}, \bar{v}_2^{ae}\right)}$

Εάν ο επιταχυντής παίρνει μία τιμή στο ανοιχτό διάστημα $\left(\bar{v}_1^{ae}, \bar{v}_2^{ae}\right)$ το πολυώνυμο $P_3(v)$ θα είναι αρνητικά ορισμένο. Το γεγονός ότι $P_3(v) < 0$ μας οδηγεί, βάσει της σχέσης (ΣΤ.8), στο συμπέρασμα ότι $D_1 > 0$, κάτι που σημαίνει ότι η εξίσωση $P_{11}(\tilde{m}) = 0$ θα έχει μία πραγματική και δύο συζυγείς μιγαδικές ρίζες, το μέγεθος των οποίων έχει ως εξής:

$$\tilde{m}_1^{ae} = S_1 + T_1 - \frac{1}{3}\eta_2 \qquad \textbf{\textit{(ΣΤ.13)}}$$

$$\tilde{m}_{2,3}^{ae} = -\frac{1}{2}(S_1 + T_1) - \frac{1}{3}\eta_2 \pm \frac{1}{2} i \sqrt{3}\,(S_1 - T_1) \qquad \textbf{\textit{(ΣΤ.14)}}$$

όπου: $i = \sqrt{-1}$, $S_1 = \sqrt[3]{P_1 + \sqrt{D_1}}$ & $T_1 = \sqrt[3]{P_1 - \sqrt{D_1}}$

Όπως διαπιστώνουμε, στην περίπτωση που $v \in \left(\bar{v}_1^{ae}, \bar{v}_2^{ae}\right)$ το πρόσημο του μεγέθους Ω_5, και κατά συνέπεια το πρόσημο της επιτοκιακής διαφοράς ισορροπίας, θα μπορούσε να διερευνηθεί με τη βοήθεια της πραγματικής ρίζας $\tilde{m}_1^{ae}$. Βάσει αυτής θα διακρίνουμε στη συνέχεια μεταξύ των ακόλουθων τριών υποπεριπτώσεων:

(i) $\boldsymbol{\tilde{m} = \tilde{m}_1^{ae}}$

Εάν η παράμετρος $\tilde{m}$ πάρει μία τιμή ακριβώς ίση με $\tilde{m}_1^{ae}$ θα έχουμε ότι $P_{11}(\tilde{m}) = (\Omega_5 =)\, 0$, οδηγώντας στην τροποποίηση της σχέσης (ΣΤ.3) η οποία και λαμβάνει την ακόλουθη μορφή:

$$\overline{\Delta R_t}^{ae} = \Omega_6 > 0 \qquad \textbf{\textit{(ΣΤ.15)}}$$

Με άλλα λόγια ***στην περίπτωση κατά την οποία*** $\boldsymbol{v \in \left(\bar{v}_1^{ae}, \bar{v}_2^{ae}\right)}$ ***και*** $\boldsymbol{\tilde{m} = \tilde{m}_1^{ae}}$ ***η επιτοκιακή διαφορά ισορροπίας θα αποτελεί διαχρονικά ένα σταθερό και θετικό μέγεθος***.

(ii) $\boldsymbol{\tilde{m} > \tilde{m}_1^{ae}}$

Εάν η παράμετρος $\tilde{m}$ κινείται στο διάστημα $\left(\tilde{m}_4^{ae}, 2\right)$, εάν δηλαδή ισχύει ότι $\tilde{m} > \tilde{m}_1^{ae}$, το πολυώνυμο $P_{11}(\tilde{m})$, και κατά συνέπεια το μέγεθος Ω_5, θα είναι θετικά ορισμένο ($\Omega_5 > 0$). Σ' αυτήν την περίπτωση, το πρόσημο της επιτοκιακής διαφοράς ισορροπίας θα αποτελεί συνάρτηση του χρόνου καθώς από τη σχέση (ΣΤ.3) προκύπτει ότι:

$$\overline{\Delta R}_t^{ae} = \Omega_4\ \Omega_5\ \tilde{m}^t + \Omega_6 <,=,> 0 \Rightarrow \Omega_4\ \Omega_5\ \tilde{m}^t <,=,> -\Omega_6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tilde{m}^t >,=,< -\frac{\Omega_6}{\Omega_4\ \Omega_5} \Rightarrow t\ \ln(\tilde{m}) >,=,< \ln\left(-\frac{\Omega_6}{\Omega_4\ \Omega_5}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \overline{\Delta R}_t^{ae} > 0 & \forall \quad t < \Omega_7 \\ \overline{\Delta R}_t^{ae} = 0 & \text{για} \quad t = \Omega_7 \\ \overline{\Delta R}_t^{ae} < 0 & \forall \quad t > \Omega_7 \end{cases} \qquad \textbf{(ΣΤ.16)}$$

όπου $\Omega_7 = \dfrac{\ln(-\Omega_6/\Omega_4) - \ln(\Omega_5)}{\ln(\tilde{m})}$

Σύμφωνα με τη σχέση (ΣΤ.16), ***στην περίπτωση κατά την οποία*** $\boldsymbol{v \in \left(\bar{v}_1^{ae}, \bar{v}_2^{ae}\right)}$ ***και*** $\boldsymbol{\tilde{m} > \tilde{m}_1^{ae}}$ ***η επιτοκιακή διαφορά ισορροπίας θα αποτελεί ένα θετικό μέγεθος για*** $\boldsymbol{t < \Omega_7}$***. Για*** $\boldsymbol{t = \Omega_7}$ ***η επιτοκιακή διαφορά ισορροπίας μηδενίζεται ενώ για*** $\boldsymbol{t > \Omega_7}$ ***η επιτοκιακή διαφορά ισορροπίας συνιστά ένα αρνητικό μέγεθος. Με άλλα λόγια η επιτοκιακή διαφορά ισορροπίας θα αποτελεί αρνητική συνάρτηση του χρόνου***.

(iii) $\boldsymbol{\tilde{m} < \tilde{m}_1^{ae}}$

Εάν η παράμετρος $\tilde{m}$ παίρνει τιμές στο διάστημα $\left(1, \tilde{m}_1^{ae}\right)$, εάν δηλαδή ισχύει ότι $\tilde{m} < \tilde{m}_1^{ae}$, το πολυώνυμο $P_{11}(\tilde{m})$, και κατά συνέπεια το μέγεθος Ω_5, θα είναι αρνητικά ορισμένο. Βάσει της σχέσης (ΣΤ.3) οδηγούμαστε συνεπώς στο συμπέρασμα ότι ***στην περίπτωση που*** $\boldsymbol{v \in \left(\bar{v}_1^{ae}, \bar{v}_2^{ae}\right)}$ ***και*** $\boldsymbol{\tilde{m} < \tilde{m}_1^{ae}}$ ***η επιτοκιακή διαφορά ισορροπίας θα συνιστά διαχρονικά ένα θετικό μέγεθος.***

<u>2η Περίπτωση</u>: $\boldsymbol{v = \bar{v}_1^{ae}}$ ***ή*** $\boldsymbol{v = \bar{v}_2^{ae}}$

Στην περίπτωση που επιταχυντής πάρει μία τιμή ίση με μία εκ των δύο ριζών της εξίσωσης $P_3(v) = 0$, η διακρίνουσα D_1 θα ισούται με το μηδέν και ως εκ τούτου η εξίσωση $P_{11}(\tilde{m}) = 0$ θα έχει τρεις πραγματικές ρίζες, εκ των οποίων οι δύο θα είναι οπωσδήποτε ίσες. Το μέγεθος αυτών των ριζών έχει ως ακολούθως:

$$\tilde{m}_4^{ae} = 2\sqrt[3]{P_1} - \frac{1}{3}\eta_2 \qquad \textbf{(ΣΤ.17)} \qquad \& \qquad \tilde{m}_{5,6}^{ae} = -\sqrt[3]{P_1} - \frac{1}{3}\eta_2 \qquad \textbf{(ΣΤ.18)}$$

Όπως γίνεται αντιληπτό, το πρόσημο του πολυωνύμου $P_{11}(\tilde{m})$ θα μπορούσε να διερευνηθεί με τη βοήθεια της ρίζας $\tilde{m}_4^{ae}$ διακρίνοντας και πάλι μεταξύ των παρακάτω τριών υποπεριπτώσεων:

(i) $\tilde{m} < \tilde{m}_4^{ae}$

Εάν η παράμετρος $\tilde{m}$ κινείται στο διάστημα $\left(1, \tilde{m}_4^{ae}\right)$, εάν δηλαδή έχουμε ότι $\tilde{m} < \tilde{m}_4^{ae}$, το πολυώνυμο $P_{11}(\tilde{m})$, και κατά συνέπεια το μέγεθος Ω_5, θα είναι αρνητικά ορισμένο ($\Omega_5 < 0$). Βάσει λοιπόν της σχέσης (ΣΤ.3) καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι ***στην περίπτωση που*** $v = \bar{v}_1^{ae}$ ***ή*** $v = \bar{v}_2^{ae}$ ***και*** $\tilde{m} < \tilde{m}_4^{ae}$ ***το εισόδημα ισορροπίας θα συνιστά διαχρονικά ένα θετικό μέγεθος***.

(ii) $\tilde{m} = \tilde{m}_4^{ae}$

Εάν η παράμετρος $\tilde{m}$ παίρνει μία τιμή ακριβώς ίση με $\tilde{m}_4^{ae}$ $\left(\tilde{m} = \tilde{m}_4^{ae}\right)$ θα έχουμε ότι $P_{11}(\tilde{m}) = (\Omega_5 =) 0$ και η επιτοκιακή διαφορά ισορροπίας θα περιγράφεται από τη σχέση (ΣΤ.15). Με άλλα λόγια ***στην περίπτωση που*** $v = \bar{v}_1^{ae}$ ***ή*** $v = \bar{v}_2^{ae}$ ***και*** $\tilde{m} = \tilde{m}_4^{ae}$ ***η επιτοκιακή διαφορά ισορροπίας θα συνιστά διαχρονικά ένα σταθερό και θετικό μέγεθος.***

(iii) $\tilde{m} > \tilde{m}_4^{ae}$

Εάν η παράμετρος $\tilde{m}$ παίρνει τιμές στο διάστημα $\left(\tilde{m}_4^{ae}, 2\right)$ το πολυώνυμο $P_{11}(\tilde{m})$, και κατά συνέπεια το μέγεθος Ω_5, θα είναι θετικά ορισμένο ($\Omega_5 > 0$). Ως εκ τούτου το πρόσημο της επιτοκιακής διαφοράς ισορροπίας θα αποτελεί, βάσει της σχέσης (ΣΤ.3), συνάρτηση του χρόνου. Πραγματοποιώντας την ίδια ανάλυση με εκείνη της υποπερίπτωσης (1.ii) μπορεί εύκολα να δειχτεί ότι:

$$\begin{cases} \overline{\Delta R}_t^{ae} > 0 & \forall \quad t < \Omega_7 \\ \overline{\Delta R}_t^{ae} = 0 & \text{για} \quad t = \Omega_7 \\ \overline{\Delta R}_t^{ae} < 0 & \forall \quad t > \Omega_7 \end{cases} \qquad \textit{(ΣΤ.19)}$$

όπου $\Omega_7 = \dfrac{\ln(-\Omega_6/\Omega_4) - \ln(\Omega_5)}{\ln(\tilde{m})}$.

Όπως γίνεται αντιληπτό, ***στην περίπτωση που*** $v = \bar{v}_1^{ae}$ ***ή*** $v = \bar{v}_2^{ae}$ ***και*** $\tilde{m} > \tilde{m}_4^{ae}$ ***η επιτοκιακή διαφορά ισορροπίας θα αποτελεί ένα θετικό μέγεθος για*** $t < \Omega_7$***. Για*** $t = 0$ ***η επιτοκιακή διαφορά ισορροπίας μηδενίζεται ενώ για*** $t > \Omega_7$ ***η επιτοκιακή διαφορά ισορροπίας συνιστά ένα αρνητικό μέγεθος.***

<u>3η Περίπτωση</u>: $v \notin \left(\bar{v}_1^{ae}, \bar{v}_2^{ae}\right)$

Εάν ο επιταχυντής παίρνει τιμές εκτός του διαστήματος $\left(\bar{v}_1^{ae}, \bar{v}_2^{ae}\right)$ το πολυώνυμο $P_3(v)$ θα είναι θετικά ορισμένο $[P_3(v) > 0]$ κάτι που σημαίνει ότι η διακρίνουσα D_1 θα συνιστά ένα αρνητικό μέγεθος. Το γεγονός ότι $D_1 < 0$ μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η εξίσωση $P_{11}(\tilde{m}) = 0$ θα έχει τρεις πραγματικές και διακριτές ρίζες, το μέγεθος των οποίων έχει ως εξής:

$$\left.\begin{aligned}
\tilde{m}_7^{ae} &= 2\sqrt{-Q_1}\cos\left(\tilde{\theta}_1/3\right) - \eta_2/3 && \textbf{\textit{(ΣΤ.20)}}\\
\tilde{m}_8^{ae} &= 2\sqrt{-Q_1}\cos\left(\tilde{\theta}_1/3 + 120^o\right) - \eta_2/3 && \textbf{\textit{(ΣΤ.21)}}\\
\tilde{m}_9^{ae} &= 2\sqrt{-Q_1}\cos\left(\tilde{\theta}_1/3 + 240^o\right) - \eta_2/3 && \textbf{\textit{(ΣΤ.22)}}
\end{aligned}\right\}$$

όπου[67] $\tilde{\theta}_1 = \arccos\left(P_1 \big/ \sqrt{-Q_1^3}\right)$ & $\tilde{m}_8^{ae} < \tilde{m}_9^{ae} < \tilde{m}_7^{ae}$.

