ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΚΟΙΝΩΝΙΚΩΝ, ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΚΑΙ ΤΕΧΝΩΝ

Τμήμα Εκπαιδευτικής και Κοινωνικής Πολιτικής

**Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών**

**«Επιστήμες της Αγωγής: Ειδική Αγωγή, Εκπαίδευση και Αποκατάσταση»**

**ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

# Διδακτικές εφαρμογές για τη βελτίωση δεξιοτήτων εκτέλεσης πολλαπλασιασμών από μαθητές πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης με Ειδικές Μαθησιακές Δυσκολίες: Μία συστηματική βιβλιογραφική ανασκόπηση

Παπά Μαγδαληνή

Θεσσαλονίκη, 2024

Τμήμα Εκπαιδευτικής και Κοινωνικής Πολιτικής

Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Επιστήμες της Αγωγής: Ειδική Αγωγή, Εκπαίδευση και Αποκατάσταση»

**ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

# Διδακτικές εφαρμογές για τη βελτίωση δεξιοτήτων εκτέλεσης πολλαπλασιασμών από μαθητές πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης με Ειδικές Μαθησιακές Δυσκολίες: Μία συστηματική βιβλιογραφική ανασκόπηση

Teaching applications for the improvement of execution skills on multiplications by elementary school students with Specific Learning Disabilities: A systematic literature review

Παπά Μαγδαληνή

**Εξεταστική Επιτροπή**

Αγαλιώτης Ιωάννης, Καθηγητής, Επόπτης

Γουλετά Ειρήνη, Αναπληρώτρια Καθηγήτρια

Γιαννούλη Βασιλική, Επίκουρη Καθηγήτρια

Θεσσαλονίκη, 2024

Ο/η συγγραφέας βεβαιώνει ότι το περιεχόμενο του παρόντος έργου είναι αποτέλεσμα προσωπικής εργασίας και ότι έχει γίνει η κατάλληλη αναφορά στην εργασία τρίτων, όπου κάτι τέτοιο ήταν απαραίτητο, σύμφωνα με τους κανόνες ακαδημαϊκής δεοντολογίας.

______________________

Παπά Μαγδαληνή

# Περιεχόμενα

# Περίληψη

Σκοπός της παρούσας μελέτης είναι η διερεύνηση των διδακτικών εφαρμογών που χρησιμοποιούνται για τη βελτίωση δεξιοτήτων εκτέλεσης πολλαπλασιασμών από μαθητές πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης με ειδικές μαθησιακές δυσκολίες (ΕΜΔ), καθώς και η αποτελεσματικότητα των διδακτικών μεθόδων και τεχνικών που αξιοποιούνται. Η ερευνητική στρατηγική που ακολουθήθηκε ήταν η συστηματική βιβλιογραφική ανασκόπηση, η οποία διενεργήθηκε για την χρονική περίοδο 2002-2022, χρησιμοποιώντας τρεις βάσεις δεδομένων. Σύμφωνα με συγκεκριμένα κριτήρια ένταξης και αποκλεισμού, συγκεντρώθηκαν συνολικά 13 μελέτες, οι οποίες στη συνέχεια εξετάστηκαν προκειμένου να απαντηθούν τα ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν. Τα αποτελέσματα έδειξαν, ότι η χρήση της σαφούς διδασκαλίας σε συνδυασμό με τους πολλαπλούς τρόπους αναπαράστασης της γνώσης, μπορεί να ωφελήσει σημαντικά τους μαθητές πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης με ΕΜΔ, ως προς την ευχέρεια και τη διατήρηση της επίδοσής τους στις δεξιότητες εκτέλεσης πολλαπλασιασμών. Επιπλέον, συγκεντρώθηκαν στοιχεία για τις απόψεις των μαθητών με ΕΜΔ αλλά και των εκπαιδευτικών, οι οποίες αποδείχθηκε πως ήταν ιδιαίτερα θετικές ως προς την εφαρμογή της συγκεκριμένης διδακτικής προσέγγισης.

**Λέξεις κλειδιά**: διδασκαλία, μαθηματικά, πολλαπλασιασμός, ειδικές μαθησιακές δυσκολίες, πρωτοβάθμια εκπαίδευση.

# ABSTRACT

The purpose of the present study is to investigate the teaching applications used for the improvement of execution skills on multiplications from students with specific learning disabilities (SLD) in elementary school, as well as the effectiveness of the teaching methods and techniques implemented. A systematic literature review was conducted for the period 2002-2022, using three databases. Based on specific inclusion and exclusion criteria, 13 studies were gathered in order to answer the research questions. The results showed that the use of explicit instruction in combination with multiple ways of representing knowledge can significantly benefit elementary students with SLD in fluency and maintenance of their performance in execution skills on multiplication. Furthermore, evidence was collected about students' and teachers' opinions, which proved to be particularly positive regarding the implementation of this teaching approach.



**Keywords**: teaching, mathematics, multiplication, specific learning disabilities, elementary students.

# Πρόλογος

Τα κίνητρα που με ώθησαν στην επιλογή του συγκεκριμένου θέματος απορρέουν από το γεγονός ότι τα μαθηματικά είναι απολύτως συνυφασμένα με τη σχολική επιτυχία σε όλες τις βαθμίδες εκπαίδευσης και μετέπειτα στην εύρεση εργασίας, στην οικονομική και κοινωνική ανέλιξη των ανθρώπων. Παρόλα αυτά, το γνωστικό πεδίο των Μαθηματικών, σε αντιδιαστολή με την Ανάγνωση και τη Γραφή, δεν έχει ερευνηθεί με την ίδια ένταση και έκταση. Ακόμη μικρότερη είναι η έρευνα που έχει πραγματοποιηθεί σε διεθνές και ελληνικό επίπεδο για τη βελτίωση των δεξιοτήτων εκτέλεσης πολλαπλασιασμών, που αποτελεί ορόσημο κατά τη διάρκεια της μαθηματικής ανάπτυξης των παιδιών. Το γεγονός αυτό μπορεί να δημιουργήσει σημαντικά προβλήματα, καθώς στις μεγαλύτερες τάξεις του δημοτικού η διδασκαλία επικεντρώνεται στην εκτέλεση δεξιοτήτων πολλαπλασιασμών, με πολλούς μαθητές και ιδίως μαθητές με ειδικές μαθησιακές δυσκολίες, συχνά να εμφανίζουν μεγάλες δυσκολίες ως προς την επίλυσή τους, λόγω των ιδιαίτερων μαθησιακών χαρακτηριστικών τους,

Με την ολοκλήρωση της παρούσας εργασίας, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Αγαλιώτη Ιωάννη, καθηγητή του τμήματος Κοινωνικής και Εκπαιδευτικής Πολιτικής αλλά και διευθυντή του προγράμματος μεταπτυχιακών σπουδών «Επιστήμες της Αγωγής: Ειδική αγωγή, Εκπαίδευση και Αποκατάσταση», για την άμεση και ουσιαστική ανατροφοδότηση που μου πρόσφερε, καθώς και για την καθοριστική συμβολή του στην αλλαγή του τρόπου σκέψης μου, όσον αφορά γενικότερα την αξιολόγηση και διδασκαλία των μαθητών και ιδιαίτερα των μαθητών με Ήπιες Εκπαιδευτικές Ανάγκες.

Θα ήθελα ακόμη να ευχαριστήσω όλους τους καθηγητές του μεταπτυχιακού προγράμματος, καθώς με τις γνώσεις και τις συμβουλές που μου παρείχαν, μου πρόσφεραν

ανεκτίμητα εφόδια για την μετέπειτα ζωή μου, σε προσωπικό, επαγγελματικό και ακαδημαϊκό επίπεδο.

Τέλος, το πιο θερμό ευχαριστώ ανήκει στην οικογένειά μου και ιδίως στον σύζυγο και στα παιδιά μου, που χωρίς τη δική τους αγάπη, υπομονή και ενθάρρυνση, δεν θα ήταν εφικτή η ολοκλήρωση των μεταπτυχιακών σπουδών μου, για αυτό και οφείλω να αφιερώσω την παρούσα εργασία σε αυτούς, στον Γιάννη, στη Μαριτίνα και στον Σωκράτη…

# Εισαγωγή

Τα μαθηματικά αποτελούν αναπόσπαστο κομμάτι της ζωής των ανθρώπων σε όλους τους τομείς της καθημερινότητας, διότι καθορίζουν σε σημαντικό βαθμό την επιτυχία του ατόμου σε προσωπικό και κοινωνικό επίπεδο (Xin, Jitendra, Deatline-Buchman, 2005). Κατά τη διάρκεια του δημοτικού σχολείου, το αναλυτικό πρόγραμμα ως προς το γνωστικό πεδίο των μαθηματικών επικεντρώνεται στην έννοια του αριθμού, στις υπολογιστικές-αριθμητικές δεξιότητες και στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων, τα οποία αποτελούν βασικές πτυχές της μαθηματικής γνώσης και συνιστούν απαραίτητα εφόδια για την μαθησιακή πρόοδο, αλλά και τη μετέπειτα ζωή των ανθρώπων (Fuchs et al., 2014). Η ελλιπής κάλυψη των μαθηματικών αυτών γνώσεων και δεξιοτήτων, λόγω της ιεραρχικής τους δομής αλλά και της άμεσης σύνδεσης που υπάρχει μεταξύ τους, μπορεί να οδηγήσει σε αποτυχία στη μάθηση (Αγαλιώτης, 2011).

Στις υπολογιστικές-αριθμητικές δεξιότητες περιλαμβάνονται οι αριθμητικοί συνδυασμοί (ΑΣ) και οι αλγόριθμοι των τεσσάρων αριθμητικών πράξεων, δηλαδή της πρόσθεσης, της αφαίρεσης του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης (Fuchs et al., 2006). Η πλειονότητα των ερευνών στη διεθνή βιβλιογραφία, επικεντρώνεται σε διδακτικές εφαρμογές για τη βελτίωση των υπολογιστικών-αριθμητικών δεξιοτήτων της πρόσθεσης και της αφαίρεσης (Canobi 2004· Fuson, 2009). Η έρευνα αναφορικά με την εκτέλεση πολλαπλασιασμών αναπτύχθηκε αρκετά αργότερα και με λιγότερη ένταση, κάτι που ενδεχομένως αφενός να οφείλεται στην πολυπλοκότητα της εννοιολογικής επεξεργασίας του πολλαπλασιαστικού συλλογισμού (Verschaffel, Schukajlow, Star & Van Dooren, 2020) και αφετέρου στις δυσκολίες που παρουσιάζει ο αλγόριθμος του πολλαπλασιασμού (Hickendorff, Torbeyns & Verschaffel, 2019), καθώς σύμφωνα με τον Ashlock (όπως αναφέρει ο Αγαλιώτης, 2011), προϋποθέτει πληθώρα γνωστικών διεργασιών και διαδικασιών, όπου μεταξύ άλλων περιλαμβάνεται η εναλλαγή πολλαπλασιασμών και προσθέσεων, η μνημονική διατήρηση διψήφιων αριθμών, η μεταφορά ψηφίων μεταξύ των στηλών και η προσεκτική τοποθέτηση των ψηφίων στο χώρο. Ωστόσο, στο πλαίσιο του δημοτικού σχολείου θεωρείται απαραίτητη η κατάκτηση των ΑΣ του πολλαπλασιασμού, όπως επίσης και η ευχέρεια των μαθητών ως προς την επίλυση των αλγορίθμων του πολλαπλασιασμού (Flores, Moore & Meyer, 2020).

Όσον αφορά τον πολλαπλασιασμό, θεωρείται μία από τις πιο θεμελιώδεις αριθμητικές πράξεις κατά τη διάρκεια του δημοτικού σχολείου (Lee, Han, Kim & Herner-Patnode, 2021), καθώς αποτελεί βασική προϋπόθεση για την κατανόηση της άλγεβρας, των λόγων και των αναλογιών, των κλασμάτων, των δεκαδικών αριθμών και των ποσοστών, της ερμηνείας στατιστικών και της κατανόησης και ανάγνωσης των κλιμάκων (Greer, 1992· Lamon, 1993· Hackenberg, 2010· Downton & Sullivan, 2017).

Στη διεθνή έρευνα, η πλειοψηφία των μελετών έχει χρησιμοποιήσει ποικιλία μεθόδων και τεχνικών για τη διδασκαλία στρατηγικών που επικεντρώνονται στην άμεση ανάκληση των ΑΣ του πολλαπλασιασμού, όπως είναι για παράδειγμα οι μνημονικές στρατηγικές και οι χρονομετρημένες διαδικασίες εξάσκησης (Zhang, Ding, Barrett, Xin & Liu, 2013). Επιπλέον, σύμφωνα με σχετικές έρευνες, αναφορικά με την επίλυση πολυψήφιων αριθμών πολλαπλασιασμού, η συνηθέστερη στρατηγική που εφαρμόζεται στα δημοτικά σχολεία, φαίνεται πως είναι ο παραδοσιακός αλγόριθμος, χωρίς να δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στην έννοια του αριθμού και της θεσιακής αξίας (Fuson et al., 1997· Whitacre & Nickerson, 2006· Yang, 2007· Yang, Reys & Reys, 2008). Παρόλα αυτά, σύμφωνα με τους Flores, Moore και Meyer (2020), προκειμένου τα παιδιά να αποκτήσουν διαδικαστική ευχέρεια στην επίλυση των αλγορίθμων είναι απαραίτητο να κατανοήσουν και να αναπτύξουν τον πολλαπλασιαστικό συλλογισμό. Εάν, για παράδειγμα, κατά τη διδασκαλία του πολλαπλασιασμού οι μαθητές διδαχθούν τους ΑΣ μέσω μόνο απλής απομνημόνευσης, τότε δεν τους δίνεται η δυνατότητα να αναπτύξουν την έννοια του πολλαπλασιασμού, οπότε σε περίπτωση που ξεχάσουν κάποιον ΑΣ δεν θα είναι σε θέση να χρησιμοποιήσουν άλλες στρατηγικές, όπως η επαλαμβανόμενη πρόσθεση, για να βρουν το σωστό αποτέλεσμα, γεγονός που υπονομεύει τη μαθησιακή τους πρόοδο (Agrawal & Morin, 2016). Ακόμη, όσον αφορά τον παραδοσιακό αλγόριθμο του πολλαπλασιασμού, ο οποίος θεωρείται και ο δυσκολότερος από τους τέσσερις αλγορίθμους, αν δεν κατακτηθούν οι κατάλληλες έννοιες και δεξιότητες, είναι πολύ πιθανό οι μαθητές να βάζουν αριθμούς σε λάθος στήλες, να προσθέτουν τα «κρατούμενα» πριν πολλαπλασιάσουν και γενικώς να προβούν σε πλήθος τέτοιων λαθών (Van de Walle, 2005). Οι δυσκολίες αυτές, εμφανίζονται με μεγαλύτερη ένταση σε μαθητές με Ειδικές Μαθησιακές Δυσκολίες (ΕΜΔ) (Kravec et al., 2012), καθώς λόγω των ιδιαίτερων μαθησιακών χαρακτηριστικών τους, μπορεί να παρουσιάσουν αρκετές αδυναμίες, οι οποίες συχνά οδηγούν στην εγκατάλειψη της προσπάθειας και σε αρνητική στάση απέναντι στα μαθηματικά (Αγαλιώτης, 2011).

Σύμφωνα με τους Geary, Hoard και Bailey (2011), φαίνεται πως οι μαθητές με ΕΜΔ εμφανίζουν σημαντικές δυσκολίες ως προς την τήρηση των αλγοριθμικών βημάτων των πράξεων καθώς και στην άμεση ανάκληση αλλά και την εννοιολογική κατανόηση των ΑΣ των τεσσάρων αριθμητικών πράξεων. Επομένως, γίνεται εμφανές ότι η διδασκαλία μαθηματικών γνώσεων και δεξιοτήτων, στην περίπτωση των μαθητών με ΕΜΔ, αποτελεί μία πρόκληση για τους εκπαιδευτικούς (Miller, Butler & Lee, 1998). Ωστόσο, οι εκπαιδευτικοί οφείλουν να είναι προετοιμασμένοι να παρέχουν υψηλής ποιότητας διδασκαλία, τροποποιώντας και προσαρμόζοντας μεθόδους και διαδικασίες, προκειμένου να δίνουν ίσες ευκαιρίες για μάθηση σε όλους τους μαθητές συμπεριλαμβανομένων βεβαίως και των μαθητών με ΕΜΔ, οι οποίοι διδάσκονται στα πλαίσια του γενικού σχολείου (Lee, Han, Kim & Herner- Patnode, 2021).

Ταυτόχρονα, οι ΕΜΔ είναι η μεγαλύτερη ομάδα των Ήπιων Εκπαιδευτικών Αναγκών (ΗΕΑ), καθώς οι μαθητές με ΕΜΔ αποτελούν περίπου το 40% των μαθητών με

ΗΕΑ (Pullen, Lane, Ashworth & Lovelace, 2017). Επιπλέον, είναι εκείνη η ομάδα, η οποία συνεχίζει να αυξάνεται με ταχείς ρυθμούς (Torgesen, 2004), σε σχέση με την ήπια νοητική αναπηρία, τη διαταραχή ελλειμματικής προσοχής/ υπερκινητικότητας (ΔΕΠΥ) και τα ήπια προβλήματα συμπεριφοράς, που συνιστούν τις επιμέρους κατηγορίες των ΗΕΑ (Αγαλιώτης, 2012). Ωστόσο, υπάρχει σοβαρή έλλειψη σε προγράμματα παρέμβασης και διδακτικές εφαρμογές, που να επικεντρώνονται στην εκτέλεση δεξιοτήτων πολλαπλασιασμών από μαθητές πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης (Hickendorff, Torbeyns & Verschaffel, 2019) και ιδίως από μαθητές με ΕΜΔ (Tzur et al., 2013· Xin, Park, Tzur & Si, 2020). Προκειμένου λοιπόν να αντιμετωπιστούν οι ανάγκες των μαθητών με ΕΜΔ και να αυξηθεί η επίδοσή τους, είναι απαραίτητο το σχολείο να βρει καινούργιες στρατηγικές διδασκαλίας και διδακτικές εφαρμογές, ώστε να ανταποκρίνονται σε αυτές τις δυσκολίες (Jitendra & Star, 2011).

Λαμβάνοντας, λοιπόν, υπόψη το σημαντικό ποσοστό του μαθητικού πληθυσμού με ΕΜΔ, καθώς και τη σπουδαιότητα της ορθής εκτέλεσης των υπολογιστικών δεξιοτήτων του πολλαπλασιασμού, γίνεται φανερή μία σημαντική έλλειψη σχετικών ερευνητικών δεδομένων στη διεθνή αλλά και την ελληνική βιβλιογραφία και αναδεικνύεται η ανάγκη περαιτέρω έρευνας αναφορικά με τις διδακτικές εφαρμογές που αξιοποιούνται για τη βελτίωση των δεξιοτήτων εκτέλεσης πολλαπλασιασμών από μαθητές πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης με ΕΜΔ. Σκοπός, λοιπόν, της παρούσας έρευνας είναι η συστηματική ανασκόπηση, ανάλυση και σύγκριση του ερευνητικού έργου που έχει πραγματοποιηθεί στη διεθνή αλλά και την ελληνική βιβλιογραφία, σχετικά με τις διδακτικές εφαρμογές που αξιοποιούνται για τη βελτίωση δεξιοτήτων εκτέλεσης πολλαπλασιασμών από μαθητές με ΕΜΔ στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση.

Στο πρώτο κεφάλαιο της παρούσας έρευνας, γίνεται εκτενής αναφορά στις βασικές προϋποθέσεις που απαιτούνται για την εκτέλεση των αλγορίθμων των αριθμητικών πράξεων, αναλύοντας λεπτομερώς την έννοια του αριθμού και της θεσιακής αξίας, όπως επίσης τη σημασία της ορθής ανάγνωσης και γραφής των αριθμητικών συμβόλων και της κατάκτησης και αποτελεσματικής ανάκλησης των αριθμητικών συνδυασμών. Έπειτα, περιγράφονται τα είδη γνώσης που είναι απαραίτητα για τη διεξαγωγή των υπολογιστικών δεξιοτήτων και στη συνέχεια ακολουθούν οι γνωστικές διεργασίες, καθώς και ο σημαντικός ρόλος που διαδραματίζουν κατά την εκτέλεση των υπολογιστικών δεξιοτήτων. Ακολουθεί η ανάλυση της αριθμητικής πράξης του πολλαπλασιασμού αλλά και των δυσκολιών που συναντώνται κατά τη διαδικασία κατάκτησής της από τους μαθητές, σε εννοιολογικό και σε διαδικαστικό επίπεδο. Στη συνέχεια, περιγράφονται οι μέθοδοι και οι τεχνικές που αξιοποιούνται σε διδακτικές εφαρμογές για τη βελτίωση δεξιοτήτων εκτέλεσης πολλαπλασιασμών, βάσει σχετικής βιβλιογραφίας. Επιπλέον, γίνεται λεπτομερής ανάλυση ως προς τους δημογραφικούς παράγοντες που φαίνεται, βάσει ερευνών, ότι επηρεάζουν σημαντικά της επίδοση των μαθητών ως προς την εκτέλεση των αλγορίθμων των αριθμητικών πράξεων. Ακολούθως, γίνεται μία γενική παρουσίαση ορισμένων ομάδων μαθητών που αποτυγχάνουν στην εκτέλεση υπολογιστικών δεξιοτήτων, συνεχίζοντας με μία εκτενή ανάλυση αναφορικά με την κατηγορία των Ειδικών Μαθησιακών Δυσκολιών (ΕΜΔ), παρουσιάζοντας τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά που μπορεί να εμφανίσουν ως προς το γνωστικό πεδίο των μαθηματικών. Τέλος, επισημαίνεται η αναγκαιότητα και ο σκοπός της παρούσας έρευνας διατυπώνοντας, έπειτα, τα ερευνητικά ερωτήματα.

Στο δεύτερο κεφάλαιο γίνεται ανάλυση της ερευνητικής μεθοδολογίας. Συγκεκριμένα, παρουσιάζεται η ερευνητική στρατηγική που ακολουθήθηκε, το σύνολο των ερευνών που συμπεριλήφθηκαν, καθώς και η διαδικασία που πραγματοποιήθηκε για την ένταξη και τον αποκλεισμό των ερευνών που εντοπίστηκαν, βάσει των συγκεκριμένων κριτηρίων που τέθηκαν. Τέλος, γίνεται μία συνοπτική ανάλυση των δεδομένων που συγκεντρώθηκαν.

Στο τρίτο κεφάλαιο, περιγράφονται λεπτομερώς τα αποτελέσματα της έρευνας. Συγκεκριμένα, παρουσιάζονται αναλυτικά οι έρευνες που επιλέχθηκαν, κατηγοριοποιώντας τα ευρήματά τους με τέτοιον τρόπο, προκειμένου να αναδειχθούν τυχόν ομοιότητες ή διαφορές μεταξύ των συμπεριλαμβανομένων ερευνών, με σκοπό την αντιστοίχισή τους στα ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν.

Τέλος, στο τέταρτο κεφάλαιο παρατίθεται η συζήτηση των αποτελεσμάτων, καθώς και τα συμπεράσματα της έρευνας. Επιπλέον, αναφέρονται οι περιορισμοί της έρευνας, όπως επίσης και μερικές προτάσεις για μελλοντικές έρευνες. Η εργασία ολοκληρώνεται με την παράθεση της διεθνούς και της ελληνικής βιβλιογραφίας.

# 1ο Κεφάλαιο

# Θεωρητική θεμελίωση της έρευνας

## 1.1. Αλγόριθμοι και βασικές προϋποθέσεις για την εκτέλεσή τους

Στα μαθηματικά ο όρος «αλγόριθμος» αναφέρεται σε μία διαδικασία, η οποία περιλαμβάνει συγκεκριμένα βήματα προς εκτέλεση ακολουθώντας απαραβίαστη σειρά, προκειμένου να παραχθούν τα αποτελέσματα των πράξεων (Yang, 2014). Χαρακτηριστικά παραδείγματα αλγορίθμων είναι τα συγκεκριμένα βήματα που ακολουθούνται κατά την εκτέλεση των τεσσάρων αριθμητικών πράξεων με ακέραιους, κλασματικούς ή δεκαδικούς αριθμούς (Fuchs et al., 2006· Αγαλιώτης, 2011). Οι αλγόριθμοι, σύμφωνα με τον Van de Walle (2005), είναι ένας έξυπνος τρόπος να καταγράφουμε μία πράξη για μία ξεχωριστή αξία θέσης με μεταβάσεις (ανταλλαγές, «δανεισμούς» ή «μεταφορές») σε μία παρακείμενη θέση.

Απαραίτητη προϋπόθεση για την επιτυχή εκτέλεση των αλγορίθμων των αριθμητικών πράξεων αποτελεί η κατάκτηση βασικών μαθηματικών εννοιών και δεξιοτήτων, οι οποίες είναι στενά συνδεδεμένες μεταξύ τους, αλληλεπιδρούν και αποτελούν τη βάση της μαθηματικής μαθησιακής ιεραρχίας (Αγαλιώτης, 2011). Τέτοιες έννοιες και δεξιότητες είναι, παραδείγματος χάρη, η έννοια του αριθμού, η δομή του αριθμητικού συστήματος και η έννοια της θεσιακής αξίας, η διάκριση των αριθμητικών και πραξιακών συμβόλων κατά την ανάγνωση και τη γραφή, όπως επίσης και η ικανότητα μέτρησης-απαρίθμησης (Van de Walle, 2005· Αγαλιώτης, 2011). Ακόμη, πρέπει εξαρχής να γίνουν κατανοητές από τους μαθητές, οι σχέσεις και οι ιδιότητες των αριθμητικών πράξεων, όπως επίσης η κατανόηση της ανάλυσης και της σύνθεσης των αριθμών (DeStefano & LeFevre, 2004· Downton & Sullivan, 2017). Για παράδειγμα, όσον αφορά τον παραδοσιακό αλγόριθμο του πολλαπλασιασμού, ο οποίος θεωρείται και ο δυσκολότερος από τους τέσσερις αλγόριθμους, αν δεν κατακτηθούν οι παραπάνω έννοιες και δεξιότητες, είναι πολύ πιθανό οι μαθητές να βάζουν αριθμούς σε λάθος στήλες, να προσθέτουν τα «κρατούμενα» πριν πολλαπλασιάσουν και γενικώς να προβούν σε πλήθος τέτοιων λαθών (Van de Walle, 2005).

Εξίσου σημαντική παράμετρος, αποτελεί και η οπτικοχωρική διάσταση των αλγορίθμων (Αγαλιώτης, 2011). Πιο αναλυτικά, σύμφωνα με τον Butterworth (2005) και την Dowker (2019), η εκτέλεση των παραδοσιακών αλγορίθμων των αριθμητικών πράξεων προϋποθέτει την τοποθέτηση των αριθμών στην κατάλληλη στήλη και στη συνέχεια την διαχείριση της κάθε στήλης, ξεκινώντας από τις μονάδες (στα δεξιά) προς τις δεκάδες (στα αριστερά) και εφαρμόζοντας ειδικούς κανόνες για τη μεταφορά ψηφίων ανώτερης τάξης ή κατά την αναδόμηση αριθμού («δανεικά», «κρατούμενα»). Αυτό σημαίνει ότι η εκτέλεση των αλγορίθμων είναι μία σύνθετη και απαιτητική διαδικασία κατά την οποία οι μαθητές είναι απαραίτητο να διαθέτουν κατανόηση της έννοιας των αριθμητικών και πραξιακών συμβόλων, της θεσιακής αξίας και της δομής του αριθμητικού συστήματος, όπως επίσης και να διαθέτουν την ικανότητα αναγνώρισης των ποσοτήτων και της κωδικοποίησης σε έναν εσωτερικό κώδικα αναπαράστασης, αλλά και να είναι σε θέση να καταγράφουν τα μερικά γινόμενα ενώ παράλληλα προχωρούν στο επόμενο βήμα (Butterworth, 2005· Dowker, 2019).

Επιπλέον δεξιότητες που θεωρούνται σημαντικές για την εκτέλεση των αλγορίθμων των αριθμητικών πράξεων είναι οι νοεροί υπολογισμοί, όπως επίσης και η κατάκτηση και αποτελεσματική ανάκληση των αριθμητικών συνδυασμών (Butterworth, 2005· Dowker, 2019). Σε περίπτωση που οι μαθητές αντιμετωπίζουν προβλήματα με την κατάκτηση και ανάκληση των ΑΣ, τότε μπορεί να οδηγηθούν σε λάθος αποτελέσματα κατά την εκτέλεση των αλγορίθμων, τα οποία μπορεί να αποτελέσουν και εμπόδιο απομακρύνοντας τις γνωστικές λειτουργίες του μαθητή μακριά από τη διαδικαστική λειτουργία (Fuchs et al., 2006).

### 1.1.1. Η έννοια του αριθμού

Η έννοια του αριθμού ή αλλιώς η αίσθηση του αριθμού σύμφωνα με τον Dahaene (2001), αποτελεί καίριας σημασίας γνώση και βασική προϋπόθεση για την ανάπτυξη των μαθηματικών γνώσεων και δεξιοτήτων. Πρόκειται στην ουσία για ένα πλήθος δεξιοτήτων, που ξεκινάνε ήδη από τη βρεφική ηλικία. Ουσιαστικά, η έννοια του αριθμού αναφέρεται στην ικανότητα που έχει κανείς να αντιλαμβάνεται τις ποσότητες, τους αριθμούς, τις πράξεις και τις σχέσεις μεταξύ αυτών και επιπλέον να είναι σε θέση να τις εφαρμόσει με αποτελεσματικό και ευέλικτο τρόπο στα διάφορα μαθηματικά έργα (Yang & Wu, 2010).

Πιο συγκεκριμένα, ο Dahaene (2001), έχει ορίσει την αίσθηση του αριθμού ως την ικανότητα να εκτιμά κανείς γρήγορα και αποτελεσματικά το μέγεθος διαφόρων ποσοτήτων, καθώς και τη σύγκριση αυτών χωρίς συστηματική απαρίθμηση. Άλλοι ερευνητές, όπως για παράδειγμα οι Van de Ritz και Van Louit (1999), θεωρούν ότι στην έννοια του αριθμού περιλαμβάνονται και πιαζετιανού τύπου έννοιες και δεξιότητες όπως για παράδειγμα η διατήρηση, η ταξινόμηση και η σειροθέτηση, καθώς και δεξιότητες μέτρησης-απαρίθμησης. Σύμφωνα με τους Von Aster και Shalev (2007), η κατάκτηση της έννοιας του αριθμού ακολουθεί μία αναπτυξιακή πορεία μαθηματικών γνώσεων και δεξιοτήτων, η οποία διέρχεται από τέσσερα διαδοχικά στάδια.

Πιο αναλυτικά, το πρώτο στάδιο ξεκινά με πολύ απλές αριθμητικές δεξιότητες, τις οποίες διαθέτουν οι άνθρωποι ήδη από τη βρεφική ηλικία και οι οποίες μεταφράζονται ως μία προδιάθεση αντίληψης ποσοτικών διαφορών, που μέσω εμπειριών και βιωμάτων χειρισμού των αριθμητικών διαστάσεων του περιβάλλοντος, διαμορφώνονται τελικά σε μαθηματικές ικανότητες (Αγαλιώτης, 2010). Σύμφωνα με τους Von Aster και Shalev (2007), οι ικανότητες αυτές προσδίδουν αριθμητικό νόημα στις αριθμο-λέξεις και στη συνέχεια στα αριθμητικά σύμβολα. Χαρακτηριστικά παραδείγματα τέτοιων δεξιοτήτων αποτελούν η άμεση εκτίμηση μικρών ποσοτήτων χωρίς συστηματική απαρίθμηση (subitize), η εκτίμηση μεγαλύτερων ποσοτήτων διαφόρων αντικειμένων, αναφέροντας τον αριθμό στον οποίο περίπου αντιστοιχούν (approximate) και ο προσδιορισμός της μεγαλύτερης ή της μικρότερης από δύο ή περισσότερες ποσότητες ή ομάδες ομοειδών αντικειμένων (comparison). Οι ικανότητες αυτές, αποτελούν σημαντικές διαστάσεις της θεμελιώδους έννοιας του αριθμού και αναγκαία προϋπόθεση για τα παιδιά, ώστε να μάθουν να συνδέουν ένα συγκεκριμένο αριθμό αντικειμένων ή γεγονότων με τον προφορικό λόγο και αργότερα με το συμβολικό αριθμητικό κώδικα (Von Aster & Shalev, 2007).

Στο δεύτερο στάδιο γίνεται η σύνδεση με το λεκτικό αριθμητικό σύστημα, δηλαδή τις αριθμο-λέξεις. Σε περίπτωση που το πρώτο στάδιο έχει κατακτηθεί, αλλά η γλωσσική ανάπτυξη του ατόμου για κάποιο λόγο διαταραχθεί, τότε δεν είναι δυνατό να επιτευχθεί η συσχέτιση μεταξύ των μη λεκτικών αριθμητικών ιδιοτήτων (•••) και του γλωσσικού κώδικα (τρία). Κάτι τέτοιο θα μπορούσε να καθυστερήσει την ανάπτυξη των δεξιοτήτων μέτρησης-απαρίθμησης, να οδηγήσει στη χρήση μη αποτελεσματικών στρατηγικών μέτρησης αλλά και σε δυσκολίες στην απομνημόνευση και ανάκληση των ΑΣ των τεσσάρων αριθμητικών πράξεων.

Στο τρίτο στάδιο γίνεται η συσχέτιση των διαφόρων αναπαραστάσεων του κάθε αριθμού (•••, τρία) με το αντίστοιχο αριθμητικό ψηφίο (π.χ 3). Το δεύτερο και το τρίτο στάδιο αποτελούν βασικές προϋποθέσεις για την ανάπτυξη της εσωτερικής αναπαράστασης της σειράς των αριθμών (mental number line), η οποία είναι καίριας σημασίας για την αριθμητική σκέψη και τους αριθμητικούς υπολογισμούς που πραγματοποιεί ένα άτομο και αποτελεί το τέταρτο στάδιο του μοντέλου.

Έτσι, σύμφωνα με τους Kaufmann και Von Aster (2012), οι πρώιμες βασικές αριθμητικές δεξιότητες δίνουν ένα αρχικό νόημα στις συμβολικές αναπαραστάσεις (αριθμο-λέξεις, αριθμητικά ψηφία), ενώ η ανάπτυξη της εσωτερικής αναπαράστασης της σειράς των αριθμών, επεκτείνει το σημασιολογικό εύρος της έννοιας του αριθμού σε ένα υψηλότερο και πιο αφηρημένο επίπεδο. Μαθητές οι οποίοι αντιμετωπίζουν δυσκολίες ως προς την εκτίμηση μικρών ποσοτήτων, στην αποτελεσματική διαχείριση της απαρίθμησης, όπως επίσης στην κατά προσέγγιση εκτίμηση του αποτελέσματος των πράξεων μικρών αριθμών, αντιμετωπίζουν ιδιαίτερη δυσκολία ως προς τη δόμηση της θεμελιώδους έννοιας του αριθμού, η έλλειψη της οποίας οδηγεί κατ' επέκταση σε προβλήματα που σχετίζονται με την κατανόηση της δομής του αριθμητικού συστήματος, καθιστώντας ουσιαστικά αδύνατη την εννοιολογική κατάκτηση των μαθηματικών διαδικασιών (Αγαλιώτης, 2011).

Αντιθέτως, μαθητές οι οποίοι έχουν κατακτήσει την έννοια του αριθμού, με το σύνολο των δεξιοτήτων που περιλαμβάνονται σε αυτήν, τότε είναι σε θέση να αναπτύσσουν υπολογιστικές στρατηγικές, να κάνουν εκτιμήσεις και συγκρίσεις και να αντιλαμβάνονται τις λογικές από τις μη λογικές απαντήσεις σε ένα αριθμητικό πρόβλημα (Gersten & Chard, 1999· Robinson, Menchetti, & Torgesen, 2002). Για παράδειγμα, είναι σε θέση να κατανοήσουν ότι το 17 είναι μεγαλύτερο από το 13 και ότι επομένως το ίδιο ισχύει για το 9+8 και το 9+4.