Στη συνέχεια και βάσει της εναλλαγής προσήμου του πολυωνύμου $P_{11}(\tilde{m})$ θα διακρίνουμε μεταξύ των παρακάτω τριών υποπεριπτώσεων:

(i) $\tilde{m} \in (1, \tilde{m}_8^{ae}) \cup (\tilde{m}_9^{ae}, \tilde{m}_7^{ae})$

Εάν η παράμετρος $\tilde{m}$ κινείται στο διάστημα $(1, \tilde{m}_8^{ae}) \cup (\tilde{m}_9^{ae}, \tilde{m}_7^{ae})$ το πολυώνυμο $P_{11}(\tilde{m})$, και κατά συνέπεια το μέγεθος Ω_5, θα είναι αρνητικά ορισμένο ($\Omega_5 < 0$). Βάσει της σχέσης (ΣΤ.3) οδηγούμαστε συνεπώς στο συμπέρασμα ότι ***στην περίπτωση που*** $v \notin \left(\bar{v}_1^{ae}, \bar{v}_2^{ae}\right)$ ***και*** $\tilde{m} \in (1, \tilde{m}_8^{ae}) \cup (\tilde{m}_9^{ae}, \tilde{m}_7^{ae})$ ***η επιτοκιακή διαφορά ισορροπίας θα συνιστά διαχρονικά ένα θετικό μέγεθος***.

(ii) $\tilde{m} \in (\tilde{m}_8^{ae}, \tilde{m}_9^{ae}) \cup (\tilde{m}_7^{ae}, 2)$

Εάν η παράμετρος $\tilde{m}$ παίρνει τιμές στο διάστημα $(\tilde{m}_8^{ae}, \tilde{m}_9^{ae}) \cup (\tilde{m}_7^{ae}, 2)$ τόσο το πολυώνυμο $P_{11}(\tilde{m})$ όσο και το μέγεθος Ω_5 θα είναι θετικώς ορισμένα ($\Omega_5 > 0$). Βάσει της σχέσης (ΣΤ.3) γίνεται συνεπώς αντιληπτό ότι το πρόσημο της επιτοκιακής διαφοράς ισορροπίας θα συνιστά μία συνάρτηση του χρόνου. Πιο συγκεκριμένα, πραγματοποιώντας την ίδια ανάλυση με εκείνη που πραγματοποιήσαμε στα πλαίσια της υποπερίπτωσης (1.ii) εύκολα μπορεί να δειχτεί ότι:

---

[67] Η ισχύς της ανισότητας $\tilde{m}_8^{ae} < \tilde{m}_9^{ae} < \tilde{m}_7^{ae}$ στηρίζεται στην ανάλυση του παραρτήματος Β.

$$\begin{cases} \overline{\Delta R}_t^{ae} > 0 \quad \forall \quad t < \Omega_7 \\ \overline{\Delta R}_t^{ae} = 0 \quad \text{για} \quad t = \Omega_7 \\ \overline{\Delta R}_t^{ae} < 0 \quad \forall \quad t > \Omega_7 \end{cases} \qquad \textit{(ΣΤ.23)}$$

όπου $\Omega_7 = \dfrac{\ln(-\Omega_6/\Omega_4) - \ln(\Omega_5)}{\ln(\tilde{m})}$.

Με άλλα λόγια ***εάν*** $v \notin \left(\bar{v}_1^{ae}, \bar{v}_2^{ae}\right)$ ***και*** $\tilde{m} \in (\tilde{m}_8^{ae}, \tilde{m}_9^{ae}) \cup (\tilde{m}_7^{ae}, 2)$ ***η επιτοκιακή διαφορά ισορροπίας θα αποτελεί ένα θετικό μέγεθος για*** $t < \Omega_7$ ***. Για*** $t = 0$ ***η επιτοκιακή διαφορά ισορροπίας μηδενίζεται ενώ θα συνιστά ένα αρνητικό μέγεθος για*** $t > \Omega_7$.

(iii) $\tilde{m} = \tilde{m}_7^{ae}$ ***ή*** $\tilde{m} = \tilde{m}_8^{ae}$ ***ή*** $\tilde{m} = \tilde{m}_9^{ae}$

Εάν η τιμή της παραμέτρου $\tilde{m}$ είναι ακριβώς ίση με μία εκ των πραγματικών και διακριτών ριζών της εξίσωσης $P_{11}(\tilde{m}) = 0$, το μέγεθος Ω_5 θα ισούται με το μηδέν ($\Omega_5 = 0$). Ως εκ τούτου, ***στην περίπτωση που*** $v \notin \left(\bar{v}_1^{ae}, \bar{v}_2^{ae}\right)$ ***και*** $\tilde{m} = \tilde{m}_i^{ae}$ ***,*** $i = 7, 8, 9$ ***, η επιτοκιακή διαφορά ισορροπίας θα συνιστά διαχρονικά ένα θετικό και σταθερό μέγεθος***.

Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειωθεί ότι η διαδικασία προσδιορισμού του προσήμου της επιτοκιακής διαφοράς ισορροπίας απλοποιείται στην περίπτωση κατά την οποία οι αυτόνομες επενδύσεις είναι ίσες με το μηδέν ($b_0 = 0$). Στην ειδική αυτή περίπτωση η σχέση (ΣΤ.3) τροποποιείται λαμβάνοντας την ακόλουθη μορφή:

$$\left.\overline{\Delta R}_t^{ae}\right|_{b_0=0} = \Omega_4 \, \Omega_5 \, \tilde{m}^t \qquad \textit{(ΣΤ.24)}$$

Όπως γίνεται φανερό από την παραπάνω σχέση, και δεδομένου ότι $\Omega_4 < 0$, το πρόσημο της επιτοκιακής διαφοράς ισορροπίας θα εξαρτάται από το πρόσημο του όρου Ω_5. Με άλλα λόγια, ***στην περίπτωση που οι αυτόνομες επενδύσεις είναι μηδενικές και το μέγεθος*** Ω_5 ***είναι θετικά (αρνητικά) ορισμένο, η επιτοκιακή διαφορά ισορροπίας θα συνιστά διαχρονικά ένα αρνητικό (θετικό) μέγεθος. Η επιτοκιακή διαφορά ισορροπίας θα ισούται διαχρονικά με το μηδέν, εφόσον η Κεντρική Τράπεζα επιλέξει εκείνο το ρυθμό μεγέθυνσης της ονομαστικής προσφοράς χρήματος για τον οποίο μηδενίζεται το πολυώνυμο*** $P_{11}(\tilde{m})$.

Παράρτημα Ζ

Στα πλαίσια του μηχανισμού των στατιστικών προσδοκιών, η σχέση που περιγράφει τη διαμόρφωση του ύψους της επιτοκιακής διαφοράς προκύπτει από τη σχέση (5.169):

$$\Delta R_{t-1} = \frac{1}{d_2}\left(M_0 \tilde{m}^t - d_1 Y_t\right) \qquad \textbf{\textit{(5.169)}}$$

Η σχέση που περιγράφει την εξέλιξη του μεγέθους της επιτοκιακής διαφοράς ισορροπίας $\left(\overline{\Delta R}_t^{se}\right)$ προκύπτει από τη σχέση (5.169), έπειτα από την αντικατάσταση σ' αυτή του εισοδήματος ισορροπίας:

$$\tilde{Y}_t^{se} = \frac{b_0}{1-c_1+\varphi} + \frac{\varphi}{1+\varphi}\frac{M_0}{d_1}\frac{\tilde{m}^{t+2}}{\tilde{m}^2+\delta_1\tilde{m}+\delta_0} \qquad \textbf{\textit{(5.158)}}$$

όπου $P_6(\tilde{m}) = \tilde{m}^2 + \delta_1\tilde{m} + \delta_0$

Πιο συγκεκριμένα από το συνδυασμό των δύο παραπάνω σχέσεων προκύπτει:

$$\overline{\Delta R}_{t-1}^{se} = \frac{1}{d_2}\left(M_0\tilde{m}^t - d_1\tilde{Y}_t^{se}\right) =$$

$$= \frac{1}{d_2}\left(M_0\tilde{m}^t - \frac{b_0 d_1}{1-c_1+\varphi} - \frac{\varphi}{1+\varphi}\frac{M_0\tilde{m}^{t+2}}{P_6(\tilde{m})}\right) =$$

$$= \frac{1}{d_2}\left\{\left[1-\frac{\varphi}{1+\varphi}\frac{\tilde{m}^2}{P_6(\tilde{m})}\right]M_0\tilde{m}^t - \frac{b_0 d_1}{1-c_1+\varphi}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{\Delta R}_{t-1}^{se} = \left[1-\frac{\varphi}{1+\varphi}\frac{\tilde{m}^2}{P_6(\tilde{m})}\right]\frac{M_0}{d_2}\tilde{m}^t - \frac{b_0}{1-c_1+\varphi}\frac{\varphi}{b_2} \qquad \textbf{\textit{(Z.1)}}$$

ή ισοδύναμα

$$\overline{\Delta R}_t^{se} = \Omega_6 + \Omega_8\,\Omega_9\,\tilde{m}^t \qquad \textbf{\textit{(Z.2)}}$$

όπου: $\Omega_6 = -\frac{b_0}{1-c_1+\varphi}\frac{\varphi}{b_2} > 0$, $\Omega_8 = \frac{M_0}{d_2} < 0$ και $\Omega_9 = 1-\frac{\varphi}{1+\varphi}\frac{\tilde{m}^2}{P_6(\tilde{m})}$

Δεδομένου ότι $\Omega_6 > 0$ και $\Omega_8 < 0$, το πρόσημο της επιτοκιακής διαφοράς ισορροπίας εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από το πρόσημο του όρου Ω_9. Προκειμένου να διερευνήσουμε το πρόσημο του συγκεκριμένου όρου, θα τον εξισώσουμε με το μηδέν και στη συνέχεια θα επιλύσουμε την προκύπτουσα εξίσωση ως προς $\tilde{m}$. Κατ' αυτόν τον τρόπο θα προσδιορίσουμε τα διαστήματα τιμών της παραμέτρου $\tilde{m}$ βάσει των οποίων επιτυγχάνεται η διαφοροποίηση του προσήμου του μεγέθους Ω_9. Ειδικότερα:

$$\Omega_9 = 0 \Rightarrow 1 - \frac{\varphi}{1+\varphi}\frac{\tilde{m}^2}{P_6(\tilde{m})} = 0 \Rightarrow (1+\varphi)(\tilde{m}^2 + \delta_1\tilde{m} + \delta_0) = \varphi\,\tilde{m}^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \tilde{m}^2 - (1+\varphi)\frac{c_1(1+v)}{1+\varphi}\tilde{m} + (1+\varphi)\frac{vc_1}{1+\varphi} = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad P_{12}(\tilde{m}) = \tilde{m}^2 + \eta_3\,\tilde{m} + \eta_4 = 0 \qquad \textit{(Z.3)}$$

όπου $\eta_3 = -c_1(1+v) < 0$ και $\eta_4 = vc_1 > 0$.

Το εάν οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης είναι πραγματικές ή φανταστικές, εξαρτάται από το πρόσημο της διακρίνουσας της εξίσωσης $P_{12}(\tilde{m}) = 0$, το μέγεθος της οποίας έχει ως εξής:

$$\Delta_{13} = c_1^2\left[v^2 + 2\left(1 - \frac{2}{c_1}\right)v + 1\right] = c_1^2\,P_3(v) \qquad \textit{(Z.4)}$$

όπου $P_3(v) = v^2 + 2\,(1 - 2/c_1)\,v + 1$.

Όπως προκύπτει από την παραπάνω σχέση, το πρόσημο της διακρίνουσας Δ_{13} εξαρτάται από το πρόσημο του πολυωνύμου $P_3(v)$. Στα πλαίσια του έκτου παραρτήματος προσδιορίσαμε τα διαστήματα τιμών του επιταχυντή για τα οποία διαφοροποιείται το πρόσημο του πολυωνύμου $P_3(v)$. Τα άκρα αυτών των διαστημάτων ορίζονται από τις δύο παρακάτω σχέσεις:

$$\begin{cases} \bar{v}_1^{se} = \bar{v}_1^{ae} = \dfrac{\left(1 - \sqrt{1 - c_1}\right)^2}{c_1} > 0 & \textit{(Z.5)} \\[2ex] \bar{v}_2^{se} = \bar{v}_2^{ae} = \dfrac{\left(1 + \sqrt{1 - c_1}\right)^2}{c_1} > 0 & \textit{(Z.6)} \end{cases}$$

Βάσει των δύο παραπάνω σχέσεων θα διακρίνουμε στη συνέχεια μεταξύ των παρακάτω τριών περιπτώσεων:

<u>1η Περίπτωση</u>: $\boldsymbol{v \in \left(\bar{v}_1^{se}, \bar{v}_2^{se}\right)}$

Εάν ο επιταχυντής παίρνει μία τιμή που εντοπίζεται εντός του διαστήματος $\left(\bar{v}_1^{se}, \bar{v}_2^{se}\right)$, η διακρίνουσα της εξίσωσης $P_3(v) = 0$ θα είναι αρνητική. Ως εκ τούτου τόσο το πολυώνυμο $P_3(v)$ όσο και η διακρίνουσα Δ_{13} θα είναι θετικώς ορισμένα μεγέθη ($\Delta_{13} > 0$). Αυτό σημαίνει ότι η εξίσωση $P_{12}(\tilde{m}) = 0$ θα έχει δύο πραγματικές και διακριτές ρίζες, το μέγεθος των οποίων έχει ως ακολούθως:

$$\begin{cases} \tilde{m}_1^{se} = \dfrac{c_1}{2}\left[1 + v - \sqrt{P_3(v)}\right] & \textbf{(Z.7)} \\ \tilde{m}_2^{se} = \dfrac{c_1}{2}\left[1 + v + \sqrt{P_3(v)}\right] & \textbf{(Z.8)} \end{cases}$$

Βάσει των δύο παραπάνω σχέσεων θα διακρίνουμε στη συνέχεια μεταξύ τριών υποπεριπτώσεων αναφορικά με το πρόσημο της επιτοκιακής διαφοράς ισορροπίας. Πιο συγκεκριμένα:

(i) $\boldsymbol{\tilde{m} \in (\tilde{m}_1^{se}, \tilde{m}_2^{se})}$

Εάν η παράμετρος $\tilde{m}$ κινείται εντός του διαστήματος $(\tilde{m}_1^{se}, \tilde{m}_2^{se})$ το πολυώνυμο $P_{12}(\tilde{m})$, και κατά συνέπεια το μέγεθος Ω_9, θα είναι αρνητικά ορισμένο. Με άλλα λόγια, ***στην περίπτωση που*** $\boldsymbol{v \in \left(\bar{v}_1^{se}, \bar{v}_2^{se}\right) \& \tilde{m} \in \left(\tilde{m}_1^{se}, \tilde{m}_2^{se}\right)}$ ***η επιτοκιακή διαφορά ισορροπίας θα συνιστά διαχρονικά ένα θετικό μέγεθος***.

(ii) $\boldsymbol{\tilde{m} = \tilde{m}_1^{se}}$ ***ή*** $\boldsymbol{\tilde{m} = \tilde{m}_2^{se}}$

Εάν η παράμετρος $\tilde{m}$ είναι ακριβώς ίση με μία εκ των δύο πραγματικών ριζών της εξίσωσης $P_{12}(\tilde{m}) = 0$, το μέγεθος Ω_9 θα ισούται με το μηδέν. Από τη σχέση (Z.2) και για $\Omega_9 = 0$ προκύπτει ότι:

$$\overline{\Delta R}_t^{se} = \Omega_6 > 0 \quad \forall \quad t = 0, 1, 2, ... \qquad \textbf{(Z.9)}$$

Με άλλα λόγια, ***στην περίπτωση που*** $\boldsymbol{v \in \left(\bar{v}_1^{se}, \bar{v}_2^{se}\right) \& \tilde{m} = \tilde{m}_1^{se}}$ ***ή*** $\boldsymbol{\tilde{m} = \tilde{m}_2^{se}}$ ***η επιτοκιακή διαφορά ισορροπίας θα συνιστά διαχρονικά ένα σταθερό και θετικό μέγεθος***.

(iii) $\boldsymbol{\tilde{m} \notin \left(\tilde{m}_1^{se}, \tilde{m}_2^{se}\right)}$

Εάν η παράμετρος $\tilde{m}$ κινείται εκτός του διαστήματος $(\tilde{m}_1^{se}, \tilde{m}_2^{se})$ τόσο το πολυώνυμο $P_{12}(\tilde{m})$ όσο και το μέγεθος Ω_9 θα είναι θετικά ορισμένα ($\Omega_9 > 0$). Βάσει της σχέσης (Z.2), και δεδομένου ότι $\Omega_6 > 0$ και $\Omega_8 < 0$, το πρόσημο της επιτοκιακής διαφοράς ισορροπίας θα αποτελεί συνάρτηση του χρόνου (t). Ειδικότερα θα έχουμε ότι:

$$\begin{cases} \overline{\Delta R}_t^{se} > 0 \quad \forall \quad t < \Omega_{10} \\ \overline{\Delta R}_t^{se} = 0 \quad \text{για} \quad t = \Omega_{10} \\ \overline{\Delta R}_t^{se} < 0 \quad \forall \quad t > \Omega_{10} \end{cases} \qquad (Z.10)$$

όπου $\Omega_{10} = \dfrac{\ln(\Omega_6/\Omega_9) - \ln(-\Omega_8)}{\ln(\tilde{m})}$.

Με άλλα λόγια ***στην περίπτωση που*** $v \in \left(\bar{v}_1^{se}, \bar{v}_2^{se}\right)$ ***&*** $\tilde{m} \notin \left(\tilde{m}_1^{se}, \tilde{m}_2^{se}\right)$ ***η επιτοκιακή διαφορά ισορροπίας θα συνιστά ένα θετικό μέγεθος για*** $t < \Omega_{10}$***. Η επιτοκιακή διαφορά ισορροπίας θα ισούται με το μηδέν για*** $t = \Omega_{10}$ ***, ενώ για*** $t > \Omega_{10}$ ***θα συνιστά ένα αρνητικά ορισμένο μέγεθος***.

<u>2η Περίπτωση</u>: $v = \bar{v}_1^{se}$ ***ή*** $v = \bar{v}_2^{se}$

Εάν η τιμή του επιταχυντή είναι ακριβώς ίση με μία εκ των δύο πραγματικών ριζών της εξίσωσης $P_3(v) = 0$, η διακρίνουσα Δ_{13} θα είναι ακριβώς ίση με το μηδέν ($\Delta_{13} = 0$). Ως εκ τούτου η εξίσωση $P_{12}(\tilde{m}) = 0$ θα έχει δύο πραγματικές και ίσες ρίζες, το μέγεθος των οποίων έχει ως ακολούθως:

$$\tilde{m}_{3,4}^{se} = \frac{c_1(1+v)}{2} \qquad (Z.11)$$

Βάσει της παραπάνω σχέσης θα διακρίνουμε στη συνέχεια μεταξύ δύο υποπεριπτώσεων αναφορικά με το πρόσημο της επιτοκιακής διαφοράς ισορροπίας. Πιο συγκεκριμένα:

(i) $\tilde{m} = \tilde{m}_{3,4}^{se}$

Εάν η παράμετρος $\tilde{m}$ είναι ακριβώς ίση με τη διπλή ρίζα της εξίσωσης $P_{12}(\tilde{m}) =$ $= 0$, ο όρος Ω_9 θα ισούται με το μηδέν ($\Omega_9 = 0$) και το μέγεθος της επιτοκιακής διαφοράς ισορροπίας θα περιγράφεται από τη σχέση (Z.9). Με άλλα λόγια ***στην περίπτωση που*** $v = \bar{v}_1^{se}$ ***ή*** $v = \bar{v}_2^{se}$ ***και*** $\tilde{m} = \tilde{m}_{3,4}^{se}$***, η επιτοκιακή διαφορά ισορροπίας θα συνιστά διαχρονικά ένα σταθερό και θετικό μέγεθος***.

(ii) $\tilde{m} \neq \tilde{m}_{3,4}^{se}$

Εάν η τιμή της παραμέτρου $\tilde{m}$ είναι διαφορετική από εκείνη της διπλής ρίζας $\tilde{m}_{3,4}^{se}$, τόσο το πολυώνυμο $P_{12}(\tilde{m})$ όσο και ο όρος Ω_9 θα συνιστούν θετικά ορισμένα μεγέθη ($\Omega_9 > 0$). Ως εκ τούτου το πρόσημο της επιτοκιακής διαφοράς ισορροπίας θα αποτελεί συνάρτηση του χρόνου και θα προσδιορίζεται βάσει της σχέσης (Z.10). Με

άλλα λόγια, ***στην περίπτωση κατά την οποία ισχύει ότι*** $v = \bar{v}_1^{se}$ ***ή*** $v = \bar{v}_2^{se}$ ***&*** $\tilde{m} \neq \tilde{m}_{3,4}^{se}$ ***η επιτοκιακή διαφορά ισορροπίας θα συνιστά ένα θετικό μέγεθος για*** $t < \Omega_{10}$***. Η επιτοκιακή διαφορά ισορροπίας θα ισούται με το μηδέν για*** $t = \Omega_{10}$ ***, ενώ για*** $t > \Omega_{10}$ ***θα αποτελεί ένα αρνητικά ορισμένο μέγεθος***.

<u>3η Περίπτωση</u>: $v \notin \left(\bar{v}_1^{se}, \bar{v}_2^{se}\right)$

Εάν η τιμή του επιταχυντή κινείται εκτός του διαστήματος $\left(\bar{v}_1^{se}, \bar{v}_2^{se}\right)$ το πολυώνυμο $P_3(v)$, και κατά συνέπεια η διακρίνουσα Δ_{13}, θα είναι θετικά ορισμένο. Ως εκ τούτου η εξίσωση $P_{12}(\tilde{m}) = 0$ θα έχει δύο πραγματικές και διακριτές ρίζες, το μέγεθος των οποίων περιγράφεται από τις σχέσεις (Ζ.7) και (Ζ.8). Βάσει αυτών, θα μπορούσαμε να διακρίνουμε μεταξύ τριών υποπεριπτώσεων αναφορικά με το πρόσημο της επιτοκιακής διαφοράς ισορροπίας, οι οποίες και ταυτίζονται με εκείνες που αναπτύχθηκαν στα πλαίσια της πρώτης περίπτωσης.

Η διαδικασία προσδιορισμού του προσήμου της επιτοκιακής διαφοράς ισορροπίας απλοποιείται στην περίπτωση κατά την οποία οι αυτόνομες επενδύσεις είναι ίσες με το μηδέν ($b_0 = 0$). Στην ειδική αυτή περίπτωση η σχέση (Ζ.2) τροποποιείται λαμβάνοντας την ακόλουθη μορφή:

$$\overline{\Delta R}_t^{se}\Big|_{b_0=0} = \Omega_8\, \Omega_9\, \tilde{m}^t \qquad \textbf{\textit{(Z.12)}}$$

Όπως γίνεται φανερό από την παραπάνω σχέση, και δεδομένου ότι $\Omega_8 < 0$, το πρόσημο της επιτοκιακής διαφοράς ισορροπίας θα εξαρτάται από το πρόσημο του όρου Ω_9. Με άλλα λόγια, ***στην περίπτωση που οι αυτόνομες επενδύσεις είναι μηδενικές και το μέγεθος*** Ω_9 ***είναι θετικά (αρνητικά) ορισμένο, η επιτοκιακή διαφορά ισορροπίας θα συνιστά διαχρονικά ένα αρνητικό (θετικό) μέγεθος. Η επιτοκιακή διαφορά ισορροπίας θα ισούται διαχρονικά με το μηδέν, εφόσον η Κεντρική Τράπεζα επιλέξει εκείνο το ρυθμό μεγέθυνσης της ονομαστικής προσφοράς χρήματος για τον οποίο μηδενίζεται το πολυώνυμο*** $P_{12}(\tilde{m})$.