Η ανάπτυξη των παραπάνω γνωστικών λειτουργιών εξαρτώνται από ποικίλες αντιληπτικές και γνωστικές παραμέτρους, όπως είναι για παράδειγμα η μνήμη εργασίας, η προσοχή, η γλώσσα, οι κιναισθητικές λειτουργίες (όπως το μέτρημα των δαχτύλων), η οπτικοχωρική αντίληψη, όπως επίσης εξαρτώνται και από το περιβάλλον και τις εμπειρίες του κάθε ατόμου ξεχωριστά (Kaufmann & Von Aster, 2012· Käser et al., 2013).

### 1.1.2. Η έννοια της θεσιακής αξίας

Η έννοια της θεσιακής αξίας είναι ιδιαίτερα σημαντική για τη γνώση και κατανόηση του αριθμητικού μας συστήματος, καθώς και για τον υπολογισμό των πολυψήφιων αριθμών που περιλαμβάνονται σε αυτό (Verschaffel & De Corte, 2012). Οι παραδοσιακοί αλγόριθμοι, η εκτίμηση, οι νοεροί υπολογισμοί και οι αυτοσχέδιες στρατηγικές, εξαρτώνται όλα από την αξία θέσης ψηφίου (Van de Walle, 2005).

Σύμφωνα με τους Nuerk, Moeller και Willmes (2016), η έννοια της θεσιακής αξίας χωρίζεται σε τρία επιμέρους διαδοχικά στάδια: την αναγνώριση της θέσης ψηφίου (place identification), την ενεργοποίηση της αξίας θέσης ψηφίου (place-value activation) και τον υπολογισμό της αξίας θέσης ψηφίου (place-value computation). Πιο αναλυτικά, η αναγνώριση της θέσης ψηφίου αναφέρεται στο γεγονός ότι για να κατανοήσει κανείς τους πολυψήφιους αριθμούς, πρέπει πρωτίστως να αναγνωρίσει την ακριβή θέση στην οποία είναι τοποθετημένο το κάθε ψηφίο ξεχωριστά. Η αναγνώριση της θέσης των ψηφίων σχετίζεται με δεξιότητες μετατροπής του αριθμητικού κώδικα, που σημαίνει ότι ο μαθητής θα πρέπει να μπορεί να μετατρέψει τον συμβολικό αριθμητικό κώδικα «42» σε λεκτικό κώδικα, προφορικώς ή γραπτώς, σε «σαράντα δύο» και αντιστρόφως. Η μετατροπή αυτή μεταξύ των κωδικών του αριθμητικού συστήματος προϋποθέτει συγκεκριμένες αρχές συντακτικής δομής, για αυτό και σχετίζεται άμεσα με την θεσιακή αξία, προκειμένου μέσα από τις αριθμο-λέξεις να μπορεί να συμπεράνει κανείς τη σειρά των ψηφίων (Lambert & Moeller, 2019).

Στη συνέχεια, σύμφωνα με τους Nuerk, Moeller και Willmes (2016), ύστερα από την αναγνώριση της θέσης ψηφίου, πρέπει ο μαθητής να είναι σε θέση να προσδώσει σε αυτό την κατάλληλη αξία (μονάδες, δεκάδες, εκατοντάδες κλπ.) ανάλογα με τη θέση στην οποία βρίσκεται (ενεργοποίηση της αξίας θέσης ψηφίου). Η αριθμητική αξία των ψηφίων μπορεί να ενεργοποιηθεί και στη συνέχεια να επεξεργαστεί, μόνο εφόσον έχει πραγματοποιηθεί η αναγνώριση της θέσης του ψηφίου. Η κατανόηση της έννοιας της θεσιακής αξίας και της σχέσης της με τον τρόπο γραφής των αριθμών αποτελεί θεμελιώδους σημασίας ζήτημα στο πλαίσιο της ορθής χρήσης των αλγορίθμων των αριθμητικών πράξεων (Αγαλιώτης, 2011).

Τέλος, ο υπολογισμός της θεσιακής αξίας σχετίζεται με τους απαραίτητους υπολογισμούς που οφείλει κανείς να πραγματοποιήσει μεταξύ των θεσιακών αξιών των ψηφίων, προκειμένου να οδηγηθεί στην επιτυχή εκτέλεση μίας αριθμητικής πράξης, όπως για παράδειγμα στην περίπτωση της πρόσθεσης 47+38, όπου απαιτείται η μεταφορά ψηφίων από τη στήλη των μονάδων στη στήλη των δεκάδων. Η διαδικασία αυτή είναι ιδιαίτερα περίπλοκη, καθώς τα αριθμητικά ψηφία και τα μεγέθη αυτών δεν παρουσιάζονται πλέον ξεχωριστά αλλά συσχετίζονται και πρέπει να υπολογίζονται συνδυαστικά (Nuerk, Korbinian & Willmes, 2016).

Παρομοίως, η Ross (1989), θεωρεί ότι η κατανόηση της έννοιας της θεσιακής αξίας στηρίζεται σε δύο άρρηκτα συνδεδεμένες ιδιότητες. Πρώτον, οι ποσότητες που αναπαριστάνονται από το εκάστοτε ψηφίο καθορίζονται από τη θέση που βρίσκονται σε έναν πολυψήφιο αριθμό (positional property). Δεύτερον, η αξία των θέσεων αυξάνεται σε δυνάμεις του 10 από τα δεξιά προς τα αριστερά (base-ten property). Αυτό σημαίνει, ότι όταν τα παιδιά έρχονται αντιμέτωπα με πολυψήφιους αριθμούς, τότε θα πρέπει να είναι σε θέση να προσδώσουν στο κάθε ψηφίο, μία συγκεκριμένη αξία ανάλογα με τη θέση στην οποία αυτό βρίσκεται, όπως για παράδειγμα μονάδες, δεκάδες, εκατοντάδες (Lambert & Moeller, 2019). Για παράδειγμα στον αριθμό 352, το ψηφίο 2 βρίσκεται στη θέση των μονάδων και έχει αξία 2, το ψηφίο 5 βρίσκεται στη θέση των δεκάδων και έχει αξία 50, ενώ το ψηφίο 3 βρίσκεται στη θέση των εκατοντάδων και έχει αξία 300. Καθεμία από αυτές τις θέσεις αντιστοιχεί σε μία δύναμη του 10, όπως για παράδειγμα $10^0$ για τις μονάδες, $10^1$ για τις δεκάδες και $10^2$ για τις εκατοντάδες (Ross, 1989).

Ωστόσο, είναι σημαντικό να επισημανθεί το γεγονός ότι ο συνδυασμός και η εφαρμογή των δύο παραπάνω ιδιοτήτων της έννοιας της θεσιακής αξίας, αποτελεί ένα ιδιαίτερα πολύπλοκο ζήτημα, καθώς σύμφωνα με τη Fuson και τους συνεργάτες (1997), σε πολλές Ευρωπαϊκές χώρες, όπως για παράδειγμα στη Γαλλία, ενώ τα παιδιά διδάσκονται τις μονάδες, τις δεκάδες, τις εκατοντάδες και ούτω καθεξής, δίνεται έμφαση κυρίως στη θέση των ψηφίων (positional property), αγνοώντας παράλληλα το γεγονός ότι η αξία των θέσεων αυξάνεται σε δυνάμεις του 10 από τα δεξιά προς τα αριστερά (base-ten property).

### 1.1.3. Δεξιότητες Μέτρησης-Απαρίθμησης

Η κατάκτηση της απαρίθμησης θεωρείται βασικό συστατικό για την ανάπτυξη αριθμητικών εννοιών και δεξιοτήτων, διότι η δόμηση των εννοιών των αριθμητικών πράξεων πραγματοποιείται βάσει των τροποποιήσεων που γίνονται στην αναπαράσταση της σειράς των αριθμών (number sequence) (Steffe, 1994). Αποτελεί απαραίτητη δεξιότητα βάσει της οποίας προσδιορίζονται τα μεγέθη των ποσοτήτων και η εύρεση των αποτελεσμάτων των αριθμητικών πράξεων (Αγαλιώτης, 2011).

Σύμφωνα με τη Fuson και τους συνεργάτες (1997), τα παιδιά προτού έρθουν σε επαφή με τους διψήφιους και τους πολυψήφιους αριθμούς, θα πρέπει να είναι σε θέση να αναγνωρίζουν οπτικά τα αριθμητικά σύμβολα από το ένα μέχρι το εννιά και να λένε προφορικά την αριθμο-λέξη που αντιστοιχεί στο εκάστοτε αριθμητικό ψηφίο, να μπορούν επίσης να αντιστοιχίζουν τις ποσότητες με τα αριθμητικά τους σύμβολα καθώς και με τις κατάλληλες αριθμο-λέξεις και να είναι σε θέση να απαριθμούν ποσότητες για κάθε αριθμητικό ψηφίο εκφέροντας, ταυτοχρόνως, λεκτικά την ανάλογη αριθμο-λέξη από το ένα μέχρι το εννιά.

Η έννοια της απαρίθμησης, περιλαμβάνει αρκετά στοιχεία, όπως η γνώση των περιπτώσεων, όπου πραγματοποιείται η απαρίθμηση, η γνώση της ακολουθίας των αριθμο-λέξεων (ένα, δύο, τρία…), η ικανότητα της ένα προς ένα αντιστοίχισης μεταξύ των αντικειμένων και των αριθμο-λέξεων, η αντίληψη της έννοιας της σταθερότητας της ποσότητας ανεξάρτητα από τη διάταξη των αντικειμένων (Αγαλιώτης, 2010), όπως επίσης και η κατανόηση της ειδικής σημασίας της αριθμο-λέξης που αρθρώνεται τελευταία κατά τη διαδικασία της απαρίθμησης σε σχέση με τις προηγούμενες  που έχουν ειπωθεί, που σημαίνει ότι τα παιδιά θα πρέπει να αναγνωρίζουν ότι η τελευταία αριθμο-λέξη που αντιστοιχεί στο τελευταίο προς μέτρηση αντικείμενο, χρησιμοποιείται για να αναπαραστήσει τον συνολικό αριθμό των αντικειμένων που μετρήθηκαν και ότι οι αμέσως επόμενες αριθμο-λέξεις αντιπροσωπεύουν διαδοχικά μεγαλύτερες ποσότητες (Geary, 2007).

Επιπλέον, σύμφωνα με τον Αγαλιώτη (2011), για τη συγκεκριμένη δεξιότητα απαιτείται μια ποικιλία γνωστικών λειτουργιών, καθώς θα πρέπει να είναι σε θέση κανείς να εκφέρει λεκτικά την ακολουθία των αριθμο-λέξεων και παράλληλα να μπορεί να συντονίζει τη λεκτική εκφορά με την οπτική επεξεργασία, δηλαδή να εντοπίζει και να αναγνωρίζει τα προς μέτρηση αντικείμενα. Ταυτοχρόνως, θα πρέπει να είναι σε θέση να συντονίζει κανείς την κίνηση του χεριού, δηλαδή την κινητική δράση, όπως επίσης και τη διατήρηση στη μνήμη του στόχου του έργου προς εκτέλεση, τη διάκριση των στοιχείων που έχουν ήδη μετρηθεί από εκείνα που απομένει να μετρηθούν, την εκτίμηση του επικείμενου αποτελέσματος και γενικά την παρακολούθηση του συνολικού αυτού έργου.

Τα συνηθέστερα λάθη που παρατηρούνται κατά την μέτρηση-απαρίθμηση αντικειμένων, σύμφωνα με τη Fuson (2013) είναι: 1) η εκφορά δύο αριθμο-λέξεων κατά την μέτρηση-απαρίθμηση ενός αντικειμένου όπως επίσης και το αντίστροφο, δηλαδή η εκφορά μιας αριθμο-λέξης κατά τη μέτρηση-απαρίθμηση δύο ή περισσότερων αντικειμένων, 2) η συνέχιση της ακολουθίας των αριθμο-λέξεων ακόμη και όταν έχουν τελειώσει τα προς μέτρηση αντικείμενα, 3) η παρεμβολή μιας επιπρόσθετης αριθμο-λέξης κατά τη μέτρηση-απαρίθμηση δύο αντικειμένων.

Σύμφωνα με τον Geary (2004), δεδομένου το ότι η απαρίθμηση εμπλέκει παράλληλα φωνολογικά και σημασιολογικά συστήματα αναπαράστασης της γλώσσας, όπως για παράδειγμα η κατανόηση μιας ποσότητας και η αντιστοίχισή της με την κατάλληλη αριθμο-λέξη, κάθε ενδεχόμενη δυσκολία στην ικανότητα αναπαράστασης ή ανάκλησης πληροφοριών από αυτά τα συστήματα, οδηγούν σε προβλήματα που σχετίζονται με την εύρεση αποτελεσμάτων κατά την μέτρηση-απαρίθμηση, τα οποία κατ' επέκταση οδηγούν σε δυσκολίες αναφορικά με την κατάκτηση των αριθμητικών συνδυασμών καθώς και στην αποτελεσματική ανάκληση αυτών από την μακρόχρονη μνήμη.

### 1.1.4. Ανάγνωση και γραφή αριθμητικών συμβόλων

Απαραίτητη προϋπόθεση για την αποτελεσματική εκτέλεση αριθμητικών πράξεων αποτελεί η ακριβής ανάγνωση και γραφή των συμβόλων των αριθμών (Αγαλιώτης, 2011). Σύμφωνα με τον Van de Walle (2005), παραδοσιακά η διδασκαλία έκανε χρήση διαφόρων μορφών εξάσκησης μέσω επανάληψης της γραφής συμβόλων, αντιγράφοντας σελίδες με αριθμητικά ψηφία, γράφοντας επανειλημμένα τους αριθμούς από το 0 έως το 10, φτιάχνοντας τα ψηφία από διάφορα υλικά όπως ο πηλός, σχεδιάζοντάς τα σε άμμο ή σε αλάτι και ούτω καθεξής, θεωρώντας ότι πρόκειται αποκλειστικά για μία μηχανική δραστηριότητα που μπορεί να κατακτηθεί μέσω της επανάληψης.

Παρόλα αυτά σύμφωνα με τον Baroody (1999), ιδιαίτερη έμφαση πρέπει να δοθεί στα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά του κάθε αριθμού και στον τρόπο με τον οποίο αυτά συνδέονται, όπως επίσης και στις κινητικές δεξιότητες που απαιτούνται ώστε να γραφεί σωστά το κάθε ψηφίο ξεχωριστά. Προκειμένου να γίνουν σαφείς οι ιδιότητες που προϋποτίθενται για το διαχωρισμό του ενός αριθμού από τον άλλον, είναι καλό οι παρόμοιοι αριθμοί να διδάσκονται μαζί (Van de Walle, 2005). Για παράδειγμα, το 1, το 4 και το 7, αποτελούνται από ευθείες γραμμές ενώ το 2 και το 5 συνδυάζουν τις ευθείες με τις καμπύλες. Αντίστοιχα, οι αριθμοί 6 και 9 ξεχωρίζουν από τους υπόλοιπους, καθώς διαθέτουν έναν κύκλο και μία καμπύλη. Είναι όμως απαραίτητο, να διακρίνει κανείς ότι το 6 αποτελείται από έναν κύκλο ο οποίος βρίσκεται στη βάση του αριθμού και ότι η καμπύλη αρχίζει από τα αριστερά και ανεβαίνει, ενώ αντίθετα στον αριθμό 9, ο κύκλος τοποθετείται στην κορυφή του αριθμού και η καμπύλη αρχίζει από τα δεξιά και κατεβαίνει (Van de Walle, 2005· Αγαλιώτης, 2011).

Για την πραγματοποίηση της ακριβούς ανάγνωσης και γραφής των αριθμών, σύμφωνα με τον Baroody (1999), προϋποτίθεται η δόμηση μιας νοητικής εικόνας για κάθε αριθμό ξεχωριστά, όπου θα περιέχει όλα τα απαραίτητα συστατικά στοιχεία του εκάστοτε αριθμού (ευθείες, καμπύλες), όπως επίσης και τον τρόπο με τον οποίο τα στοιχεία αυτά συνδέονται για να δημιουργήσουν τον συγκεκριμένο αριθμό. Είναι σημαντικό να αναφερθεί στο σημείο αυτό, ότι συνήθως τα παιδιά δεν παρουσιάζουν ιδιαίτερες δυσκολίες ως προς τη δόμηση της νοητικής εικόνας για τους αριθμούς από το 1 μέχρι το 9. Παρόλα αυτά, ορισμένα παιδιά, τείνουν να συγχέουν αριθμούς που διαθέτουν παρόμοια χαρακτηριστικά, όπως για παράδειγμα το 2 με το 5 και το 6 με το 9, όπου περιλαμβάνουν τα ίδια συστατικά μέρη και διαφέρουν μόνο στον τρόπο με τον οποίο αυτά συνδέονται, γεγονός που οφείλεται σε διαταραχές είτε στην οπτικο-χωρική αντίληψη είτε στην ακουστική/οπτική μνήμη (Baroody, 1999· Αγαλιώτης, 2011).

### 1.1.5. Αριθμητικοί συνδυασμοί

Οι Αριθμητικοί Συνδυασμοί (ΑΣ), αφορούν τα αποτελέσματα των προσθέσεων και των αφαιρέσεων της πρώτης 20άδας, της προπαίδειας με τη μορφή γινομένων και πηλίκων μέχρι το 100 (Αγαλιώτης, 2011) και αποτελούν τμήμα των βασικών γνώσεων και δεξιοτήτων που οφείλουν να κατακτηθούν από τους μαθητές στο πλαίσιο των πρώτων τάξεων του δημοτικού σχολείου (Fuchs et al., 2014).

Θεωρείται απαραίτητο, οι ΑΣ να χρησιμοποιούνται στον υψηλότερο δυνατό βαθμό ακρίβειας, ταχύτητας και γενικευσιμότητας, καθώς με αυτόν τον τρόπο απελευθερώνεται μεγάλο μέρος του νοητικού δυναμικού του μαθητή, με αποτέλεσμα να μπορεί να εκτελέσει αποτελεσματικά ανώτερης τάξης και μεγαλύτερων απαιτήσεων μαθηματικά έργα, όπως οι αλγόριθμοι των πράξεων και η επίλυση προβλημάτων (Αγαλιώτης 2011· Hurst & Hurrel, 2016).

Σύμφωνα με τους Fuchs και τους συνεργάτες (2006), η κατάκτηση των ΑΣ αποτελεί μία εξελικτική διαδικασία, η οποία ξεκινάει από την προοδευτική χρήση των διαδικασιών απαρίθμησης. Αυτό σημαίνει ότι οι μαθητές σε ένα πιο πρώιμο στάδιο, ξεκινούν αρχικά με την απαρίθμηση αντικειμένων ή δαχτύλων μετρώντας ανά ένα. Για παράδειγμα στην περίπτωση που τους δοθεί ο ΑΣ «2+3=;», τότε θα μετρήσουν τον πρώτο αριθμό «1,2» χρησιμοποιώντας αντικείμενα, στη συνέχεια θα μετρήσουν το δεύτερο αριθμό «3,4,5» και τέλος το άθροισμα «1,2,3,4,5». Έπειτα, χρησιμοποιούν τους αριθμούς όπως ακριβώς τους δίνονται, ξεκινώντας την απαρίθμηση από τον πρώτο αριθμό, δηλαδή «2,3,4,5» και τέλος αναπτύσσουν τη στρατηγική μέτρηση, κατά την οποία αντιστρέφουν τη σειρά των αριθμών, ξεκινώντας από τον μεγαλύτερο, προκειμένου να προσδιοριστεί το αποτέλεσμα της πράξης (Fuchs et al., 2006· Geary, Hoard, Byrd-Craven, Nugent & Numtee, 2007· Αγαλιώτης, 2011).

Τελικά, καθώς η σταδιακά αποτελεσματική απαρίθμηση συνδέει έναν αριθμητικό συνδυασμό με την απάντησή του στη μνήμη εργασίας, η συσχέτιση αυτή εδραιώνεται στην μακρόχρονη μνήμη, με αποτέλεσμα τα παιδιά να εγκαταλείπουν την απαρίθμηση και να χρησιμοποιούν την άμεση ανάκληση των αποτελεσμάτων (Geary, Hoard, Byrd-Craven, Nugent & Numtee, 2007). Έτσι, μπορούν σταδιακά να προχωρήσουν στην εκτέλεση αλγορίθμων με διψήφιους και πολυψήφιους αριθμούς. Επομένως, γίνεται αντιληπτό, ότι οι μαθηματικές γνώσεις και δεξιότητες δομούνται με έναν αυστηρά ιεραρχικό τρόπο, που σημαίνει ότι η μη επαρκής κάλυψή τους θα οδηγήσει στη δημιουργία δυσκολιών στη μάθηση. Έτσι, στην προκειμένη περίπτωση, η ελλιπώς ανεπτυγμένη απαριθμητική δεξιότητα έχει ως αποτέλεσμα την περιορισμένη δυνατότητα χρήσης χειραπτικού υλικού για την εύρεση των αποτελεσμάτων των πράξεων, το οποίο συνεπάγεται την αδυναμία στην κατάκτηση των ΑΣ των τεσσάρων αριθμητικών πράξεων, καθώς και στην επιτυχή εκτέλεση των αλγορίθμων (Αγαλιώτης, 2011).

Επομένως, γίνεται αντιληπτό ότι η μη επαρκής κάλυψη των παραπάνω ιεραρχικά δομημένων δεξιοτήτων, μπορεί να οδηγήσει πολλούς μαθητές σε αδυναμία κατάκτησης των ΑΣ των αριθμητικών πράξεων σε επίπεδο αυτοματισμού, με αποτέλεσμα να κάνουν πολλά λάθη, επηρεάζοντας την ικανότητά τους να εκτελούν αριθμητικές πράξεις και να επιλύουν προβλήματα, οδηγώντας σε χαμηλές επιδόσεις, απογοήτευση και άγχος ως προς το γνωστικό πεδίο των μαθηματικών (Miller & Hudson, 2007). Για τον λόγο αυτόν, είναι αναγκαία η διεξαγωγή της διδασκαλίας των μαθηματικών να γίνεται με τέτοιον τρόπο ώστε να προωθεί την μαθηματική σκέψη, δηλαδή να συνδυάζει την κατάκτηση και ευχέρεια των διαδικαστικών δεξιοτήτων με την εννοιολογική κατανόηση των μαθηματικών εννοιών, προκειμένου να ενισχυθεί η ανάπτυξη του μαθηματικού συλλογισμού (Vukovic & Siegel, 2010). Έτσι, σύμφωνα με τον Αγαλιώτη (2011), μία αξιόλογη προσπάθεια βελτίωσης των δεξιοτήτων των μαθητών ως προς τους ΑΣ, θα πρέπει να έχει ως βάση την κατανόηση της έννοιας της πράξης από τον μαθητή, όπως επίσης και την ικανότητά του να αναπαριστά τη συμβολική έκφραση της αριθμητικής πράξης με υλικά και εικόνες.

Ωστόσο, σύμφωνα με τους Zhang, Ding, Barrett, Xin και Liu (2013) η πλειοψηφία των ερευνών που αφορούν την κατάκτηση των ΑΣ πολλαπλασιασμού, επικεντρώνονται στη διδασκαλία στρατηγικών άμεσης ανάκλησης χρησιμοποιώντας ποικιλία μεθόδων, όπως είναι για παράδειγμα η χρήση μνημονικών στρατηγικών (mnemonic multiplication fact instruction), η χρήση χρονομετρημένων δοκιμασιών εξάσκησης (constant time delay procedures) και η χρήση της στρατηγικής αντιγραφή-κάλυψη-σύγκριση (copy-cover-compare instruction), κατά την οποία ο μαθητής κοιτάει τον ΑΣ και το αποτέλεσμά του, ύστερα το καλύπτει ώστε να μην μπορεί να το δει, έπειτα το γράφει βάσει μνήμης και στη συνέχεια το συγκρίνει με το αρχικό.

Παρόλα αυτά, είναι σημαντικό να επισημανθεί ότι η κατάκτηση των ΑΣ θεωρείται απαραίτητη αλλά όχι επαρκής για την κατανόηση του τρόπου με τον οποίο μπορεί να επεξεργαστεί κανείς πολυψήφιους αριθμούς, καθώς το τελευταίο βασίζεται σε επιπρόσθετες αναπαραστάσεις, σε νοητικούς χειρισμούς, όπως επίσης και στην επεξεργασία των σχέσεων μεταξύ των ψηφίων, οι οποίες δεν είναι δυνατό να μελετηθούν με μονοψήφιους αριθμούς, δηλαδή με τους ΑΣ των αριθμητικών πράξεων (Nuerk, Moeller & Willmes, 2016).

### 1.1.6. Είδη γνώσης που απαιτούνται για την εκτέλεση υπολογιστικών δεξιοτήτων.

Απαραίτητη προϋπόθεση για την ορθή εκτέλεση των αλγορίθμων των αριθμητικών πράξεων, είναι να παρέχεται υψηλής ποιότητας διδασκαλία, η οποία να περιλαμβάνει και τους τρεις τύπους της μαθηματικής γνώσης, δηλαδή την εννοιολογική (conceptual), τη διαδικαστική (procedural) και τη δηλωτική γνώση (declarative) (Miller & Hudson, 2007).

Σύμφωνα με τους Miller, Stringfellow, Kaffar, Ferreira και Mancl (2011), η εννοιολογική γνώση, περιλαμβάνει τη βαθιά κατανόηση του νοήματος των αριθμητικών πράξεων, όπως επίσης και της κατανόησης των μεταξύ τους σχέσεων και συνδέσεων. Η διαδικαστική γνώση αναφέρεται στην ικανότητα να εκτελεί κανείς βήμα προς βήμα αριθμητικές πράξεις και προβλήματα, που τελικά οδηγεί στην ορθή επίλυσή τους, ενώ η δηλωτική γνώση αφορά την ικανότητα να απομνημονεύει κανείς πληροφορίες, οι οποίες ως προς τη φύση τους είναι πραγματολογικές, όπως για παράδειγμα βλέποντας έναν ΑΣ, να γνωρίζει κανείς άμεσα την απάντηση χωρίς να χρειάζεται να το σκεφτεί ιδιαίτερα. Αυτό σημαίνει ότι από τη μία πλευρά, οι μαθητές θα πρέπει να είναι σε θέση εκτελούν ευέλικτα τους αριθμητικούς υπολογισμούς και να κατανοούν τις μεταξύ τους συνδέσεις και σχέσεις (Robinson & LeFevre, 2012) και από την άλλη πλευρά πρέπει να είναι σε θέση να αλληλοσυνδέουν διάφορες αναπαραστάσεις (πραξιακές, εικονιστικές, συμβολικές) (Anghileri, 1995). Οι μαθητές οι οποίοι δυσκολεύονται στη μετάφραση μίας έννοιας μεταξύ των διαφόρων αναπαραστάσεων συνήθως αντιμετωπίζουν προβλήματα με την κατανόηση των αριθμητικών δεξιοτήτων, όπως επίσης και με την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων (Lesh, Cramer, Doerr, Post & Zawojewski, 2003).

Σύμφωνα με την Dowker (2019), στο παρελθόν ερευνητές και εκπαιδευτικοί διαχώριζαν τα δύο είδη της αριθμητικής γνώσης, τη διαδικαστική και την εννοιολογική γνώση. Αυτό σημαίνει, ότι επικεντρώνονταν είτε μόνο στη διαδικαστική γνώση, δηλαδή σε διαδικασίες και δεξιότητες, οι οποίες κατακτώνται μέσω απομνημόνευσης και επανάληψης, χωρίς να δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στο βαθύτερο νόημά τους, είτε μόνο στην εννοιολογική γνώση, περιλαμβάνοντας δηλαδή μία βαθύτερη εννοιολογική κατανόηση των αριθμών και των διαδικασιών που ακολουθούνται, είτε αυτή η κατανόηση σχετίζεται είτε όχι με την άμεση και αποτελεσματική εκτέλεση των υπολογιστικών δεξιοτήτων και επιτυγχάνεται διαμέσου της ανακάλυψης.

Παρόλα αυτά, πολλοί ερευνητές σήμερα, υποστηρίζουν ότι η εννοιολογική και η διαδικαστική γνώση δεν αποτελούν ανεξάρτητα κομμάτια της μαθηματικής μάθησης και γνώσης. Αντιθέτως, συμπληρώνουν η μία την άλλη, καθώς δεν επαρκεί από μόνη της η ευχέρεια στους ΑΣ και η διαδικαστική γνώση των αλγορίθμων των αριθμητικών πράξεων, αλλά απαραίτητο συστατικό αποτελεί και η εννοιολογική γνώση, προκειμένου οι μαθητές να κατανοήσουν το νόημα των διαδικασιών που ακολουθούν (Flores, Hinton & Schweck, 2014· Agrawal & Morin, 2016). Μάλιστα, σύμφωνα με τους Baroody, Feil και Johnson (2007), είναι τόσο στενή η σύνδεση μεταξύ διαδικαστικής και εννοιολογικής γνώσης, ώστε η ευχέρεια και η ευελιξία στην εκτέλεση των αλγορίθμων, είναι δυνατόν να πραγματοποιηθούν μόνο ύστερα από την ανάπτυξη βαθιάς εννοιολογικής κατανόησης των αριθμητικών πράξεων. Επιπλέον, σύμφωνα με τον Mayer (2010), η διαδικαστική γνώση αποτελεί απαραίτητο συστατικό αλλά όχι από μόνο του επαρκές για την ακαδημαϊκή επιτυχία, επισημαίνοντας ότι η μεγαλύτερη πρόκληση για τους μαθητές είναι η ανάγκη σύνδεσης της διαδικαστικής τους γνώσης με τα άλλα είδη γνώσης και ιδιαίτερα με την εννοιολογική.

Τέλος, ιδιαίτερο ρόλο φαίνεται πως διαδραματίζει η μεταγνωστική γνώση, η οποία αναφέρεται στην επίγνωση που έχει κάποιος για τις δικές του γνωστικές ικανότητες (Mayer & Wittrock, 2006). Πιο συγκεκριμένα, σύμφωνα με τον Αγαλιώτη (2011), η μεταγνωστική γνώση αναφέρεται, μεταξύ άλλων, στην ικανότητα του παιδιού να κάνει επιλογή μεταξύ των διάφορων στρατηγικών, καθώς επίσης και στην αποτελεσματικότητά του ως προς την αξιοποίηση του χρόνου μελέτης, στο συστηματικό έλεγχο της λογικότητας της απάντησης και γενικά στη ρύθμιση των γνωστικών του ικανοτήτων, ώστε η μάθηση να είναι παραγωγική αλλά και ταυτόχρονα ευχάριστη. Επιπλέον, η μεταγνωστική γνώση περιλαμβάνει και τις πεποιθήσεις και απόψεις του ατόμου ως προς τις γνωστικές του ικανότητες, όπως για παράδειγμα «Δεν είμαι καλή/Είμαι καλή στα Μαθηματικά» (Mayer & Wittrock, 2006).

## 1.2. ΓΝΩΣΤΙΚΕΣ ΔΙΕΡΓΑΣΙΕΣ ΚΑΙ Ο ΡΟΛΟΣ ΤΟΥΣ ΣΤΗΝ ΕΚΤΕΛΕΣΗ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΩΝ ΔΕΞΙΟΤΗΤΩΝ

Σύμφωνα με τον Αγαλιώτη (2012), μία γνώση και δεξιότητα για να θεωρηθεί λειτουργική θα πρέπει ο μαθητής να τη χρησιμοποιεί με ακρίβεια, ταχύτητα και γενικευσιμότητα, δηλαδή θα πρέπει, εκτός από την ευχερή χρήση της, να μπορεί να την μεταφέρει και σε ποικιλία πλαισίων και σύνθετων έργων. Οι Mayer και Wittrock (2006), υποστηρίζουν ότι για να επιτευχθεί η μεταφορά της αποκτηθείσας γνώσης, δηλαδή η γενικευσιμότητα, θα πρέπει η διδακτική μέθοδος που ακολουθείται, να προάγει την εννοιολογική κατανόηση, οδηγώντας τον μαθητή στην ενεργοποίηση τριών γνωστικών διαδικασιών: την επιλογή, την οργάνωση και την ολοκλήρωση. Αυτό σημαίνει ότι ο μαθητής θα πρέπει να επιλέξει τις σχετικές πληροφορίες από το υλικό που του παρουσιάζεται, έπειτα να οργανώσει στο μυαλό του αυτό το υλικό σε μία συνεκτική δομή και τελικά να ενσωματώσει το οργανωμένο αυτό υλικό στην ήδη υπάρχουσα γνώση που ανακτάται από τη μακρόχρονη μνήμη.

Έτσι, για την εκτέλεση μίας αριθμητικής πράξης, θα πρέπει ο μαθητής να επιλέξει και να κωδικοποιήσει τις παρεχόμενες πληροφορίες, όπως επίσης και να εκτελέσει τους υπολογισμούς (οι οποίοι μπορεί να περιλαμβάνουν άμεση ανάκληση από τη μνήμη, διαδικασίες όπως η απαρίθμηση, αλλά και κανόνες ή αλγόριθμους που περιλαμβάνονται σε πράξεις με πολυψήφιους αριθμούς (DeStefano & LeFevre, 2004). Για παράδειγμα, ένα παιδί που θέλει να προσθέσει νοερά δύο διψήφιους αριθμούς, όπως το 47+78, θα πρέπει να υπολογίσει τον ΑΣ 7+8, που προϋποθέτει την άμεση ανάκληση από την μακρόχρονη μνήμη διότι σε αντίθετη περίπτωση θα πρέπει να χρησιμοποιήσει δεξιότητες μέτρησης-απαρίθμησης, αυξάνοντας έτσι τον χρόνο που θα πρέπει να διατηρηθεί στη μνήμη το αρχικό άθροισμα, να θυμάται το 5, να μεταφέρει το 1, να θυμάται ότι θα πρέπει να προσθέσει το 4, το 7 και το 1, να εκτελέσει την πρόσθεση 4+7+1 και να τα βάλει όλα στη σωστή σειρά ως 125 (Chinn & Ashcroft, 2017). Βασικό ρόλο στις παραπάνω λειτουργίες, διαδραματίζει η μνήμη εργασίας, καθώς σύμφωνα με τον Baddeley (2007), είναι υπεύθυνη για την προσωρινή αποθήκευση, επεξεργασία, διατήρηση, ενημέρωση και γενικά διαχείριση των εισερχόμενων πληροφοριών.

Πιο αναλυτικά, η μνήμη εργασίας διαθέτει τέσσερα επιμέρους συστήματα: το κεντρικό εκτελεστικό σύστημα, τον φωνολογικό βρόγχο, την οπτικο-χωρική σκιαγράφηση και την επεξεργασία επεισοδίων ή γεγονότων (Baddeley, 2000· Baddeley, 2007). Κάθε ένα από αυτά τα συστήματα είναι υπεύθυνο για συγκεκριμένες διαδικασίες, οι οποίες λαμβάνουν χώρα στις αριθμητικές δεξιότητες (Fuchs et al., 2006· Andersson, 2010). Συγκεκριμένα, σύμφωνα με τον Baddeley (όπως αναφέρει ο Αγαλιώτης, 2012), το κεντρικό εκτελεστικό σύστημα είναι εκείνο που κατηγοριοποιεί τις εισερχόμενες πληροφορίες και έπειτα ενεργοποιεί τα κατάλληλα συστήματα επεξεργασίας. Ο φωνολογικός βρόγχος είναι υπεύθυνος για την συγκράτηση των πληροφοριών σε λεκτική-φωνολογική μορφή, αλλά και για τη διατήρησή τους μέσω λεκτικών επαναλήψεων. Ακόμη, ο ρόλος της οπτικοχωρικής-σκιαγράφησης είναι η αποθήκευση μη λεκτικών πληροφοριών, με τη μορφή σχεδίων ή εικόνων, ενώ το σύστημα επεξεργασίας επεισοδίων είναι υπεύθυνο για τη συγκράτηση αλλά και τη χρήση αναπαραστάσεων διαφόρων καταστάσεων ή γεγονότων, που δεν εξαρτώνται από κάποιο συγκεκριμένο αισθητηριακό σύστημα. Όλα τα παραπάνω συστήματα συνεργάζονται μεταξύ τους, αλλά με διαφορετικούς τρόπους ανάλογα με το είδος της πληροφορίας αλλά και με το κάθε άτομο ξεχωριστά.