<u>Παράρτημα Η</u>

Στα πλαίσια του μηχανισμού των ορθολογικών προσδοκιών είδαμε ότι οι προσδοκώμενες τιμές του εισοδήματος και της επιτοκιακής διαφοράς και το εισόδημα ισορροπίας προσδιορίζονται αντιστοίχως μέσω των σχέσεων:

$$\begin{cases} E_{t-1}(Y_t) = \dfrac{1}{1+\varphi}\left[b_0 + c_1(1+v)\,Y_{t-1} - vc_1 Y_{t-2} + \dfrac{\varphi}{d_1} M_0 \tilde{m}^t\right] & \textbf{\textit{(5.265)}} \\[2ex] E_{t-1}(\Delta R_t) = -\dfrac{\varphi}{b_2(1+\varphi)}\left[b_0 + c_1(1+v)\,Y_{t-1} - vc_1 Y_{t-2} - \dfrac{M_0 \tilde{m}^t}{d_1}\right] & \textbf{\textit{(5.266)}} \end{cases}$$

και

$$\widetilde{Y}_t^{ra} = \frac{b_0}{1-c_1+\varphi} + \frac{\varphi}{1+\varphi}\frac{M_0}{d_1}\frac{\widetilde{m}^{t+2}}{P_6(\widetilde{m})} \qquad \textbf{\textit{(5.270)}}$$

όπου $P_6(\widetilde{m}) = \widetilde{m}^2 + \delta_1\widetilde{m} + \delta_0$

Η σχέση η οποία περιγράφει την επιτοκιακή διαφορά ισορροπίας προκύπτει από το συνδυασμό των σχέσεων (5.266) και (5.270) και προσδιορίζεται ως εξής:

$$E_{t-1}\left(\overline{\Delta R}_t\right) = -\frac{\varphi}{b_2(1+\varphi)}\left[b_0 + c_1(1+v)\,\widetilde{Y}_{t-1}^{ra} - vc_1\widetilde{Y}_{t-2}^{ra} - \frac{M_0\widetilde{m}^t}{d_1}\right] =$$

$$= -\frac{\varphi}{b_2(1+\varphi)}\left[b_0 + c_1\left(\widetilde{Y}_{t-1}^{ra} + v\,\Delta\widetilde{Y}_{t-1}^{ra}\right) - \frac{M_0\widetilde{m}^t}{d_1}\right] =$$

$$= -\frac{\varphi}{b_2(1+\varphi)}\left\{b_0 + \frac{b_0c_1}{1-c_1+\varphi} + \right.$$

$$\left. + c_1\left[\frac{\varphi}{1+\varphi}\frac{M_0}{d_1}\frac{\widetilde{m}^{t+1}}{P_6(\widetilde{m})} + \frac{\varphi}{1+\varphi}\frac{M_0}{d_1}\,m\,v\,\frac{\widetilde{m}^t}{P_6(\widetilde{m})}\right] - \frac{M_0\widetilde{m}^t}{d_1}\right\} =$$

$$= -\frac{\varphi}{b_2(1+\varphi)}\left[\frac{b_0(1+\varphi)}{1-c_1+\varphi} + c_1(\widetilde{m} + v\,m)\frac{\varphi}{1+\varphi}\frac{M_0}{d_1}\frac{\widetilde{m}^t}{P_6(\widetilde{m})} - \frac{M_0\widetilde{m}^t}{d_1}\right] =$$

$$= -\frac{\varphi}{b_2(1+\varphi)}\left\{\frac{b_0(1+\varphi)}{1-c_1+\varphi} + \frac{M_0}{d_1}\left[\frac{\varphi\,c_1(\widetilde{m} + v\,m + v - v)}{(1+\varphi)\,P_6(\widetilde{m})} - 1\right]\widetilde{m}^t\right\} =$$

$$= -\frac{\varphi}{b_2(1+\varphi)}\left\{\frac{b_0(1+\varphi)}{1-c_1+\varphi} + \frac{M_0}{d_1}\left[\frac{\varphi\,c_1(1+v)\,\widetilde{m} - \varphi\,v\,c_1}{(1+\varphi)\,\widetilde{m}^2 - c_1(1+v)\,\widetilde{m} + v\,c_1} - 1\right]\widetilde{m}^t\right\} =$$

$$= -\frac{\varphi}{b_2(1+\varphi)}\left\{\frac{b_0(1+\varphi)}{1-c_1+\varphi} - \frac{M_0}{d_1}\left[\frac{(1+\varphi)\,\tilde{m}^2 - (1+\varphi)\,c_1(1+v)\,\tilde{m} + (1+\varphi)\,v\,c_1}{(1+\varphi)\,\tilde{m}^2 - c_1(1+v)\,\tilde{m} + v\,c_1}\right]\tilde{m}^t\right\} =$$

$$= -\frac{\varphi}{b_2(1+\varphi)}\left\{\frac{b_0(1+\varphi)}{1-c_1+\varphi} - \frac{M_0}{d_1}\left[\frac{\tilde{m}^2 - c_1(1+v)\,\tilde{m} + v\,c_1}{\tilde{m}^2 - \frac{c_1(1+v)}{1+\varphi}\,\tilde{m} + \frac{v\,c_1}{1+\varphi}}\right]\tilde{m}^t\right\} =$$

$$= -\frac{\varphi}{b_2}\frac{b_0}{1-c_1+\varphi} + \frac{\varphi}{1+\varphi}\frac{M_0}{b_2 d_1}\frac{\tilde{m}^2 + \eta_3\,\tilde{m} + \eta_4}{\tilde{m}^2 + \delta_1\tilde{m} + \delta_0}\,\tilde{m}^t =$$

$$= -\frac{\varphi}{b_2}\frac{b_0}{1-c_1+\varphi} + \frac{1}{1+\varphi}\frac{M_0}{d_2}\frac{P_{12}(\tilde{m})}{P_6(\tilde{m})}\,\tilde{m}^t \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad E_{t-1}\left(\overline{\Delta R}_t\right) = \Omega_6 + \Omega_{11}\,\Omega_{12}\,\tilde{m}^t \qquad \textbf{\textit{(H.1)}}$$

όπου $\Omega_6 = -\frac{\varphi}{b_2}\frac{b_0}{1-c_1+\varphi} > 0$, $\Omega_{11} = \frac{1}{1+\varphi}\frac{M_0}{d_2} < 0$, $\Omega_{12} = \frac{P_{12}(\tilde{m})}{P_6(\tilde{m})}$ με $P_{12}(\tilde{m}) =$

$= \tilde{m}^2 + \eta_3\,\tilde{m} + \eta_4$ και $P_6(\tilde{m}) = \tilde{m}^2 + \delta_1\tilde{m} + \delta_0 \neq 0$

Δεδομένου ότι $\Omega_6 > 0$ και $\Omega_{11} < 0$, το πρόσημο της επιτοκιακής διαφοράς ισορροπίας αποτελεί συνάρτηση του χρόνου και του προσήμου του όρου Ω_{12}, το οποίο με τη σειρά του επηρεάζεται από το πρόσημο των πολυωνύμων[68] $P_6(\tilde{m})$ & $P_{12}(\tilde{m})$. Με βάση το πρόσημο των πολυωνύμων $P_6(\tilde{m})$ και $P_{12}(\tilde{m})$ θα διακρίνουμε στη συνέχεια μεταξύ των παρακάτω τριών περιπτώσεων:

<u>1η Περίπτωση</u>: $P_{12}(\tilde{m}) = 0$

Στην περίπτωση που το πολυώνυμο $P_{12}(\tilde{m})$ ισούται με το μηδέν η σχέση (Η.1) παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$E_{t-1}\left(\overline{\Delta R}_t\right)\Big|_{P_{12}(\tilde{m})=0} = \Omega_6 > 0 \qquad \textbf{\textit{(H.2)}}$$

[68] Το πρόσημο του πρώτου πολυωνύμου διερευνάται στα πλαίσια των παραγράφων 5.2.1 και 5.2.2 ενώ το πρόσημο του δεύτερου πολυωνύμου διερευνάται στα πλαίσια του έβδομου παραρτήματος.

Με άλλα λόγια ***στην περίπτωση που ισχύει ότι $P_{12}(\tilde{m}) = 0$, η προσδοκώμενη επιτοκιακή διαφορά ισορροπίας θα αποτελεί διαχρονικά ένα σταθερό και θετικά ορισμένο μέγεθος.***

<u>2η Περίπτωση</u>: $P_{12}(\tilde{m}) > (<) 0$ & $P_6(\tilde{m}) > (<) 0$

Εάν τα δύο πολυώνυμα $P_6(\tilde{m})$ και $P_{12}(\tilde{m})$ είναι ομόσημα, ο όρος Ω_{12} θα είναι θετικά ορισμένος. Ως εκ τούτου το πρόσημο της προσδοκώμενης επιτοκιακής διαφοράς ισορροπίας θα αποτελεί συνάρτηση του χρόνου και θα προσδιορίζεται με τη βοήθεια της ακόλουθης σχέσης:

$$\begin{cases} E_{t-1}\left(\overline{\Delta R_t}\right) > 0 & \forall \quad t < \Omega_{13} \\ E_{t-1}\left(\overline{\Delta R_t}\right) = 0 & \text{για} \quad t = \Omega_{13} \\ E_{t-1}\left(\overline{\Delta R_t}\right) < 0 & \forall \quad t > \Omega_{13} \end{cases} \qquad (H.3)$$

όπου $\Omega_{13} = \dfrac{\ln(\Omega_6/\Omega_{12}) - \ln(-\Omega_{11})}{\ln(\tilde{m})}$.

Σύμφωνα με την παραπάνω σχέση, ***η προσδοκώμενη επιτοκιακή διαφορά ισορροπίας θα είναι θετικά ορισμένη στο χρονικό διάστημα $[0, \Omega_{13})$, θα μηδενίζεται όταν $t = \Omega_{13}$ και θα ορίζεται αρνητικά στο διάστημα $(\Omega_{13}, +\infty)$***.

<u>3η Περίπτωση</u>: $P_{12}(\tilde{m}) > (<) 0$ & $P_6(\tilde{m}) < (>) 0$

Εάν τα πολυώνυμα $P_6(\tilde{m})$ και $P_{12}(\tilde{m})$ είναι ετερόσημα ο όρος Ω_{12} θα είναι αρνητικά ορισμένος ενώ το γινόμενο των όρων Ω_{11} Ω_{12} θα αποτελεί ένα θετικό μέγεθος. Βάσει λοιπόν της σχέσης (Η.1), ***στην περίπτωση που τα πολυώνυμα $P_6(\tilde{m})$ και $P_{12}(\tilde{m})$ είναι ετερόσημα η προσδοκώμενη επιτοκιακή διαφορά ισορροπίας θα συνιστά διαχρονικά ένα θετικό μέγεθος***.

Η διερεύνηση του προσήμου της προσδοκώμενης επιτοκιακής διαφοράς ισορροπίας απλοποιείται στην περίπτωση που οι αυτόνομες επενδύσεις είναι ίσες με το μηδέν. Στην ειδική αυτή περίπτωση θα ισχύει ότι $\Omega_6 = 0$ και ***η προσδοκώμενη επιτοκιακή διαφορά ισορροπίας θα συνιστά διαχρονικά ένα θετικό (αρνητικό) μέγεθος εφόσον οι όροι Ω_{11} και Ω_{12} είναι ετερόσημοι (ομόσημοι). Εάν και ο όρος Ω_{12} ισούται με το μηδέν, εάν δηλαδή ισχύει ότι $P_{12}(\tilde{m}) = 0$, η προσδοκώμενη επιτοκιακή διαφορά ισορροπίας θα ισούται με το μηδέν.***

Παράρτημα Θ

Στα πλαίσια της παραγράφου (5.3) θεωρήσαμε ότι η βραχυχρόνια τιμή ισορροπίας της επιτοκιακής διαφοράς αποτελούσε ένα σταθερό και απροσδιόριστου προσήμου μέγεθος. Η συναρτησιακή μορφή της σχέσης βάσει της οποίας προσδιορίζεται το μέγεθος αυτό, προκύπτει από το συνδυασμό των σχέσεων (5.190) και (5.226). Δεδομένου ότι σε κατάσταση ισορροπίας θα ισχύει ότι $\Delta R_t = \overline{\Delta R}$ και $Y_t = \widetilde{Y}_t^{re}$, από τη σχέση (5.190) προκύπτει ότι:

$$\Delta R_t = \frac{M_0(1+m)^{t+1}}{d_2\omega_2} - \frac{d_1}{d_2\omega_2}Y_{t+1} - \frac{\theta_2\,\overline{\Delta R}}{\omega_2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \overline{\Delta R} = \frac{M_0(1+m)^{t+1}}{d_2\omega_2} - \frac{d_1}{d_2\omega_2}\widetilde{Y}_{t+1}^{re} - \frac{\theta_2\,\overline{\Delta R}}{\omega_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{\theta_2}{\omega_2}\right)\overline{\Delta R} = \frac{M_0\widetilde{m}^{t+1}}{d_2\omega_2} -$$

$$-\frac{d_1}{d_2\omega_2}\frac{b_0 + b_2(1-\omega)\overline{\Delta R}}{1-c_1+\varphi\omega} - \frac{d_1}{d_2\omega_2}\frac{\varphi\omega}{d_1(1+\varphi\omega)}\frac{M_0\widetilde{m}^{t+3}}{\widetilde{m}^2+\zeta_1\widetilde{m}+\zeta_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{\theta_2}{\omega_2}\right)\overline{\Delta R} = -\frac{b_0\varphi}{b_2\omega_2(1-c_1+\varphi\omega)} - \frac{\varphi(1-\omega)\overline{\Delta R}}{\omega_2(1-c_1+\varphi\omega)} + \frac{M_0\widetilde{m}^{t+1}}{d_2\omega_2}\left[1-\frac{\varphi\omega}{1+\varphi\omega}\frac{\widetilde{m}^2}{P_8(\widetilde{m})}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[1+\frac{\theta_2}{\omega_2}+\frac{\varphi(1-\omega)}{\omega_2(1-c_1+\varphi\omega)}\right]\overline{\Delta R} = -\frac{b_0\varphi}{b_2\omega_2(1-c_1+\varphi\omega)} +$$

$$+\frac{M_0\widetilde{m}^{t+1}}{d_2\omega_2}\left[\frac{(1+\varphi\omega)\,\widetilde{m}^2 - c_1(1+v)\,\widetilde{m} + vc_1 - \varphi\omega\,\widetilde{m}^2}{(1+\varphi\omega)\,P_8(\widetilde{m})}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\frac{1-\theta_2+\theta_2}{\omega_2}+\frac{\varphi(1-\omega)}{\omega_2(1-c_1+\varphi\omega)}\right]\overline{\Delta R} = -\frac{b_0\varphi}{b_2\omega_2(1-c_1+\varphi\omega)} +$$

$$+\frac{M_0\widetilde{m}^{t+1}}{d_2\omega_2}\left[\frac{\widetilde{m}^2 - c_1(1+v)\,\widetilde{m} + vc_1}{(1+\varphi\omega)\,P_8(\widetilde{m})}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\omega_2}\left[\frac{1-c_1+\varphi\omega+\ \varphi\left(1-\omega\right)}{1-c_1+\varphi\omega}\right]\overline{\Delta R}=-\frac{b_0\varphi}{b_2\omega_2(1-c_1+\varphi\omega)}+\frac{M_0\tilde{m}^{t+1}}{d_2\omega_2}\left[\frac{\tilde{m}^2+\eta_3\ \tilde{m}+\eta_4}{(1+\varphi\omega)\,P_8(\tilde{m})}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1-c_1+\varphi}{\omega_2(1-c_1+\varphi\omega)}\overline{\Delta R}=-\frac{b_0\varphi}{b_2\omega_2(1-c_1+\varphi\omega)}+\frac{M_0\tilde{m}^{t+1}}{d_2\omega_2}\left[\frac{P_{12}(\tilde{m})}{(1+\varphi\omega)\,P_8(\tilde{m})}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \overline{\Delta R}=-\frac{b_0\varphi}{b_2(1-c_1+\varphi)}+\frac{1-c_1+\varphi\omega}{d_2(1-c_1+\varphi)}\,\frac{M_0}{1+\varphi\omega}\,\frac{P_{12}(\tilde{m})}{P_8(\tilde{m})}\,\tilde{m}^{t+1} \qquad \textbf{\textit{(Θ.1)}}$$

όπου $P_8(\tilde{m})=\tilde{m}^2+\zeta_1\tilde{m}+\zeta_0$, $P_{12}(\tilde{m})=\tilde{m}^2+\eta_3\tilde{m}+\eta_4$ με

$$\zeta_1=-\frac{c_1(1+v)}{1+\varphi\omega}\ ,\ \zeta_0=\frac{vc_1}{1+\varphi\omega}\ ,\ \eta_3=-c_1(1+v)\ \&\ \eta_4=vc_1$$

Όπως προκύπτει από την παραπάνω σχέση, η επιτοκιακή διαφορά ισορροπίας θα αποτελεί ένα σταθερό μέγεθος, θα είναι δηλαδή ανεξάρτητη του χρόνου, εφόσον ισχύει ότι $P_{12}(\tilde{m})=0$. Οι προϋποθέσεις που θα πρέπει να ικανοποιούνται προκειμένου να ισχύει κάτι τέτοιο διερευνώνται στα πλαίσια του έβδομου παραρτήματος. Γίνεται λοιπόν φανερό ότι σ' αυτή την περίπτωση η επιτοκιακή διαφορά ισορροπίας θα αποτελεί ένα σταθερό, και επιπροσθέτως θετικό, μέγεθος η αριθμητική τιμή του οποίου θα προσδιορίζεται με τη βοήθεια της ακόλουθης σχέσης:

$$\overline{\Delta R}\Big|_{P_{12}(\tilde{m})=0}=-\frac{b_0\varphi}{b_2(1-c_1+\varphi)}>0 \qquad \textbf{\textit{(Θ.2)}}$$

Στην ειδική περίπτωση που και οι αυτόνομες επενδύσεις είναι μηδενικές ($b_0 = 0$), η επιτοκιακή διαφορά ισορροπίας θα ισούται με το μηδέν, θα έχουμε δηλαδή ότι:

$$\overline{\Delta R}\Big|_{P_{12}(\tilde{m})=\,b_0=0}=0 \qquad \textbf{\textit{(Θ.3)}}$$

Ένα ερώτημα που τίθεται εδώ έχει να κάνει με τις επιπτώσεις της εξάρτησης της επιτοκιακής διαφοράς ισορροπίας από το χρόνο. Η πρώτη επίπτωση σχετίζεται με τη συναρτησιακή μορφή του εισοδήματος ισορροπίας η οποίο προκύπτει στα πλαίσια του μηχανισμού των παλινδρομικών προσδοκιών. Σχετίζεται δηλαδή με τη μορφή της μερικής λύσης της βασικής εξίσωσης διαφορών του υποδείγματος.

Αν βάσει της σχέσης (5.191) κινηθούμε δύο περιόδους προς τα πίσω και θέσουμε όπου $P_{12}(\tilde{m}) = b_0 = \left(\overline{\Delta R} =\right)0$, παίρνουμε την ακόλουθη τροποποιημένη μορφή της βασικής εξίσωσης διαφορών:

$$Y_t + \zeta_1 Y_{t-1} + \zeta_0 Y_{t-2} = \Gamma_t \qquad \textbf{\textit{(Θ.4)}}$$

όπου $\Gamma_t = \dfrac{b_0 + b_2(1-\omega)\overline{\Delta R}_t}{1+\varphi\omega} + \dfrac{\varphi\omega}{d_1(1+\varphi\omega)} M_0 (1+m)^t$

Η μερική λύση της παραπάνω δευτεροβάθμιας εξίσωσης διαφορών με σταθερούς συντελεστές, η οποία προκύπτει με τη χρήση των τελεστών της προς τα πίσω (L) και προς τα εμπρός μετατόπισης $\left(F = L^{-1}\right)$, έχει ως ακολούθως:

$$Y_t + \zeta_1 Y_{t-1} + \zeta_0 Y_{t-2} = \Gamma_t \Rightarrow \left(1 + \zeta_1 L + \zeta_0 L^2\right) Y_t = \Gamma_t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad L^2\left(F^2 + \zeta_1 F + \zeta_0\right) Y_t = \Gamma_t \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \overline{Y}_t = \frac{\Gamma_t}{L^2(F^2 + \zeta_1 F + \zeta_0)} \qquad \textbf{\textit{(Θ.5)}}$$

Όπως διαπιστώνουμε, το ευρισκόμενο εντός της παρενθέσεως μέγεθος που εντοπίζεται στον παρονομαστή του κλάσματος της σχέσης (Θ.5), αποτελεί ένα πολυώνυμο δευτέρου βαθμού ως προς τον τελεστή F. Δεδομένου ότι το πολυώνυμο $F^2 + \zeta_1 F + \zeta_0$ είναι ακριβώς της ίδιας μορφής με εκείνη του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, το οποίο προσδιορίσαμε στα πλαίσια της παραγράφου 5.3.1. Αν λοιπόν υποθέσουμε ότι οι λ_1 και λ_2 συνιστούν δύο διακριτές ρίζες της εξίσωσης $F^2 + \zeta_1 F + \zeta_0 = 0$ και ότι $\lambda_i \in (-1, 1)$, $i = 1, 2$, η σχέση (Θ.5) θα μπορούσε να τροποποιηθεί ως ακολούθως:

$$\overline{Y}_t = \frac{\Gamma_t}{L^2(F^2 + \zeta_1 F + \zeta_0)} = \frac{\Gamma_t}{L^2(F-\lambda_1)(F-\lambda_2)} = \frac{1}{(1-\lambda_1 L)(1-\lambda_2 L)} \Gamma_t =$$

$$= \frac{\dfrac{\lambda_1 - \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2 - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}}{(1-\lambda_1 L)(1-\lambda_2 L)} \Gamma_t = \frac{\dfrac{\lambda_1(1-\lambda_2) - \lambda_2(1-\lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_2}}{(1-\lambda_1 L)(1-\lambda_2 L)} \Gamma_t \qquad =$$

$$= \frac{\dfrac{\lambda_1(1-\lambda_2 L)-\lambda_2(1-\lambda_1 L)}{\lambda_1-\lambda_2}}{(1-\lambda_1 L)(1-\lambda_2 L)}\Gamma_t = \frac{\dfrac{\lambda_1(1-\lambda_2 L)}{\lambda_1-\lambda_2}+\dfrac{-\lambda_2(1-\lambda_1 L)}{\lambda_1-\lambda_2}}{(1-\lambda_1 L)(1-\lambda_2 L)}\Gamma_t =$$

$$= \left(\frac{\dfrac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}}{1-\lambda_1 L}+\frac{\dfrac{-\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}}{1-\lambda_2 L}\right)\Gamma_t = \left(\frac{\xi_1}{1-\lambda_1 L}+\frac{\xi_2}{1-\lambda_2 L}\right)\Gamma_t =$$

$$= \left[\xi_1 \sum_{j=0}^{+\infty}(\lambda_1 L)^j + \xi_2 \sum_{j=0}^{+\infty}(\lambda_2 L)^j\right]\Gamma_t = \sum_{i=1}^{2}\xi_i \sum_{j=0}^{+\infty}\left(\lambda_i^j L^j \Gamma_t\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \overline{Y}_t = \sum_{i=1}^{2}\xi_i \sum_{j=0}^{+\infty}\lambda_i^j \Gamma_{t-j} \qquad \textbf{\textit{(Θ.6)}}$$

όπου: $\xi_1 = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}$ & $\xi_2 = \dfrac{-\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}$

Στην περίπτωση που οι ρίζες της εξίσωσης $F^2+\zeta_1 F+\zeta_0 = 0$ δεν είναι διακριτές αλλά ίσες, στην περίπτωση δηλαδή που ισχύει ότι $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, η μερική λύση της εξίσωσης διαφορών (Θ.4) θα έχει την ακόλουθη μορφή[69]:

$$\overline{Y}_t = \sum_{j=0}^{+\infty}(j+1)\lambda^j \Gamma_{t-j} \qquad \textbf{\textit{(Θ.7)}}$$

Η μορφή της συνάρτησης που περιγράφει την εξέλιξη της επιτοκιακής διαφοράς ισορροπίας με το πέρασμα του χρόνου μπορεί να προσδιορισθεί συνδυάζοντας κατάλληλα τις σχέσεις (5.190) και (Θ.5), έχοντας υπόψη ότι σε κατάσταση ισορροπίας θα ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις: $\Delta R_t = \overline{\Delta R}_t$, $\overline{\Delta R} = \overline{\Delta R}_t$ και $Y_t = \overline{Y}_t$. Ειδικότερα:

$$\Delta R_t = \frac{M_0 \tilde{m}^{t+1}}{d_2\omega_2} - \frac{\varphi}{b_2\omega_2}Y_{t+1} - \frac{\theta_2\,\overline{\Delta R}}{\omega_2} \rightarrow \overline{\Delta R}_t = \frac{M_0 \tilde{m}^{t+1}}{d_2\omega_2} - \frac{\varphi}{b_2\omega_2}\overline{Y}_{t+1} - \frac{\theta_2\,\overline{\Delta R}_t}{\omega_2} \overset{(\Theta.5)}{\Rightarrow}$$

---

[69] Για τον ακριβή τρόπο προσδιορισμού της συγκεκριμένης αυτής μορφής της μερικής λύσης βλέπε Gandolfo G. (1997), *Economic Dynamics* , Study Edition, Springer – Verlag, Berlin, ch. 5, § 5.2.1, pp. 61 – 62.