Έτσι, στην περίπτωση της εκτέλεσης ενός αλγορίθμου μίας αριθμητικής πράξης, θα πρέπει να διατηρηθούν οι νοητικές εικόνες στη μνήμη εργασίας, τη φωνολογική και οπτικοχωρική (Geary, Hoard, Nugent & Byrd-Craven, 2008), ώστε να μπορέσει να αναπτυχθεί ένα εφικτό μονοπάτι, για την ορθή εκτέλεσή της. Για τον λόγο αυτόν η αναπαράσταση μίας αριθμητικής πράξης, απαιτεί από τους μαθητές να μεταφράσουν τις αριθμητικές πληροφορίες σε προφορικές, πραξιακές, εικονιστικές, συμβολικές και ποσοτικές αναπαραστάσεις, οι οποίες δείχνουν τον τρόπο με τον οποίο οι πληροφορίες αυτές συνδέονται (Montague et al., 2014).

Η μνήμη εργασίας και οι εκτελεστικές λειτουργίες υποστηρίζουν τις αριθμητικές δεξιότητες των παιδιών, παρέχοντας ένα ευέλικτο και αποτελεσματικό νοητικό πλαίσιο, το οποίο μπορεί να διαχειριστεί τις διαφορετικές διαδικασίες που περιλαμβάνονται στην αριθμητική επίδοση (Swanson & Beebe-Frankenberger, 2004). Σύμφωνα με τον Andersson (2010), η υποστήριξη αυτή, εκτός από την ταυτόχρονη επεξεργασία και αποθήκευση των πληροφοριών, περιλαμβάνει και την απομάκρυνση των μη σχετικών πληροφοριών από τη μνήμη εργασίας, όπως επίσης και την ικανότητα να αλλάζει κανείς μία στρατηγική με μία άλλη. Όταν ένα παιδί εκτελεί αριθμητικές πράξεις μέσω στρατηγικών απαρίθμησης, κάτι που προϋποθέτει την καλή λειτουργία της μνήμης εργασίας, τελικά θα δημιουργηθούν οι απαραίτητες συνδέσεις μεταξύ των αριθμητικών πράξεων και του επικείμενου αποτελέσματος. Σύμφωνα με τους Fuchs και τους συνεργάτες (2006), βασική προϋπόθεση για την γρήγορη και αποτελεσματική απαρίθμηση και την κατάκτηση των ΑΣ των αριθμητικών πράξεων, που αποτελούν βασική προϋπόθεση για την εκτέλεση ενός αλγορίθμου, είναι η ταχύτητα επεξεργασίας των πληροφοριών, καθώς όπως οι ίδιοι υποστηρίζουν, η αργή ταχύτητα επεξεργασίας των πληροφοριών αυξάνει το χρονικό διάστημα για την ανάκληση των απαντήσεων που προέκυψαν από την απαρίθμηση και για τη σύνδεσή τους με τα αποτελέσματα των ΑΣ στη μνήμη εργασίας. Αυτή η αύξηση του χρονικού διαστήματος δημιουργεί την πιθανότητα, ο διαχωρισμός αυτός να εδραιωθεί πριν πραγματοποιηθεί η σύνδεσή τους, με αποτέλεσμα να αποκλείεται η ανάπτυξη των αναπαραστάσεών τους στη μακρόχρονη μνήμη.

Επιπλέον, επειδή η απαρίθμηση συμπεριλαμβάνει τη χρήση φωνολογικών και εννοιολογικών πληροφοριών από τη μακρόχρονη μνήμη (όπως για παράδειγμα την κατανόηση και αντιστοίχιση των ποσοτήτων με την κατάλληλη αριθμο-λέξη), γίνεται αντιληπτό ότι αδυναμίες που σχετίζονται με τα συγκεκριμένα συστήματα μνήμης θα προκαλέσουν δυσκολίες στη δημιουργία και σύνδεση των αριθμητικών πράξεων με τα αντίστοιχα αποτελέσματά τους κατά τη διάρκεια της απαρίθμησης (Geary, Hoard, Byrd-Craven, Nugent & Numtee, 2007). Αυτό θα έχει ως επίπτωση, τη δυσκολία στην κατάκτηση των ΑΣ των αριθμητικών πράξεων καθώς και στην ανάκλησή τους από τη μακρόχρονη μνήμη (Andersson, 2010). Επομένως, γίνεται φανερό από τα παραπάνω, ότι και η μακρόχρονη μνήμη αποτελεί σημαντικό παράγοντα αναφορικά με τις αριθμητικές δεξιότητες, καθώς οι ΑΣ εμπλέκονται στην εκτέλεση των αλγορίθμων και οι κανόνες που εφαρμόζονται κατά την εκτέλεση των βημάτων των αλγορίθμων αποθηκεύονται επίσης στην μακρόχρονη μνήμη (Fuchs et al., 2006).

Εξίσου σημαντική είναι και η οπτικο-χωρική διάσταση των αλγορίθμων (Αγαλιώτης, 2011). Σύμφωνα με τους Chinn και Ashcroft (2017), η χωρική αντίληψη επηρεάζει τον τρόπο οργάνωσης της εργασίας κάποιου που επιλύει τον αλγόριθμο μιας αριθμητικής πράξης, με μολύβι και χαρτί. Πιο συγκεκριμένα, επηρεάζει τον τρόπο με τον οποίο θα στοιχηθούν τα ψηφία στην κατάλληλη στήλη ανάλογα με την θεσιακή τους αξία, τη μεταφορά μονάδων διαφόρων τάξεων στο σωστό σημείο, όπως επίσης και τους αριθμούς που θα πρέπει να υπολογιστούν στο τέλος προκειμένου να διεξαχθεί το ορθό αποτέλεσμα.

Τέλος, ένας ακόμη σημαντικός παράγοντας στην εκτέλεση των αλγορίθμων των αριθμητικών πράξεων αποτελεί η προσοχή και οι διάφορες διαστάσεις που μπορεί η ίδια να περιλαμβάνει, όπως το εύρος, η διάρκεια και η επιλεκτική χρήση (Fuchs et al., 2006· Αγαλιώτης, 2011).

## 1.3. Η αριθμητική πράξη του πολλαπλασιασμού

### 1.3.1. Πολλαπλασιασμός και εννοιολογική γνώση

Η έννοια του πολλαπλασιασμού θεωρείται κρίσιμο και βασικό στοιχείο για την μετέπειτα πορεία των μαθητών στο γνωστικό πεδίο των μαθηματικών, καθώς η ανάπτυξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης που συνεπάγεται τον σχηματισμό της έννοιας των «σύνθετων μονάδων» (composite units), αποτελεί θεμέλιο και βασική προϋπόθεση για την κατανόηση της άλγεβρας, των λόγων και των αναλογιών, των κλασμάτων, των δεκαδικών αριθμών και των ποσοστών, της ερμηνείας στατιστικών και της κατανόησης και ανάγνωσης των κλιμάκων (Greer, 1992· Lamon, 1993· Hackenberg, 2010· Downton & Sullivan, 2017). Σύμφωνα με τον Steffe (1994) και τους Downton και Sullivan (2017), με τον όρο «σύνθετη μονάδα» εννοείται η ικανότητα του παιδιού να αντιληφθεί ένα σύνολο από στοιχεία-αντικείμενα περισσότερα του ενός, ως μία μονάδα. Η ένωση των σύνθετων μονάδων αποτελεί τον πυρήνα του πολλαπλασιασμού. Η ανάπτυξη της έννοιας του πολλαπλασιασμού στα μικρά παιδιά ηλικίας 8 ετών, βασίζεται ακριβώς στο νόημα που θα δώσουν στις σύνθετες μονάδες που δομούν, έτσι ώστε μετέπειτα να καταφέρουν να προσδώσουν νόημα σε φράσεις όπως πέντε φορές το τρία (Downton & Sullivan, 2017).

Σύμφωνα με τους Larsson και τους συνεργάτες (2017), κυρίαρχο στοιχείο για την ανάπτυξη του πολλαπλασιαστικού συλλογισμού και την εκτέλεση πολλαπλασιαστικών διαδικαστικών δεξιοτήτων είναι η κατανόηση και εφαρμογή της αντιμεταθετικής ιδιότητας του πολλαπλασιασμού. Η κατανόηση της αντιμεταθετικής ιδιότητας σημαίνει ότι το παιδί αντιλαμβάνεται ότι ακόμη και αν αλλάξουμε τη σειρά των παραγόντων το αποτέλεσμα θα παραμείνει το ίδιο (π.χ 7x8=56 ή 8x7=56) (Downton & Sullivan, 2017). Εξίσου σημαντική είναι και η προσεταιριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού, όπου στην περίπτωση που υπάρχουν περισσότεροι των δύο αριθμών τότε η σειρά με την οποία εκτελούνται οι πράξεις μπορεί να αλλάξει, χωρίς να αλλάξει το αποτέλεσμα, δηλαδή το γινόμενο (Ding, Li & Capraro, 2013), όπως για παράδειγμα (2x3)x5 = 2x(3x5). Η προσεταιριστική ιδιότητα υποστηρίζει τη στρατηγική της ανάλυσης παραγόντων (decomposition strategy), αφού το 16x25 μπορεί να μετατραπεί σε 8x2x25 και στη συνέχεια να αλλάξει η σειρά των υπολογισμών, όπως (8x2)x25 ή 8x(2x25) (Larsson, Pettersson & Andrews, 2017), προσδίδοντας με αυτόν τον τρόπο μία μεγάλη ευελιξία στους τρόπους με τους οποίους μπορεί κανείς να εκτελέσει τους διάφορους υπολογισμούς (Ding, Li & Capraro, 2013).

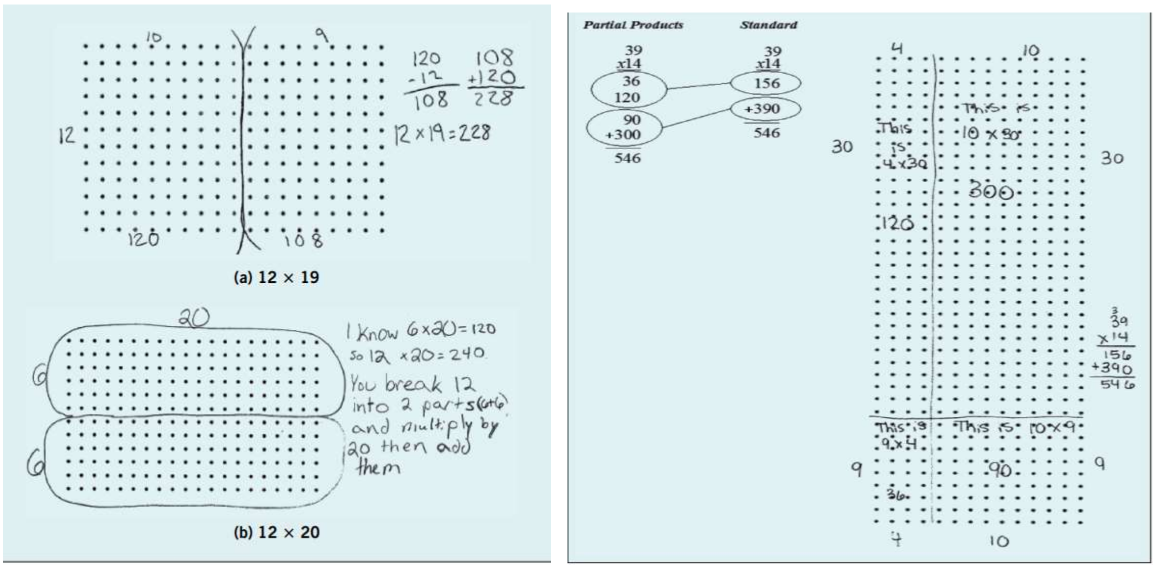
Επιπλέον, βασική προϋπόθεση για την κατανόηση και εκτέλεση του πολλαπλασιασμού αποτελεί η επιμεριστική ιδιότητα, η οποία θεωρείται η πιο δύσκολη ιδιότητα για να κατακτηθεί από τους μαθητές ακόμα και σε επίπεδο δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (Carpenter, Levi, Franke, & Zeringue, 2005). Για την επιμεριστική ιδιότητα, προϋποτίθεται η αναδιοργάνωση των ΑΣ του πολλαπλασιασμού με έναν πιο ευέλικτο τρόπο. Για παράδειγμα, για την ανάπτυξη της σχέσης μεταξύ του 6x8 και του 6x7, θα πρέπει να εφαρμοστεί μία πράξη μέρους-όλου κατά την οποία ο μαθητής θα πρέπει να είναι σε θέση να διακρίνει ότι επαναλαμβάνοντας το 8 έξι φορές, είναι ισοδύναμο με την επανάληψη του 7 έξι φορές και έπειτα του 1 έξι φορές (Downton & Sullivan, 2017). Ωστόσο, για να πραγματοποιηθεί η παραπάνω ανάλυση, θα πρέπει να υπάρχει σαφής διάκριση μεταξύ πολλαπλασιαστή και πολλαπλασιαστέου, η οποία δεν μπορεί να επιτευχθεί εάν τα παιδιά συνδέσουν τον πολλαπλασιασμό μονομερώς με τη στρατηγική της επαναλαμβανόμενης πρόσθεσης (Jacob & Willis, 2003). Το γεγονός αυτό έχει ως αποτέλεσμα πολλά παιδιά και κυρίως τα παιδιά που έχουν χαμηλή επίδοση ή που βρίσκονται σε κίνδυνο εμφάνισης ΕΜΔ (at risk), να αδυνατούν να κατανοήσουν την ανάλυση των παραγόντων (Hurst & Hurrell, 2016· Götze, 2019) όπως για παράδειγμα, ο πολλαπλασιασμός 7x8 μπορεί να αναλυθεί με διάφορους τρόπους όπως: (5x8 + 2x8), (7x7 + 7x1), (7x5 + 7x3) και ούτω καθεξής. Η παραπάνω αδυναμία μπορεί να οδηγήσει στην υιοθέτηση πιο απλών στρατηγικών μέτρησης, όπως η μέτρηση ανά ένα ή η επαλαμβανόμενη πρόσθεση. (Zhang, Xin, Harris & Ding, 2013). Σύμφωνα με τους Carpenter, Levi, Franke, και Zeringue (2005), η κατανόηση της επιμεριστικής ιδιότητας, παρέχει στους μαθητές ένα πλαίσιο προκειμένου να μάθουν τους ΑΣ του πολλαπλασιασμού μέσα από τον συσχετισμό των άγνωστων με τους ήδη γνωστούς ΑΣ. Για παράδειγμα, ένας μαθητής ο οποίος δε γνωρίζει τον ΑΣ 4x7 από μνήμης, αλλά ξέρει τον ΑΣ 2x7, τότε μπορεί συσχετίζοντας τους να βρει το αποτέλεσμα, καθώς 2x7 = 14 και 14+14=28. Επιπλέον, οι μαθητές μπορούν να χρησιμοποιήσουν αυτήν τη γνώση για να μάθουν στρατηγικές πολλαπλασιασμού μεγαλύτερων αριθμών, καθώς σχεδόν όλες οι αποτελεσματικές διαδικασίες εκτέλεσης πολλαπλασιασμών με πολυψήφιους τελεστές, στηρίζονται στην επιμεριστική ιδιότητα (Carpenter, Levi, Franke, & Zeringue, 2005).

Η κατανόηση της αντιμεταθετικής και της επιμεριστικής ιδιότητας του πολλαπλασιασμού προάγει την ορθή εκτέλεση πολλαπλασιασμών με διψήφιους και πολυψήφιους τελεστές (Larsson, Pettersson & Andrews, 2017). Προκειμένου να κατανοηθούν οι ιδιότητες του πολλαπλασιασμού αλλά και η λειτουργία του κάθε τελεστή θα πρέπει να χρησιμοποιούνται πραξιακές και εικονιστικές αναπαραστάσεις (Αγαλιώτης, 2011). Μάλιστα, θεωρείται αναγκαίο να παρουσιάζονται στα παιδιά διάφορες αναπαραστάσεις μέσα από τις οποίες θα γίνεται σαφής διάκριση μεταξύ πολλαπλασιαστή και πολλαπλασιαστέου, καθώς ο διαχωρισμός αυτός είναι ουσιαστικός προκειμένου να αναπτυχθεί η κατανόηση της αντιμεταθετικής, αλλά και της επιμεριστικής ιδιότητας του πολλαπλασιασμού (Downton & Sullivan, 2017· Götze, 2019).

Για την αναπαράσταση του πολλαπλασιασμού χρησιμοποιούνται συνήθως: 1) το μοντέλο της ένωσης αντικειμένων που έχουν τον ίδιο αριθμό σε κάθε ομάδα (grouping model), 2) το μοντέλο της παράταξης (array model) ή το μοντέλο του εμβαδού (area model), 3) το μοντέλο των αριθμογραμμών (number-line model) και 4) το μοντέλο των συνδυασμών ζευγών (combination model) (Fuchs et al., 2021· Lee, Han, Kim & Herner-Patnode, 2021· Jitendra, Dougherty, Sanchez & Suchil, 2022). Τα μοντέλα αναπαράστασης του πολλαπλασιασμού μπορούν να υποστηρίξουν τις υπολογιστικές στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι μαθητές για την εκτέλεση πολλαπλασιασμών με πολυψήφιους τελεστές, όπως επίσης και την διαισθητική χρήση της επιμεριστικής ιδιότητας (Carpenter, Levi, Franke, & Zeringue, 2005). Για παράδειγμα, σύμφωνα με την έρευνα των Matney και Daugherty (2013), το μοντέλο της παράταξης (arrays), συντέλεσε καθοριστικά στο να κατανοήσουν οι μαθητές ΣΤ’ τάξης, τη λειτουργία του τυπικού αλγόριθμου του πολλαπλασιασμού, όπως επίσης οδήγησε και στην ευέλικτη χρήση πιο αποτελεσματικών στρατηγικών επίλυσης, κυρίως στον εναλλακτικό αλγόριθμο των μερικών γινομένων.

**<u>Εικόνα 1. Χρήση του μοντέλου παράταξης για την εκτέλεση αλγορίθμων πολλαπλασιασμού.</u>**

**A.** **B.**




(Matney & Daugherty, 2013)

Παρόμοια αποτελέσματα βρέθηκαν και στην έρευνα του Izsak (2004) με την εφαρμογή του μοντέλου του εμβαδού (area). Παρόλα αυτά, αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι πολλοί μαθητές δυσκολεύονται στη μετάβαση από την εκτέλεση πολλαπλασιασμών με μονοψήφιους τελεστές στην εκτέλεση πολλαπλασιασμών με πολυψήφιους τελεστές, γιατί ανακαλύπτουν ότι οι στρατηγικές που χρησιμοποιούσαν μέχρι εκείνη τη στιγμή είναι ανεπαρκείς για μεγαλύτερους αριθμούς (Izsak, 2004).

Ακόμη ένα βασικό στοιχείο για την εκτέλεση πολλαπλασιασμών με πολυψήφιους αριθμούς αλλά και την κατανόηση του αλγορίθμου του πολλαπλασιασμού αποτελεί, σύμφωνα με τον Αγαλιώτη (2011), η έννοια της θεσιακής αξίας, καθώς δίχως αυτήν οι μαθητές δεν θα είναι σε θέση να κατανοήσουν ότι για παράδειγμα το 4x8 στη στήλη των μονάδων θα δώσει γινόμενο 32, αλλά στη στήλη των δεκάδων θα δώσει γινόμενο 3200. Αυτό θα έχει ως επίπτωση οι μαθητές να μην κατανοούν την ιδιαίτερη σημασία που πρέπει να δοθεί στις λεπτομέρειες και στα βήματα που πρέπει να ακολουθηθούν κατά την εκτέλεση του αλγορίθμου, όπως για παράδειγμα τη μετακίνηση των μερικών γινομένων κατά μία θέση αριστερά.

Η σωστή λειτουργία της έννοιας της θεσιακής αξίας είναι απαραίτητο να συνοδεύεται και από την κατάλληλη λεκτική επένδυση, ούτως ώστε να μπορεί να γίνει αντιληπτή και η λειτουργία του κάθε αριθμού κατά την εκτέλεση ενός αλγορίθμου και έτσι να μπορεί να γίνει χρήση αναπαραστάσεων και στην περίπτωση πολλαπλασιασμών με πολυψήφιους αριθμούς (Αγαλιώτης, 2011· Kaufmann, 2018· Götze και Baiker, 2021).

### 1.3.2. Πολλαπλασιασμός και διαδικαστική γνώση - στρατηγικές εύρεσης αποτελεσμάτων

Σύμφωνα με τους Hickendorff, Torbeyns και Verschaffel (2019), υπάρχουν πολλές έρευνες σχετικά με τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν τα παιδιά στην εκτέλεση αριθμητικών πράξεων με μονοψήφιους αριθμούς, ουσιαστικά δηλαδή για τους ΑΣ των αριθμητικών πράξεων, ενώ η έρευνα αναφορικά με τις αριθμητικές πράξεις με πολυψήφιους αριθμούς είναι ιδιαίτερα περιορισμένη, ιδίως ως προς τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση, γεγονός που αποτελεί πρόβλημα, διότι στις μεγαλύτερες τάξεις του δημοτικού η διδασκαλία επικεντρώνεται στην επίλυση αριθμητικών προβλημάτων με πολυψήφιους αριθμούς και τα παιδιά μπορεί να εμφανίσουν ιδιαίτερα μεγάλες δυσκολίες ως προς αυτό.

Οι στρατηγικές αναφορικά με τους πολυψήφιους αριθμούς διαφέρουν σημαντικά σε σχέση με τους μονοψήφιους αριθμούς (Izsak, 2004). Συγκεκριμένα, οι στρατηγικές που χρησιμοποιούν τα παιδιά για την εκτέλεση των ΑΣ του πολλαπλασιασμού, εξελίσσονται σταδιακά ξεκινώντας από την απαρίθμηση ανά ένα (unitary counting or counting all) προχωρώντας στη ρυθμική απαρίθμηση (rhythmic or skip counting), έπειτα στην επαναλαμβανόμενη πρόσθεση (repeated addition) και τη διπλή μέτρηση (double counting), εν συνεχεία στην ανάλυση παραγόντων (decomposition) καταλήγοντας, τελικά, στην άμεση ανάκληση (direct retrieval) των ΑΣ (Zhang, Ding, Barrett, Xin & Liu, 2013· Zhang, Ding, Lee & Chen, 2016). Πρόκειται για μια διαδικασία, η οποία ξεκινάει ήδη από την προσχολική ηλικία και χρειάζεται μεγάλο χρονικό διάστημα, προκειμένου οι μαθητές να μεταβούν από την μέτρηση ανά ένα στην άμεση ανάκληση και έπειτα στην εκτέλεση αλγορίθμων (Zhang, Ding, Barrett, Xin & Liu, 2013).

Πιο αναλυτικά, σύμφωνα με την Anghileri (1989), κατά την πρώτη φάση γίνεται άμεση  μοντελοποίηση με υλικά απαριθμώντας τα στοιχεία ομάδων αντικειμένων ανά ένα (unitary counting or counting all) προκειμένου να βρεθεί το σύνολό τους. Στη δεύτερη φάση, τα παιδιά απαριθμούν τα στοιχεία ομάδων αντικειμένων, δίνοντας έμφαση στον τελευταίο αριθμό που αντιπροσωπεύει το σύνολο των στοιχείων που μετρήθηκαν (π.χ 1,2,3…4,5,6…7,8,9...10,11,12). Έπειτα, προχωρούν σε μία συνεχή αρίθμηση (counting-on) των αντικειμένων, που επαναλαμβάνεται κάποιες φορές. Η συνεχής αυτή αρίθμηση δίνει στα παιδιά τη δυνατότητα να αναπτύξουν στην πορεία ένα αριθμητικό μοτίβο (number pattern), επαναλαμβάνοντας μόνο τους αριθμούς που βρίσκονται στο τέλος της κάθε μέτρησης-απαρίθμησης, μετρώντας έτσι ανά 2, ανά 3 κλπ., όπως για παράδειγμα 3,6,9,12. (Anghileri, 1989· Tzur, Xin, Si, Kenney & Guebert, 2010). Η διαδικασία αυτή οδηγεί αρχικά στην προσθετική σκέψη, καθώς χρησιμοποιούνται γνωστά προσθετικά δεδομένα (Anghileri, 1989). Η κατάκτηση αυτού του σχήματος θεωρείται μείζονος σημασίας, καθώς αποτελεί τη βάση για την εκτέλεση περαιτέρω αριθμητικών πράξεων (Steffe, 1994). Για την ανάπτυξη του πολλαπλασιαστικού συλλογισμού, θα πρέπει το παιδί να προβεί σε μία ταυτόχρονη διπλή εσωτερική αρίθμηση (internal counting), που έχει χαρακτηριστεί ως διπλή μέτρηση (double counting), καθώς από τη μία θα πρέπει να μετρά την επαλαμβανόμενη σύνθετη μονάδα και από την άλλη να υπολογίζει ταυτοχρόνως πόσες φορές τη μέτρησε, γεγονός που οδηγεί στην κατανόηση των διαφορετικών ρόλων με τους οποίους είναι επιφορτισμένοι οι δύο παράγοντες (πολλαπλασιαστέος και πολλαπλασιαστής αντίστοιχα) (Anghileri, 1989· Tzur et al., 2013· Tzur, Xin, Si, Kenney & Guebert, 2010). Για παράδειγμα, 1,2,3 μήλα… μέτρησα 1 φορά το τρία 3 μήλα, 4,5,6 μήλα… μέτρησα 2 φορές το τρία 6 μήλα, 7,8,9 μήλα… μέτρησα 3 φορές το τρία 9 μήλα κλπ. Η μετατόπιση των παιδιών από την άμεση απαρίθμηση ανά ένα ή τη συνεχή απαρίθμηση, στη διπλή μέτρηση, αποτελεί ορόσημο για την ανάπτυξη του πολλαπλασιαστικού συλλογισμού και την εκτέλεση πολλαπλασιαστικών δεξιοτήτων (Zhang, Xin & Si, 2011). Στη συνέχεια, αρχίζουν να χρησιμοποιούν πιο εξελιγμένες στρατηγικές, όπως η ανάλυση των παραγόντων (decomposition) και η άμεση ανάκληση (direct retrieval) των ΑΣ του πολλαπλασιασμού (Zhang, Ding, Lee & Chen, 2016).

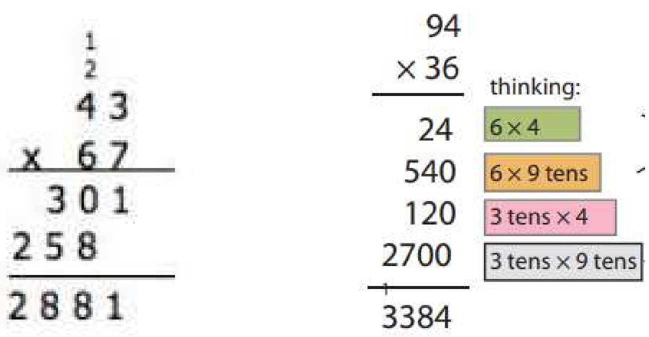
Σύμφωνα με τους Hickendorff, Torbeyns και Verschaffel (2019), αυτό που πρέπει να επισημανθεί είναι ότι στην περίπτωση της επίλυσης αλγορίθμων με πολυψήφιους αριθμούς δεν επαρκεί μόνο η κατάκτηση και αποτελεσματική ανάκληση των ΑΣ, καθώς το αποτέλεσμα που θα βρεθεί, πρέπει και να υπολογιστεί. Επομένως, πρέπει κανείς να γνωρίζει τον τρόπο με τον οποίο να χειρίζεται τους αριθμούς, ώστε να φτάσει στην ορθή απάντηση, κάτι που ονομάζεται «στρατηγική επίλυσης». Ωστόσο, είναι σημαντικό να αναφερθεί ότι είναι ιδιαίτερα περιορισμένη η έρευνα που έχει διεξαχθεί για τις στρατηγικές επίλυσης που χρησιμοποιούνται σχετικά με τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση πολυψήφιων αριθμών σε σύγκριση με την πρόσθεση και την αφαίρεση (Hickendorff, Torbeyns & Verschaffel, 2019· Fuson, 2020).

Οι στρατηγικές επίλυσης χωρίζονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες ανάλογα με το αν ακολουθούν και εφαρμόζουν την έννοια της θεσιακής αξίας ή όχι (Verschaffel, 2023). Έτσι από τη μία πλευρά έχουμε τις στρατηγικές που βασίζονται στα ψηφία (digit-based strategies), όπου δε δίνεται βαρύτητα στην έννοια της θεσιακής αξίας, όπως για παράδειγμα το 85 μπορεί να χωριστεί στο 8 και στο 5, αγνοώντας ότι το 8 αντιπροσωπεύει 8 δεκάδες = 80 και από την άλλη έχουμε τις στρατηγικές που βασίζονται στους αριθμούς (number-based strategies), με την ευρύτερη έννοια του μεγέθους που αντιπροσωπεύουν αυτοί οι αριθμοί σεβόμενοι απόλυτα την έννοια της θεσιακής αξίας, όπως για παράδειγμα ο αριθμός 85 μπορεί να χωριστεί στο 80 και στο 5 (Verschaffel, Luwel, Torbeyns & Van Dooren, 2009).

Το πιο χαρακτηριστικό παράδειγμα στρατηγικών επίλυσης που είναι ψηφιοκεντρικό είναι οι παραδοσιακοί αλγόριθμοι των αριθμητικών πράξεων (Hickendorff, Torbeyns & Verschaffel, 2019). Πρόκειται για μία διαδικασία που σύμφωνα με τους Flores, Moore και Meyer (2020), επικεντρώνεται στη διαδικαστική λειτουργία, περιλαμβάνει πολλά διαδοχικά βήματα, περιορίζει τις ευκαιρίες που μπορεί να έχουν τα παιδιά για βαθύτερη κατανόηση του νοήματος των διαδικασιών που ακολουθούν, όπως επίσης περιορίζει και την ανάπτυξη πιο αποτελεσματικών στρατηγικών για τον υπολογισμό πολλαπλασιασμών με πολυψήφιους αριθμούς. Στην περίπτωση του παραδοσιακού αλγορίθμου του πολλαπλασιασμού 43x67, όπως βλέπουμε και παρακάτω στην εικόνα 2Α., όταν πολλαπλασιάζουμε για παράδειγμα τον αριθμό 6, ο οποίος αντιπροσωπεύει 6 δεκάδες, με τον αριθμό 3, που αντιπροσωπεύει 3 μονάδες, το μερικό γινόμενο που προκύπτει είναι 18, δηλαδή 18 δεκάδες. Ωστόσο, το 1 στις 18 δεκάδες, ενώ στην ουσία είναι 1 εκατοντάδα διότι 18 δεκάδες =180, αναγράφεται ως «κρατούμενο» πάνω από το 4 (4 δεκάδες) .

**<u>Εικόνα 2. Αλγόριθμοι του πολλαπλασιασμού.</u>**

**A)** **B)**




(Fuson, 2020)

Γίνεται επομένως άμεσα αντιληπτό, ότι πρόκειται για μία εννοιολογικά παραπλανητική διαδικασία για όλους τους μαθητές (Fuson, 2020), και ιδίως για μαθητές που μπορεί να αντιμετωπίζουν για παράδειγμα προβλήματα χωρο-χρονικής οργάνωσης, προσοχής και μνήμης, όπως η μνήμη εργασίας, η μακρόχρονη μνήμη και η μνήμη ακολουθιών και γενικά γνωστικές και μεταγνωστικές δυσκολίες, όπως είναι για παράδειγμα οι μαθητές με ΕΜΔ (Αγαλιώτης, 2011).

Σύμφωνα με τους Fuson και Beckmann (2012), ένας αλγόριθμος προκειμένου να θεωρηθεί κατάλληλος και επαρκής για διδασκαλία, θα πρέπει να πληροί τα παρακάτω κριτήρια: α) να υποστηρίζει την κατανόηση και σωστή χρήση της θεσιακής αξίας, καθώς αποτελεί απαραίτητο στοιχείο για την εκτέλεση των βημάτων των αλγορίθμων, β) να διευκολύνει τον υπολογισμό των ΑΣ των αριθμητικών πράξεων, δεδομένης της κεντρικής θέσης που κατέχουν στην επίλυση των αλγορίθμων, γ) να βοηθά τους μαθητές ώστε να γράφουν τους αριθμούς σύμφωνα με τη σειρά που υπαγορεύει το δεκαδικό αριθμητικό σύστημα, κι αυτό διότι σε πολλές γλώσσες αντιστρέφεται η σειρά των αριθμών και δε συμβαδίζει με την θεσιακή τους αξία, όπως για παράδειγμα στα αγγλικά ο αριθμός 17 (seventeen) έχει πρώτα το 7 (μονάδες) και έπειτα το 1 (δεκάδα), δ) να προωθεί την ολοκλήρωση της εκτέλεσης ενός βήματος κάθε φορά χωρίς εναλλαγές, καθώς σε αντίθετη περίπτωση μπορούν να προκύψουν πολλά λάθη, ε) να διατηρεί την αρχική μορφή των πολυψήφιων αριθμών, χωρίς παραλλαγές, διότι έτσι καθίσταται εννοιολογικά σαφέστερος, ζ) τέλος, προκειμένου να διευκολυνθούν οι μαθητές στην εκτέλεση των βημάτων, να μπορούν να πραγματοποιηθούν οι υπολογισμοί από τα αριστερά προς τα δεξιά.

Σύμφωνα με τα παραπάνω κριτήρια, ένας αλγόριθμος που μπορεί να θεωρηθεί κατάλληλος για διδασκαλία είναι αυτός που ακολουθεί τη «μέθοδο των μερικών γινομένων», όπου τα γινόμενα γράφονται αυτούσια, χωρίς μετακινήσεις θέσεως, όπως επίσης δεν προϋποθέτει τη μνημονική συγκράτηση και τη μεταφορά αριθμών (Αγαλιώτης, 2011), όπως περιγράφεται αναλυτικά στην εικόνα 2Β. Επιπλέον, βασικό στοιχείο σύμφωνα με τους Fuson και Beckmann (2012), είναι ότι ο αλγόριθμος των μερικών γινομένων, μπορεί να εκτελεστεί και από τα αριστερά προς τα δεξιά, όπως φαίνεται στο παράδειγμα που δίνεται στην εικόνα 3Α.

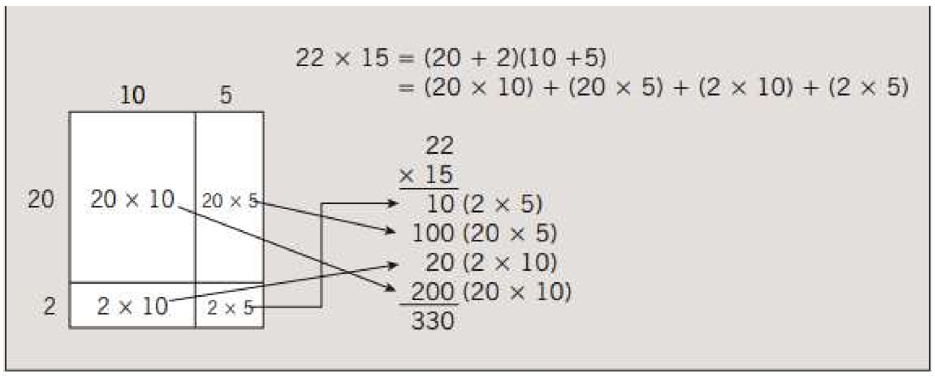
**Εικόνα 3. Παραλλαγή του αλγορίθμου των μερικών γινομένων.**

**A.** **B.**


(Fuson & Beckmann, 2012)

Παρόλα αυτά, υπάρχουν μαθητές οι οποίοι βρίσκουν ιδιαίτερα απαιτητικούς τους παραπάνω αλγόριθμους και προτιμούν να χρησιμοποιούν αναπαραστάσεις (Fuson & Beckmann, 2012) όπως το μοντέλο της παράταξης στην εικόνα 4, βάσει του οποίου αποσαφηνίζονται οι σχέσεις μεταξύ των αριθμών, όπως επίσης και οι απαραίτητοι επιμέρους πολλαπλασιασμοί. Η χρήση αυτού του μοντέλου επιτρέπει τους μαθητές να καταγράφουν τα μερικά γινόμενα χωρίς να ανησυχούν για τη μεταφορά ψηφίων, όπως επίσης μπορούν να αντιλαμβάνονται το μέγεθος του εκάστοτε γινομένου (Lee, 2014).