$$\Rightarrow \left(1+\frac{\theta_2}{\omega_2}\right)\overline{\Delta R}_t = \frac{M_0\tilde{m}^{t+1}}{d_2\omega_2} - \frac{\varphi}{b_2\omega_2}\frac{\Gamma_{t+1}}{L^2(F^2+\zeta_1 F+\zeta_0)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\omega_2}\overline{\Delta R}_t = \frac{M_0\tilde{m}^{t+1}}{d_2\omega_2} - \frac{\varphi}{b_2\omega_2}\frac{\Gamma_{t+1}}{1+\zeta_1 L+\zeta_0 L^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{\Delta R}_t = \frac{M_0\tilde{m}^{t+1}}{d_2} - \frac{\varphi}{b_2}\frac{1}{1+\zeta_1+\zeta_0}\left[\frac{b_0+b_2(1-\omega)\overline{\Delta R}_{t+1}}{1+\varphi\omega} + \frac{\varphi\omega}{d_1(1+\varphi\omega)}M_0\tilde{m}^{t+1}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{\Delta R}_t = \frac{M_0\tilde{m}^{t+1}}{d_2} - \frac{\varphi}{b_2}\frac{1+\varphi\omega}{1-c_1+\varphi\omega}\left[\frac{b_0+b_2(1-\omega)\overline{\Delta R}_{t+1}}{1+\varphi\omega} + \frac{\varphi\omega}{d_1(1+\varphi\omega)}M_0\tilde{m}^{t+1}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\varphi(1-\omega)}{1-c_1+\varphi\omega}\overline{\Delta R}_{t+1} + \overline{\Delta R}_t = -\frac{\varphi}{b_2}\frac{b_0}{1-c_1+\varphi\omega} + \frac{M_0\tilde{m}^{t+1}}{d_2} - \frac{\varphi\omega}{1-c_1+\varphi\omega}\frac{M_0\tilde{m}^{t+1}}{d_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{\Delta R}_{t+1} + \frac{1-c_1+\varphi\omega}{\varphi(1-\omega)}\overline{\Delta R}_t = -\frac{b_0}{b_2(1-\omega)} + \frac{1-c_1+\varphi\omega}{\varphi(1-\omega)}\left(1-\frac{\varphi\omega}{1-c_1+\varphi\omega}\right)\frac{M_0\tilde{m}^{t+1}}{d_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[F+\frac{1-c_1+\varphi\omega}{\varphi(1-\omega)}\right]\overline{\Delta R}_t = -\frac{b_0}{b_2(1-\omega)} + \frac{1-c_1}{\varphi(1-\omega)}\frac{M_0\tilde{m}^{t+1}}{d_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\frac{1}{L}+\frac{1-c_1+\varphi\omega}{\varphi(1-\omega)}\right]\overline{\Delta R}_t = -\frac{b_0}{b_2(1-\omega)} + \frac{1-c_1}{\varphi(1-\omega)}\frac{M_0\tilde{m}^{t+1}}{d_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{\Delta R}_t = \frac{\varphi(1-\omega)L}{\varphi(1-\omega)+(1-c_1+\varphi\omega)L}\left[-\frac{b_0}{b_2(1-\omega)} + \frac{1-c_1}{\varphi(1-\omega)}\frac{M_0\tilde{m}^{t+1}}{d_2}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{\Delta R}_t = -\frac{b_0}{b_2}\frac{\varphi}{1-c_1+\varphi} + \frac{1-c_1}{\varphi(1-\omega)}\frac{\varphi(1-\omega)L}{\varphi(1-\omega)+(1-c_1+\varphi\omega)L}\frac{M_0\tilde{m}^{t+1}}{d_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \overline{\Delta R}_t = -\frac{b_0}{b_2}\frac{\varphi}{1-c_1+\varphi} + \frac{1-c_1}{1-c_1+\varphi}\frac{M_0\tilde{m}^{t}}{d_2} \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \overline{\Delta R}_t = \Omega_6 + \Omega_{11}\,\Omega_8\,\tilde{m}^t \qquad \textbf{\textit{(Θ.8)}}$$

όπου $\Omega_6 = -\frac{b_0}{b_2}\frac{\varphi}{1-c_1+\varphi} > 0$, $\Omega_8 = \frac{M_0}{d_2} < 0$ και $\Omega_{11} = \frac{1-c_1}{1-c_1+\varphi} > 0$.

Όπως προκύπτει από την παραπάνω σχέση η επιτοκιακή διαφορά ισορροπίας αποτελεί συνάρτηση του χρόνου και το πρόσημό της προσδιορίζεται με τη βοήθεια της ακόλουθης σχέσης:

$$\begin{cases} \overline{\Delta R}_t < 0 \quad \forall \quad t < \Omega_{12} \\ \overline{\Delta R}_t = 0 \quad \text{για} \quad t = \Omega_{12} \\ \overline{\Delta R}_t > 0 \quad \forall \quad t > \Omega_{12} \end{cases} \qquad \textbf{\textit{(Θ.9)}}$$

όπου $\Omega_{12} = \frac{\ln(\Omega_6/\Omega_{11}) - \ln(-\Omega_8)}{\ln(\tilde{m})}$

Αξίζει να παρατηρήσουμε στο σημείο αυτό ότι η επιτοκιακή διαφορά ισορροπίας θα αποτελεί διαχρονικά ένα αρνητικά μέγεθος στην ειδική περίπτωση που οι αυτόνομες επενδύσεις είναι μηδενικές ($b_0 = 0$).

Βιβλιογραφία

- Abel, A. B. (1980), "Empirical Investment Equations: An Interactive Framework," in Karl Brunner and Allan H. Meltzer eds., pp. 39 ~ 92.

- Akerlof, G. A. & Milbourne, R. D. (1980), "The Sort – Run Demand for Money," *Economic Journal*, 90 , pp. 885 ~ 900.

- Alexander, S. S. (1951), "Issues of Business Cycle Theory Raised by Mr. Hicks," *The American Economic Review*, 41 , 5 , pp. 861 ~ 878.

- Allen, R. G. D. (1959), *Mathematical Economics*, London: Macmillan.

- Allen, R. G. D. (1968), *Macro – Economic Theory: A Mathematical Treatment*, N.Y.: MacMillan.

- Απέργης, Ν. (2002), *Ειδικά Θέματα Μακροοικονομικής Ανάλυσης. Η Θεωρία των Ορθολογικών Προσδοκιών*, εκδόσεις Ανίκουλα.

- Arrow, K. (1971), "The Theory of Risk Aversion," in *Essays in the Theory of Risk Bearing*, K. Arrow eds., Chicago: Markham.

- Asimakopoulos A. (1991), *Keynes's General Theory and Accumulation*, Cambridge University Press.

- Attfield, C. L. F.; Demery, D. & Duck, N.W. (1991), *Rational Expectations in Macroeconomics*, 2nd edition, Oxford: Blackwell.

- Baily, M. N.; Phelps, E. S. & Poole, W. (1976), "Rational Expectations in the Macro Model," *Brookings Papers on Economic Activity*, vol. 1976 , 2 , pp. 463 ~ 514.

- Ball, L. & Romer, D. (1987), "Sticky Prices as Coordination Failure," NBER Working Paper No. 2327.

- Ball, R. L. & Smolensky, E. (1961), "The Structure of Multiplier – Accelerator Models of the United States Economy, 1909 – 1951," *International Economic Review*, 2 , 3 , pp. 294 ~ 329.

- Βαρελάς, Ε. (2000), *Ειδικά Θέματα Νομισματικής Θεωρίας*, εκδόσεις Μπένου.

- Βαρελάς, Ε. & Καρπέτης, Χ. (2004), "Η Αλληλεπίδραση Πολλαπλασιαστή – Επιταχυντή Υπό Καθεστώς Σταθερής Νομισματικής Επέκτασης," *Επιστημονική επιτηρίδα Πανεπιστημίου Πειραιώς προς τιμήν του Καθηγητή Θ. Σκούντζου*, υπό έκδοση.

- Barro, R.J. (1970), "Inflation, the Payments Period, and the Demand for Money," *Journal of Political Economy*, 78 , pp. 1228 ~ 1263.

- Barro, R. J. (1976), "Rational Expectations and the Role of Monetary Policy," *Journal of Monetary Economics*, 2 , 1 , pp. 1 ~ 32.

- Barro, R. J. (1981a), *Money, Expectations and Business Cycles*, N.Y.: Academic Press.

- Barro, R. J. (1981b), "The Equilibrium Approach to Business Cycles," in *Money, Expectations and Business Cycles*, ed: Robert J. Barro, N.Y.: Academic Press.

- Barro, R. J. & Fischer, S. (1976), "Recent Developments in Monetary Theory," *Journal of Monetary Economics*, 2 , 2 , pp. 133 ~ 167.

- Baumol, W. J. (1952), "The Transaction Demand for Cash: An Inventory Theoretic Approach," *Quarterly Journal of Economics*, 66 , pp. 545 ~ 556.

- Begg, D. K. H. (1982), *The Rational Expectations Revolution in Macroeconomics: Theories and Evidence*, Baltimore: John Hopkins University Press.

- Benassy, J. P. (1974), *NeoKeynesian Disequilibrium Theory in a Monetary Economy*, unpublished.

- Bernanke, B. S. & Blinder, A. (1992), "The Federal Funds Rate and the Channels of Monetary Transmission," *American Economic Review*, 82 , 4 , pp. 901 ~ 921.

- Biederman, D. (1993), "Permanent Income and Long – Run Stability in the Generalized Multiplier/Accelerator Model," *Journal of Macroeconomics*, 15, pp. 249 ~ 272.

- Bierens, H. J. (2001), "Complex Unit Roots and Business Cycles: Are They Real?" *Econometric Theory*, 17 , 5 , pp. 962 ~ 983.

- Bischoff, C. W. (1971), "Business Investment in the 1970s: A Comparison of Models," *Brookings Papers of Economic Activities*, 1 , pp. 13 ~ 58.

- Blanchard, O. J. (1989), "A Traditional Interpretation of Economic Fluctuations," *American Economic Review*, 79 , 5 , pp. 1146 ~ 1164.

- Blanchard, O. J. (1990), "Why does Money Affect Output? A Survey," in Friedman B.M. & Hahn F.H. ed., *Handbook of Monetary Economics*, 2 , N.Y.: North Holland, pp. 778 ~ 835.

- Blanchard, O. J. & Kahn, C. M. (1980), "The Solution of Linear Difference Models Under Rational Expectations," *Econometrica*, 48, pp. 1305 ~ 1317.

- Bober, S. (1968), *The Economics of Cycles and Growth*, N.Y.: John Wiley and Sons.

- Bray M. M. and Savin N. E. (1986), "Rational Expectations Equilibria, Learning and Model Specification," *Econometrica*, 54 , 5 , pp. 1129 ~ 1160.

- Brock, W. A. (1974), "Money and Growth: The Case of the Long – Run Perfect Foresight," *International Economic Review*, 15 , pp. 750 ~ 777.

- Brock, W. A. (1975), "A Simple Perfect Foresight Monetary Model," *Journal of Monetary Economics*, 1 , 2 , pp. 133 ~ 150.

- Bronfenbrenner, M. (1969), *Is the Business Cycle Obsolete?* , N.Y.: John Wiley and Sons.

- Brunner, K. & Meltzer, A. H. (1968), "Liquidity Traps for Money, Bank Credit and Interest Rates," *Journal of Political Economy*, 76 , 1 , pp. 1 ~ 37.

- Brunner, K. & Meltzer, A. H. (1976), "An Aggregate Theory of for a Closed Economy," in *Monetarism*, Stein J. ed., N.Y.: North – Holland.

- Caff, J. T. (1961), "A Generalization of the Multiplier – Accelerator Model," *The Economic Journal*, 71 , 281 , pp. 36 ~ 52.

- Cagan, P. (1956), "The Monetary Dynamics of Hyperinflation," in *Studies in the Quantity Theory of Money*, ed: Milton Friedman, Chicago University Press, pp. 25 ~ 117.

- Campbell, J. Y. & Mankiw, N. G. (1987), "Are Output Fluctuations Transitory?" *Quarterly Journal of Economics*, 102 , pp. 857 ~ 880.

- Canzoneri, M. (1985), "Monetary Policy Games and the Role of Private Information" *American Economic Review*, 75 , 4 , pp. 1056 ~ 1070.

- Carlstrom, C. T. & Fuerst, T. S. (1997), *Interest Rates Rules in a Model with Sticky Prices*, Federal Reserve Bank of Cleveland.

- Chiang, A. C. (1984), *Fundamental Methods of Mathematical Economics*, Singapore: McGraw – Hill.

- Christiano, L. F. & Eichenbaum, M. (1992), "Liquidity Effects and the Monetary Transmission Mechanism," *American Economic Review*, 82 , 2 , pp. 346 ~ 353.

- Clarida, R.; Gali, J. & Gertler, M. (1999), "The Science of Monetary Policy: A New Keynesian Perspective," *Journal of Economic Literature*, 37, pp. 1661 ~ 1707.

- Cogley, T. F. & Nason, J. M. (1995), "Output Dynamics in Real Business Cycles Models," *American Economic Review*, 85 , pp. 492 ~ 511.

- Coleman, W. J. (1996), "Money and Output: A Test of Reverse Causation," *American Economic Review*, 86 , 1 , pp. 90 ~ 111.

- Collard, D. (1996), "Pigou and Modern Business Cycle Theory," *The Economic Journal*, 106 , 437 , pp. 912 ~ 924.

- Crooke, P. S. & Huang C. J. (1997), *Mathematics and Mathematica for Economists*, Blackwell Publishers.

- Crotty, J. R. (1992), "Neoclassical and Keynesian Approaches to the Theory of Investment," *Journal of Post Keynesian Economics*, 14 , pp. 483 ~ 495.

- D' Autume, A. (1990), "On the Solution of Linear Difference Equations with Rational Expectations," *Review of Economic Studies*, 57, pp. 677 ~ 688.

- Dornbush, R. (1976), "Expectations and Exchange Rate Dynamics," *Journal of Political Economy*, 84 , pp. 1161 ~ 1176.

- Dornbusch, R. & Fischer, S. (1993), *Macroeconomics*, 8th edition, McGraw - Hill.

- Dowling, E. T. (1992), *Introduction to Mathematical Economics*, 3rd edition, Schaum's Outline Series, McGraw – Hill.

- Drazen, A. (1980), "Recent Developments in Macroeconomic Disequilibrium Theory," *Econometrica*, 48 , 2 , pp. 283 ~ 306.

- Duesenberry, J. S. (1949), *Income, Saving and the Theory of Consumer Behavior*, Harvard University Press.

- Duesenberry, J. S. (1958), *Business Cycles and Economic Growth*, N.Y.: McGraw – Hill.

- Drazen, A. (1980), "Recent Developments in Macroeconomic Disequilibrium Theory," *Econometrica*, 48 , 2 , pp. 283 ~ 306.

- Eichner, A. S. (1991), *The Macrodynamics of Advanced Market Economies*, Armonk, N.Y.: M. E. Sharpe.

- Evans, G. W. & Honkapohja, S. (2001), *Learning and Expectations in Macroeconomics*, Princeton University Press.

- Eckaus, R. S. (1953), "The Acceleration Principal Reconsidered," *The Quarterly Journal of Economics*, 67 , 2 , pp. 209 ~ 230.

- Fair, R. C. (1978), "A Criticism of One Class of Macroeconomic Models with Rational Expectations," *Journal of Money, Credit and Banking*, 10 , 4 , pp. 411 ~ 417.

- Fischer, S. (1972), "Keynes – Wicksell and Neoclassical Models of Money and Growth," *American Economic Review*, 62 , pp. 880 ~ 890.

- Fischer, S. (1975), *Long – Term Contracts, Rational Expectations and the Optimal Money Supply Rule*, unpublished.

- Fischer, S. (1988), "Recent Developments in Macroeconomics," *The Economic Journal*, 98, pp. 294 ~ 339.

- Fischer, S.; Greenwald, B.; Hall, R. E. & Stiglitz, J. E. (1987), "Examining Alternative Macroeconomic Theories," *Brookings Papers on Economic Activity*, vol. 1988, 1 , pp. 207 ~ 270.

- Frenkel, J. (1975), "Inflation and the Formation of Expectations," *Journal of Monetary Economics*, 1 , pp. 403 ~ 421.

- Friedman, B. M. (1970), "A Theoretical Framework for Monetary Analysis," *Journal of Political Economy*, 78 , pp. 193 ~ 238.

- Friedman, B. M. (1980), "Survey Evidence on the 'Rationality' of Interest Rate Expectations," *Journal of Monetary Economics*, 6 , 4 , pp. 453 ~ 465.

- Friedman, B. M. & Schwartz, A. J. (1963), "Money and Business Cycles," *The Review of Economics and Statistics*, 45 , 1 , pp. 32 ~ 64.

- Frydman, R. & Phelps, E. S. (1983), *Individual Forecasting and Aggregate Outcomes*, N.Y.: Cambridge University Press.

- Gandolfo, G. (1997), *Economic Dynamics*, Study Edition, Berlin: Springer – Verlag.

- Goldfeld, S. M. & Sichel D. E. (1990), "The Demand for Money, " in B. Friedman and F. Hahn (eds.), *The Handbook of Monetary Economics*, 1 , pp. 299 ~ 356, N.Y.: North – Holland.

- Goldman, S. (1972), "Hyperinflation and the Rate of Growth in the Money Supply," *Journal of Economic Theory*, 5 , pp. 250 ~ 257.

- Goodfriend, M. R. & King, R. G. (1997), "The New Neoclassical Synthesis and the Role of Monetary Policy," in *NBER Macroeconomics Annual*, Ben Bernanke and Julio Rotemberg eds.

- Goodwin, R. M. (1951), "The Non – Linear Accelerator and the Persistence of Business Cycles," *Econometrica*, 19 , 1 , pp. 1 ~ 17.

- Gordon, R. J. (1981), "Output Fluctuations and Gradual Price Adjustment," *Journal of Economic Literature*, 19 , 2 , pp. 493 ~ 530.

- Gourieroux, C.; Laffont, J. J. & Monfort, A. (1982), "Rational Expectations in Dynamic Linear Models: Analysis of the Solutions," *Econometrica*, 50, pp. 409 ~ 425.

- Greenwald, B. & Stiglitz, J. E. (1987a), "Money, Imperfect Information and Economic Fluctuations," NBER Working Paper No. 2188.

- Greenwald, B. & Stiglitz, J. E. (1987b), "Keynesian, New Keynesian and New Classical Economics," *Oxford Economic Papers*, 39 , pp. 119 ~ 132.

- Grossman, H. (1971), "Money, Interest and Prices in Market Disequilibrium," *Journal of Political Economy*, 79 , pp.943 ~ 961.

- Haberler, G. (1956), "Monetary and Real Factors Affecting Economic Stability: A Critique of Certain Tendencies in Modern Economic Theory," *Banca Naz. Lavoro Quart. Rev.*, 9 , pp. 85 ~ 99.

- Hadjimichalakis, M. (1971), "Money, Expectations and Dynamics – An Alternative View," *International Economic Review*, 12 , pp. 381 ~ 402.

- Hall, R. E. (1977), "Investment, Interest Rates and the Effects of Stabilization Policies," *Brookings Papers of Economic Activities*, 1 , pp. 61 ~ 103.

- Hall, R. E. (1980), "Labor Supply and Aggregate Fluctuations," in Karl Brunner and Allan H. Meltzer eds., pp. 7 ~ 33.

- Hall, R. E. (1986), "Market Structure and Macroeconomic Fluctuations," *Brookings Papers on Economic Activity*, 2 , pp. 285 ~ 338.

- Hall, R. E.; Sims, C. A.; Modigliani, F. & Brainard, W. (1977), *Brookings Papers on Economic Activity*, 1 , pp. 61 ~ 121.

- Hannsgen, G. (2004), "The Transmission Mechanism of Monetary Policy," *The Levy Economics Institute*, Working Paper No 412.

- Hansen, A. H. (1952), "Towards a Dynamic Theory of the Cycle," *The American Economic Review*, 42 , 2 , Papers and Proceedings of the Sixty – fourth Annual Meeting of the American Economic Association, pp. 74 ~ 83.

- Hansen, L. P. & Sargent, T. J. (1979), *Formulating and Estimating Dynamic Linear Rational Expectations Models*, unpublished, Federal Reserve Bank of Minneapolis.

- Hicks, J. R. (1950), *A Contribution to the Theory of the Trade Cycle*, Oxford: Clarendon Press.

- Hicks, J. R. (1967), *Critical Essays in Monetary Theory*, Oxford: Oxford University Press.

- Hicks, J. R. (1974), "Real and Monetary Factors in Economic Fluctuations," *Scot. Journal of Political Economy*, 21 , 3 , pp. 205 ~ 214.

- Hicks, J. R. (1985), *Methods of Dynamics Economics*, Oxford: Clarendon.

- Hillinger, C. (1982), "Business Cycles are Alive and Well," *Economic Letters*, 9 , pp.133 ~ 137.

- Hillinger, C. (1992), *Cyclical Growth in Market and Planned Economies*, ed: Claude Hillinger, Oxford: Clarendon Press.

- Holden, K.; Peel, D. A. & Thompson, J. L. (1985), *Expectations: Theory and Evidence*, London: Macmillan.

- Johnson, H. (1962), "Monetary Theory and Policy," *American Economic Review*, 52 , pp. 335 ~ 384.

- Judd, J. P. & Scadding, J. (1982), "The Search for a Stable Money Demand Function," *Journal of Economic Literature*, 20 , 3 , pp. 993 ~ 1023.

- Kaldor, N. (1940), "A Model of the Trade Cycle," *Economic Journal*, 50 , 197 , pp. 78 ~ 92.

- Kalecki, M. (1935), "A Macroeconomic Theory of Business Cycle," *Econometrica*, 3 , pp. 327 ~ 344.

- Kalecki, M. (1968), *Theory of Economic Dynamics: An Essay on Cyclical and Long – Run Changes in Capitalist Economy*, N.Y.: Modern Readers Paperbacks.

- Καρπέτης, Χ. (2004), "Η Αλληλεπίδραση Πολλαπλασιαστή – Επιταχυντή υπό Καθεστώς Ορθολογικών Προσδοκιών και Σταθερής Νομισματικής Επέκτασης," *Επιστημονική επιτηρίδα Πανεπιστημίου Πειραιώς προς τιμήν του Καθηγητή Σ. Σαραντίδη*, υπό έκδοση.

- Καρφάκης, Κ. (1995), *Συναλλαγματικές Ισοτιμίες και Διεθνή Μακροοικονομικά*, εκδόσεις Σάκκουλα.

- Kenkel, J. L. (1974), *Dynamic Linear Economic Models*, Gordon & Breach Science Publishers.

- Keynes, J.M. (1936), *The General Theory of Employment, Interest and Money*, London: MacMillan.

- King, R. G. & Watson, M. W. (1996), "Money, Prices, Interest Rates and the Business Cycle," *Review of Economics and Statistics*, 78 , 1 , pp. 35 ~ 53.

- Kydland, F. & Prescott, E.C. (1982), "Time to Build and Aggregate Fluctuations," *Econometrica*, 50 , 6 , pp. 1345 ~ 1370.

- Kaskarelis, I. A. & Varelas, E. G. (1996), "Permanent Income and Credit Rationing in the Open Economy Multiplier/Accelerator Model: An Exercise for the Developing Countries Case," *Journal of Macroeconomics*, 18, pp. 531 ~ 549.

- Kenkel, J. L. (1974), *Dynamic Linear Economic Models*, Gordon and Breach Science Publishers.

- Kerr, W. & King, R. G. (1996), "Limits on Interest Rate Rules in the IS Model," *Econ. Quart.*, LXXXII , pp. 47 ~ 76.

- King, R. G. (1993), "Will the New Keynesian Macroeconomics Resurrect the IS–LM Model?", *The Journal of Economic of Economic Perspectives*, 7, pp. 67 ~ 82.

- Knox, A. D. (1950), "On a Theory of the Trade Cycle," *Economica*, New Series, 17 , 67 , pp. 317 ~ 327.

- Knox, A. D. (1952a), "The Acceleration Principle and the Theory of Investment: A Survay," *Economica*, 19 , pp. 269 ~ 297.

- Knox, A. D. (1952b), "The Acceleration Principle and the Theory of Investment: A Survey," *Economica*, New Series, 19 , 75 , pp. 269 ~ 297.

- Κυβεντίδης, Θ. (1997), *Εξισώσεις Διαφορών*, εκδόσεις Ζήτη.

- Laidler, D. (1968), "The Permanent Income Concept in a Macro–Economic Model," *Oxford Economic Papers*, 20, pp. 11 ~ 23.

- Laidler, D. (1973), "Expectations, Adjustment and the Dynamic Response of Income to Policy Changes," *Journal of Money, Credit and Banking*, 5 , 1 , pp. 157 ~ 172

- Laidler, D. (1982), *Monetarist Perspectives*, Oxford: Allan.

- Laidler, D. (1985), *The Demand for Money: Theory, Evidence, and Problems*, 3rd edition, N.Y.: Harper & Row.

- Leeper, E. M. (1991), "Equilibria Under 'Active' and 'Passive' Monetary and Fiscal Policies," *Journal of Monetary Economics*, 27 , pp. 129 ~ 147.

- Leijonhufvud, A. (1983), "Keynesianism, Monetarism and Rational Expectations: Some Reflections and Conjectures," in Roman Frydman and Edmund S. Phelps eds., pp. 203 ~ 223.