**Εικόνα 4. Χρήση του μοντέλου παράταξης (array) στον πολλαπλασιασμό δύο διψήφιων αριθμών.**




(Lee, 2014)

Η συγκεκριμένη μέθοδος, ενώ θεωρείται αποτελεσματική και κατάλληλη για διδασκαλία, καθώς δείχνει ξεκάθαρα τη θεσιακή αξία των ψηφίων και ενισχύει τη γενίκευση της μάθησης, ωστόσο αποτελεί ένα χρονοβόρο τρόπο επίλυσης, ο οποίος δεν διατίθεται για βελτίωση της ευχέρειας στην επίλυση των αλγορίθμων (Fuson & Beckmann, 2012).

## 1.4. Μέθοδοι και τεχνικές διδασκαλίας για τη βελτίωση δεξιοτήτων εκτέλεσης πολλαπλασιασμών

Σύμφωνα με τον Αγαλιώτη (2011), η υποστήριξη των μαθητών στην απόκτηση μαθηματικών γνώσεων και δεξιοτήτων, δεν μπορεί να πραγματοποιείται μέσω μίας μόνο μεθόδου ή τεχνικής, ανεξάρτητα από το πόσο πετυχημένη μπορεί να αποδείχθηκε κατά τη διδασκαλία ενός αντικειμένου. Ταυτοχρόνως, όμως, προκειμένου να αποφευχθεί ένας συνεχής αυτοσχεδιασμός των εκπαιδευτικών κατά την επιλογή μεθόδων και διαδικασιών, είναι χρήσιμο να υπάρχουν κάποιες κατευθυντήριες γραμμές ως προς την υλοποίηση της διδασκαλίας.

Έτσι, για την υποστήριξη των μαθητών στην κατάκτηση μαθηματικών εννοιών και δεξιοτήτων, βάσει σχετικών ερευνών, έχει προταθεί η χρήση μαθητοκεντρικών προσεγγίσεων, δηλαδή η διδασκαλία στρατηγικών μάθησης (strategic instruction), όπως είναι η αυτό-ρυθμιζόμενη μάθηση ή η διδασκαλία μνημονικών στρατηγικών (Zhang, Xin & Si, 2011· Agrawal & Morin, 2016· Hughes, Morris, Therrien & Benson, 2017), αλλά και η χρήση συμπεριφοριστικών-δασκαλοκεντρικών μεθόδων, δηλαδή η άμεση διδασκαλία (direct instruction) και η σαφής διδασκαλία (explicit instruction), η οποία έχει χαρακτηριστεί επανειλημμένα ως μία από τις πιο αποτελεσματικές μεθόδους διδασκαλίας για μαθητές με ΕΜΔ (Fuchs et al., 2003· Gersten et al., 2009). Σύμφωνα με τους Hughes, Morris, Therrien και Benson (2017), τα δομικά στοιχεία της σαφούς διδασκαλίας παρουσιάζουν πολλές ομοιότητες με την άμεση διδασκαλία, σε τέτοιο βαθμό που κάποιος θα μπορούσε να θεωρήσει ότι ουσιαστικά πρόκειται για την ίδια προσέγγιση.

Η σαφής διδασκαλία προϋποθέτει την εφαρμογή ενός προκαταβολικού οργανωτή, την παρουσίαση του διδακτικού αντικειμένου, την καθοδηγούμενη εξάσκηση, την αυτόνομη εξάσκηση, την καταγραφή και τον έλεγχο της προόδου του μαθητή και την τακτική ανατροφοδότηση (Agrawal & Morin, 2016). Η διδασκαλία στρατηγικών μάθησης προϋποθέτει τον προσδιορισμό ενός μαθησιακού στόχου σε συνεργασία εκπαιδευτικού και μαθητή, την επεξήγηση των παραμέτρων του μαθησιακού στόχου στον μαθητή και την επισήμανση της σημασίας του ελέγχου τους, την ανάδειξη των δυσκολιών που θα αντιμετωπιστούν έπειτα από την κατάκτηση της στρατηγικής, την παρουσίαση της στρατηγικής είτε από τον εκπαιδευτικό είτε από άλλον μαθητή που ήδη την κατέχει, την εξάσκηση του μαθητή στη χρήση της στρατηγικής αλλά και τον έλεγχο της εφαρμογής της, προκειμένου να αποφευχθούν λάθη σε μια πορεία αυτόνομης μάθησης (Αγαλιώτης, 2011). Σύμφωνα με τους Swanson και Sachse-Lee (2000), ο συνδυασμός των παραπάνω προσεγγίσεων είναι πιο αποτελεσματικός σε σύγκριση με την εφαρμογή της κάθε προσέγγισης ξεχωριστά.

Μία ακόμη διδακτική προσέγγιση που ακολουθείται για την κατάκτηση μαθηματικών εννοιών και δεξιοτήτων, είναι εκείνη που βασίζεται στις αρχές του κονστρουκτιβισμού. Βασική αρχή της κονστρουκτιβιστικής προσέγγισης είναι ότι το άτομο κατασκευάζει τη γνώση του ενεργά και όχι με παθητικό τρόπο, ύστερα από την αλληλεπίδρασή του με το περιβάλλον (Kroesbergen & Van Luit, 2002, 2004). Κεντρική θέση στην κονστρουκτιβιστική θεωρία κατέχει η έννοια του σχήματος. Με λίγα λόγια δηλαδή, δίνεται έμφαση στις προηγούμενες γνώσεις που διαθέτει ο μαθητής, πάνω στις οποίες προστίθενται καινούργιες πληροφορίες, δημιουργώντας έτσι ένα ισχυρά συνδεδεμένο δίκτυο γνώσεων στην μακρόχρονη μνήμη (σχήμα), υποστηρίζοντας ταυτόχρονα με αυτόν τον τρόπο τη λειτουργία της μνήμης εργασίας (Hord et al., 2016). Σύμφωνα με τους Kroesbergen και Van Luit (2002), κύριο έργο των εκπαιδευτικών που εφαρμόζουν αυτήν την προσέγγιση, είναι να διαμορφώσουν την αλληλεπίδραση με τέτοιον τρόπο ώστε οι μαθητές να ανακαλύψουν μόνοι τους τη νέα γνώση. Αυτό σημαίνει ότι οι μαθητές δε διδάσκονται στρατηγικές επίλυσης. Αντίθετα, οι εκπαιδευτικοί δομούν τα μαθήματα θέτοντας ερωτήσεις και προβλήματα για τα οποία οι ίδιοι οι μαθητές ψάχνουν να βρουν τη λύση, συζητώντας κάθε φορά για διαφορετικές στρατηγικές και διαδικασίες επίλυσης. Έτσι, ανακαλύπτουν τον τρόπο με τον οποίο θα επιλύσουν το εκάστοτε πρόβλημα, αποκτώντας σαν αποτέλεσμα τη νέα γνώση.

Επιπλέον, αποτελεσματική πρακτική για τη διδασκαλία μαθηματικών γνώσεων και δεξιοτήτων στους μαθητές και ιδίως σε μαθητές με ΕΜΔ, έχει αποδειχθεί η χρήση αναπαραστάσεων με τη βοήθεια των οποίων εκφράζονται οι διάφορες μαθηματικές έννοιες (Jitendra, Nelson, Pulles, Kiss & Houseworth, 2016). Σύμφωνα με τους Janvier, Girardon και Morand (όπως αναφέρουν οι Pape & Tchoshanov, 2001), οι αναπαραστάσεις στο πεδίο των Μαθηματικών χωρίζονται σε εσωτερικές και εξωτερικές. Οι εσωτερικές αναπαραστάσεις είναι τα γνωστικά σχήματα που αναπτύσσονται από τον μαθητή μέσω των εμπειριών του, ενώ οι εξωτερικές αναπαραστάσεις, είναι ο τρόπος με τον οποίο επιδεικνύει κανείς τις μαθηματικές έννοιες που έχει σχηματίσει. Οι αναπαραστάσεις μίας μαθηματικής έννοιας μπορούν να γίνουν με διάφορες μορφές, όπως για παράδειγμα μπορεί να είναι φυσικές, οπτικές, λεκτικές και συμβολικές (Lee, Han, Kim & Herner-Patnode, 2021). Οι μαθητές, δηλαδή, μπορούν να αναπαραστήσουν εξωτερικά μία μαθηματική έννοια που έχουν διδαχθεί χρησιμοποιώντας για παράδειγμα αντικείμενα, σχεδιάζοντας εικόνες, διαγράμματα ή γραφήματα, επαναδιατυπώνοντάς την μαθηματική έννοια με δικά τους λόγια ή γράφοντας μία αλγεβρική εξίσωση αντίστοιχα (Park, Bryant & Shin, 2021).

Η αναπαράσταση της μαθηματικής γνώσης, δηλαδή οι τρόποι μέσω των οποίων αποθηκεύονται στο σύστημα επεξεργασίας πληροφοριών των ατόμων τα διάφορα στοιχεία για την οργάνωση των μαθηματικών εννοιών, είναι ιδιαίτερα σημαντικό ζήτημα και έχει άμεση σχέση με τις δυσκολίες που εμφανίζονται λόγω ακατάλληλου χειρισμού του κώδικα επικοινωνίας των μαθηματικών (Αγαλιώτης, 2011).

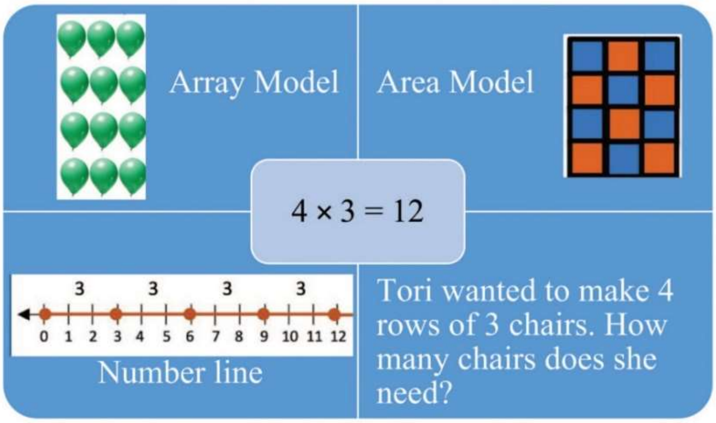
Σύμφωνα με τον Bruner (όπως αναφέρουν οι Flores, Hinton & Schweck, 2014), υπάρχουν τρεις τρόποι αναπαράστασης της γνώσης: ο πραξιακός, κατά τον οποίο χρησιμοποιούνται αντικείμενα προκειμένου να αναπαρασταθεί μία μαθηματική έννοια· ο εικονιστικός, που βασίζεται στη χρήση εικόνων ή γραφημάτων αντί αντικειμένων· τέλος, ο συμβολικός, ο οποίος χαρακτηρίζεται από το χειρισμό αφηρημένων συμβολικών συστημάτων, όπως είναι οι αριθμοί, δίνοντας έμφαση στην αυτοματοποίηση και στην ευχέρεια (Flores, Hinton & Schweck, 2014). Σύμφωνα με τους Agrawal και Morin (2016) και τους Fuchs et al., (2021) η παρουσίαση μίας μαθηματικής έννοιας μέσω των πολλαπλών τρόπων αναπαράστασης της γνώσης (πραξιακός-εικονιστικός-συμβολικός) συμβάλλει καθοριστικά στην εννοιολογική κατανόηση, καθώς με αυτόν τον τρόπο δίνεται στα παιδιά η δυνατότητα να έχουν ενεργό ρόλο στη δόμηση των διάφορων μαθηματικών εννοιών, όπως για παράδειγμα η έννοια της θεσιακής αξίας, γεγονός που οδηγεί σε περισσότερο θετικές στάσεις ως προς τα μαθηματικά και κατ’ επέκταση στην ανάπτυξη μεγαλύτερων κινήτρων για μάθηση. Επιπλέον, μέσω των πολλαπλών τρόπων αναπαράστασης της γνώσης επιτυγχάνεται η σύνδεση μεταξύ εννοιολογικής και διαδικαστικής γνώσης (Agrawal & Morin, 2016). Βέβαια, για να επιτευχθεί αυτό θα πρέπει ο μαθητής να έχει μία απόλυτα σαφή αντίληψη σχετικά με τις σχέσεις ανάμεσα στις διάφορες αναπαραστάσεις της εκάστοτε μαθηματικής έννοιας ή δεξιότητας, διαμέσου συγκεκριμένων υλικών, εικόνων και συμβόλων (Αγαλιώτης, 2011). Ακόμη, η χρήση χειραπτικού υλικού ενισχύει τη διατήρηση των πληροφοριών στη βραχύχρονη και τη μακρόχρονη μνήμη (Boggan, Harper & Whitmire, 2010· Jones & Tiller, 2017).

Ένα επιπλέον βασικό συστατικό για την αποτελεσματική εφαρμογή των πολλαπλών τρόπων αναπαράστασης της γνώσης αποτελεί η χρήση της σαφούς διδασκαλίας (Agrawal & Morin, 2016), που αναλύθηκε παραπάνω. Είναι σημαντικό στο σημείο αυτό να αναφερθεί, ότι οι πολλαπλοί τρόποι αναπαράστασης της γνώσης μπορούν να παρουσιαστούν και ψηφιακά, είτε με τη βοήθεια ηλεκτρονικού υπολογιστή είτε με τη χρήση tablet (Fuchs et al., 2021). Η μόνη διαφορά ανάμεσα στις δύο προσεγγίσεις είναι η αντικατάσταση του χειραπτικού με το ψηφιακό υλικό κατά τη φάση της πραξιακής αναπαράστασης (Park, Bouck & Fisher, 2020).

Για τη διδασκαλία του πολλαπλασιασμού, έχει χρησιμοποιηθεί ιδιαίτερα η αναπαράσταση της γνώσης με χειραπτικούς και εικονιστικούς τρόπους (Kosko, 2019· Jitendra, Dougherty, Sanchez & Suchilt, 2022) και ιδίως το μοντέλο των ίσων ομάδων (grouping model) και της παράταξης (array model) (Hurst & Hurrel, 2016· Downton & Sullivan, 2017).

Από την άλλη πλευρά, είναι σημαντικό να αναφερθεί ότι δεν επαρκεί από μόνη της μία εξωτερική αναπαράσταση, αλλά και ο τρόπος και τα μέσα με τα οποία οι εκπαιδευτικοί παρουσιάζουν την έννοια του πολλαπλασιασμού (Kaufmann, 2018), καθώς όλες οι αναπαραστάσεις δεν είναι εξίσου αποτελεσματικές για την ανάπτυξη των διάφορων μαθηματικών εννοιών, γεγονός που προϋποθέτει την κατάλληλη επιλογή αναπαραστάσεων από την πλευρά των εκπαιδευτικών προκειμένου να βοηθήσουν τους μαθητές να επιδείξουν την εκάστοτε μαθηματική έννοια ή διαδικασία όσο πιο σωστά γίνεται (Fuchs et al., 2021).

Για την αναπαράσταση του πολλαπλασιασμού, όπως ήδη έχει αναφερθεί, χρησιμοποιούνται συνήθως: 1) το μοντέλο της ένωσης αντικειμένων που έχουν τον ίδιο αριθμό σε κάθε ομάδα (grouping model), 2) το μοντέλο της παράταξης (array model) ή το μοντέλο του εμβαδού (area model), 3) το μοντέλο των αριθμογραμμών (number-line model) και 4) το μοντέλο των συνδυασμών ζευγών (combination model) (Fuchs et al., 2021· Lee, Han, Kim & Herner-Patnode, 2021· Jitendra, Dougherty, Sanchez & Suchil, 2022).




Jitendra, Dougherty, Sanchez & Suchil, (2022).

Ακόμη, τα υλικά που συνήθως χρησιμοποιούνται για τη διδασκαλία του πολλαπλασιασμού είναι οι ράβδοι Cuisenaire, οι κύβοι σύνδεσης (connecting cubes), τα πλακίδια 1 ίντσας (1-inch tiles) και διάφορα φυσικά υλικά όπως μπίλιες, φασόλια και άλλα (Jitendra, Dougherty, Sanchez & Suchilt, 2022).

Εξίσου σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη της έννοιας του πολλαπλασιασμού και κατ' επέκταση στη βελτίωση των δεξιοτήτων εκτέλεσης του πολλαπλασιασμού, έχει και το λεξιλόγιο που οι εκπαιδευτικοί χρησιμοποιούν, το οποίο σύμφωνα με τους Götze και Baiker (2021). Για παράδειγμα, σύμφωνα με την Götze (2019), οι μαθητές θα πρέπει να μπορούν να αναπαραστήσουν με τη βοήθεια ενός μοντέλου παράταξης τον ΑΣ 3x4 (τρεις σειρές βούλες με 4 βούλες σε κάθε σειρά), όπως εξίσου σημαντικό είναι να μπορούν να εξηγήσουν με λόγια την πολλαπλασιαστική έννοια της ένωσης των σύνθετων μονάδων, που στην προκειμένη περίπτωση είναι: «τρεις φορές το τέσσερα σημαίνει ότι υπάρχουν τρία τεσσάρια ή ότι υπάρχουν τρεις ομάδες των τεσσάρων στοιχείων σε κάθε ομάδα».

Η συνηθέστερη στρατηγική που συναντάμε στο δημοτικό στο πλαίσιο εκτέλεσης των ΑΣ του πολλαπλασιασμού είναι η πολλαπλή επανάληψη της ίδιας ποσότητας και το κυρίαρχο μοντέλο αναπαράστασης που ακολουθείται είναι εκείνο της ένωσης αντικειμένων που έχουν τον ίδιο αριθμό σε κάθε ομάδα (grouping model) (Kaufmann, 2018). Βασική προϋπόθεση για την ανάπτυξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης και για την ευέλικτη ενασχόληση με την εκτέλεση πολλαπλασιασμών αλλά και με τις διαφορετικές αναπαραστάσεις της έννοιας του πολλαπλασιασμού, αποτελεί η κατανόηση του μοντέλου της ένωσης στοιχείων-αντικειμένων, που έχουν τον ίδιο αριθμό σε κάθε ομάδα (grouping model) (Hurst & Harrel, 2016· Downton & Sullivan, 2017). Από την άλλη πλευρά όμως, παρουσιάζοντας μόνο το μοντέλο των «ίσων ομάδων» (grouping model), κυρίως με τη μορφή της επαλαμβανόμενης πρόσθεσης των ισομεγεθών ομάδων, έχει αποδειχτεί ότι δεν βοηθάει στην ανάπτυξη του πολλαπλασιασμού συλλογισμού, καθώς όταν οι μαθητές έρθουν σε επαφή με αριθμούς που δεν είναι ακέραιοι αλλά δεκαδικοί ή κλάσματα (για παράδειγμα ½ x ¼), η χρήση της επαλαμβανόμενης πρόσθεσης δεν είναι αποτελεσματική (Greer, 1992· Kaufmann, 2018· Jitendra, Dougherty, Sanchez & Suchilt, 2022). Για τον λόγο αυτόν, η προσθετική παρουσίαση, θεωρείται πως δεν καλύπτει εννοιολογικά το ευρύ πεδίο του πολλαπλασιασμού (Τζεκάκη, Σταγιόπουλος & Μπαραλός, 2011).

Ως προς την επίλυση πολυψήφιων αριθμών πολλαπλασιασμού, η συνηθέστερη στρατηγική που εφαρμόζεται στα δημοτικά σχολεία, βάσει σχετικών ερευνών, φαίνεται πως είναι ο παραδοσιακός αλγόριθμος, χωρίς να δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στην έννοια του αριθμού και της θεσιακής αξίας (Fuson et al., 1997· Whitacre & Nickerson, 2006· Yang, 2007·Yang, Reys & Reys, 2008). Ταυτόχρονα, σύμφωνα με την έρευνα των Southwell και Penglase (2005), παρόλο που διαπιστώθηκε ότι οι ίδιοι οι εκπαιδευτικοί ενώ γνώριζαν πολύ καλά τις διαδικασίες εκτέλεσης του παραδοσιακού αλγορίθμου, παρόλα αυτά αντιμετώπιζαν ιδιαίτερη δυσκολία στην επεξήγηση του νοήματος των διαδικασιών που ακολουθούσαν και επιπλέον δεν ήταν σε θέση να εφαρμόσουν άλλες μεθόδους εκτός από τον παραδοσιακό αλγόριθμο για να υπολογίσουν τον πολλαπλασιασμό 25x47. Μόνο 3 από τους συνολικά 78 συμμετέχοντες αξιοποίησαν την επιμεριστική ιδιότητα και πρόσθεσαν τα μερικά γινόμενα.

Επιπλέον, στην έρευνα των Harkness και Thomas (2008), βρέθηκε ότι η πλειοψηφία των εκπαιδευτικών δεν ήταν σε θέση να διακρίνουν τα βήματα που ακολουθούνταν στον εναλλακτικό αλγόριθμο του πολλαπλασιασμού που τους δόθηκε, καθώς προσπαθούσαν να αντιστοιχήσουν τις διαδικασίες και τα βήματα που ακολουθούσαν στον τυπικό αλγόριθμο με εκείνα του εναλλακτικού αλγόριθμου, αντί να επικεντρωθούν στα μερικά γινόμενα και στον τρόπο με τον οποίο αυτά σχετίζονται ώστε να προκύψει το τελικό αποτέλεσμα. Λίγοι ήταν εκείνοι που κατάφεραν να χρησιμοποιήσουν αποτελεσματικές στρατηγικές, αξιοποιώντας την επιμεριστική και την αντιμεταθετική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού. Τα παραπάνω ευρήματα, μπορούν να προκαλέσουν μεγάλα προβλήματα αναφορικά με τη διδασκαλία για την επίλυση των αλγορίθμων του πολλαπλασιασμού στο σύνολο των μαθητών, οι οποίοι θα οδηγηθούν σε στείρα απομνημόνευση των διαδικασιών και ιδιαίτερα σε μαθητές με ιδιαίτερα μαθησιακά χαρακτηριστικά, όπως για παράδειγμα οι μαθητές με ΕΜΔ, υπονομεύοντας έτσι τη μαθησιακή τους πρόοδο.

Επιπλέον, είναι σημαντικό να αναφερθεί ότι όλες οι μέθοδοι και τεχνικές διδασκαλίας δεν έχουν την ίδια επίδραση σε κάθε μαθητή, γεγονός που καθιστά απαραίτητη τη συμβατότητα μεταξύ της παρεχόμενης διδασκαλίας και του τρόπου με τον οποίο το παιδί προτιμά να μαθαίνει (Αγαλιώτης, 2012). Η θεωρία πολλαπλών νοημοσυνών του Gardner μπορεί να φανεί ιδιαίτερα χρήσιμη ως προς την πραγματοποίηση αυτής της συμβατότητας. Σύμφωνα με αυτήν τη θεωρία, υπάρχουν πολλά είδη νοημοσύνης εκ των οποίων επικρατέστερα στον χώρο του σχολείου είναι: η λεκτική/γλωσσική νοημοσύνη, η λογικομαθηματική νοημοσύνη, η χωρική νοημοσύνη, η σωματική/κιναισθητική νοημοσύνη, η μουσική νοημοσύνη, η διαπροσωπική νοημοσύνη, η ενδοπροσωπική και η φυσιοκρατική νοημοσύνη, (Gardner, 1999). Με λίγα λόγια, η διάκριση των παραπάνω ειδών νοημοσύνης σημαίνει ότι η διδασκαλία μπορεί να πραγματοποιηθεί με διάφορους τρόπους, ούτως ώστε να δίνονται οι απαραίτητες ευκαιρίες στα παιδιά προκειμένου να φτάσουν στη μάθηση σύμφωνα πάντα με τι προτιμήσεις των μαθητών αναφορικά με τον τρόπο επεξεργασίας των πληροφοριών (Αγαλιώτης, 2012).

Τέλος, σημαντική παράμετρος που είναι καλό να λειτουργεί συνδυαστικά με τη θεωρία των πολλαπλών νοημοσυνών, αποτελεί το μαθησιακό ύφος (learning style) των μαθητών, το οποίο αναφέρεται στις συνθήκες υπό τις οποίες ο μαθητής προτιμά να επεξεργάζεται οποιοδήποτε είδος πληροφοριών, σχετίζεται δηλαδή με τη διαμόρφωση του περιβάλλοντος μάθησης (Αγαλιώτης, 2011). Έτσι, μπορεί για παράδειγμα να έχουμε μαθητές, οι οποίοι να διευκολύνονται στην κατάκτηση οποιωνδήποτε πληροφοριών έχοντας δυνατό φωτισμό και μέτρια θερμοκρασία δωματίου, να προτιμούν την επεξεργασία των πληροφοριών από τα μέρη προς το όλο και συνεργατική μελέτη σε ζεύγη, ενώ από την άλλη μπορεί να έχουμε μαθητές που έχουν ανάγκη από χαμηλό φωτισμό, ατομική μελέτη και επεξεργασία πληροφοριών από το όλο προς τα μέρη. Για αυτό κατά την αξιολόγηση της καταλληλότητας της διδασκαλίας, είναι απαραίτητο να λαμβάνονται υπόψιν και η θεωρία των πολλαπλών νοημοσυνών και το μαθησιακό ύφος των μαθητών, προκειμένου οι διδακτικές επιλογές να συμβαδίζουν με τις προτιμήσεις των μαθητών, πετυχαίνοντας έτσι την κατάκτηση της μάθησης (Αγαλιώτης, 2012).

## 1.5. Δημογραφικοί παράγοντες που επηρεάζουν την εκτέλεση των αλγορίθμων των αριθμητικών πράξεων.

Πολλοί είναι εκείνοι οι παράγοντες που συμβάλλουν στην επίδοση των παιδιών ως προς την εκτέλεση υπολογιστικών δεξιοτήτων αλλά και γενικότερα ως προς το γνωστικό πεδίο των μαθηματικών. Σε αυτούς περιλαμβάνονται οι ΕΜΔ στα μαθηματικά, η αναποτελεσματική διδασκαλία ή οι ανεπαρκείς διδακτικές πηγές, το κοινωνικοοικονομικό, πολιτισμικό και κοινωνικο-γλωσσικό υπόβαθρο της οικογένειας των μαθητών, όπως επίσης και η έκθεση και οι εμπειρίες των παιδιών με τη μαθηματική γνώση, πριν την έναρξη της επίσημης σχολικής εκπαίδευσης (Zhang et al., 2013).

Σύμφωνα με τους Nunes και Schliemann (1988), η κουλτούρα ενός πολιτισμού έχει καταλυτική επίδραση στον ανθρώπινο νου, καθώς κατευθύνει την ανάπτυξη του παιδιού με ποικίλους τρόπους. Ως προς το γνωστικό πεδίο των μαθηματικών, ανάλογα με τη γλώσσα που μαθαίνουμε να μιλάμε στο περιβάλλον που μεγαλώνουμε και ζούμε, οργανώνουμε και μαθαίνουμε τις αριθμητικές πράξεις με τρόπους που συμβαδίζουν με το αριθμητικό σύστημα της κουλτούρας μας, θεωρώντας ότι αυτός είναι ο πιο κατάλληλος και σωστός τρόπος σκέψης.

Πιο αναλυτικά, η κατανόηση της θεσιακής αξίας των αριθμών, όπως ήδη έχει αναφερθεί, είναι εξαιρετικά σημαντική για τη γνώση και κατανόηση του αριθμητικού μας συστήματος, διαδραματίζει καθοριστικό ρόλο στην εκτέλεση αριθμητικών πράξεων με πολυψήφιους αριθμούς και βασίζεται στη λεκτική αναπαράσταση των αριθμών (Verschaffel & De Corte, 2012). Σύμφωνα με τη Fuson και τους συνεργάτες (1997), η αναντιστοιχία που παρατηρείται σε συγκεκριμένες γλώσσες, μεταξύ των αριθμο-λέξεων και τον αριθμητικών ψηφίων που αντιπροσωπεύουν, μπορεί να οδηγήσει σε ιδιαίτερες δυσκολίες στην έννοια της θεσιακής αξίας των αριθμών και κατ’ επέκταση στην επίλυση υπολογιστικών δεξιοτήτων.

Συγκεκριμένα, υπάρχουν πολλές γλώσσες, κυρίως ευρωπαϊκές, όπως για παράδειγμα τα γερμανικά, όπου υπάρχει μία διαφοροποίηση στην λεκτική εκφορά των αριθμο-λέξεων και στην γραπτή μορφή των αριθμητικών τους συμβόλων, ως προς τη σειρά που παρουσιάζονται οι δεκάδες και οι μονάδες σε ένα διψήφιο αριθμό, δηλαδή ο αριθμός 27 εκφέρεται λεκτικά ως «siebenundzwanzig», που ουσιαστικά σημαίνει 7 και 20 (Von Aster & Shalev, 2007·Verschaffel & De Corte, 2012). Το γεγονός αυτό οδηγεί κατ’ επέκταση σε σημαντικά προβλήματα κατά την εκτέλεση των αλγορίθμων. Για παράδειγμα, κατά την εκτέλεση μίας πρόσθεσης δύο διψήφιων αριθμών (27+48=75), όπου εκτός από την αναγνώριση και την ενεργοποίηση  της θεσιακής αξίας των ψηφίων, θα πρέπει να πραγματοποιηθούν και οι ανάλογοι υπολογισμοί, που σύμφωνα με τον παραδοσιακό αλγόριθμο προϋποθέτουν τη μεταφορά ψηφίων από τη στήλη των μονάδων στη στήλη των δεκάδων προκειμένου να προκύψει το σωστό άθροισμα. Αντιλαμβάνεται λοιπόν κανείς πόσο πιο δύσκολη μπορεί να γίνει αυτή η διαδικασία όταν η γλώσσα που χρησιμοποιείται δεν είναι αντίστοιχη με τη γραφή των αριθμητικών ψηφίων στη σωστή σειρά, με αποτέλεσμα ο μαθητής να αναγκάζεται να κάνει συνεχώς τις απαραίτητες τροποποιήσεις (Nuerk, Moeller & Willmes, 2016).

Άλλο αντίστοιχο παράδειγμα αποτελούν τα  αγγλικά, όπως επίσης και τα ελληνικά, όπου οι αριθμοί 11 και 12 αποδίδονται ως «έντεκα» και «δώδεκα» και όχι ως «δέκα-ένα», «δέκα-δύο», ούτως ώστε να αντανακλάται σε αυτές η δομή της θεσιακής αξίας, κάτι που θα βοηθούσε ιδιαίτερα τα παιδιά αναφορικά με τη σύνθεση του «έντεκα», που στην ουσία περιλαμβάνει το «δέκα» και το «ένα».  Αντιθέτως, υπάρχουν γλώσσες που βοηθούν στη δόμηση της έννοιας της θεσιακής αξίας στο πλαίσιο ενός πολυψήφιου αριθμού, όπως είναι τα ιαπωνικά, όπου για παράδειγμα ο αριθμός 327 κωδικοποιείται λεκτικά ως «τρεις εκατοντάδες - δύο δεκάδες - εφτά», με αποτέλεσμα να αντιστοιχίζεται επακριβώς στο σύστημα της θεσιακής αξίας, βοηθώντας με αυτόν τον τρόπο τα παιδιά να κατακτήσουν διάφορες μαθηματικές δεξιότητες, όπως η απαρίθμηση και οι υπολογιστικές δεξιότητες (Geary, 1995· Nuerk, Moeller & Willmes, 2016).

Επιπλέον, σύμφωνα με τους Chinn και Ashcroft (2017), η εκτέλεση αλγορίθμων προϋποθέτει την καλή λειτουργία της βραχύχρονης μνήμης, της μνήμης εργασίας και της μακρόχρονης μνήμης. Πρόκειται για μία ιδιαίτερα απαιτητική διαδικασία κατά την οποία είναι πολύ πιθανό σε περίπτωση που οι ΑΣ των αριθμητικών πράξεων, καθώς και τα βήματα εκτέλεσης του αλγορίθμου δεν έχουν αυτοματοποιηθεί από τον μαθητή, να υπερφορτωθεί η μνήμη, με αποτέλεσμα να μπλοκάρεται προσπαθώντας να ανακαλέσει τα κατάλληλα βήματα και δεδομένα σε συνδυασμό με την ταυτόχρονη συγκράτηση του είδους της πράξης αλλά και του νοήματος του αποτελέσματος (Αγαλιώτης, 2011). Γίνεται, επομένως, φανερό ότι ομάδες μαθητών που αντιμετωπίζουν προβλήματα με τις γνωστικές διεργασίες και τα συστήματα επεξεργασίας που απαιτούνται για να επιλυθεί με επιτυχία ένας αλγόριθμος, όπως για παράδειγμα οι μαθητές με ΕΜΔ (Geary, 2004· Geary, Hoard, Nugent και Bailey, 2012), ελλοχεύει ο κίνδυνος να υπονομευθεί η αποτελεσματική επίλυση αλγορίθμων των αριθμητικών πράξεων και γενικότερα η μαθησιακή τους πρόοδος.

Ακόμη, πολλές είναι οι έρευνες στη διεθνή βιβλιογραφία, στις οποίες έχει αναδειχθεί ο ιδιαίτερος ρόλος που διαδραματίζουν το φύλο, η εθνικότητα και το κοινωνικο-οικονομικό πλαίσιο των μαθητών ως προς την μαθηματική τους επίδοση αλλά και ως προς τη διαμόρφωση των απόψεων των παιδιών αναφορικά με το γνωστικό πεδίο των μαθηματικών (Vanneman, Hamilton, Anderson & Rahman, 2009· Else-Quest, Hyde & Linn, 2010· Hemphill,Vanneman & Rahman, 2011· Dowker & Sheridan, 2022). Σύμφωνα με τους Guiso, Monte, Sapienza και Zingales (2008), σημαντικός παράγοντας στην επίδοση των παιδιών ως προς το γνωστικό πεδίο των μαθηματικών αποτελεί η ισότητα μεταξύ των δύο φύλων. Οι ίδιοι υποστηρίζουν πως σε κοινωνίες όπου υπάρχει ισότητα μεταξύ των δύο φύλων, η διαφορά που παρατηρείται μεταξύ αγοριών και κοριτσιών ως προς το γνωστικό πεδίο των μαθηματικών, που συνήθως τα αγόρια υπερτερούν συγκριτικά με τα κορίτσια, τείνει να εξαφανίζεται.

Παρόλα αυτά, ως προς το φύλο, υπάρχει πληθώρα ερευνών, τα αποτελέσματα των οποίων οδηγούν στο συμπέρασμα ότι τα αγόρια σημειώνουν καλύτερη επίδοση σε σύγκριση με τα κορίτσια στην επίλυση προβλημάτων (Geary, 1996· Zhu, 2007· Hyde, Lindberg, Linn, Ellis, & Williams, 2008) και ότι τα κορίτσια σημειώνουν καλύτερες επιδόσεις στις αριθμητικές δεξιότητες σε σύγκριση με τα αγόρια (Wei et al., 2012). Το γεγονός αυτό, σύμφωνα με τον Geary (1996), οφείλεται στο ότι τα αγόρια διαθέτουν πιο ανεπτυγμένες χωρικές ικανότητες. Αντίθετα τα κορίτσια διαθέτουν πιο ανεπτυγμένες λεκτικές ικανότητες (Wei et al., 2012), που όπως έχει επισημανθεί και σε προηγούμενο κεφάλαιο, παίζουν καθοριστικό ρόλο στην αριθμητική επίδοση. Από την άλλη πλευρά, δεν πρέπει να παραληφθεί το γεγονός ότι ενδεχομένως να υπάρχει και η επίδραση άλλων μεταβλητών αναφορικά με τις διαφορετικές επιδόσεις των δύο φύλων οι οποίες να λειτουργούν συνδυαστικά, όπως το κοινωνικο-οικονομικό πλαίσιο στο οποίο μεγαλώνουν τα παιδιά. Για παράδειγμα, ως προς την ανάπτυξη των χωρικών ικανοτήτων, κοινωνικο-οικονομικοί παράγοντες μπορεί να επηρεάσουν την επαφή των παιδιών με διάφορα παιχνίδια και υλικά, με αποτέλεσμα να περιορίζονται οι ευκαιρίες τους στη συμμετοχή τέτοιων δραστηριοτήτων που συντελούν στην ανάπτυξη χωρικών ικανοτήτων (Zhu, 2007).

Επιπροσθέτως, σύμφωνα με τους Dowker, Bennett και Smith (2012), η επίδοση στα μαθηματικά εξαρτάται σε σημαντικό βαθμό και από συναισθηματικούς παράγοντες και στάσεις. Συγκεκριμένα, υπάρχουν έρευνες στις οποίες έχει βρεθεί ότι το άγχος και η αρνητική στάση απέναντι στα μαθηματικά συσχετίζονται με τη φτωχή επίδοση των παιδιών στο συγκεκριμένο γνωστικό πεδίο (Dowker, Sarkar, & Looi, 2016· Zhang, Zhao, & Kong, 2019). Σύμφωνα, μάλιστα, με την έρευνα των Dowker και Sheridan (2022), το άγχος συσχετίζεται με την επίδοση των παιδιών αναφορικά με την εκτέλεση απλών και σύνθετων αριθμητικών δεξιοτήτων. Στην ίδια έρευνα, δε σημειώθηκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές στην επίδοση μεταξύ αγοριών και κοριτσιών, ωστόσο βρέθηκε ότι τα κορίτσια είχαν πολύ μεγαλύτερο άγχος ως προς τα μαθηματικά σε σχέση με τα αγόρια.

## 1.6. Ομάδες μαθητών που αποτυγχάνουν στην εκτέλεση υπολογιστικών δεξιοτήτων και βασικές αιτίες των δυσκολιών τους.

Σύμφωνα με τους Geary, Hoard, Nugent και Bailey (2012), οι μαθητές με ΕΜΔ φαίνεται πως αντιμετωπίζουν ιδιαίτερες δυσκολίες σχετικά με την εκτέλεση των αριθμητικών δεξιοτήτων, λόγω των ιδιαίτερων μαθησιακών χαρακτηριστικών τους, οι οποίες συχνά οδηγούν στην εγκατάλειψη της προσπάθειας αλλά και σε αρνητική στάση απέναντι στα μαθηματικά (Αγαλιώτης, 2011). Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα των δυσκολιών τους, αποτελεί η εμφάνιση αδυναμιών στις εννοιολογικές και διαδικαστικές ικανότητες, οι οποίες παίζουν καθοριστικό ρόλο στο πεδίο των Μαθηματικών και οι οποίες βάσει θεωρίας θα μπορούσαν να οφείλονται είτε σε αδυναμίες στο κεντρικό εκτελεστικό σύστημα, είτε σε δυσκολίες στο φωνολογικό σύστημα διαχείρισης και αναπαράστασης των πληροφοριών είτε στο οπτικο-χωρικό σύστημα, καθώς και στην ταχύτητα επεξεργασίας των πληροφοριών (Geary, 2004· Geary, 2010).

Συγκεκριμένα, παρουσιάζουν προβλήματα ως προς τη δημιουργία αναπαραστάσεων των ΑΣ των τεσσάρων αριθμητικών πράξεων στην μακρόχρονη μνήμη, όπως επίσης και στην άμεση ανάκλησή τους (Geary, Hoard, Nugent & Bailey, 2012). Επιπλέον, συχνά εμφανίζουν καθυστερήσεις ως προς την ανάπτυξη των διαδικασιών που απαιτούνται για την εκτέλεση των αριθμητικών πράξεων, το μέγεθος και η έκταση των οποίων, ποικίλει ανάλογα με την πολυπλοκότητα των αριθμητικών δεξιοτήτων, όπως για παράδειγμα ανάλογα με τον αριθμό των βημάτων που απαιτούνται για την εκτέλεση ενός αλγορίθμου (Andersson, 2010). Επιπλέον, σύμφωνα με τον Αγαλιώτη (2011), ορισμένοι μαθητές με ΕΜΔ, εμφανίζουν ελλειμματική προσοχή, η οποία συνοδεύεται σε κάποιες περιπτώσεις από υπερκινητικότητα, με αποτέλεσμα να αδυνατούν να συγκεντρωθούν στο προς μάθηση αντικείμενο, γεγονός που οδηγεί σε αργό ρυθμό προόδου αλλά και σε ποικίλα λάθη.

Κάτι αντίστοιχο συμβαίνει και στην περίπτωση των μαθητών με ΔΕΠΥ, οι οποίοι συχνά δεν είναι σε θέση να συγκεντρώσουν επαρκώς την προσοχή τους σε εκτεταμένο υλικό, έτσι ώστε να το απομνημονεύσουν και να το επεξεργαστούν έπειτα με μαθηματικό τρόπο, με αποτέλεσμα να αντιμετωπίζουν σημαντικές δυσκολίες στην κατάκτηση των αριθμητικών δεξιοτήτων (Αγαλιώτης, 2011). Επιπλέον, οι μαθητές με ΔΕΠΥ, σύμφωνα με τους Colomer, Re, Miranda και Lucangeli (2013), εμφανίζουν σοβαρές δυσκολίες ως προς την μέτρηση-απαρίθμηση αλλά και την κατάκτηση των ΑΣ των τεσσάρων αριθμητικών πράξεων, οι οποίες συνήθως οφείλονται σε αδυναμίες που σχετίζονται με συγκεκριμένα συστήματα της μνήμης εργασίας, όπως είναι το κεντρικό εκτελεστικό σύστημα, το φωνολογικό και το οπτικοχωρικό σύστημα επεξεργασίας των πληροφοριών (Friedman, Rapport, Orban, Eckrich & Calub, 2017).

Άλλη ομάδα μαθητών που φαίνεται να εμφανίζει παρόμοια προβλήματα με τους μαθητές με ΕΜΔ στην εκτέλεση των αριθμητικών υπολογιστικών δεξιοτήτων είναι οι μαθητές με χαμηλή επίδοση (low achieving), για τους οποίους δεν είναι ακόμη ξεκάθαροι οι λόγοι για τους οποίους μπορεί να αποτυγχάνουν (Krawec, 2012). Ωστόσο, σύμφωνα με τους Andersson (2010), οι μαθητές με χαμηλή επίδοση αντιμετωπίζουν δυσκολίες ως προς την κατάκτηση των ΑΣ και την εκτέλεση των αλγορίθμων των τεσσάρων αριθμητικών πράξεων, διότι συχνά χρησιμοποιούν μη προηγμένες στρατηγικές μέτρησης για την εκτέλεσή τους, όπως επίσης δυσκολεύονται και στην άμεση ανάκληση των ΑΣ από την μακρόχρονη μνήμη (Geary, Hoard, Nugent & Bailey, 2012), γεγονός που δυσχεραίνει την ευχερή επίλυση των αλγορίθμων.

Βέβαια, είναι σημαντικό να τονιστεί ότι όλα τα παραπάνω δεν υποδεικνύουν πως η σχέση αυτών των μαθητών ως προς το γνωστικό πεδίο των μαθηματικών δεν μπορεί να αλλάξει, αλλά ταυτόχρονα δεν μπορεί να αναπτυχθεί και μία υπεραισιοδοξία επί του θέματος. Με τις κατάλληλες τροποποιήσεις των διδακτικών μεθόδων και τεχνικών, σαφώς, μπορούν και πρέπει να διδαχθούν με το γενικό πρόγραμμα του σχολείου (Αγαλιώτης, 2011).

### 1.6.1. Ειδικές Μαθησιακές Δυσκολίες

Οι Ειδικές Μαθησιακές Δυσκολίες (ΕΜΔ) συνιστούν μία κατηγορία ειδικών εκπαιδευτικών αναγκών, που ανήκουν στην ευρύτερη ομάδα των Ήπιων Εκπαιδευτικών Αναγκών (Αγαλιώτης, 2012) και αποτελούν, στις περισσότερες χώρες, τη μεγαλύτερη κατηγορία μαθητών με ειδικές εκπαιδευτικές ανάγκες (Büttner & Hasselhorn, 2011). Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι ότι στην Αμερική οι μαθητές με ΕΜΔ αντιπροσωπεύουν το 37,5% των μαθητών που λαμβάνουν τις υπηρεσίες της ειδικής αγωγής, σύμφωνα με το Υπουργείο Παιδείας της Αμερικής (όπως αναφέρεται στο Lambert & Harriss, 2022).

Ενδιαφέρον παρουσιάζει και το γεγονός ότι οι ΕΜΔ είναι η κατηγορία εκείνη η οποία εξακολουθεί να αυξάνεται με πιο γρήγορους ρυθμούς σε σύγκριση με όλες τις άλλες «ειδικές ανάγκες υψηλής συχνότητας» (Torgesen, 2004). Με τον όρο «ειδικές ανάγκες υψηλής συχνότητας» εννοούνται οι επιμέρους κατηγορίες των ήπιων ειδικών εκπαιδευτικών αναγκών, δηλαδή η ήπια νοητική αναπηρία, η διαταραχή ελλειμματικής προσοχής/ υπερκινητικότητας (ΔΕΠΥ) και οι ήπιες συναισθηματικές διαταραχές (Αγαλιώτης, 2012). Βέβαια, ως προς το ζήτημα της συνεχούς αύξησης των ποσοστών των παιδιών με ΕΜΔ, υπάρχουν αντικρουόμενες απόψεις αναφορικά με τον τρόπο αξιολόγησης των παιδιών αυτών και επομένως την αναγνώριση και κατάταξή τους στη συγκεκριμένη κατηγορία. Υπάρχουν, δηλαδή, ερευνητές που υποστηρίζουν ότι έχει βρεθεί σημαντικός αριθμός μαθητών που κατατάσσονται εσφαλμένα στην κατηγορία των ΕΜΔ (Fuchs & Fuchs, 2006) και ότι η τυπική αξιολόγηση που εφαρμόζεται συνήθως, χρησιμοποιώντας τυποποιημένα ψυχομετρικά εργαλεία, δεν είναι ούτε έγκυρη ούτε αξιόπιστη (Fletcher & Vaughn, 2009· Fletcher & Miciak, 2017· Maki & Adams, 2019). Ειδικότερα, σύμφωνα με τους Stuebing και τους συνεργάτες (όπως αναφέρεται στο Phipps & Beaujean, 2016), η συγκεκριμένη προσέγγιση αξιολόγησης δε διακρίνει με ακρίβεια τους μαθητές με ειδικές μαθησιακές δυσκολίες από εκείνους που απλώς έχουν χαμηλή επίδοση σε κάποιες από τις περιοχές του βασικού προγράμματος.

Σύμφωνα με το διαγνωστικό εγχειρίδιο DSM-5 της Αμερικανικής Ψυχολογικής Εταιρίας (όπως αναφέρει η Tannock, 2013), οι ΕΜΔ έχουν νευρολογική προέλευση και για την ύπαρξή τους προϋποτίθεται η εμφάνιση συμπτωμάτων, τα οποία οφείλουν να πληρούν τέσσερα διαγνωστικά κριτήρια. Πιο συγκεκριμένα, απαραίτητη προϋπόθεση για την ύπαρξη ΕΜΔ είναι πρωτίστως η εμφάνιση εξειδικευμένων δυσκολιών του μαθητή σε περιοχές του σχολικού προγράμματος όπως, η Ανάγνωση, η Γραφή, η Αριθμητική και γενικότερα τα Μαθηματικά, οι οποίες συνεχίζονται παρά τη στοχευμένη διδασκαλία για τουλάχιστον 6 μήνες. Δεύτερον, οι ακαδημαϊκές δεξιότητες πρέπει να παρουσιάζουν σημαντική απόκλιση από το αναμενόμενο, σε σχέση με την ηλικία του μαθητή. Τρίτον, οι δυσκολίες αυτές εμφανίζονται κατά τη διάρκεια της σχολικής ηλικίας. Τέλος, οι δυσκολίες του ατόμου πρέπει να είναι ανεξάρτητες από νοητικές αναπηρίες, αισθητηριακές (όπως τύφλωση ή κώφωση) ή κινητικές αναπηρίες, άλλες ψυχικές ή νευρολογικές διαταραχές, όπως επίσης δεν πρέπει να σχετίζονται με πολιτισμικές, ψυχοκοινωνικές και οικογενειακές ιδιαιτερότητες ή να οφείλονται σε αναποτελεσματική διδασκαλία (McDonough, Flanagan, Alfonso, Goldstein & Devries, 2017· Tannock, 2013).

Παρόλο που πολλοί μαθητές με ΕΜΔ, εμφανίζουν παρόμοια χαρακτηριστικά μεταξύ τους, σε καμία περίπτωση δεν πρόκειται για ομοιογενή ομάδα. Οι μαθητές μπορεί να παρουσιάσουν μεγάλη ποικιλία χαρακτηριστικών ή συνδυασμό χαρακτηριστικών, τα οποία διαφέρουν από άτομο σε άτομο (Pullen, Lane, Ashworth & Lovelace, 2017). Το γεγονός αυτό εξηγεί και τον λόγο για τον οποίο αποτελεί ένα ιδιαίτερα αμφιλεγόμενο και δύσκολο εγχείρημα ο προσδιορισμός των χαρακτηριστικών και ο ορισμός των ΕΜΔ, όπως επίσης και οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνται για την αξιολόγησή τους (Pullen, Lane, Ashworth & Lovelace, 2017· Büttner & Hasselhorn 2011).

Οι ΕΜΔ καθορίζονται συνήθως βάσει ορισμένων δεικτών, οι οποίοι μπορεί να αποτελούν ταυτόχρονα κριτήρια συμπερίληψης στη συγκεκριμένη κατηγορία ειδικών εκπαιδευτικών αναγκών, αλλά και κριτήρια αποκλεισμού. Συγκεκριμένα, τα συμπεριληπτικά κριτήρια υποδεικνύουν την παρουσία των ΕΜΔ, όπως για παράδειγμα η μη αναμενόμενη κακή επίδοση, ενώ τα κριτήρια αποκλεισμού υποδεικνύουν την απουσία των ΕΜΔ, όπως για παράδειγμα όταν η χαμηλή επίδοση ενός ατόμου οφείλεται σε νοητική αναπηρία (Fletcher, Lyon, Fuchs, & Barnes, 2019). Ωστόσο, σύμφωνα με τους Fletcher, Stuebing, Morris και Lyon (2013), ορίζοντας τις ειδικές εκπαιδευτικές ανάγκες δια του αποκλεισμού χαρακτηριστικών δεν αποτελεί ικανοποιητική προσέγγιση, καθώς αυτή η διαδικασία δεν προάγει ένα εννοιολογικό μοντέλο σχετικά με το τι μπορεί να αντιπροσωπεύουν, στη συγκεκριμένη περίπτωση, οι ΕΜΔ.

Για τον λόγο αυτόν, ο ορισμός που προτείνεται από τους Kavale, Spaulding & Beam (όπως αναφέρει ο Αγαλιώτης, 2011), υπερτερεί ανάμεσα σε άλλους ορισμούς, ακριβώς γιατί εστιάζει στο τι είναι κι όχι στο τι δεν είναι οι ΕΜΔ. Επιπρόσθετα, ο συγκεκριμένος ορισμός περιλαμβάνει μία πιο σαφή προσέγγιση ως προς τον τρόπο που οι καταστάσεις αυτές εκδηλώνονται στην καθημερινότητα της σχολικής ζωής των μαθητών, αλλά και διαφοροποιεί τα χαρακτηριστικά των ΕΜΔ από άλλες παρόμοιες καταστάσεις. Σύμφωνα λοιπόν με όσα αναφέρθηκαν παραπάνω, ο ορισμός είναι ο εξής: *«Η ειδική μαθησιακή δυσκολία (αναπηρία-specific learning disability) αναφέρεται σε ετερογενείς συστάδες διαταραχών, οι οποίες εμποδίζουν σημαντικά την ομαλή ακαδημαϊκή πρόοδο, σε ένα ποσοστό 2% έως 3% του μαθητικού πληθυσμού. Η έλλειψη προόδου γίνεται εμφανής στη σχολική απόδοση, η οποία παραμένει κάτω από τις προσδοκίες που προκύπτουν από τη χρονολογική και νοητική ηλικία, ακόμη και όταν παρασχεθεί υψηλής ποιότητας διδασκαλία. Η πρωταρχική εκδήλωση της έλλειψης προόδου είναι η σημαντική υπο-επίδοση σε μια από τις βασικές περιοχές δεξιοτήτων (δηλαδή ανάγνωση, μαθηματικά, γραφή), η οποία δεν συνδέεται με ανεπαρκείς εκπαιδευτικές, διαπροσωπικές, πολιτισμικές-οικογενειακές ή/και κοινωνικο-γλωσσικές εμπειρίες. Η πρωταρχική διαφορά μεταξύ ικανότητας και επίδοσης μπορεί να έχει τη μορφή ελλείψεων στη γλωσσική ικανότητα (προσληπτική ή/και εκφραστική), στη γνωστική λειτουργία (π.χ επίλυση προβλημάτων, ικανότητες σκέψης, ωριμότητα), στις νευροψυχολογικές διαδικασίες (π.χ πρόσληψη, προσοχή, μνήμη) ή σε οποιοδήποτε συνδυασμό τέτοιων ελλείψεων, οι οποίες θεωρείται ότι προκύπτουν από δυσλειτουργίες του κεντρικού νευρικού συστήματος. Η ειδική μαθησιακή δυσκολία είναι μία διακριτή κατάσταση που διαφοροποιείται από τη γενικευμένη μαθησιακή αποτυχία διαμέσου μιας μέσου όρου ή άνω του μέσου όρου (>90) γνωστικής ικανότητας και ενός προφίλ μαθησιακών δεξιοτήτων που εμφανίζει σημαντική διασπορά, υποδηλώνοντας περιοχές δυνατοτήτων και αδυναμιών. Η κύρια ειδική μαθησιακή δυσκολία μπορεί να συνοδεύεται από δευτερεύουσες δυσκολίες, οι οποίες πρέπει να λαμβάνονται υπόψη κατά το σχεδιασμό εντατικής, εξατομικευμένης διδασκαλίας ειδικής αγωγής, που απευθύνεται στο πρωταρχικό πρόβλημα»* (Αγαλιώτης 2011, σ. 130-131).

### 1.6.2. Χαρακτηριστικά των ΕΜΔ και Μαθηματικά

Οι μαθητές με ΕΜΔ μπορεί να εμφανίσουν ποικίλα χαρακτηριστικά, τόσο σε γνωστικό και μαθησιακό όσο και σε ψυχοκοινωνικό επίπεδο, τα οποία παίζουν καθοριστικό ρόλο στις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν ως προς το γνωστικό πεδίο των Μαθηματικών. Η φύση των μαθηματικών δυσκολιών ποικίλει τόσο μεταξύ των μαθητών όσο και καθόλη τη διάρκεια της ανάπτυξής τους (Mazzocco & Vukovic 2018). Ωστόσο, έχουν επισημανθεί κάποια χαρακτηριστικά που εμφανίζονται στις έρευνες συχνότερα από κάποια άλλα και φαίνεται ότι επηρεάζουν τους μαθητές με ΕΜΔ (Αγαλιώτης, 2011).

Μία συγκεντρωτική παρουσίαση των χαρακτηριστικών αυτών γίνεται από τον Αγαλιώτη (2011), διαμορφώνοντας πέντε κατηγορίες με επιμέρους διαστάσεις. Συγκεκριμένα, διακρίνει: α) τις αισθησιο-κινητικές δυσκολίες, β) τις δυσκολίες προσοχής και μνήμης, γ) τις δυσκολίες χρήσης της μαθηματικής γλώσσας, δ) τις γενικές γνωστικές και μεταγνωστικές δυσκολίες και ε) τις ψυχοκοινωνικές και συναισθηματικές δυσκολίες. Η πρώτη κατηγορία μπορεί να περιλαμβάνει δυσκολίες στον οπτικο-κινητικό συντονισμό, προβλήματα ακουστικής διάκρισης και οπτικο-χωρικές αδυναμίες. Η δεύτερη κατηγορία αναφέρεται σε προβλήματα προσοχής και μνήμης και συγκεκριμένα οπτικής, ακουστικής και κιναισθητικής προσοχής, προβλήματα με τη μνήμη εργασίας αλλά και τη μακρόχρονη μνήμη, όπως επίσης και προβλήματα μνήμης ακολουθιών. Η τρίτη κατηγορία αφορά δυσκολίες προσληπτικού και εκφραστικού λόγου. Η τέταρτη σχετίζεται με αδυναμίες στις γνωστικές και μεταγνωστικές στρατηγικές, με ιδιαιτερότητες στο γνωστικό ύφος, με αδυναμίες στην αφηρημένη σκέψη και με δυσκολίες ολοκλήρωσης. Τέλος, η πέμπτη και τελευταία κατηγορία αναφέρεται στις δυσκολίες που παρουσιάζουν οι συγκεκριμένοι μαθητές στις «δεξιότητες επιβίωσης στην τάξη», καθώς και στον τρόπο με τον οποίο διαχειρίζονται τα συναισθήματά τους σε σχέση με το γνωστικό πεδίο των Μαθηματικών.

Σύμφωνα με τον Αγαλιώτη (2011), όλα τα προαναφερθέντα χαρακτηριστικά μπορεί να εκδηλωθούν με διαφορετικό τρόπο και ένταση στον κάθε μαθητή ξεχωριστά, γεγονός που προκαλεί ιδιαίτερη δυσκολία στον εντοπισμό και την αποτελεσματική αντιμετώπισή τους. Για αυτόν τον λόγο οι ερευνητές εστιάζουν σε κατηγορίες και τύπους ειδικών μαθησιακών δυσκολιών, που συγκροτούνται σύμφωνα με τη σχετικά σταθερή συνύπαρξη ορισμένων χαρακτηριστικών. Το γεγονός αυτό έχει ως αποτέλεσμα οι ερευνητές να οδηγούνται προς ένα κοινό μαθησιακό προφίλ, το οποίο συνεπάγεται τη χρησιμοποίηση ενός συγκεκριμένου όρου.

Στο παρελθόν οι υπο-ομάδες των ειδικών μαθησιακών δυσκολιών αναφέρονταν κυρίως με τους κλινικούς όρους, «δυσλεξία», «δυσγραφία», «δυσαριθμησία» και άλλα. Οι κλινικοί αυτοί όροι έχουν αντικατασταθεί, ιδίως σε εκπαιδευτικά πλαίσια, έπειτα από τις αλλαγές που πραγματοποιήθηκαν στο ανανεωμένο διαγνωστικό εγχειρίδιο DSM-5 της Αμερικανικής Ψυχολογικής Εταιρίας (όπως αναφέρουν οι Chung και Patel, 2015), καθώς στόχος της εκπαίδευσης είναι να εντοπιστούν οι μαθητές με ειδικές εκπαιδευτικές ανάγκες προκειμένου να λάβουν την ειδική εκπαιδευτική αγωγή που χρειάζονται και όχι απλώς να πραγματοποιείται μία κλινική διάγνωση, όπως συμβαίνει στον τομέα της ιατρικής (Tannock, 2013). Σύμφωνα με τα παραπάνω, οι ΕΜΔ περιλαμβάνουν τις εξής υπο-ομάδες: τις Ειδικές Μαθησιακές Δυσκολίες στην ανάγνωση, τις Ειδικές Μαθησιακές Δυσκολίες στη γραφή και τις Ειδικές Μαθησιακές Δυσκολίες στα μαθηματικά.

Οι ΕΜΔ στην ανάγνωση, λοιπόν, οφείλονται σε γενετικούς παράγοντες, έχουν συνήθως κληρονομική βάση (McDonough, Flanagan, Sy & Alfonso, 2017) και χωρίζονται σε δύο επίπεδα, στην αναγνωστική αποκωδικοποίηση και στην αναγνωστική κατανόηση. Σύμφωνα με το DSM-5 (όπως αναφέρουν οι McDonough, Flanagan, Sy & Alfonso, 2017), όσον αφορά την αναγνωστική αποκωδικοποίηση, παρουσιάζονται δυσκολίες που σχετίζονται με την ακριβή και ευχερή αποκωδικοποίηση και αναγνώριση μεμονωμένων λέξεων, καθώς και φτωχές δεξιότητες αποκωδικοποίησης κειμένων, που είναι συνήθως αποτέλεσμα των δυσκολιών που αντιμετωπίζει ο συγκεκριμένος πληθυσμός με τη φωνολογική επεξεργασία της γλώσσας. Αυτές οι δυσκολίες έχουν σαν αποτέλεσμα δευτερογενώς, την εμφάνιση προβλημάτων στην αναγνωστική κατανόηση, στη γραφή και στα μαθηματικά. Σχετικά με την αναγνωστική κατανόηση μπορεί να εντοπιστούν πρωτογενή προβλήματα στην ακριβή και ευχερή αποκωδικοποίηση, στην έκφραση ιδεών με κατάλληλο ειρμό, στην κατάκτηση ορολογίας και στη διάκριση εννοιών, όπως επίσης και φτωχό λεξιλόγιο λόγω περιορισμένων εμπειριών ανάγνωσης (Αγαλιώτης, 2020).

Τα άτομα με ΕΜΔ στην ανάγνωση, συχνά παρουσιάζουν συγκεκριμένες αδυναμίες σε μαθηματικές έννοιες και δεξιότητες, όπως δυσκολίες και αργή ταχύτητα στην απαρίθμηση-μέτρηση, γεγονός που επηρεάζει την άμεση ανάκληση αριθμητικών συνδυασμών (Von Aster & Shalev 2007· Miles, 2004), στην κατάκτηση της έννοιας του αριθμού, στην κατανόηση της έννοιας της θεσιακής αξίας των ψηφίων και στο νοητικό σχήμα των πράξεων, στην τήρηση των βημάτων των αλγορίθμων, στην αναγνώριση των πραξιακών και αριθμητικών συμβόλων, στο χειρισμό χωρικών πληροφοριών, στη διαχείριση της πολυσήμαντης μαθηματικής γλώσσας και στην κατανόηση και επίλυση μαθηματικών προβλημάτων (Αγαλιώτης, 2011· Träff & Passolunghi, 2015· Vukovic, Lesaux & Siegel, 2010).

Όσον αφορά την περίπτωση των ΕΜΔ στη γραφή, εντοπίζονται κυρίως προβλήματα στο μηχανιστικό μέρος της γραφής, στην οργάνωση των παραγράφων, όπως επίσης και στη γραμματική, στο συντακτικό και στα σημεία στίξης (Chung & Patel, 2015· McDonough, Flanagan, Sy & Alfonso, 2017). Επιπλέον, παρουσιάζονται δυσκολίες στη φωνολογική επίγνωση, καθώς οι μαθητές αυτοί δυσκολεύονται στην κατάτμηση των λέξεων σε συλλαβές και των συλλαβών σε φωνήματα, στη φωνολογική σύνθεση λέξεων, στη φωνολογική απαλοιφή, όπως επίσης και στη διαπίστωση ομοιοκαταληξίας (Berninger, 1999· Bender &

Larkin, 2009· Chung & Patel, 2015). Σύμφωνα με τον Perfetti (όπως αναφέρεται στο Reed et al., 2019), όταν το παιδί επικεντρώνεται σε δεξιότητες αναγνώρισης γραμμάτων και λέξεων, τότε μειώνεται η ικανότητα για πιο περίπλοκες δεξιότητες, όπως είναι αυτές της ανάγνωσης και της γραφής. Αυτό συμβαίνει διότι καταλαμβάνονται οι γνωστικοί πόροι του παιδιού κατά την αντιστοίχιση φωνημάτων-γραφημάτων και την αναγνώριση των λέξεων, με αποτέλεσμα να μην μπορεί να ανταπεξέλθει σε πιο σύνθετες διαδικασίες (Stevens, Walker & Vaughn, 2016) και έτσι να χάνονται οι ιδέες και ο ειρμός κατά τη διαδικασία της γραφής.

Ανάλογα προβλήματα, όσον αφορά τη γραφή, παρουσιάζονται και στο πεδίο των μαθηματικών, καθώς οι δυσκολίες του συγκεκριμένου πληθυσμού δεν περιορίζονται μόνο στη γραφή λέξεων αλλά και στη γραφή των αριθμητικών συμβόλων. Αυτό σημαίνει ότι μπορεί να παρουσιάσουν προβλήματα στην αποθήκευση, ανάκληση και γραφή των αριθμητικών συμβόλων (Learning Disabilities Association of America, 2013· Chung & Patel, 2015), γεγονός που δημιουργεί ιδιαίτερα σημαντικά ζητήματα στο πεδίο των μαθηματικών, τα οποία παρουσιάζουν αρκετές ομοιότητες με τις δυσκολίες που αναφέρθηκαν παραπάνω στην περίπτωση των ΕΜΔ στην ανάγνωση.

Άλλη υπο-ομάδα είναι οι ΕΜΔ στα Μαθηματικά, όπου συνήθως εμφανίζονται δυσκολίες κατά τη μέτρηση-απαρίθμηση, ιδιαίτερα κατά την αντίστροφη πορεία, φτωχές δεξιότητες εκτίμησης ακόμη και μικρών ποσοτήτων και αδυναμία στη θεμελιώδους σημασίας έννοια του αριθμού, δυσκολίες στην ανάκληση αριθμητικών συνδυασμών, αργή ταχύτητα στην εκτέλεση των τεσσάρων αριθμητικών πράξεων, δυσκολία στην εκτέλεση των αλγοριθμικών βημάτων και ιδιαίτερα όταν πρόκειται για πιο σύνθετες πράξεις, όπως για παράδειγμα η διαίρεση (Chinn & Ashcroft, 2007·Αγαλιώτης, 2011). Όσον αφορά την επίλυση προβλημάτων φαίνεται να παρουσιάζουν δυσκολίες στον προσδιορισμό των σχέσεων αιτίας-αποτελέσματος, στη διεξαγωγή συμπερασμάτων αλλά και στην επιλογή της κατάλληλης αριθμητικής πράξης για την επίλυση ενός προβλήματος (Zeleke, 2004· Agrawal & Morin, 2016).

## 1.7. Αναγκαιότητα της έρευνας – Σκοπός και ερευνητικά ερωτήματα

Από τη βιβλιογραφική ανασκόπηση προκύπτει ότι οι ΕΜΔ είναι η μεγαλύτερη ομάδα των Ήπιων Εκπαιδευτικών Αναγκών (ΗΕΑ), καθώς οι μαθητές με ΕΜΔ αποτελούν περίπου το 40% των μαθητών με ΗΕΑ (Pullen, Lane, Ashworth&Lovelace, 2017). Επιπλέον, οι μαθητές με ΕΜΔ διδάσκονται στο πλαίσιο του γενικού σχολείου.

Ταυτόχρονα, η πλειοψηφία των ερευνών στη διεθνή βιβλιογραφία, εστιάζει σε διδακτικές εφαρμογές και παρεμβάσεις για τη βελτίωση των υπολογιστικών-αριθμητικών δεξιοτήτων της πρόσθεσης και της αφαίρεσης (Canobi 2004· Fuson, 2009), ενώ η έρευνα αναφορικά με τον πολλαπλασιασμό, αναπτύχθηκε αρκετά αργότερα και με λιγότερη ένταση, κάτι που ενδεχομένως να οφείλεται στις δυσκολίες που παρουσιάζει ο αλγόριθμος του πολλαπλασιασμού (Hickendorff, Torbeyns & Verschaffel, 2019). Επιπλέον, υπάρχει σοβαρή έλλειψη σε προγράμματα παρέμβασης και διδακτικές εφαρμογές, που να επικεντρώνονται στην εκτέλεση δεξιοτήτων πολλαπλασιασμών από μαθητές πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης (Hickendorff, Torbeyns & Verschaffel, 2019) και ιδίως από μαθητές με ΕΜΔ (Tzur et al., 2013· Xin, Park, Tzur & Si, 2020).

Λαμβάνοντας, λοιπόν, υπόψη το σημαντικό ποσοστό του μαθητικού πληθυσμού με ΕΜΔ, καθώς και τη σπουδαιότητα της ορθής εκτέλεσης των υπολογιστικών δεξιοτήτων του πολλαπλασιασμού, γίνεται φανερή μία σημαντική έλλειψη σχετικών ερευνητικών δεδομένων στη διεθνή αλλά και την ελληνική βιβλιογραφία και αναδεικνύεται η ανάγκη περαιτέρω έρευνας αναφορικά με τις διδακτικές εφαρμογές που αξιοποιούνται για τη βελτίωση των δεξιοτήτων εκτέλεσης πολλαπλασιασμών από μαθητές πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης με ΕΜΔ.

Συνυπολογίζοντας όλα τα παραπάνω, θεωρείται αναγκαία η διεξαγωγή της παρούσας έρευνας, η οποία έχει ως σκοπό τη συστηματική ανασκόπηση, ανάλυση και σύγκριση του ερευνητικού έργου που έχει πραγματοποιηθεί στη διεθνή αλλά και την ελληνική βιβλιογραφία, σχετικά με τις διδακτικές εφαρμογές που αφορούν τη βελτίωση δεξιοτήτων εκτέλεσης πολλαπλασιασμών από μαθητές με ΕΜΔ στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση. Τα ερευνητικά ερωτήματα της έρευνας διαμορφώθηκαν ως εξής:

1. Ποιες μέθοδοι και τεχνικές αξιοποιούνται σε εφαρμογές για τη βελτίωση δεξιοτήτων εκτέλεσης πολλαπλασιασμών στην περίπτωση μαθητών με Ειδικές Μαθησιακές Δυσκολίες σύμφωνα με τη διεθνή και την ελληνική βιβλιογραφία;
2. Ποιες από τις εφαρμοσθείσες μεθόδους και τεχνικές για τη βελτίωση δεξιοτήτων εκτέλεσης πολλαπλασιασμών έχουν την μεγαλύτερη αποτελεσματικότητα στην περίπτωση μαθητών με Ειδικές Μαθησιακές Δυσκολίες σύμφωνα με τη διεθνή και την ελληνική βιβλιογραφία;
3. Ποιες οι απόψεις εκπαιδευτικών και μαθητών για την εφαρμογή μεθόδων και τεχνικών βελτίωσης δεξιοτήτων εκτέλεσης πολλαπλασιασμών από μαθητές με Ειδικές Μαθησιακές Δυσκολίες και πώς επηρεάζονται από τα διάφορα δημογραφικά στοιχεία;

# 2ο Κεφάλαιο

# Μεθοδολογία της έρευνας

## 2.1. Ερευνητική στρατηγική

Στην παρούσα έρευνα γίνεται μία προσπάθεια να ελεγχθεί το ερευνητικό έργο που έχει πραγματοποιηθεί σχετικά με τις διδακτικές εφαρμογές που έχουν αξιοποιηθεί για τη βελτίωση δεξιοτήτων εκτέλεσης πολλαπλασιασμών από μαθητές πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης με ΕΜΔ. Η ερευνητική στρατηγική που χρησιμοποιήθηκε ήταν η συστηματική βιβλιογραφική ανασκόπηση, η οποία βάσει των ερευνητικών ερωτημάτων που τίθενται, χρησιμοποιεί αναλυτικές μεθόδους για την αναγνώριση, επιλογή και κριτική αξιολόγηση της σχετικής έρευνας, καθώς και για τη συλλογή και ανάλυση των δεδομένων που προκύπτουν από τις έρευνες που συμπεριλαμβάνονται στην ανασκόπηση (Moher, Liberati, Tetzlaff & Altman, 2009).