- Leslie, D. (1993), *Advanced Macroeconomics: Beyond IS/LM*, McGraw – Hill.

- Levy, H. & Lessman, F. (1992), *Finite Difference Equations*, N.Y.: Dover Publications.

- Litterman, R. B. & Weiss, L. (1985), "Money, Real Interest Rates and Output: A Reinterpretation of Postwar U.S. Date," *Econometrica*, 53 , 1 , pp. 129 ~ 156.

- Long, J. B. & Plosser, C. I. (1983), "Real Business Cycles," *Journal of Political Economy*, 91 , 1 , pp. 39 ~ 69.

- Lucas, R. E. (1972), "Expectations and the Neutrality of Money," *Journal of Economic Theory*, 4 , pp. 103 ~ 124.

- Lucas, R. E. (1975), "An Equilibrium Model of the Business Cycle," *Journal of Political Economy*, 83 , pp. 1113 ~ 1144.

- Lucas, R. E. (1987), *Models of Business Cycles*, Oxford: Basil Blackwell.

- Mankiw, N. G. (1985), "Small Menu Costs and Large Business Cycles: A Macroeconomic Model of Monopoly," *Quarterly Journal of Economics*, 100 , 2 , pp. 528 ~ 539.

- Mayer, T. (1958), "The Inflexibility of Monetary Policy," *The Review of Economics and Statistics*, 40 , 4 , pp. 358 ~ 374.

- McCallum, B. T. (1986), "On 'Real' and 'Sticky – Price' Theories of the Business Cycle," *Journal of Money, Credit and Banking*, 18 , 4 , pp. 397 ~ 414.

- McCallum, B. T. (1989), *Monetary Economics: Theory and Policy*, Macmillan Publishing Company.

- McCallum, B. T. & Nelson, E. (1997), "An Optimizing IS – LM Specification for Monetary Policy and Business Cycle Analysis," NBER Working Paper 5875.

- Metzler, L. A. (1941), "The Nature and Stability of Inventory Cycles," *Review of Economics and Statistics*, 23 , 3 , pp. 113 ~ 129.

- Miller, M. H. & Orr, D. (1966), "A Model of the Demand for Money by Firms," *Quarterly Journal of Economics*, 81 , 3 , pp. 413 ~ 435.

- Mincer, J. (1969), "Models of Adaptive Forecasting," in Jacob Mincer ed., pp. 83 ~ 111.

- Minsky, H. P. (1957), "Monetary Systems and Accelerator Models," *The American Economic Review*, 47, pp. 859 ~ 883.

- Minsky, H. P.; Okun, A. M. & Warburton, C. (1963), "Comments on Friedman's and Schwartz' Money and Business Cycles," *The Review of Economics and Statistics*, 45 , 1 , Supplement , pp. 64 ~ 78.

- Modigliani, F. (1944), "Liquidity Preference and the Theory of Interest and Money," *Econometrica*, 12 , pp. 45 ~ 88.

- Modigliani, F. (1977), "The Monetarist Controversy or, Should we Forsake Stabilization Policies?", *American Economic Review*, 67 , 2 , pp. 1 ~ 19.

- Modigliani, F. & Papademos, L. (1990), "The Supply of Money and the Control of Nominal Income," in *Handbook of Monetary Economics*, vol. 1, pp. 400 ~ 496.

- Moroney, J.,R. & Mason, J.,M. (1971), "The Dynamic Impacts of Autonomous Expenditures and the Monetary Base on Aggregate Income," *Journal of Money, Credit and Banking*, pp. 793 ~ 784.

- Moore, G. H. (1977), "Business Cycles: Partly Exogenous, Mostly Endogenous," *Soc. Sci. Quart.*, 58 , 1 , pp. 96 ~ 103.

- Μπένος, Θ. (1993), *Θεωρία Χρήματος*, 2η έκδοση, Αθήνα: εκδόσεις Ευγ. Μπένου.

- Mussa, M. (1975), "Adaptive and Regressive Expectations in a Rational Model of the Inflationary Process," *Journal of Monetary Economics*, 1 , 4 , pp. 423 ~ 442.

- Mussa, M. (1981), "Sticky Prices and Disequilibrium Adjustment in a Rational Model of the Inflationary Process," *American Economic Review*, 71 , 5 , pp. 1020 ~ 1027.

- Muth, J. (1961), "Rational Expectations and the Theory of Price Movements," *Econometrica*, 29, pp. 315 ~ 335.

- Neftci, S. N. (1979), *Unanticipated Money Growth and the Stability of the Economic Relationship*, unpublished.

- Nerlove, M. (1958), "Adaptive Expectations and Cobweb Phenomena," *Quarterly Journal of Economics*, 73 , pp. 227 ~ 240.

- Nerlove, M. & Wages, S. (1964), "On the Optimality of Adaptive Forecasting," *Manag. Sci.*, 10 , 2 , pp. 139 ~ 162.

- Norton, F. E. (1956), "The Accelerator and the Overinvestment and Underconsumption Models," *The Economic Journal*, 66 , 261 , pp. 49 ~ 65.

- Pasinetti, L. L. (1960), "Cyclical Fluctuations and Economic Growth," *Oxford Economic Papers*, New Series, 12 , 2 , pp. 215 ~ 241.

- Patinkin, D. (1965), *Money, Interest and Prices*, 2nd edition, N.Y.: Harper & Row.

- Phelps, E. S. (1990), *Seven Schools of Macroeconomic Thought*, Oxford: Oxford University Press.

- Phillips, A. W. (1958), "The Relation Between Unemployment and the Rate of Change of Money Wage Rates in the United Kingdom, 1861 – 1957," *Economica*, 25 , pp. 283 ~ 299.

- Plosser, C. I. (1989), "Understanding Real Business Cycles," *The Journal of Economic Perspectives*, 3 , 3 , pp. 51 ~ 78.

- Popkin, J. (1984), "The Business Cycle at Various Stages of Process," *Journal of Business and Economic Statistics*, 2 , 3 , pp. 215 ~ 223.

- Rau, N. (1974), *Trade Cycles: Theory and Evidence*, London: MacMillan.

- Reichenstein, W. (1987), "The Impact of Money on Short – Term Interest Rates," *Economic Enquiry*, 25 , 1 , pp. 67 ~ 82.

- Rendigs, Fels (1952), "The Theory of Business Cycles," *The Quarterly Journal of Economics*, 66 , 1 , pp. 25 ~ 42.

- Romer, D. (1996), *Advanced Macroeconomics*, N.Y.: McGraw – Hill.

- Rose, H. (1967), "Real and Monetary Factors in the Business Cycle," *Journal of Money, Credit and Banking*, 1 , 2 , pp. 138 ~ 152.

- Rotemberg, J. (1987), "The New Keynesian Microfoundations," *NBER Macroeconomics Annual*, 2 , pp. 69 ~ 104.

- Rotemberg, J. & Woodford, M. (1997), "Interest Rate Rules in an Estimated Sticky Price Model," in *Monetary Policy Rules*, in John B. Taylor ed., Forthcoming.

- Samuelson, P. A. (1939), "Interactions Between the Multiplier Analysis and the Principle of Acceleration," *Review of Economics and Statistics*, 21, pp. 75 ~ 78.

- Sargent, T. J. (1971a), "The Optimum Monetary Instrument Variable in a Linear Economic Model," *The Canadian Journal of Economics*, 4 , 1 , pp. 50 ~ 60.

- Sargent, T. J. (1971b), "A Note on the 'Accelerationist' Controversy," *Journal of Money, Credit and Banking*, 3 , pp. 721 ~ 725.

- Sargent, T. J. (1987), *Dynamic Macroeconomic Theory*, Cambridge, MA: Harvard University Press.

- Sargent, T. J. & Wallace, N. (1973), "The Stability of Models of Money and Growth with Perfect Foresight," *Econometrica*, 41 , 6 , pp. 1043 ~ 1048.

- Sargent, T. J. & Wallace, N. (1975), " 'Rational' Expectations, the Optimal Monetary Instrument and the Optimal Money Supply Rule," *Journal of Political Economy*, 83 , 241 ~ 254.

- Shell, L. & Stiglitz, J. E. (1967), "The Allocation of Investment in a Dynamic Economy," *Quarterly Journal of Economics*, 81 , pp. 592 ~ 609.

- Sherman, H. J. (1976), *Stagflation: A Rational Theory of Unemployment and Inflation* , N.Y.: Harper & Row.

- Sidney, S. A. (1949), "The Accelerator as Generator of Steady Growth," *The Quarterly Journal of Economics*, 63 , 2 , pp. 174 ~ 197.

- Simkin, S. P. (1994), "Do Real Business Cycle Models Really Exhibit Business Cycle Behaviour?", *Journal of Monetary Economics*, 33 , pp. 381 ~ 404.

- Sims, C. A. (1972), "Money, Income and Causality," *American Economic Review*, 62 , 4 , pp. 540 ~ 542.

- Smithies, A. (1957), "Economic Fluctuations and Growth," *Econometrica*, 25 , pp. 1 ~ 52.

- Smyth, D. J. (1963), "Monetary Factors and Multiplier – Accelerator Interaction," *Economica*, 30, pp. 400 ~ 407.

- Smyth, D. (1964), "Empirical Evidence on the Acceleration Principal," *The Review of Economic Studies*, 31 , 3 , pp. 185 ~ 202.

- Solow, R. M. (1979), "Another Possible Source of Wage Stickiness," *Journal of Macroeconomics*, 1 , pp. 79 ~ 82.

- Summers, L. H. (1986), "Some Skeptical Observations on Real Business Cycle Theory," Federal Reserve Bank of Minneapolis, *Quarterly Review*, pp. 23 ~ 27.

- Taylor, J. B. (1975), "Monetary Policy During a Transition to Rational Expectations," *Journal of Political Economy*, 83 , pp. 1009 ~ 1022.

- Taylor, J. B. (1980), "Aggregate Dynamics and Staggered Contracts," *Journal of Political Economy*, 88 , 1 , pp. 1 ~ 23.

- Taylor, J. B. (1998), "An Historical Analysis of Monetary Policy Rules," in *Monetary Policy Rules*, John B. Taylor ed., Forthcoming.

- Temin, P. (1976), *Did Monetary Forces Cause the Great Depression?*, N.Y.: Norton

- Tobin, J. (1955), "A Dynamic Aggregative Model," *Journal of Political Economy*, 63 , 2 , pp. 103 ~ 115.

- Tobin, J. (1956), "The Interest Elasticity of the Transactions Demand for Cash," *Review of Economics and Statistics*, 38 , pp. 241 ~ 247.

- Tobin, J. (1965), "Money and Economic Growth," *Econometrica*, 33 , 4 , pp. 671 ~ 684.

- Tobin, J. (1968), "Notes on Optimal Monetary Growth," *Journal of Political Economy*, 76 , pp. 833 ~ 859.

- Tobin, J. (1969), "A General Equilibrium Approach to Monetary Theory," *Journal of Money, Credit and Banking*, 1 , 1 , pp. 15 ~ 29.

- Tsiang, S. C. (1951), "Accelerator, Theory of the Firm and the Business Cycle," *The Quarterly Journal of Economics*, 65, pp. 325 ~ 341.

- Tsiddon, D. (1986), "On the Stubborness of Sticky Prices," Mimeo, Department of Economics, Columbia University.

- Turnovsky, S. J. (2000), *Methods of Macroeconomic Dynamics*, 2nd edition, MIT Press.

- Volker, P. A. (1978), *The Rediscovery of the Business Cycle*, N.Y.: The Free Press.

- Yun, T. (1996), "Nominal Price Rigidity, Money Supply Endogeneity and Business Cycles," *Journal of Monetary Economics*, 37 , pp. 345 ~ 370.

- Walsh, C. E. (1998), *Monetary Theory and Policy*, Cambridge, MA: MIT Press.

- Walters, A. A. (1971), "Consistent Expectations, Distributed Lags and the Quantity Theory," *Economic Journal*, 81 , pp. 273 ~ 281.

- Waud, R. N. (1967), "An Expectations Model of Cyclical Growth: Hicks on the Trade Cycle Revisited," *Oxford Economic Papers*, 19, pp. 313 ~ 327.

- Wright, A. Ll. (1958), "The Rate of Interest in a Dynamic Model," *The Quarterly Journal of Economics*, 72, pp. 327 ~ 350.

- Zarnowitz, V.; Boschan, C. & Moore, G. H. (1972), "Business Cycle Analysis of Econometric Model Simulations," in B. G. Hickman ed. p.p. 311 ~ 533.

- Zarnowitz, V. (1973), *Orders, Production and Investments – Cyclical and Structural Analysis*, N.Y.: NBER.

- Zarnowitz, V. (1985), "Recent Work on Business Cycles in Historical Perspective: A Review of Theories and Evidence," *Journal of Economic Literature*, 23 , 2 , pp. 523 ~ 580.