Η συστηματική βιβλιογραφική ανασκόπηση βασίζεται σε προκαθορισμένα κριτήρια ένταξης και αποκλεισμού των άρθρων προς μελέτη και διενεργούνται σύμφωνα με μία μεθοδολογική προσέγγιση, που περιγράφεται σε ένα σχετικό πρωτόκολλο (Shamseer et al., 2015). Το πρωτόκολλο αποτελεί βασικό συστατικό της συγκεκριμένης μεθοδολογίας, καθώς διασφαλίζει ότι η συστηματική ανασκόπηση πραγματοποιείται έχοντας σχεδιαστεί προσεχτικά και ότι ο σχεδιασμός αυτός έχει καταγραφεί αναλυτικά πριν ξεκινήσει η ανασκόπηση. Με αυτόν τον τρόπο προάγεται η συνοχή της έρευνας και η διαφάνεια των τελικών αποτελεσμάτων της ανασκόπησης (Moher et al., 2015).

Το πρωτόκολλο που εφαρμόστηκε στην παρούσα έρευνα είναι το PRISMA (Preferred Reporting Items for Systematic reviews and Meta-Analyses). Το PRISMA λειτουργεί ουσιαστικά ως οδηγός, κατευθύνοντας τους ερευνητές στην υλοποίηση της συστηματικής έρευνας ή μετα-ανάλυσης. Επιπλέον, μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως βάση για διάφορους τύπους έρευνας και ιδιαίτερα για την αξιολόγηση διδακτικών παρεμβάσεων (Moher, Liberati, Tetzlaff & Altman, 2009).

Το PRISMA, αποτελείται από 4 διακριτές φάσεις: α) τον προσδιορισμό των άρθρων ύστερα από αναζήτηση σε βάσεις δεδομένων ή και διαμέσου διαφορετικών πηγών αναζήτησης (identification), β) τη διαδικασία ελέγχου των άρθρων που εντοπίστηκαν (screening), γ) την αξιολόγηση των άρθρων βάσει των κριτηρίων που τίθενται από τον ερευνητή (eligibility) και δ) την επιλογή των άρθρων που τελικά συμπεριλαμβάνονται στην έρευνα (included). Τις φάσεις αυτές ο ερευνητής τις αποτυπώνει σχηματικά σε διαγράμματα ροής (flow diagrams) (Moher, Liberati, Tetzlaff & Altman, 2009· Moher et al., 2015).

### 2.1.2. Δείγμα της έρευνας

Στην παρούσα συστηματική ανασκόπηση συμπεριλήφθηκαν συνολικά 13 επιστημονικές μελέτες, οι οποίες αποτέλεσαν το δείγμα της έρευνας και αφορούσαν διδακτικές εφαρμογές που πραγματοποιήθηκαν για τη βελτίωση δεξιοτήτων εκτέλεσης πολλαπλασιασμών από μαθητές με ΕΜΔ. Οι έρευνες αυτές προέρχονται από άρθρα εγκεκριμένων επιστημονικών περιοδικών που ανακτήθηκαν από βάσεις δεδομένων, με σκοπό την εξασφάλιση της εγκυρότητας των αποτελεσμάτων της παρούσας συστηματικής ανασκόπησης.

Οι συμμετέχοντες των παρεμβατικών αυτών προγραμμάτων φοιτούσαν στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση. Σε όλες τις έρευνες που συμπεριλήφθηκαν υπήρχαν μαθητές, οι οποίοι είχαν διαγνωσθεί με ΕΜΔ. Κάθε διδακτική παρέμβαση είχε διαφορετικό αριθμό συμμετεχόντων και διέφεραν στην ηλικία, καθώς υπήρχαν μαθητές από την Γ ΄ δημοτικού μέχρι και την Στ΄ δημοτικού. Στον πίνακα που ακολουθεί δίνονται αναλυτικά πληροφορίες σχετικά με τις διδακτικές εφαρμογές που εξετάστηκαν:

**Πίνακας 1. Περιγραφή των ερευνών που συμπεριλήφθηκαν.**

| Έρευνες | Δείγμα Συμμετεχόντων με ΕΜΔ | Ερευνητική στρατηγική | Διδασκαλία | Αποτελέσματα ερευνών |
|---|---|---|---|---|
| Woodward (2006) | N=58 με n=15 μαθητές με ΕΜΔ δ' δημοτικού | Πειραματική έρευνα | Ομάδα ελέγχου: Παραδοσιακή διδασκαλία και χρονομετρημένες δοκιμασίες εξάσκησης Πειραματική ομάδα: διδασκαλία στρατηγικών μάθησης και χρονομετρημένες δοκιμασίες εξάσκησης και χρήση χειραπτικού και εικονιστικού υλικού. | Βελτίωση της επίδοσης των μαθητών με ΕΜΔ και στις δύο ομάδες, αλλά όχι στατιστικά σημαντική, ως προς την ευχέρεια των αριθμητικών συνδυασμών του πολλαπλασιασμού, με τα αποτελέσματα να ευνοούν περισσότερο την πειραματική ομάδα. |
| Zhang, Xin & Si (2011) | N= 3 με n= 2 μαθητές με ΕΜΔ δ'– ε' δημοτικού | Ερευνητικός σχεδιασμός πολλαπλών επιπέδων μεταξύ συμμετεχόντων (multiple probe across participants-single subject) | Πολλαπλοί τρόποι αναπαράστασης της γνώσης μέσω παιχνιδιού (PGBM) και σαφής διδασκαλία (κονστρουκτιβιστική προσέγγιση). | Αποτελεσματική χρήση ανεπτυγμένων στρατηγικών μέτρησης (διπλή μέτρηση), αλλά όχι στατιστικά σημαντική. |
| Flores, Hinton & Schweck (2014) | N= 4 μαθητές με ΕΜΔ δ' – ε' δημοτικού | Ερευνητικός σχεδιασμός πολλαπλών επιπέδων μεταξύ συμμετεχόντων (multiple probe across participants-single subject) | Πολλαπλοί τρόποι αναπαράστασης της γνώσης, διδασκαλία στρατηγικών μάθησης και σαφής διδασκαλία (explicit instruction) | Βελτίωση της επίδοσης στην ευχέρεια των υπολογιστικών δεξιοτήτων, διατήρηση και μεταφορά της γνώσης. |
| Hord et al. (2016) | N= 1 μαθήτρια με ΕΜΔ δ' δημοτικού | Ερευνητικός σχεδιασμός μελέτης περίπτωσης (case study design) | Πολλαπλοί τρόποι αναπαράστασης της γνώσης μέσω παιχνιδιού (PGBM), διδασκαλία προσαρμοσμένη στο μαθητή(κονστρουκτι βιστική προσέγγιση) | Βελτίωση της επίδοσης της μαθήτριας στη χρήση ανεπτυγμένων στρατηγικών μέτρησης, στην επίλυση σύνθετων πολλαπλασιαστικών προβλημάτων . |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Agaliotis & Teli (2016) | N= 53 με n= 39 μαθητές με ΕΜΔ δ’ – στ’ δημοτικού | Πειραματική έρευνα | Ομάδα ελέγχου: Αποτελεσματική διδασκαλία Πειραματική ομάδα: αποτελεσματική διδασκαλία και εναλλακτική ομαδοποίηση | Και οι δύο ομάδες επέδειξαν σημαντική βελτίωση μετά τη διδακτική παρέμβαση ως προς την ευχέρεια των αριθμητικών συνδυασμών του πολλαπλασιασμού. Ωστόσο, δεν παρουσιάστηκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των παρεμβάσεων. Στατιστικά σημαντική διαφορά σημείωσαν οι μαθητές με ΕΜΔ στην ευχέρεια των ΑΣ του πολλαπλασιασμού σε σύγκριση με τους μαθητές με ήπια νοητική αναπηρία. |
| Xin, Liu, Jones, Tzur & Si (2016) | N= 1 μαθητής με ΕΜΔ δ’ δημοτικού | Ερευνητικός σχεδιασμός μελέτης περίπτωσης (case study design) | Πολλαπλοί τρόποι αναπαράστασης της γνώσης μέσω παιχνιδιού (PGBM) και συζήτηση (ερωταποκρίσεις-κονστρουκτιβιστική προσέγγιση) | Βελτίωση της επίδοσης στη χρήση ανεπτυγμένων στρατηγικών μέτρησης, δηλαδή της διπλής αρίθμησης, σε πολλαπλασιαστικά προβλήματα, σε πραξιακό και εικονιστικό επίπεδο. Αδυναμία μεταφοράς της γνώσης στο αφηρημένο επίπεδο. |
| Milton, Flores, Moore, Taylor & Burton (2018) | N= 5 με n= 4 μαθητές με ΕΜΔ ε’- στ’ δημοτικού | Ερευνητικός σχεδιασμός πολλαπλών επιπέδων μεταξύ συμμετεχόντων (multiple probe across participants-single subject) | Πολλαπλοί τρόποι αναπαράστασης της γνώσης και σαφής διδασκαλία | Σημαντική βελτίωση της επίδοσης στην ευχέρεια των αριθμητικών συνδυασμών του πολλαπλασιασμού μετά τη διδακτική παρέμβαση και διατήρηση της επίδοσης από 2 έως 8 εβδομάδες. |
| Xin, Chiu, Tzur, Ma, Park & Yang (2019) | N= 4 με n= 3 μαθητές με ΕΜΔ ε’ δημοτικού | Ερευνητικός σχεδιασμός πολλαπλών επιπέδων μεταξύ συμμετεχόντων (multiple probe across participants-single subject) | Πολλαπλοί τρόποι αναπαράστασης της γνώσης μέσω παιχνιδιού (PGBM) και συζήτηση (teacher-student discourse) - κονστρουκτιβιστική προσέγγιση. | Διαφορετικά επίπεδα βελτίωσης ανάμεσα στις επιδόσεις των τριών μαθητών από την αρχική έως την τελική αξιολόγηση και μεταφορά γνώσεων σε πολλαπλασιαστικά προβλήματα που δε διδάχθηκαν στην παρέμβαση. |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Xin, Park, Tzur and Si (2020) | N= 3 μαθητές με ΕΜΔ γ΄ - δ΄ δημοτικού | Ερευνητικός σχεδιασμός πολλαπλών επιπέδων μεταξύ συμμετεχόντων (multiple probe across participants-single subject) | Πολλαπλοί τρόποι αναπαράστασης της γνώσης μέσω παιχνιδιού (PGBM) σε φορητό ηλεκτρονικό υπολογιστή (laptop) και σαφής διδασκαλία (κονστρουκτιβιστική προσέγγιση) | Σημαντική βελτίωση της επίδοσης των μαθητών από την αρχική έως την τελική αξιολόγηση στη χρήση ανεπτυγμένων στρατηγικών μέτρησης, δηλαδή της διπλής αρίθμησης και μεταφορά της γνώσης στην επίλυση πολλαπλασιαστικών προβλημάτων που δεν είχαν διδαχθεί. |
| Park, Bouck & Fischer (2020) | N= 3 με n= 1 μαθητής με ΕΜΔ στ' δημοτικού | Ερευνητικός σχεδιασμός πολλαπλών επιπέδων μεταξύ συμμετεχόντων (multiple probe across participants-single subject) | Πολλαπλοί τρόποι αναπαράστασης της γνώσης μέσω ηλεκτρονικής εφαρμογής σε iPad (VRA) και σαφής διδασκαλία (explicit instruction) | Σημαντική βελτίωση της επίδοσης του μαθητή και διατήρηση της επίδοσης του 5 εβδομάδες αργότερα, στην εκτέλεση ΑΣ πολλαπλασιασμού. |
| Flores & Milton (2020) | N= 3 με n= 1 μαθητής με ΕΜΔ στ' δημοτικού | Ερευνητικός σχεδιασμός πολλαπλών επιπέδων μεταξύ συμμετεχόντων (multiple probe across participants-single subject) | Πολλαπλοί τρόποι αναπαράστασης της γνώσης, σαφής διδασκαλία και χρήση μνημονικής στρατηγικής κατά το συμβολικό επίπεδο. | Σημαντική βελτίωση της επίδοσης του μαθητή στις υπολογιστικές δεξιότητες, μετά τη διδακτική παρέμβαση και διατήρηση της επίδοσής του 3 εβδομάδες αργότερα. |
| Lei, Xin, Morita-Mullaney & Tzur (2020) | N= 1 μαθήτρια με ΕΜΔ ε' δημοτικού | Ερευνητικός σχεδιασμός μελέτης περίπτωσης (case study design) | Πολλαπλοί τρόποι αναπαράστασης της γνώσης μέσω παιχνιδιού (PGBM) και κλιμακούμενη υποστήριξη (scaffolding) | Βελτίωση της επίδοσης στην χρήση ανεπτυγμένων στρατηγικών μέτρησης, δηλαδή της διπλής αρίθμησης, στην επίλυση πολλαπλασιαστικών προβλημάτων μετά τη διδακτική παρέμβαση, με τον κιναισθητικό τύπο υποστήριξης να είναι ο πιο αποτελεσματικός. |
| Hord, Kastberg & Draeger (2021) | N= 1 μαθητής με ΕΜΔ γ' δημοτικού | Ερευνητικός σχεδιασμός μελέτης περίπτωσης (case study design) | Χρήση χειραπτικού και εικονιστικού υλικού (κονστρουκτιβιστική προσέγγιση). | Αποτελεσματική χρήση ανεπτυγμένων στρατηγικών μέτρησης, δηλαδή διπλή αρίθμηση, αλλά μόνο όταν παράγοντες του πολλαπλασιασμού ήταν το 2 και το 5. |

### 2.1.3. Διαδικασία της έρευνας

Κατά την πρώτη φάση (identification), η αναζήτηση για τον εντοπισμό επιστημονικών άρθρων σχετικών με την παρούσα έρευνα, πραγματοποιήθηκε μέσω τριών βάσεων δεδομένων: Scopus (n=27), ScienceDirect (n=19), Eric (n=32). Χρησιμοποιήθηκαν διάφορες λέξεις-κλειδιά για την αναζήτηση των επιστημονικών άρθρων, οι επικρατέστεροι συνδυασμοί των οποίων ήταν οι εξής: (mathematics) AND (instruction OR teaching) AND (multiplication OR multiplication concept) AND (elementary school) AND (specific learning disabilities), (teaching) AND (mathematics) AND (multiplication concept OR multiplication) AND (specific learning disabilities OR learning disabilities) AND (elementary students).

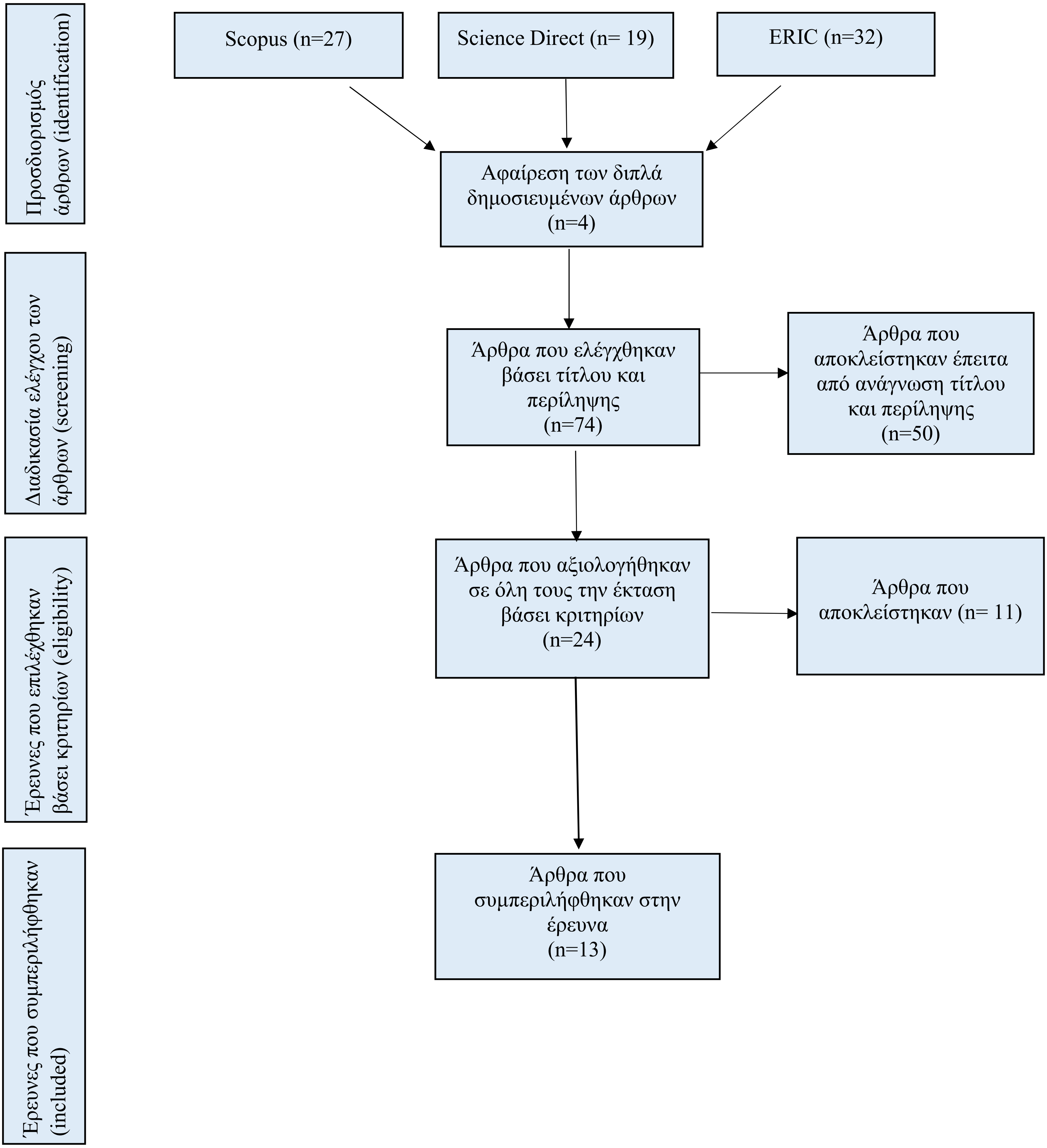
Επιπλέον, για την αναζήτηση ελληνόγλωσσης βιβλιογραφίας οι λέξεις-κλειδιά που χρησιμοποιήθηκαν ήταν οι παρακάτω: (διδασκαλία) ΚΑΙ (μαθηματικά) ΚΑΙ (πολλαπλασιασμός) ΚΑΙ (ειδικές μαθησιακές δυσκολίες) ΚΑΙ (πρωτοβάθμια εκπαίδευση). Το χρονικό εύρος της αρχικής αυτής αναζήτησης περιορίστηκε στην τελευταία 20ετία, δηλαδή στο διάστημα 2002-2022. Συνολικά εντοπίστηκαν 78 αποτελέσματα. Έπειτα, αφαιρέθηκαν τα διπλά δημοσιευμένα άρθρα (n=4), με αποτέλεσμα ο συνολικός αριθμός των άρθρων να φτάσει τα 74. Η τελευταία αναζήτηση πραγματοποιήθηκε στις 5/02/2022.

Κατά τη δεύτερη φάση της συστηματικής ανασκόπησης (screening), τα άρθρα που προέκυψαν ύστερα από την αφαίρεση των διπλά δημοσιευμένων, ελέγχθηκαν βάσει του τίτλου και της περίληψης. Σε αυτήν τη φάση συμπεριλήφθηκε οποιαδήποτε έρευνα αναφερόταν στον πολλαπλασιασμό, στην ανάπτυξη της έννοιας του πολλαπλασιασμού ή στον πολλαπλασιαστικό συλλογισμό και στη βελτίωση των υπολογιστικών δεξιοτήτων, είτε αυτές αναφέρονταν στην κατάκτηση των αριθμητικών συνδυασμών του πολλαπλασιασμού, είτε στην εκτέλεση του αλγορίθμου του πολλαπλασιασμού, από μαθητές με ΕΜΔ στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση, με αποτέλεσμα να αποκλειστούν συνολικά 50 άρθρα Scopus (n=20), ScienceDirect (n=15), Eric (n=15).

Στη συνέχεια, κατά την τρίτη φάση (eligibility) ύστερα από ανάγνωση ολόκληρου του κειμένου των 24 άρθρων που απέμειναν, πραγματοποιήθηκε ο έλεγχος για την επιλογή των άρθρων βάσει των παρακάτω κριτηρίων ένταξης: 1) Το χρονικό εύρος των άρθρων να περιορίζεται στο διάστημα 2002-2022, 2) τα άρθρα να είναι δημοσιευμένα είτε στην αγγλική είτε στην ελληνική γλώσσα, 3) να αφορούν μόνο διδακτικές παρεμβάσεις, 4) οι διδακτικές εφαρμογές να σχετίζονται με βελτίωση δεξιοτήτων εκτέλεσης πολλαπλασιασμών, 5) το δείγμα των ερευνών να αφορά μαθητές της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, 6) το δείγμα των ερευνών να αφορά μαθητές που έχουν διαγνωσθεί με ΕΜΔ.

Τα άρθρα που αποκλείστηκαν, σχετίζονταν με έρευνες που έγιναν στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, με έρευνες που είχαν για δείγμα μαθητές με χαμηλή επίδοση στα μαθηματικά ή που βρίσκονταν σε υψηλό κίνδυνο εμφάνισης ΕΜΔ (at risk), όπως επίσης αφαιρέθηκαν και οι έρευνες των οποίων το δείγμα αποτελούνταν από μαθητές που είχαν διαγνωσθεί με άλλη κατηγορία ειδικών εκπαιδευτικών αναγκών, όπως για παράδειγμα με αυτισμό, με κώφωση και με προβλήματα συμπεριφοράς. Επιπλέον, αφαιρέθηκαν τα άρθρα που σχετίζονταν με άλλες αριθμητικές πράξεις, δηλαδή της πρόσθεσης, της αφαίρεσης και της διαίρεσης, τα άρθρα που αποτελούσαν βιβλιογραφικές ανασκοπήσεις ή μετα-αναλύσεις, καθώς και άρθρα που δεν είχαν καμία σχέση με τον σκοπό της παρούσας συστηματικής ανασκόπησης. Ακόμη, αποκλείστηκαν άρθρα στα οποία δεν υπήρχε πρόσβαση.

Έπειτα από την εφαρμογή των κριτηρίων ο συνολικός αριθμός των άρθρων που συμπεριλήφθηκαν τελικά στην έρευνα ήταν 13 άρθρα. Η διαδικασία που ακολουθήθηκε αποτυπώνεται σχηματικά και στο παρακάτω διάγραμμα ροής (flow diagram):




Moher, Liberati, Tetzlaff & Altman (2009)

### 2.1.4 Ανάλυση Δεδομένων

Για την επεξεργασία των δεδομένων στην παρούσα έρευνα χρησιμοποιήθηκε η ποιοτική και η ποσοτική ανάλυση δεδομένων, αφενός διότι πρόκειται για συστηματική βιβλιογραφική ανασκόπηση και αφετέρου, διότι υπάρχουν περιγραφικά ποσοτικά στοιχεία προς ανάλυση για την περιγραφή της γενικής εικόνας αλλά και της κατανομής των στοιχείων της έρευνας. Συγκεκριμένα, έγινε μία αναλυτική περιγραφή, συστηματοποίηση και συσχέτιση των διδακτικών εφαρμογών ως προς τα κοινά αλλά και ως προς τα διαφορετικά χαρακτηριστικά τους, με κύριο γνώμονα τα ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν. Εξετάστηκαν, λοιπόν, τα αποτελέσματα των διδακτικών εφαρμογών που εντοπίστηκαν, οι οποίες εφαρμόστηκαν σε μαθητές πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης με ΕΜΔ.

Προκειμένου να αναλυθούν τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας και να διεξαχθούν τα σχετικά συμπεράσματα, κρίθηκε αναγκαία η κατηγοριοποίηση των ερευνών, σε σχέση με τις μεθόδους και τις τεχνικές που χρησιμοποιήθηκαν στις διδακτικές εφαρμογές που εξετάστηκαν, οι οποίες στόχευαν στη βελτίωση δεξιοτήτων εκτέλεσης πολλαπλασιασμών. Επιπλέον, εξετάστηκε η αποτελεσματικότητα των διάφορων μεθόδων και τεχνικών, η οποία αποτυπώθηκε στην επίδοση των μαθητών που συμμετείχαν στις έρευνες του δείγματος. Τέλος, αναλύθηκαν οι απόψεις εκπαιδευτικών και μαθητών σχετικά με τις μεθόδους και τις τεχνικές που εφαρμόστηκαν, καθώς και η σχέση που μπορεί να υπάρχει μεταξύ των απόψεων που εκφράστηκαν και των δημογραφικών στοιχείων των συμμετεχόντων του δείγματος.

# 3ο Κεφάλαιο

# Αποτελέσματα της έρευνας

## 3.1. Ανάλυση των αποτελεσμάτων

Ο τελικός αριθμός των άρθρων που αποτέλεσαν το δείγμα της παρούσας έρευνας ήταν συνολικά 13 άρθρα. Ο αριθμός των συμμετεχόντων που έλαβαν μέρος σε αυτές τις έρευνες ήταν 140, εκ των οποίων οι 76 προσδιορίστηκαν ως μαθητές με ΕΜΔ. Οι υπόλοιποι συμμετέχοντες ήταν είτε μαθητές χωρίς δυσκολίες, είτε μαθητές με χαμηλή επίδοση, είτε μαθητές που είχαν διαγνωσθεί με άλλου είδους αναπηρίες, όπως για παράδειγμα με ήπια νοητική αναπηρία ή ΔΕΠΥ, οι οποίοι είχαν περιληφθεί στις έρευνες για λόγους σύγκρισης. Όλοι οι συμμετέχοντες φοιτούσαν στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση, με την πλειοψηφία των μαθητών με ΕΜΔ να φοιτά στη Δ΄ δημοτικού (n= 21), ενώ στη Γ' δημοτικού φοιτούσαν οι λιγότεροι (n= 3). Στην Ε' δημοτικού φοιτούσαν 9, ενώ στην ΣΤ' φοιτούσαν 5 μαθητές. Σε αυτό το σημείο είναι σημαντικό να αναφερθεί πως σε 1 έρευνα δεν αναφερόταν σε ποιες ακριβώς τάξεις μεταξύ της Δ' έως ΣΤ' δημοτικού, φοιτούσαν οι μαθητές με ΕΜΔ, παρά μόνο ο συνολικός τους αριθμός (n= 39 μαθητές με ΕΜΔ). Υπήρχαν μαθητές διαφόρων εθνικοτήτων, όπως για παράδειγμα, Αμερικάνοι, Αφροαμερικάνοι, Λατινοαμερικάνοι, Έλληνες. Η συντριπτική πλειοψηφία των ερευνών πραγματοποιήθηκε στην Αμερική (n= 12), σε αγροτικές (n= 4) και σε αστικές περιοχές (n=8), ενώ μόνο 1 έρευνα εντοπίστηκε στην Ελλάδα.

Στα άρθρα που εξετάστηκαν χρησιμοποιήθηκαν ποικίλοι ερευνητικοί σχεδιασμοί, είτε σε ομάδες μαθητών (group design) είτε σε ατομικό επίπεδο (single case design or case study), για την πραγματοποίηση των διδακτικών παρεμβάσεων. Πιο συγκεκριμένα, στην πλειοψηφία των ερευνών (n= 11), οι συμμετέχοντες διδάχθηκαν σε ατομικό επίπεδο (single case design) (Zhang, Xin & Si, 2011· Flores, Hinton & Schweck, 2014· Hord et al., 2016·

Xin, Liu, Jones, Tzur & Si, 2016· Milton, Flores, Moore, Taylor & Burton, 2018· Xin et al., 2019· Xin, Park, Tzur & Si, 2020· Park, Bouck & Fisher, 2020· Flores & Milton, 2020· Lei, Xin, Morita-Mullaney & Tzur, 2020· Hord, Kastberg & Draeger, 2021), ενώ στις υπόλοιπες 2, οι συμμετέχοντες διδάχθηκαν σε ομάδες (group design) (Woodward, 2006· Agaliotis & Teli, 2016). Μάλιστα οι 2 τελευταίες έρευνες, διέθεταν και ομάδα ελέγχου.

Επιπλέον, παρόλο που πολλές από τις έρευνες που εντοπίστηκαν αναφέρονται επιπροσθέτως και σε αριθμητικούς συνδυασμούς ή προβλήματα διαίρεσης, η παρούσα έρευνα επικεντρώνεται στον πολλαπλασιασμό, οπότε και τα αποτελέσματα περιορίστηκαν ως προς αυτήν την κατεύθυνση.

Από τη μελέτη και ανάλυση των 13 άρθρων που εντοπίστηκαν στην παρούσα συστηματική βιβλιογραφική ανασκόπηση, προέκυψε ότι οι μέθοδοι και οι τεχνικές διδασκαλίας που εφαρμόστηκαν, για τη βελτίωση δεξιοτήτων εκτέλεσης πολλαπλασιασμών, χρησιμοποιήθηκαν κυρίως συνδυαστικά. Αυτό που είναι σημαντικό να αναφερθεί, είναι ότι όλες οι έρευνες χρησιμοποίησαν χειραπτικό και εικονιστικό υλικό, αξιοποιώντας κυρίως τους πολλαπλούς τρόπους αναπαράστασης της γνώσης. Επιπλέον, χρησιμοποιήθηκε η διδασκαλία στρατηγικών μάθησης (strategic instruction), όπως για παράδειγμα η χρήση μνημονικών στρατηγικών, η άμεση διδασκαλία (direct instruction) και η σαφής διδασκαλία (explicit instruction), η χρήση αναπαραστάσεων μέσω ηλεκτρονικού υπολογιστή και η κλιμακούμενη υποστήριξη (scaffolding).

Προκειμένου, λοιπόν, να αναλυθούν τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας και να διεξαχθούν τα σχετικά συμπεράσματα, κρίθηκε αναγκαία η κατηγοριοποίηση των ερευνών, σε σχέση με τις μεθόδους και τις τεχνικές που εφαρμόστηκαν, ούτως ώστε να αναδειχθούν τυχόν ομοιότητες και διαφορές, βάσει των οποίων πραγματοποιήθηκε και η σύγκριση σχετικά με την αποτελεσματικότητά τους.

3.1.1 Μέθοδοι και τεχνικές διδασκαλίας που εφαρμόσθηκαν

Πιο αναλυτικά, σε 2 από τις 13 έρευνες, οι οποίες διέθεταν και ομάδα ελέγχου, χρησιμοποιήθηκε χειραπτικό και οπτικοποιημένο υλικό, διδασκαλία στρατηγικών μάθησης, άμεση και αποτελεσματική διδασκαλία (Woodward, 2006· Agaliotis & Teli, 2016). Συγκεκριμένα, στην έρευνα που διεξήγαγε ο Woodward (2006), έλαβαν μέρος 58 μαθητές της Δ' δημοτικού, εκ των οποίων οι 15 είχαν διαγνωσθεί με ΕΜΔ. Κατά τη διδακτική παρέμβαση της πειραματικής ομάδας, η οποία αποτελούνταν από 22 μαθητές «τυπικής ανάπτυξης» και 8 μαθητές με ΕΜΔ, χρησιμοποιήθηκε οπτικοποιημένο υλικό με κύβους με βάση τις δυνάμεις του 10, αλλά και αριθμογραμμές με απώτερο σκοπό τη βελτίωση των μαθητών ως προς την ευχέρεια και γενίκευση στην εκτέλεση αριθμητικών συνδυασμών πολλαπλασιασμού, όπως επίσης στην επίλυση προβλημάτων πολλαπλασιασμού με τη χρήση του αλγορίθμου των μερικών γινομένων, αλλά και την κατανόηση της σχέσης μεταξύ βασικών και διευρυμένων δεδομένων (extended facts). Επιπλέον, η διδακτική παρέμβαση που δέχτηκε η πειραματική ομάδα ήταν βασισμένη στο μοντέλο στρατηγικών μάθησης σε συνδυασμό με χρονομετρημένες δοκιμασίες εξάσκησης. Οι αριθμητικοί συνδυασμοί χωρίστηκαν σε δύο κατηγορίες βάσει του βαθμού δυσκολίας τους. Οι παρεμβάσεις, εκτός από τη διδασκαλία στρατηγικών και την πρακτική περιλάμβαναν και την παρουσίαση των αριθμητικών συνδυασμών με εναλλακτική ομαδοποίηση. Αντίθετα, η ομάδα ελέγχου που απαρτιζόταν από 21 μαθητές «τυπικής ανάπτυξης» και 7 μαθητές με ΕΜΔ, δέχθηκε παραδοσιακή διδασκαλία με τη χρήση χρονομετρημένων δοκιμασιών και στα πλαίσια ελεγχόμενης εξάσκησης χωρίς την αξιοποίηση οπτικοποιημένου ή χειραπτικού υλικού, ενώ απουσίαζε η εκμάθηση νέων στρατηγικών.

Στην πειραματική έρευνα των Agaliotis και Teli (2016), συμμετείχαν συνολικά 53 μαθητές που φοιτούσαν σε διάφορες τάξεις του δημοτικού (από Δ' έως ΣΤ' δημοτικού) εκ των οποίων οι 39 είχαν διαγνωσθεί με ΕΜΔ. Η διδακτική παρέμβαση που υλοποιήθηκε είχε ως στόχο τη βελτίωση της επίδοσης των μαθητών/τριών ως προς την ευχέρεια των αριθμητικών συνδυασμών πολλαπλασιασμού και διαίρεσης. Κατά την παρέμβαση που δέχθηκε η ομάδα ελέγχου, η οποία απαρτιζόταν από 20 μαθητές με ΕΜΔ και 10 μαθητές με ήπια νοητική αναπηρία, ακολουθήθηκαν τα στάδια της πλήρους αποτελεσματικής διδασκαλίας (effective instruction). Στο πλαίσιο της αποτελεσματικής διδασκαλίας αξιοποιήθηκαν οι πολλαπλοί τρόποι αναπαράστασης της γνώσης για τη διδασκαλία των αριθμητικών συνδυασμών πολλαπλασιασμού. Τα ίδια βήματα ακολούθησε και η διδακτική παρέμβαση που εφαρμόστηκε στην πειραματική ομάδα, την οποία αποτελούσαν 19 μαθητές με ΕΜΔ και 4 μαθητές με ήπια νοητική αναπηρία, με τη διαφορά ότι για την παρουσίαση των αριθμητικών συνδυασμών του πολλαπλασιασμού εφαρμόστηκε η εναλλακτική ομαδοποίηση, σε αντίθεση με την ομάδα ελέγχου η οποία διδάχθηκε τους αριθμητικούς συνδυασμούς σύμφωνα με τη σειρά που παρουσιάζονται στα σχολικά βιβλία.

Η χρήση χειραπτικού υλικού εντοπίστηκε σε ακόμη 5 έρευνες, οι οποίες είχαν ως βάση την κονστρουκτιβιστική προσέγγιση, σύμφωνα με την οποία η γνώση οικοδομείται ενεργά από τον μαθητή και όχι παθητικά, μέσω της αλληλεπίδρασής του με το περιβάλλον (Zhang, Xin & Si, 2011· Hord et al., 2016· Xin, Liu, Jones, Tzur & Si 2016· Xin et al., 2019· Lei, Xin, Morita-Mullaney & Tzur, 2020).

Στις έρευνες αυτές, λοιπόν, αξιοποιήθηκε το παιχνίδι Please Go and Bring Me (PGBM), το οποίο είναι βασισμένο στις αρχές των πολλαπλών τρόπων αναπαράστασης της γνώσης (Tzur et al., 2020). Σύμφωνα με αυτό, οι μαθητές πρέπει σε πρώτη φάση να δημιουργήσουν έναν συγκεκριμένο αριθμό πύργων που αποτελούνται από έναν συγκεκριμένο αριθμό κύβων ανάλογα πάντα με το εκάστοτε πρόβλημα, όπως 4 πύργοι των 3 κύβων, δηλαδή 4x3. Στόχος του παιχνιδιού είναι να αναπτύξουν οι μαθητές τον πολλαπλασιαστικό συλλογισμό, δηλαδή να κατασκευάσουν την έννοια των σύνθετων μονάδων, όπως επίσης και της διπλής μέτρησης και κατ' επέκταση να κατανοήσουν τα τρία βασικά στοιχεία ενός πολλαπλασιαστικού προβλήματος, δηλαδή τον αριθμό των ομάδων, το μέγεθος των ομάδων, δηλαδή τον αριθμό των στοιχείων που περιλαμβάνονται σε κάθε ομάδα, τα οποία έχουν τον ίδιο αριθμό σε κάθε ομάδα και τέλος το σύνολο ή αλλιώς γινόμενο. Για παράδειγμα, ο Νίκος έφερε 4 πύργους, καθένας από τους οποίους αποτελείται από 3 κύβους. Ποιος είναι ο συνολικός αριθμός των κύβων που έφερε ο Νίκος; Έπειτα, το παιχνίδι γίνεται πιο σύνθετο, καθώς τα προβλήματα που τίθενται προϋποθέτουν διάφορους και πιο περίπλοκους συνδυασμούς. Για παράδειγμα, ο Νίκος έχει μία συλλογή από 4 πύργους, καθένας από τους οποίους αποτελείται από 3 κύβους. Έχει όμως και ακόμη 6 κύβους. Εάν ο Νίκος βάλει τους 6 αυτούς κύβους σε πύργους των 3, τότε ποιος θα είναι ο συνολικός αριθμός των πύργων;

Στην παλαιότερη από τις 5 αυτές έρευνες, εξετάστηκε η επίδραση μιας πειραματικής διδασκαλίας για τη χρήση της στρατηγικής της διπλής μέτρησης (double counting) σε πολλαπλασιαστικά προβλήματα, σε 3 μαθητές της Ε’ δημοτικού, εκ των οποίων οι 2 ήταν μαθητές με ΕΜΔ (Zhang, Xin & Si, 2011). Κατά τη διάρκεια της παρέμβασης, προκειμένου τα παιδιά να οικοδομήσουν την έννοια της διπλής μέτρησης, χρησιμοποιήθηκαν κύβοι στο πλαίσιο του παιχνιδιού (PGBM) σε συνδυασμό με τη σαφή διδασκαλία. Μετά την αναλυτική παρουσίαση της διπλής μέτρησης από τον εκπαιδευτικό και την αυτόνομη εξάσκηση από την πλευρά των μαθητών, οι ερευνητές ανέμεναν την αντικατάσταση των πιο απλών στρατηγικών που χρησιμοποιούσαν έως τότε οι μαθητές, όπως για παράδειγμα τη μέτρηση ανά ένα που επικράτησε κατά την αρχική τους αξιολόγηση, με πιο ανεπτυγμένες στρατηγικές, όπως η διπλή μέτρηση που διδάχθηκαν, κατά την επίλυση πολλαπλασιαστικών προβλημάτων.

Ο Hord και οι συνεργάτες (2016), χρησιμοποίησαν το παιχνίδι PGBM, στοχεύοντας στην επίλυση σύνθετων πολλαπλασιαστικών προβλημάτων, σε μία μαθήτρια της Δ’ δημοτικού με ΕΜΔ. Ακόμη, οι Xin, Liu, Jones, Tzur και Si (2016), εξέτασαν την επίδραση του παιχνιδιού PGBM στην ανάπτυξη του πολλαπλασιαστικού συλλογισμού, προκειμένου τα παιδιά να οικοδομήσουν την έννοια της διπλής μέτρησης όπως επίσης και στην μεταφορά αυτής της γνώσης στην επίλυση πολλαπλασιαστικών προβλημάτων, σε έναν μαθητή με ΕΜΔ, που φοιτούσε στη Δ' δημοτικού.

Επιπλέον, στην έρευνα της Xin και των συνεργατών της (2019), χρησιμοποιήθηκε και πάλι το ίδιο παιχνίδι (PGBM), σε 3 μαθητές της Ε' δημοτικού με ΕΜΔ και εξετάσθηκε η επίδρασή του στην επίδοση των μαθητριών ως προς την κατάκτηση της διπλής μέτρησης και γενικώς την ανάπτυξη του πολλαπλασιαστικού συλλογισμού, αλλά και τη μεταφορά της γνώσης τους σε λεκτικά αριθμητικά προβλήματα, πολλαπλασιαστικού τύπου, κατηγορίας ίσων ομάδων και πολλαπλασιαστικής σύγκρισης. Παρόλο που το παιχνίδι εστιάζει στο μοντέλο των ίσων ομάδων, οι ερευνητές κατά την τελική αξιολόγηση χρησιμοποίησαν και προβλήματα πολλαπλασιαστικής σύγκρισης για να εξετάσουν την πιθανή μεταφορά της γνώσης και σε προβλήματα που δεν διδάχθηκαν κατά την παρέμβαση.

Τέλος, οι Lei, Xin, Morita-Mullaney και Tzur (2020), εφάρμοσαν το ίδιο παιχνίδι (PGBM) σε συνδυασμό με διάφορους τύπους κλιμακούμενης υποστήριξης (scaffolding), όπως τον κιναισθητικό, τον αλληλεπιδραστικό, τον λεκτικό και τον οπτικό, σε μία μαθήτρια με ΕΜΔ της Ε' δημοτικού, η οποία ήταν ταυτόχρονα μαθήτρια της αγγλικής γλώσσας, καθώς προερχόταν από άλλη χώρα. Παρόλο που σε αυτήν την έρευνα συμμετείχαν 2 μαθήτριες με ΕΜΔ, η συγκεκριμένη παρέμβαση επικεντρώθηκε στην πρώτη εκ των δύο, καθώς στόχευε στον εντοπισμό του πιο αποτελεσματικού τύπου κλιμακούμενης υποστήριξης, ως προς την ανάπτυξη του πολλαπλασιαστικού συλλογισμού σε μαθητές με ΕΜΔ, οι οποίοι δεν έχουν την αγγλική γλώσσα ως μητρική.

Σε μία παρόμοια έρευνα των Hord, Kastberg και Draeger (2021), η οποία επίσης είχε ως βάση την κονστρουκτιβιστική προσέγγιση, χρησιμοποιήθηκε χειραπτικό υλικό σε έναν μαθητή της Γ΄ δημοτικού με ΕΜΔ, χωρίς την αξιοποίηση, όμως, του παιχνιδιού PGBM, με απώτερο σκοπό τη βελτίωση της επίδοσής του στην επίλυση πολλαπλασιαστικών προβλημάτων, χρησιμοποιώντας πιο ανεπτυγμένες στρατηγικές μέτρησης, όπως η διπλή μέτρηση.

Επιπρόσθετα, σε 3 έρευνες χρησιμοποιήθηκαν οι πολλαπλοί τρόποι αναπαράστασης της γνώσης, συνδυαστικά με τη διδασκαλία μνημονικών στρατηγικών και τη σαφή διδασκαλία (Flores, Hinton & Schweck, 2014· Milton, Flores, Moore, Taylor & Burton, 2018· Flores & Milton, 2020). Συγκεκριμένα, προκειμένου να γίνει ομαλή η μετάβαση των μαθητών από το πραξιακό και το εικονιστικό στάδιο στο συμβολικό, αξιοποιήθηκε η διδασκαλία μνημονικών στρατηγικών.

Πιο αναλυτικά, σε μία πρόσφατη έρευνα των Flores, Hinton και Schweck (2014), χρησιμοποιήθηκαν οι πολλαπλοί τρόποι αναπαράστασης της γνώσης (πραξιακός-εικονιστικός-συμβολικός), για τη διδασκαλία του πολλαπλασιασμού με διψήφιους τελεστές βάσει του μοντέλου της ανταλλαγής (multiplication with regrouping) σε 4 μαθητές/τριες (10-11 ετών), οι οποίοι είχαν διαγνωσθεί με ΕΜΔ. Οι συναντήσεις με τους μαθητές έγιναν σε ατομικό επίπεδο για 25 λεπτά τρεις φορές την εβδομάδα. Ιδιαίτερη έμφαση δόθηκε στην έννοια της θεσιακής αξίας κατά το πραξιακό και εικονιστικό στάδιο, καθώς θεωρείται θεμελιώδης αρχή για την κατάκτηση του αλγορίθμου του πολλαπλασιασμού. Κατά την αρχική αξιολόγηση χρησιμοποιήθηκαν πολλαπλασιασμοί με διψήφιους τελεστές, ενώ η παρέμβαση ξεκινούσε όταν γράφονταν σωστά τουλάχιστον 25 αριθμητικά ψηφία. Στο πραξιακό στάδιο χρησιμοποιήθηκαν κύβοι, οι οποίοι αναπαριστούσαν τις μονάδες, τις δεκάδες (10 κύβοι ισοδυναμούν με 1 λωρίδα, δηλαδή 1 δεκάδα) και τις εκατοντάδες (10 λωρίδες των 10 κύβων ισοδυναμούν με 1 εκατοντάδα). Κατά το εικονιστικό στάδιο, οι μονάδες αναπαριστάνονταν με μικρές κάθετες γραμμές, οι δεκάδες με μεγαλύτερες κάθετες γραμμές, οι εκατοντάδες με τετράγωνα και οι χιλιάδες με κύβους. Αμέσως μετά το εικονιστικό στάδιο, οι μαθητές διδάσκονταν μία μνημονική στρατηγική (RENAME), προκειμένου να την χρησιμοποιήσουν κατά το τελευταίο στάδιο της παρέμβασης, δηλαδή το συμβολικό, όπου οι μαθητές πέρασαν στη χρήση αριθμών, χωρίς τη βοήθεια χειραπτικού ή εικονιστικού υλικού, δίνοντας έμφαση στην ευχέρεια και την αυτοματοποίηση.

Αντίστοιχα, οι Milton, Flores, Moore, Taylor και Burton (2018), αξιοποίησαν τους πολλαπλούς τρόπους αναπαράστασης της γνώσης για τη διδασκαλία άγνωστων αριθμητικών συνδυασμών πολλαπλασιασμού και διαίρεσης σε 5 μαθητές/τριες, εκ των οποίων οι 4 είχαν ΕΜΔ και φοιτούσαν στις τάξεις Ε’ και ΣΤ’ δημοτικού. Όσον αφορά την περίπτωση του πολλαπλασιασμού, οι μαθητές/τριες έπρεπε κατά το πραξιακό στάδιο να περιγράψουν με λόγια τι συμβολίζει ο εκάστοτε αριθμητικός συνδυασμός και στη συνέχεια να τον αναπαραστήσουν με τη βοήθεια πιάτων και πλακιδίων. Για παράδειγμα, για τον αριθμητικό συνδυασμό 6x3 θα έπρεπε να πουν ότι πρόκειται για 6 ομάδες των 3 αντικειμένων και έπειτα να τοποθετήσουν 6 πιάτα το κάθε ένα από τα οποία θα περιείχε 3 πλακίδια. Στο εικονιστικό στάδιο, οι μαθητές έπρεπε να επιλύουν τους αριθμητικούς συνδυασμούς χρησιμοποιώντας σχέδια και εικόνες. Παρόμοια ήταν και η μνημονική στρατηγική (DRAW) που αξιοποιήθηκε κατά το συμβολικό και τελευταίο στάδιο της παρέμβασης, με απώτερο σκοπό οι μαθητές να θυμούνται τα βήματα που πρέπει να εκτελούν και να δίνουν προσοχή στις λεπτομέρειες (όπως τα πραξιακά σύμβολα και τους αριθμούς), χωρίς τη βοήθεια αντικειμένων ή σχεδίων.

Τέλος, στην έρευνα των Flores και Milton (2020), εξετάσθηκε η επίδραση των πολλαπλών τρόπων αναπαράστασης της γνώσης στην επίλυση ενός εναλλακτικού αλγορίθμου για τον πολλαπλασιασμό σε 3 μαθητές, εκ των οποίων ο ένας είχε διαγνωσθεί με ΕΜΔ. Συγκεκριμένα, κατά τη διδακτική παρέμβαση εφαρμόστηκε η στρατηγική των μερικών γινομένων στην εκτέλεση του πολλαπλασιασμού με διψήφιους τελεστές. Η διδακτική παρέμβαση στηρίχθηκε στους πολλαπλούς τρόπους αναπαράστασης της γνώσης σε συνδυασμό με τη σαφή διδασκαλία. Επιπρόσθετα, αξιοποιήθηκε και σε αυτήν την περίπτωση η μνημονική στρατηγική (RENAME).

Σε σύγχρονες έρευνες που εντοπίστηκαν, αξιοποιήθηκαν οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές-συσκευές για την πραγματοποίηση των διδακτικών παρεμβάσεων (Xin, Park, Tzur & Si, 2020· Park, Bouck & Fisher, 2020). Πιο συγκεκριμένα, οι Xin, Park, Tzur και Si (2020), έχοντας ως σημείο αναφοράς την κονστρουκτιβιστική προσέγγιση, εξέτασαν την επίδραση που μπορεί να έχει ο συνδυασμός του παιχνιδιού PGBM με το εννοιολογικό μοντέλο επίλυσης προβλήματος (COMPS) μέσω φορητού ηλεκτρονικού υπολογιστή, στην ανάπτυξη του πολλαπλασιαστικού συλλογισμού και στη μεταφορά αυτής της γνώσης στην επίλυση προβλημάτων πολλαπλασιαστικού τύπου, σε 3 μαθητές με ΕΜΔ που φοιτούσαν στις τάξεις Γ' και Δ' δημοτικού.

Ακόμη, στην έρευνα των Park, Bouck και Fisher (2020), εξετάστηκε η επίδραση της χρήσης των πολλαπλών τρόπων αναπαράστασης της γνώσης μέσω iPad, σε συνδυασμό με τη σαφή διδασκαλία στην επίλυση ΑΣ πολλαπλασιασμού σε 3 μαθητές εκ των οποίων οι 2 είχαν διαγνωσθεί με ΕΜΔ και φοιτούσαν στην ΣΤ' δημοτικού. Από τους 2 αυτούς μαθητές μόνο ο ένας συμπεριλήφθηκε στα αποτελέσματα, καθώς ο άλλος φοιτούσε στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Σε αυτήν την περίπτωση οι πολλαπλοί τρόποι αναπαράστασης της γνώσης παρουσιάστηκαν ψηφιακά αντικαθιστώντας το χειραπτικό με το ψηφιακό υλικό κατά τη φάση της πραξιακής αναπαράστασης.

### 3.1.2. Αποτελεσματικότητα διδακτικών μεθόδων και τεχνικών

Η αποτελεσματικότητα της χρήσης χειραπτικού και εικονιστικού υλικού για τη βελτίωση δεξιοτήτων εκτέλεσης πολλαπλασιασμών, αποδείχθηκε από τις περισσότερες έρευνες που μελετήθηκαν στην παρούσα συστηματική ανασκόπηση. Συγκεκριμένα, σε όλες τις έρευνες σημειώθηκαν θετικές επιδράσεις, κάποιες από τις οποίες ήταν στατιστικά σημαντικές. Ιδιαίτερα σημαντικό είναι το γεγονός, ότι η χρήση του χειραπτικού και εικονιστικού υλικού γινόταν κυρίως στο πλαίσιο των πολλαπλών τρόπων αναπαράστασης της γνώσης.

Πιο αναλυτικά, στις έρευνες που χρησιμοποιήθηκαν συνδυαστικά οι πολλαπλοί τρόποι αναπαράστασης της γνώσης με τις μνημονικές στρατηγικές και τη σαφή διδασκαλία, φάνηκε ότι οι επιδόσεις των μαθητών/τριών με ΕΜΔ, μπορούν να βελτιωθούν σημαντικά ως προς την ευχέρεια και διατήρηση των ΑΣ του πολλαπλασιασμού, όπως επίσης και ως προς την ακρίβεια και διατήρηση στην εκτέλεση του αλγορίθμου του πολλαπλασιασμού είτε με την στρατηγική της ανταλλαγής είτε με την εναλλακτική στρατηγική των μερικών γινομένων (Flores, Hinton & Schweck, 2014· Milton, Flores, Moore, Taylor & Burton, 2018· Flores & Milton, 2020). Χαρακτηριστικά, στην έρευνα των Flores, Hinton και Schweck (2014), όλοι οι μαθητές/τριες (4 με ΕΜΔ), βελτίωσαν σημαντικά την αρχική τους επίδοση, επιδεικνύοντας ευχέρεια στις υπολογιστικές τους δεξιότητες, γράφοντας ορθά τουλάχιστον 30 ψηφία κατά την εκτέλεση του αλγορίθμου του πολλαπλασιασμού. Μάλιστα, διατήρησαν την επίδοσή τους τουλάχιστον 2 εβδομάδες μετά το πέρας της διδακτικής παρέμβασης. Αξίζει να σημειωθεί το γεγονός ότι οι 3 από τους 4 μαθητές (η μία μαθήτρια αποχώρησε) μετέφεραν τη γνώση τους σε πιο σύνθετα προβλήματα με τριψήφιους και διψήφιους τελεστές. Αντίστοιχα ήταν τα αποτελέσματα και μίας άλλης έρευνας, όπου υπήρχε σημαντική βελτίωση στην ευχέρεια των αριθμητικών συνδυασμών του πολλαπλασιασμού σε όλους τους μαθητές/τριες (4 με ΕΜΔ), καθώς και διατήρηση της επίδοσής τους από 2 έως 8 εβδομάδες (Milton, Flores, Moore, Taylor & Burton, 2018). Τα αποτελέσματα ήταν εξίσου ενθαρρυντικά και στην έρευνα των Flores και Milton (2020), καθώς η επίδοση του μαθητή στην ακρίβεια και ευχέρεια του αλγορίθμου του πολλαπλασιασμού με τη στρατηγική των μερικών γινομένων, βελτιώθηκε σημαντικά από την αρχική (7 ορθά ψηφία) έως την τελική αξιολόγηση (69 ορθά ψηφία), διατηρώντας μάλιστα αυτήν την επίδοση 3 εβδομάδες μετά το πέρας της διδακτικής παρέμβασης.

Επίσης, θετικά ήταν τα αποτελέσματα στις 2 πειραματικές έρευνες που διέθεταν και ομάδα ελέγχου. Πιο συγκεκριμένα, στη μία έρευνα όλοι οι μαθητές παρουσίασαν σημαντική βελτίωση στην ευχέρεια των αριθμητικών συνδυασμών του πολλαπλασιασμού σε σχέση με την αρχική τους επίδοση, δεν σημειώθηκε ωστόσο στατιστικά σημαντική διαφορά ανάμεσα στις παρεμβάσεις που πραγματοποιήθηκαν στις δύο ομάδες. Ωστόσο, υπήρξε στατιστικά σημαντική διαφορά στην ευχέρεια των αριθμητικών συνδυασμών του πολλαπλασιασμού των μαθητών με ΕΜΔ σε σύγκριση με τους μαθητές με ήπια νοητική αναπηρία (Agaliotis & Teli, 2016). Παρομοίως, στην έρευνα του Woodward (2006), δεν υπήρξε στατιστικά σημαντική διαφορά μεταξύ των παρεμβάσεων που εφαρμόστηκαν στις δύο ομάδες, ωστόσο παρουσιάστηκε βελτίωση της επίδοσης των μαθητών στην ακρίβεια και την ευχέρεια των αριθμητικών συνδυασμών του πολλαπλασιασμού, με τα αποτελέσματα να ευνοούν περισσότερο την πειραματική ομάδα. Αξιοσημείωτο, σε αυτήν την περίπτωση, είναι το γεγονός πως καμία ομάδα δεν σημείωσε υψηλές επιδόσεις, γεγονός που σύμφωνα με τον ερευνητή οφείλεται στη μικρή διάρκεια της παρέμβασης. Παρόλο που όλοι οι μαθητές βελτιώθηκαν από την αρχική έως την τελική αξιολόγηση, ωστόσο φάνηκε ότι οι μαθητές με ΕΜΔ και στις δύο ομάδες σημείωσαν αρκετά χαμηλότερη επίδοση σε σχέση με τους συνομηλίκους τους.

Στις 5 έρευνες που ακολούθησαν την κονστρουκτιβιστική προσέγγιση στο πλαίσιο του παιχνιδιού PGBM, τα αποτελέσματα ήταν ενθαρρυντικά ως προς τη δόμηση του πολλαπλασιαστικού συλλογισμού, της έννοιας των σύνθετων μονάδων και της διπλής μέτρησης και της χρήσης τους κατά την επίλυση προβλημάτων πολλαπλασιασμού, καθώς και οι 9 συνολικά μαθητές/τριες που έλαβαν μέρος στις διδακτικές παρεμβάσεις, βελτίωσαν σημαντικά την επίδοσή τους από την αρχική έως την τελική τους αξιολόγηση, διατηρώντας την μάλιστα για αρκετές εβδομάδες μετά το πέρας της διδασκαλίας, κατά τη διενέργεια του επανελέγχου. Μάλιστα, σε ορισμένες περιπτώσεις, υπήρξε μεταφορά της κατακτηθείσας γνώσης, σε προβλήματα που δεν είχαν διδαχθεί κατά την παρέμβαση (Zhang, Xin & Si, 2011· Hord et al., 2016· Xin, Liu, Jones, Tzur & Si, 2016· Xin et al., 2019· Lei, Xin, Morita-Mullaney & Tzur, 2020).

Αναλυτικά, στην έρευνα των Zhang, Xin και Si (2011), φάνηκε ότι οι 2 μαθητές με ΕΜΔ κατά την αρχική αξιολόγηση χρησιμοποιούσαν πιο απλές στρατηγικές μέτρησης όπως για παράδειγμα μέτρηση ανά ένα, γεγονός που οδηγούσε σε χαμηλή επίδοση κατά την επίλυση πολλαπλασιαστικών προβλημάτων. Μετά την παρέμβαση, η επίδοσή τους βελτιώθηκε, καθώς κατά την τελική αξιολόγηση, χρησιμοποιούσαν αποτελεσματικά πιο ανεπτυγμένες στρατηγικές μέτρησης, όπως η διπλή μέτρηση. Ωστόσο, δεν παρουσιάστηκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές στις επιδόσεις των μαθητών. Σε μία άλλη πρόσφατη έρευνα, αποδείχθηκε ότι η μαθήτρια με ΕΜΔ κατάφερε να επιλύσει αποτελεσματικά σύνθετα πολλαπλασιαστικά προβλήματα, τα οποία απαιτούσαν την ένωση διαφορετικών ομάδων, όπως για παράδειγμα ένα πρόβλημα του τύπου « Έχουμε 9 κουτιά με 6 μπισκότα το καθένα και 12 μπισκότα τα οποία δεν βρίσκονται μέσα σε κουτιά. Πόσα κουτιά θα είχαμε αν τοποθετούσαμε τα 12 μπισκότα σε κουτιά των 6;» (Hord et al., 2016).

Στην έρευνα των Xin, Liu, Jones, Tzur και Si (2016), παρατηρήθηκε βελτίωση της επίδοσης του μαθητή ως προς την ανάπτυξη του πολλαπλασιαστικού συλλογισμού, δηλαδή την ανάπτυξη της έννοιας των σύνθετων μονάδων, της διπλής μέτρησης και τη χρήση τους στο πλαίσιο επίλυσης πολλαπλασιαστικών προβλημάτων, κατηγορίας ίσων ομάδων, η οποία όμως παρέμεινε στο πραξιακό και εικονιστικό επίπεδο, καθώς δεν κατάφερε να μεταφέρει την επίδοση αυτή σε συμβολικό επίπεδο. Το γεγονός αυτό, σύμφωνα με τους ερευνητές, σχετιζόταν άμεσα με τον περιορισμένο χρόνο που αφιερώθηκε στα επιμέρους στάδια κατά τη διάρκεια της παρέμβασης (πραξιακό-εικονιστικό-συμβολικό). Επιπλέον, ο μαθητής εξετάστηκε και σε προβλήματα πολλαπλασιαστικής σύγκρισης, δίχως να μπορέσει να επιλύσει κανένα.

Σε παρόμοια έρευνα της Xin και των συνεργατών (2019), καταγράφηκε βελτίωση της επίδοσης και των 3 μαθητών/τριών ως προς τη χρήση της διπλής μέτρησης κατά την επίλυση προβλημάτων πολλαπλασιασμού από την αρχική έως την τελική αξιολόγηση. Μάλιστα μία μαθήτρια κατάφερε να επιλύσει με επιτυχία και προβλήματα πολλαπλασιαστικής σύγκρισης, χωρίς να τα έχει διδαχθεί κατά την παρέμβαση.

Τέλος, στην έρευνα των Lei, Xin, Morita-Mullaney και Tzur, (2020), παρατηρήθηκε βελτίωση της επίδοσης αναφορικά με την εκτέλεση πολλαπλασιαστικών προβλημάτων, της μαθήτριας με ΕΜΔ, η οποία ήταν παράλληλα και μαθήτρια της αγγλικής γλώσσας. Ακόμη, ιδιαίτερη προσοχή δόθηκε και στους τύπους της κλιμακούμενης υποστήριξης (scaffolding) που θα τη βοηθούσαν περισσότερο ως προς την ανάπτυξη της έννοιας του πολλαπλασιασμού και κατ' επέκταση ως προς την εκτέλεση προβλημάτων πολλαπλασιασμού. Τα αποτελέσματα, λοιπόν, έδειξαν ότι πρωτίστως ο κιναισθητικός τύπος και έπειτα ο λεκτικός ήταν οι πιο αποτελεσματικοί τύποι υποστήριξης για τη δόμηση του πολλαπλασιαστικού συλλογισμού.

Ωστόσο, στην έρευνα των Hord, Kastberg και Draeger (2021), η οποία ακολούθησε επίσης την κονστρουκτιβιστική προσέγγιση, κατά τη διδακτική παρέμβαση της οποίας χρησιμοποιήθηκε χειραπτικό και εικονιστικό υλικό αλλά όχι στο πλαίσιο του παιχνιδιού PGBM, όπως οι προηγούμενες πέντε που αναφέρθηκαν παραπάνω, παρατηρήθηκε βελτίωση της επίδοσής του μαθητή με ΕΜΔ ως προς τη χρήση της στρατηγικής της διπλής μέτρησης (double counting) σε πολλαπλασιαστικά προβλήματα, μόνο όμως στην περίπτωση κατά την οποία ένας από τους παράγοντες του πολλαπλασιασμού ήταν το 2 ή το 5. Όταν, όμως, παράγοντας ήταν κάποιος άλλος αριθμός, όπως για παράδειγμα το 3 ή το 4, επέστρεφε στην μέτρηση ανά ένα, μη μπορώντας να επιλύσει ορθά τα συγκεκριμένα προβλήματα.

Στις έρευνες που έγινε χρήση ηλεκτρονικών υπολογιστών-συσκευών, τα αποτελέσματα ήταν ιδιαίτερα ενθαρρυντικά καθώς και οι 5 συνολικά μαθητές που συμμετείχαν σε αυτές, βελτίωσαν σημαντικά την επίδοσή τους από την αρχική έως την τελική αξιολόγηση στην επίλυση πολλαπλασιαστικών προβλημάτων (Xin, Park, Tzur & Si 2020· Park, Bouck & Fisher, 2020). Επιπλέον, στην έρευνα των Xin, Park, Tzur και Si (2020), οι 3 μαθητές που συμμετείχαν στην παρέμβαση, κατάφεραν να μεταφέρουν τη γνώση τους σε πολλαπλασιαστικά προβλήματα που δεν είχαν διδαχθεί, ενώ στην έρευνα των Park, Bouck και Fisher (2020), ο μαθητής με ΕΜΔ διατήρησε την επίδοσή του στην εκτέλεση των ΑΣ πολλαπλασιασμού, 5 εβδομάδες μετά την ολοκλήρωση της διδακτικής παρέμβασης.

### 3.1.3. Απόψεις εκπαιδευτικών και μαθητών για τις εφαρμοσθείσες μεθόδους και τεχνικές διδασκαλίας και η σχέση τους με τα δημογραφικά στοιχεία.

Οι απόψεις των μαθητών και των εκπαιδευτικών καταγράφηκαν μόνο σε 4 από τις 13 συνολικά έρευνες, είτε μέσω ερωτηματολογίων είτε μέσω προσωπικών συνεντεύξεων. Επιπλέον, δεν παρουσιάστηκαν διαφοροποιήσεις ως προς τις απόψεις μαθητών και εκπαιδευτικών σε σχέση με τα δημογραφικά τους στοιχεία.

Πιο αναλυτικά, αναφορικά με τις 3 έρευνες που χρησιμοποίησαν τους πολλαπλούς τρόπους αναπαράστασης της γνώσης σε συνδυασμό με τις μνημονικές στρατηγικές και τη σαφή διδασκαλία (Flores, Hinton & Schweck, 2014· Milton, Flores, Moore, Taylor & Burton 2018· Flores & Milton, 2020), συμμετείχαν συνολικά 10 μαθητές. Οι εκπαιδευτικοί των μαθητών αυτών ήταν και οι 3 κάτοχοι μεταπτυχιακού διπλώματος και εργάζονταν ως εκπαιδευτικοί σε τμήματα ένταξης, έχοντας 4 έως 8 χρόνια εμπειρία στην ειδική αγωγή.

Ως προς τα δημογραφικά χαρακτηριστικά των μαθητών 8 στους 10 ήταν αγόρια και 2 κορίτσια. Τα 5 από τα 7 αγόρια φοιτούσαν στην ΣΤ' δημοτικού (2 λευκοί και 2 Λατίνοι), 2 φοιτούσαν στην Ε' δημοτικού (Λευκοί) και 1 στην Δ' δημοτικού (Λατίνος). Τα 2 κορίτσια φοιτούσαν το 1 στην Δ' δημοτικού (Αφρο-Αμερικανή) και το άλλο στην Ε' δημοτικού (Λευκή). Επιπλέον, τα σχολεία στα οποία διεξήχθησαν οι συγκεκριμένες έρευνες, βρίσκονταν σε αγροτικές περιοχές.

Σε όλες τις έρευνες καταγράφηκαν ιδιαίτερα θετικές απόψεις των μαθητών αλλά και των εκπαιδευτικών, με τους μαθητές να χαρακτηρίζουν διασκεδαστικό τον τρόπο με τον οποίο διδάσκονταν και με τους εκπαιδευτικούς να θεωρούν εύκολη αλλά και ευχάριστη την εφαρμογή των συγκεκριμένων μεθόδων διδασκαλίας, καθώς έβλεπαν ότι οι μαθητές τους ανταποκρίνονταν γρήγορα και αποτελεσματικά. Επιπλέον, μαθητές και εκπαιδευτικοί ανεξαρτήτου ηλικίας, εθνικότητας, φύλου και γενικά ανεξαρτήτως των δημογραφικών τους στοιχείων, δήλωσαν πως δεν θα άλλαζαν τίποτα αναφορικά με τη διδακτική παρέμβαση. Μάλιστα, τονίζοντας την αποτελεσματικότητα αλλά και την ευκολία στην εφαρμογή, δήλωσαν ότι θα επαναλάμβαναν τις συγκεκριμένες παρεμβάσεις, συστήνοντας τη χρήση τους και σε άλλα σχολεία.

Παρόμοια ήταν και τα αποτελέσματα από τη συνέντευξη μιας άλλης έρευνας, στην οποία αξιοποιήθηκαν οι πολλαπλοί τρόποι αναπαράστασης της γνώσης με τη χρήση ηλεκτρονικής συσκευής iPad, κατά την οποία αντικαταστάθηκε το πραξιακό στάδιο με το ψηφιακό, σε συνδυασμό με τη σαφή διδασκαλία (Park, Bouck & Fischer, 2020).

Το σχολείο στο οποίο διεξήχθη η έρευνα βρισκόταν σε αστική περιοχή. Ο μαθητής με ΕΜΔ που έλαβε μέρος στη συγκεκριμένη έρευνα φοιτούσε στη ΣΤ' δημοτικού και ήταν σύμφωνα με τους ερευνητές Λευκός. Ο ίδιος ανέφερε ότι η μέθοδος αυτή και ταυτόχρονα η χρήση του iPad έκανε πολύ πιο εύκολη και διασκεδαστική την εκμάθηση του πολλαπλασιασμού και την εκτέλεση ΑΣ του πολλαπλασιασμού για τον ίδιο. Επιπλέον, επεσήμανε ότι θα ήθελε να μάθει κι άλλες μαθηματικές έννοιες και δεξιότητες με τον ίδιο τρόπο.

Από την άλλη πλευρά οι εκπαιδευτικοί, για τους οποίους δε δίνονται πολλές λεπτομέρειες σχετικά με τα δημογραφικά τους στοιχεία, αναφέροντας μόνο ότι εργάζονταν ως εκπαιδευτικοί στην ειδική αγωγή, δήλωσαν ότι η εφαρμογή της συγκεκριμένης διδακτικής παρέμβασης βοήθησε τους μαθητές που συμμετείχαν, ως προς την ακρίβεια και τη διατήρηση της γνώσης και για αυτόν τον λόγο θα την επαναλάμβαναν, αλλά και θα την πρότειναν σε άλλους συναδέλφους τους. Χρησιμοποιείται πληθυντικός αριθμός αναφορικά με τους συμμετέχοντες (μαθητές), καθώς στη συγκεκριμένη έρευνα, εκτός από τον ένα μαθητή με ΕΜΔ που φοιτούσε στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση, όπου και επικεντρώνεται η παρούσα έρευνα, έλαβαν μέρος κι άλλοι 2 μαθητές εκ των οποίων ο ένας είχε διαγνωσθεί με αυτισμό και ο άλλος με ΕΜΔ, ο οποίος όμως φοιτούσε στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

# 4ο Κεφάλαιο

# Συζήτηση - Συμπεράσματα - Προτάσεις

## 4.1. Συζήτηση

Η παρούσα έρευνα είχε ως στόχο τη συστηματική ανασκόπηση, ανάλυση και σύγκριση του ερευνητικού έργου που έχει πραγματοποιηθεί στη διεθνή αλλά και την ελληνική βιβλιογραφία, σχετικά με τις διδακτικές εφαρμογές που αφορούν τη βελτίωση δεξιοτήτων εκτέλεσης πολλαπλασιασμών από μαθητές με ΕΜΔ στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση. Ιδιαίτερα σημαντική είναι η διερεύνηση των μεθόδων και των τεχνικών διδασκαλίας μέσω των οποίων μπορεί να βελτιωθεί η επίδοση των μαθητών με ΕΜΔ στις δεξιότητες εκτέλεσης πολλαπλασιασμών και αυτό συμβαίνει, αφενός διότι η ανάπτυξη του πολλαπλασιαστικού συλλογισμού αποτελεί θεμέλιο και απαραίτητο στοιχείο για την μετέπειτα πορεία των μαθητών στο γνωστικό πεδίο των μαθηματικών και αφετέρου διότι η έρευνα αναφορικά με τον πολλαπλασιασμό, αναπτύχθηκε αρκετά αργότερα και με λιγότερη ένταση, κάτι που ενδεχομένως να οφείλεται στην πολυπλοκότητα της εννοιολογικής επεξεργασίας του πολλαπλασιαστικού συλλογισμού (Verschaffel, Schukajlow, Star & Van Dooren, 2020) και επιπροσθέτως στις δυσκολίες που παρουσιάζει ο αλγόριθμος του πολλαπλασιασμού (Hickendorff, Torbeyns & Verschaffel, 2019).

Επίσης, από τη βιβλιογραφική ανασκόπηση προκύπτει ότι οι ΕΜΔ είναι η μεγαλύτερη ομάδα των Ήπιων Εκπαιδευτικών Αναγκών (ΗΕΑ), καθώς οι μαθητές με ΕΜΔ αποτελούν περίπου το 40% των μαθητών με ΗΕΑ (Pullen, Lane, Ashworth&Lovelace, 2017). Επιπλέον, οι μαθητές με ΕΜΔ διδάσκονται στο πλαίσιο του γενικού σχολείου. Ωστόσο, υπάρχει σοβαρή έλλειψη σε προγράμματα παρέμβασης και διδακτικές εφαρμογές, που να επικεντρώνονται στην εκτέλεση δεξιοτήτων πολλαπλασιασμών από μαθητές πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης (Hickendorff, Torbeyns & Verschaffel, 2019) και ιδίως από μαθητές με ΕΜΔ (Tzur et al., 2013· Xin, Park, Tzur & Si, 2020).

Όλα τα παραπάνω προκαλούν επιτακτική ανάγκη για μελέτη και διερεύνηση αποτελεσματικών μεθόδων και τεχνικών διδασκαλίας για τη βελτίωση δεξιοτήτων εκτέλεσης πολλαπλασιασμών, όπως επίσης και των απόψεων των ίδιων των μαθητών ως προς αυτές, αφού όπως έχει επισημανθεί και στη θεωρητική θεμελίωση της έρευνας, οι μαθητές με ΕΜΔ συχνά οδηγούνται σε αρνητική στάση απέναντι στα μαθηματικά αλλά και στην εγκατάλειψη της προσπάθειας (Αγαλιώτης, 2011). Επομένως, εάν και εφόσον σχηματιστούν θετικές στάσεις και απόψεις των μαθητών ως προς τις διδακτικές μεθόδους και τεχνικές, τότε πιθανώς να προκύψουν αντιστοίχως και θετικά αποτελέσματα ως προς τις μαθηματικές δεξιότητες. Εξίσου σημαντικές, βέβαια, είναι και οι απόψεις των εκπαιδευτικών, καθώς είναι υπεύθυνοι για την αξιολόγηση των μαθητών και τη λήψη αποφάσεων σχετικά με την εφαρμογή κατάλληλων «εργαλείων» διδασκαλίας.

Με βάση τους τρεις άξονες διερεύνησης που αναφέρθηκαν παραπάνω, δηλαδή, ποιες μέθοδοι και τεχνικές διδασκαλίας αξιοποιούνται, ποιες είναι οι πιο αποτελεσματικές, αλλά και ποιες είναι οι απόψεις των μαθητών και των εκπαιδευτικών ως προς αυτές, τέθηκαν τα ερευνητικά ερωτήματα της παρούσας έρευνας, και σύμφωνα με τα αποτελέσματα που εκτέθηκαν, προκύπτουν τα παρακάτω συμπεράσματα.

Συγκεκριμένα, από την μελέτη των επιστημονικών άρθρων που επιλέχθηκαν για την εκπόνηση της παρούσας συστηματικής βιβλιογραφικής ανασκόπησης (βλέπε πίνακα 1), αναδεικνύεται η ποικιλία των διδακτικών μεθόδων και τεχνικών που εφαρμόζονται σε μαθητές με ΕΜΔ για τη βελτίωση δεξιοτήτων εκτέλεσης πολλαπλασιασμών. Εκτός, όμως, από την ποικιλία των διδακτικών μεθόδων και τεχνικών, εντοπίστηκαν και αρκετές ομοιότητες βάσει των οποίων έγινε η κατηγοριοποίηση των εξεταζόμενων ερευνών, προκειμένου να αναδειχθεί ο αντίκτυπος που μπορεί να έχουν στην επίδοση των μαθητών πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης με ΕΜΔ ως προς την εκτέλεση πολλαπλασιασμών.

Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός, ότι όλες οι έρευνες, χρησιμοποίησαν χειραπτικό ή και εικονιστικό υλικό κατά τη διάρκεια των διδακτικών εφαρμογών, η σπουδαιότητα των οποίων έχει επισημανθεί και από άλλους ερευνητές (Kosko, 2019· Jitendra, Dougherty, Sanchez & Suchilt, 2022). Η κυρίαρχη τάση που επικρατεί στις προς μελέτη έρευνες που αναλύθηκαν είναι ο συνδυασμός των διδακτικών μεθόδων και τεχνικών, εύρημα που έρχεται σε πλήρη αντιστοιχία με τους Swanson και Sachse-Lee (2000), οι οποίοι υποστηρίζουν ότι ο συνδυασμός των διδακτικών προσεγγίσεων είναι πιο αποτελεσματικός σε σύγκριση με την εφαρμογή της κάθε προσέγγισης ξεχωριστά, όπως έχει εκτεθεί και στο θεωρητικό πλαίσιο της παρούσας έρευνας.

Συγκεκριμένα, εντοπίστηκε η χρήση χειραπτικού και εικονιστικού υλικού σε συνδυασμό με τη διδασκαλία στρατηγικών μάθησης και την άμεση διδασκαλία (1/13), η χρήση χειραπτικού και εικονιστικού υλικού στο πλαίσιο της κονστρουκτιβιστικής προσέγγισης (1/13) και η χρήση των πολλαπλών τρόπων αναπαράστασης της γνώσης σε συνδυασμό είτε με τη σαφή διδασκαλία (5/13), είτε στο πλαίσιο της κονστρουκτιβιστικής προσέγγισης (6/13). Η χρήση χειραπτικού και εικονιστικού υλικού που χρησιμοποιήθηκε στο σύνολο των ερευνών που εξετάσθηκαν, σύμφωνα και με τη θεωρητική θεμελίωση της παρούσας έρευνας, ενδεχομένως να οφείλεται στο γεγονός ότι η παρουσίαση μίας μαθηματικής έννοιας μέσω των πολλαπλών τρόπων αναπαράστασης της γνώσης (πραξιακός-εικονιστικός-συμβολικός) συμβάλλει καθοριστικά στην εννοιολογική κατανόηση, καθώς οι μαθητές έχουν ενεργό ρόλο στη δόμηση των διάφορων μαθηματικών εννοιών, όπως επίσης και στο γεγονός ότι με αυτόν τον τρόπο επιτυγχάνεται η σύνδεση μεταξύ της εννοιολογικής και της διαδικαστικής γνώσης, διότι οι μαθητές μπορούν έτσι να δώσουν νόημα στα βήματα και στις διαδικασίες που ακολουθούν κατά την εκτέλεση των αλγορίθμων (Αγαλιώτης, 2011· Agrawal & Morin, 2016).

Συγκεκριμένα, με αυτόν τον τρόπο οι μαθητές μπορούν να κατανοήσουν καλύτερα το μέγεθος των αριθμών που αναπαριστά ο κάθε τελεστής που λαμβάνει μέρος στην εκτέλεση ενός πολλαπλασιασμού, είτε πρόκειται για ΑΣ του πολλαπλασιασμού είτε για αλγόριθμους του πολλαπλασιασμού, μπορούν επίσης να αποσαφηνίσουν τις σχέσεις μεταξύ των αριθμών (Lee, 2014), αλλά και να αντιληφθούν ότι ανάλογα με τη θέση που κατέχει ένας αριθμός στο πλαίσιο ενός πολυψήφιου αριθμού, έχει και διαφορετική αξία, ο οποίος αυξάνεται από τα δεξιά προς τα αριστερά σε δυνάμεις του 10 (Ross, 1989). Έτσι, ενισχύεται η έννοια του αριθμού και η έννοια της θεσιακής αξίας, που όπως αναλύθηκε λεπτομερώς στο θεωρητικό πλαίσιο, αποτελούν βασικές προϋποθέσεις για την εκτέλεση των βημάτων που οφείλει να ακολουθήσει κανείς κατά την εκτέλεση ενός αλγορίθμου.

Ακόμη, η χρήση του χειραπτικού υλικού δίνει στους μαθητές τη δυνατότητα να κατανοήσουν την έννοια των σύνθετων μονάδων, που αποτελεί θεμέλιο της πολλαπλασιαστικής σκέψης, αλλά και το διαχωρισμό των σύνθετων μονάδων από τις μονάδες (Tzur et al., 2013). Έτσι, ανάλογα με το νόημα που θα δώσουν στις σύνθετες μονάδες που δομούν, μπορούν στη συνέχεια να προσδώσουν νόημα σε φράσεις, όπως για παράδειγμα τρεις φορές το δύο και επιπλέον να διακρίνουν τη διαφορετική σημασία μεταξύ του πολλαπλασιαστή και του πολλαπλασιαστέου, αναπτύσσοντας έτσι πιο ανεπτυγμένες στρατηγικές μέτρησης, αντί της μέτρησης ανά ένα ή της επαλαμβανόμενης πρόσθεσης (Zhang, Xin & Si, 2011).

Επομένως, η χρήση των πολλαπλών τρόπων αναπαράστασης της γνώσης, ενδεχομένως να επιλέχθηκε από τους ερευνητές των συγκεκριμένων μελετών με απώτερο σκοπό να ενισχύσουν τη σύνδεση μεταξύ εννοιολογικής και διαδικαστικής γνώσης και κατ' επέκταση να ενισχύσουν την επίδοση των μαθητών με ΕΜΔ ως προς τις δεξιότητες εκτέλεσης πολλαπλασιασμών, γεγονός που έχει επισημανθεί και από άλλους ερευνητές (Miller & Hudson, 2007· Flores, Hinton & Strozier, 2014· Bouck, Satsangi & Park, 2017).

Επιπλέον, στις έρευνες που εξετάστηκαν σπουδαίο ρόλο φάνηκε να διαδραματίζει η χρήση της άμεσης (direct instruction) και της σαφούς διδασκαλίας (explicit instruction), η οποία έχει χαρακτηριστεί επανειλημμένα ως μία από τις πιο αποτελεσματικές μεθόδους διδασκαλίας για μαθητές με ΕΜΔ (Fuchs et al., 2003· Kroesbergen & Van Luit, 2003· Kroesbergen, Van Luit & Maas, 2004· Gersten et al., 2009) και πιθανώς για αυτόν τον λόγο να αξιοποιήθηκε συνδυαστικά με τους πολλαπλούς τρόπους αναπαράστασης της γνώσης ως μεθοδολογική επιλογή στις έρευνες που εξετάστηκαν.

Αναφορικά με την κονστρουκτιβιστική προσέγγιση, βρέθηκε ότι 7 έρευνες την χρησιμοποίησαν, οι 6 εκ των οποίων στο πλαίσιο του παιχνιδιού PGBM, το οποίο είναι σχεδιασμένο βάσει των πολλαπλών τρόπων αναπαράστασης της γνώσης. Δύο από τις 7 αυτές έρευνες, χρησιμοποίησαν επιπροσθέτως και τη σαφή διδασκαλία. Η κονστρουκτιβιστική προσέγγιση έχει αξιοποιηθεί και από άλλους ερευνητές, βρίσκοντας ενθαρρυντικά αποτελέσματα ως προς τις δεξιότητες εκτέλεσης πολλαπλασιασμών, όπως για παράδειγμα η έρευνα των Gervasoni, Roche και Downton (2021). Παρόλα αυτά, εντοπίστηκε στη βιβλιογραφία μία επιφύλαξη ως προς την αποτελεσματικότητα της χρήσης της κονστρουκτιβιστικής προσέγγισης στην περίπτωση των μαθητών με ΕΜΔ (Woodward & Baxter, 1997· Kirschner, Sweller & Clark, 2006), γεγονός που συνάδει με τα αποτελέσματα 2 ερευνών που συμπεριλήφθηκαν στην παρούσα συστηματική ανασκόπηση και τα οποία θα αναλυθούν λίγο παρακάτω, που θα γίνει αναφορά στην αποτελεσματικότητα των διδακτικών μεθόδων και τεχνικών.

Επιπλέον, είναι σημαντικό να αναδειχθούν και οι επιπρόσθετες μέθοδοι και τεχνικές διδασκαλίας που εφαρμόστηκαν στις 13 συνολικά εξεταζόμενες έρευνες, καθώς εκτός από ομοιότητες υπήρχαν και αρκετές διαφοροποιήσεις. Ενδιαφέρον προκαλεί το γεγονός ότι σε

3 από τις 6 έρευνες που αξιοποίησαν τους πολλαπλούς τρόπους αναπαράστασης της γνώσης και τη σαφή διδασκαλία, χρησιμοποίησαν επιπροσθέτως και τη διδασκαλία στρατηγικών μάθησης και συγκεκριμένα τις μνημονικές στρατηγικές, ο συνδυασμός των οποίων έχει επιλεχθεί και από άλλους ερευνητές, σημειώνοντας αξιόλογα αποτελέσματα (Flores, Hinton & Strozier, 2014· Flores, Moore & Mayer, 2020). Η διδασκαλία στρατηγικών μάθησης χρησιμοποιήθηκε σε συνδυασμό με την άμεση και αποτελεσματική διδασκαλία και τη χρήση χειραπτικού και εικονιστικού υλικού και στις 2 πειραματικές έρευνες που αναλύθηκαν. Ακόμη, σε 2 έρευνες χρησιμοποιήθηκαν επιπλέον και οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές-συσκευές, η οποία βάσει σχετικών ερευνών, φαίνεται ότι έχει θετικές επιδράσεις στην επίδοση των μαθητών με ΕΜΔ (Jitendra & Xin, 1999· Kiru, Doabler, Sorrells & Cook, 2017).

Σε σχέση με την αποτελεσματικότητα των διδακτικών μεθόδων και τεχνικών που εφαρμόσθηκαν, βρέθηκε ότι στην πλειονότητα των ερευνών που εξετάστηκαν και συγκεκριμένα στις 11 από τις 13, οι μαθητές οι οποίοι συμμετείχαν στις διδακτικές παρεμβάσεις, κατάφεραν να βελτιώσουν σημαντικά την επίδοσή τους στις δεξιότητες εκτέλεσης πολλαπλασιασμών, ως προς την ακρίβεια και σε ορισμένες περιπτώσεις και ως προς τη διατήρηση αλλά και ως προς τη γενίκευση. Το αποτέλεσμα αυτό ενδεχομένως να οφείλεται στο γεγονός ότι οι μαθητές στην περίπτωση των αλγορίθμων μπορούσαν με τη χρήση του χειραπτικού, αρχικά, υλικού να αντιστοιχήσουν και να συνδέσουν τις υλικές ενέργειες με τα αλγοριθμικά βήματα, γεγονός που αποτελεί απαραίτητη προϋπόθεση πριν την ενασχόληση των μαθητών με τα αριθμητικά σύμβολα (Αγαλιώτης, 2011· Agrawal & Morin, 2016), ενώ στην περίπτωση των ΑΣ του πολλαπλασιασμού, πιθανώς να οφείλεται στο γεγονός ότι μέσω της χρήσης του χειραπτικού υλικού, οι μαθητές διευκολύνθηκαν στην κατανόηση της έννοιας και των ιδιοτήτων του πολλαπλασιασμού, καθώς και του διαφορετικού ρόλου με τον οποίο είναι επιφορτισμένοι οι δύο τελεστές (Kaufmann, 2018).

Συγκεκριμένα, μέσω των πραξιακών και εικονιστικών αναπαραστάσεων ενδεχομένως κατάφεραν να κατανοήσουν τις ιδιότητες του πολλαπλασιασμού (την αντιμεταθετική αλλά και την επιμεριστική), αφού οι μαθητές στις περισσότερες περιπτώσεις χρησιμοποίησαν και πιο ανεπτυγμένες στρατηγικές εύρεσης αποτελεσμάτων κατά την εκτέλεση των ΑΣ του πολλαπλασιασμού, γεγονός που σύμφωνα με τη θεωρητική θεμελίωση, οφείλεται σε μεγάλο βαθμό στην κατανόηση των ιδιοτήτων του πολλαπλασιασμού (Downton & Sullivan, 2017). Επίσης, οι μαθητές κατανόησαν πιθανώς τη διαφορετική λειτουργία του κάθε τελεστή, ότι δηλαδή ο ένας τελεστής αντιπροσωπεύει μία ποσότητα ενώ ο άλλος αναφέρεται στον αριθμό των επαναλήψεων που εμφανίζεται αυτή η ποσότητα, και έτσι με αυτόν τον τρόπο να αντιλήφθηκαν το λόγο που πρέπει να εκτελέσουν τους απαραίτητους επιμέρους πολλαπλασιασμούς που ακολουθούνται στην περίπτωση της επίλυσης του αλγορίθμου του πολλαπλασιασμού.

Μία δεύτερη ερμηνεία που μπορεί να δοθεί αναφορικά με τα ενθαρρυντικά αυτά αποτελέσματα είναι ότι με τη χρήση του χειραπτικού και εικονιστικού υλικού πιθανώς οι μαθητές να βοηθήθηκαν στην κατανόηση της έννοιας της θεσιακής αξίας, η οποία σύμφωνα με τη θεωρητική θεμελίωση, παίζει καθοριστικό ρόλο στην εκτέλεση δεξιοτήτων πολλαπλασιασμών (Van de Walle, 2005). Με τη χρήση, δηλαδή, του χειραπτικού υλικού οι μαθητές είχαν τη δυνατότητα να αντιληφθούν τις ποσότητες που αναπαριστάνονταν από το εκάστοτε ψηφίο ανάλογα πάντα με τη θέση που βρίσκονταν σε έναν πολυψήφιο αριθμό, αλλά και να παρατηρήσουν ότι η αξία των θέσεων αυξάνεται σε δυνάμεις του 10 από τα δεξιά προς τα αριστερά, δίνοντας τους έτσι την ευκαιρία να επικεντρωθούν στην ιδιαίτερη σημασία που απαιτείται στις λεπτομέρειες και στα βήματα που πρέπει να ακολουθηθούν κατά την εκτέλεση του αλγορίθμου. Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι τα αποτελέσματα ήταν το ίδιο ενθαρρυντικά και στην έρευνα που χρησιμοποίησε τον παραδοσιακό αλγόριθμο αλλά και σε εκείνες που χρησιμοποίησαν τον εναλλακτικό αλγόριθμο των μερικών γινομένων, τονίζοντας έτσι τον βασικό ρόλο που διαδραματίζει η κατανόηση της θεσιακής αξίας των αριθμών. Παρόμοια αποτελέσματα για την κατανόηση της θεσιακής αξίας διαμέσου των πολλαπλών τρόπων αναπαράστασης της γνώσης και τον αντίκτυπο που έχει στις δεξιότητες εκτέλεσης πολλαπλασιασμών από μαθητές με ΕΜΔ, έχουν βρεθεί και σε άλλες έρευνες (Hinton, Strozier, & Flores, 2014· Flores, Kaffar & Hinton, 2019).

Επιπροσθέτως, όπως είδαμε και στη θεωρητική θεμελίωση της παρούσας έρευνας η χρήση του χειραπτικού υλικού κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών μπορεί να αποφορτίσει τη μνήμη των μαθητών, τη βραχύχρονη αλλά και τη μακρόχρονη (Boggan, Harper & Whitmire, 2010· Jones & Tiller, 2017). Βάσει αυτού λοιπόν, οι μαθητές με ΕΜΔ, που όπως αναλύθηκε στο θεωρητικό πλαίσιο, αντιμετωπίζουν ιδιαίτερες δυσκολίες ως προς την μνήμη, την εργαζόμενη-βραχύχρονη μνήμη αλλά και τη μακρόχρονη μνήμη, ενδεχομένως να βοηθήθηκαν με τη χρήση του χειραπτικού υλικού και τους πολλαπλούς τρόπους αναπαράστασης της γνώσης, γεγονός που έρχεται σε συμφωνία με την έρευνα των Bouck, Satsangi και Park (2017), καθώς με αυτόν τον τρόπο δε χρειαζόταν οι μαθητές να διατηρήσουν δεδομένα στη μνήμη εργασίας, τη φωνολογική και οπτικοχωρική, με αποτέλεσμα να απελευθερώνονται οι γνωστικοί πόροι των παιδιών, δίνοντας τους έτσι τη δυνατότητα να συνδέσουν τις ενέργειες που ακολουθούσαν στο πραξιακό επίπεδο με την συμβολική τους έκφραση.

Ακόμη, είναι σημαντικό να αναφερθεί ότι όλοι οι συμμετέχοντες είχαν ιδιαίτερα χαμηλές επιδόσεις κατά τις αρχικές αξιολογήσεις τους, γεγονός το οποίο μπορεί να μας οδηγήσει στο συμπέρασμα ότι η χρήση χειραπτικού και εικονιστικού υλικού και ιδιαίτερα η αξιοποίηση των πολλαπλών τρόπων αναπαράστασης της γνώσης σε συνδυασμό με τη σαφή διδασκαλία, ενδεχομένως να μπορούν να βελτιώσουν σημαντικά την επίδοση των μαθητών πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης με ΕΜΔ στη βελτίωση δεξιοτήτων εκτέλεσης πολλαπλασιασμών. Το συμπέρασμα αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι παρόλο που οι περισσότερες έρευνες ακολούθησαν την κονστρουκτιβιστική προσέγγιση (7/13), ωστόσο σε 2 από τις 7 έρευνες, χρησιμοποιήθηκε συνδυαστικά και η σαφής διδασκαλία, έχοντας ενθαρρυντικά αποτελέσματα, αλλά και από το γεγονός ότι σε επιπλέον 2 έρευνες, που ήταν βασισμένες μόνο στην κονστρουκτιβιστική προσέγγιση οι μαθητές δεν είχαν τα επιθυμητά αποτελέσματα. Το εύρημα αυτό έρχεται σε συμφωνία με την έρευνα των Kroesbergen, Van Louit και Maas (2004), όπου βρέθηκε ότι η σαφής διδασκαλία είναι πιο αποτελεσματική σε σύγκριση με την κονστρουκτιβιστική προσέγγιση, στην περίπτωση μαθητών με χαμηλή επίδοση ή μαθητών με ΕΜΔ.

Αναφορικά με τις έρευνες που δεν είχαν τα αναμενόμενα αποτελέσματα και συγκεκριμένα στην έρευνα των Xin, Liu, Jones, Tzur και Si (2016), ο μαθητής βελτίωσε την επίδοσή του στην εκτέλεση των ΑΣ του πολλαπλασιασμού σε πραξιακό και εικονιστικό επίπεδο, αλλά δεν κατάφερε να λειτουργήσει αποτελεσματικά σε συμβολικό επίπεδο. Το ίδιο συνέβη και στην έρευνα των Hord, Kastberg και Draeger (2021), όπου ο μαθητής κατάφερε να χρησιμοποιήσει αποτελεσματικά τη διπλή αρίθμηση κατά την εύρεση των αποτελεσμάτων των ΑΣ πολλαπλασιασμού, μόνο όμως στην περίπτωση που οι παράγοντες του πολλαπλασιασμού ήταν το 2 ή το 5. Σε κάθε άλλη περίπτωση, ο μαθητής χρησιμοποιούσε τη μέτρηση ανά ένα με τη βοήθεια χειραπτικού υλικού, χωρίς να επιλύει σωστά τους πολλαπλασιασμούς σε συμβολικό επίπεδο. Τα αποτελέσματα αυτά, πιθανώς να σχετίζονται με τον περιορισμένο χρόνο που αφιερώθηκε στα επιμέρους στάδια κατά τη διάρκεια των παρεμβάσεων (πραξιακό-εικονιστικό-συμβολικό), γεγονός που επισημάνθηκε και από τους ίδιους τους ερευνητές. Το εύρημα αυτό φαίνεται να στηρίζει τη θέση του Αγαλιώτη (2011), ότι απαιτείται πολλή εξάσκηση πριν καταστεί δυνατή η μετάβαση από τον ένα τρόπο αναπαράστασης στον άλλον.

Μία ακόμη εξήγηση για τα παραπάνω αποτελέσματα, θα μπορούσε να είναι το γεγονός, ότι εξαιτίας του περιορισμένου χρόνου που αφιερώθηκε στα επιμέρους στάδια (πραξιακό-εικονιστικό-συμβολικό), τα παιδιά δεν κατάφεραν να διακρίνουν τον διαφορετικό ρόλο που διαδραματίζουν σε έναν πολλαπλασιασμό οι δύο τελεστές, ο πολλαπλασιαστής και ο πολλαπλασιαστέος, κατά την εκτέλεση των ΑΣ του πολλαπλασιασμού που τους δόθηκαν και επιπλέον να μην έχει αναπτυχθεί ενδεχομένως η αντιμεταθετική, αλλά και η επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού, που όπως είδαμε και στο θεωρητικό πλαίσιο, αποτελούν απαραίτητες προϋποθέσεις για την ευχερή εκτέλεση δεξιοτήτων πολλαπλασιασμών. Το γεγονός αυτό, οδήγησε ίσως τους μαθητές στην μέτρηση ανά ένα προκειμένου να βρουν τα αποτελέσματα των πολλαπλασιασμών, καθώς βάσει και όσων εκτέθηκαν στο θεωρητικό πλαίσιο, εφόσον δεν είχαν κατανοήσει για παράδειγμα την επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού, δεν ήταν σε θέση να αναπτύξουν πιο ανεπτυγμένες στρατηγικές μέτρησης, όπως είναι η ανάλυση παραγόντων (Zhang, Xin & Si, 2011· Downton & Sullivan, 2017).

Επιπλέον, το αποτέλεσμα αυτό ίσως να εξηγείται και με έναν διαφορετικό τρόπο, ο οποίος σχετίζεται με την ανάλυση του σχήματος απαρίθμησης που εμπεριέχεται στην έννοια των σύνθετων μονάδων. Πιο αναλυτικά, σύμφωνα με τον Steffe (1994), όπως έχει εκτεθεί και στο θεωρητικό πλαίσιο, ένας μαθητής διαθέτει πιο ανεπτυγμένο σχήμα απαρίθμησης όταν αντιλαμβάνεται ένα σύνολο από στοιχεία-αντικείμενα περισσότερα του ενός, ως ένα μετρήσιμο στοιχείο (σύνθετη μονάδα). Για παράδειγμα, εάν υπήρχαν 2 πύργοι που αποτελούνταν από 3 κύβους ο καθένας και στην ερώτηση «Πόσοι πύργοι των τριών υπάρχουν;», τότε ένας μαθητής με ανεπτυγμένο σχήμα απαρίθμησης θα απαντούσε «2 πύργοι των τριών» και δεν θα σκεφτόταν τον αριθμό 3 ως τρία αντικείμενα μέσα σε μία ομάδα (δηλαδή, 1,2,3…μία ομάδα, …4,5,6.. άλλη μία ομάδα). Και οι δύο περιπτώσεις αναφέρονται στην κατάκτηση της έννοιας των σύνθετων μονάδων από την πλευρά του μαθητή, όμως πρόκειται για δύο διαφορετικά επίπεδα τους σχήματος απαρίθμησης των σύνθετων μονάδων.

Επομένως, στις 2 έρευνες που προαναφέρθηκαν (Xin, Liu, Jones, Tzur & Si, 2016· Hord, Kastberg και Draeger, 2021), παρόλο που οι μαθητές φαίνονται αρχικά να κατέχουν την έννοια των σύνθετων μονάδων και να χρησιμοποιούν αποτελεσματικά τη διπλή μέτρηση για την εύρεση των γινομένων, ωστόσο στη συνέχεια και σε πιο δύσκολους πολλαπλασιασμούς, φάνηκε ότι δεν μπορούσαν να αντιληφθούν τις σύνθετες μονάδες ως ένα στοιχείο, κάτι που επισημάνθηκε και από τους ίδιους τους ερευνητές και κάτι που πιθανώς στάθηκε εμπόδιο στο να χρησιμοποιήσουν αποτελεσματικούς και γρήγορους τρόπους εύρεσης των γινομένων, καταφεύγοντας στη μέτρηση ανά ένα, το οποίο είχε σαν αποτέλεσμα να μην καταφέρουν να βελτιώσουν σημαντικά την επίδοσή τους. Το εύρημα αυτό, λοιπόν, θα μπορούσε να οδηγήσει στη διεξαγωγή ερευνών που να συγκεκριμενοποιούν τα διαφορετικά επίπεδα κατοχής της έννοιας των σύνθετων μονάδων και τον αντίκτυπο που μπορεί να έχουν στις δεξιότητες εκτέλεσης πολλαπλασιασμών.

Τέλος, μία τρίτη εναλλακτική εξήγηση που θα μπορούσε να δοθεί για τα αποτελέσματα των 2 παραπάνω ερευνών, είναι το γεγονός ότι το παιχνίδι PGBM, εστιάζει στο μοντέλο αναπαράστασης των ίσων ομάδων (grouping model), που από τη μία πλευρά, όπως έχει αναφερθεί και στο θεωρητικό τμήμα της παρούσας έρευνας, αποτελεί τη βάση για την ανάπτυξη του πολλαπλασιαστικού συλλογισμού και για την ευέλικτη ενασχόληση με την εκτέλεση πολλαπλασιασμών. Από την άλλη πλευρά, όμως, παρουσιάζοντας μόνο το μοντέλο των ίσων ομάδων, έχει αποδειχτεί ότι δεν καλύπτει εννοιολογικά το ευρύ πεδίο του πολλαπλασιαστικού συλλογισμού (Greer, 1992· Kaufmann, 2018· Jitendra, Dougherty, Sanchez & Suchilt, 2022). Επιπλέον, σύμφωνα με τη θεωρητική θεμελίωση της παρούσας έρευνας, θεωρείται αναγκαίο να παρουσιάζονται στα παιδιά διάφορες αναπαραστάσεις μέσα από τις οποίες θα γίνεται σαφής διάκριση μεταξύ πολλαπλασιαστή και πολλαπλασιαστέου (Downton & Sullivan, 2017· Götze, 2019). Έτσι, εάν και εφόσον οι μαθητές έρχονταν σε επαφή με διάφορα μοντέλα αναπαράστασης του πολλαπλασιασμού, πιθανώς, να ήταν σε θέση να αντιληφθούν τη διαφορετική λειτουργία των τελεστών κατά την εκτέλεση των ΑΣ πολλαπλασιασμού, αλλά και να κατανοήσουν τις ιδιότητες του πολλαπλασιασμού διότι όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, η κατανόηση της αντιμεταθετικής και της επιμεριστικής ιδιότητας του πολλαπλασιασμού προάγει την ορθή εκτέλεση δεξιοτήτων πολλαπλασιασμών (Larsson, Pettersson & Andrews, 2017). Ένα καλό παράδειγμα αποτελεί το μοντέλο της παράταξης (array), μέσω του οποίου, βάσει θεωρίας, αποσαφηνίζονται οι σχέσεις μεταξύ των αριθμών και επιπλέον οι μαθητές μπορούν να αντιλαμβάνονται το μέγεθος του εκάστοτε γινομένου, όπως επίσης το συγκεκριμένο μοντέλο αναπαράστασης δείχνει ξεκάθαρα τη θεσιακή αξία των ψηφίων και ενισχύει τη γενίκευση της μάθησης, (Fuson & Beckmann, 2012· Lee, 2014).

Χρησιμοποιώντας, λοιπόν, διάφορα μοντέλα αναπαράστασης του πολλαπλασιασμού κατά τη διδασκαλία των ΑΣ του πολλαπλασιασμού, ενδεχομένως οι μαθητές να ήταν σε θέση να αναπτύξουν την έννοια του πολλαπλασιασμού, όπως επίσης να διευκολύνονταν στην ανάπτυξη πιο ανεπτυγμένων στρατηγικών μέτρησης και κατ' επέκταση να μπορούσαν να επιλύσουν με μεγαλύτερη επιτυχία οι πολλαπλασιασμοί που τους δίνονταν, κάτι που έρχεται σε συμφωνία και με άλλους ερευνητές (Kaufmann, 2018· Jitendra, Dougherty, Sanchez & Suchilt, 2022). Ακόμη, ίσως αυτόν τον τρόπο να εφάρμοζαν διαισθητικά και τη χρήση της αντιμεταθετικής ιδιότητας περιορίζοντας έτσι τον αριθμό των ΑΣ που θα έπρεπε να ανακαλέσουν και να μη χρειάζεται να επιστρέψουν στη μέτρηση ανά ένα για να βρουν τα αποτελέσματα των ΑΣ του πολλαπλασιασμού που τους δίνονταν (Greer, 2011).

Ακόμη, μέσα από τη μελέτη των ερευνών, βρέθηκε ότι 2 από τις 13 έρευνες, χρησιμοποίησαν ηλεκτρονικούς υπολογιστές-συσκευές, ως βασικό μέσο των διδακτικών παρεμβάσεων (Xin, Park, Tzur & Si, 2020· Park, Bouck & Fischer, 2020). Παρόλο που και στις 2 αυτές έρευνες, σημειώθηκαν ιδιαίτερα ενθαρρυντικά αποτελέσματα, κάτι που έρχεται σε πλήρη αντιστοιχία με την έρευνα των Jitendra και Xin (1999) ότι η χρήση ηλεκτρονικών υπολογιστών, μπορεί να βελτιώσει σημαντικά τις επιδόσεις των μαθητών με ΕΜΔ, ωστόσο, δεν μπορεί να παραλειφθεί το γεγονός ότι και στις 2 αυτές έρευνες αξιοποιήθηκαν, επιπλέον, είτε οι πολλαπλοί τρόποι αναπαράστασης της γνώσης είτε η σαφής διδασκαλία, η σπουδαιότητα των οποίων επισημάνθηκε και παραπάνω. Το συμπέρασμα αυτό, συμβαδίζει με τη μετα-ανάλυση των Kroesbergen και Van Luit (2003), όπου βρέθηκε ότι οι διδακτικές παρεμβάσεις που χρησιμοποίησαν ηλεκτρονικούς υπολογιστές-συσκευές, στις οποίες όμως δεν συμπεριλαμβανόταν η αξιοποίηση των πολλαπλών τρόπων αναπαράστασης της γνώσης ή της σαφούς διδασκαλίας, ήταν οι λιγότερο αποτελεσματικές.

Αναφορικά με τις απόψεις των μαθητών και των εκπαιδευτικών ως προς στις εφαρμοσθείσες μεθόδους και τεχνικές διδασκαλίας, δεν παρουσιάστηκε κάποιου είδους διαφοροποίηση σε σχέση με τα δημογραφικά τους στοιχεία. Συγκεκριμένα, καταγράφηκαν ιδιαίτερα θετικές απόψεις όλων των μαθητών αλλά και των εκπαιδευτικών, με τους μαθητές να χαρακτηρίζουν διασκεδαστικό τον τρόπο με τον οποίο διδάσκονταν και με τους εκπαιδευτικούς να θεωρούν εύκολη αλλά και ευχάριστη την εφαρμογή των συγκεκριμένων μεθόδων διδασκαλίας, καθώς έβλεπαν τους μαθητές τους να ανταποκρίνονται γρήγορα και αποτελεσματικά.

Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι στις 3 από τις 4 έρευνες, στις οποίες καταγράφηκαν οι απόψεις των μαθητών και των εκπαιδευτικών, οι μέθοδοι και οι τεχνικές διδασκαλίας ήταν ακριβώς οι ίδιες. Πιο συγκεκριμένα, εφαρμόστηκε η σαφής διδασκαλία σε συνδυασμό με τους πολλαπλούς τρόπους αναπαράστασης της γνώσης και τις μνημονικές στρατηγικές. Στην τέταρτη έρευνα αξιοποιήθηκε επίσης η σαφής διδασκαλία σε συνδυασμό με τους πολλαπλούς τρόπους αναπαράστασης της γνώσης, μέσω όμως ηλεκτρονικής συσκευής - iPad - και χωρίς τη χρήση μνημονικών στρατηγικών.

Από την μία πλευρά, είναι σημαντικό να αναφερθεί ότι σημειώθηκε σημαντική βελτίωση και των 10 μαθητών/τριών που συμμετείχαν στις προαναφερθείσες έρευνες ως προς την ακρίβεια στην εκτέλεση δεξιοτήτων πολλαπλασιασμών, από την αρχική έως την τελική τους αξιολόγηση, όπως επίσης και ως προς τη διατήρηση και γενίκευση της γνώσης τους, γεγονός που ενδεχομένως οδήγησε στη δημιουργία θετικών συναισθημάτων και απόψεων, όπως επίσης και στην ανάπτυξη περισσότερων κινήτρων για μάθηση, όπως έχει επισημανθεί και από άλλους ερευνητές αναφορικά με τους πολλαπλούς τρόπους αναπαράστασης της γνώσης (Agrawal & Morin, 2016· Fuchs et al., 2021).

Ωστόσο δεν μπορεί να παραλειφθεί το γεγονός ότι υπήρχαν συγκριτικά κάποιες μικρές αλλά σημαντικές διαφορές μεταξύ των μαθητών, βάσει των δημογραφικών τους χαρακτηριστικών. Συγκεκριμένα, τα 3 παιδιά που είχαν λατινική καταγωγή, ενώ κατάφεραν να φτάσουν το κριτήριο της ακρίβειας που είχαν θέσει οι ερευνητές ως προς την ορθή εκτέλεση δεξιοτήτων πολλαπλασιασμών (30 ψηφία), ωστόσο χρειάστηκε περισσότερος χρόνος (13-24 sessions) σε σύγκριση με τον χρόνο που χρειάστηκαν τα υπόλοιπα παιδιά (8-11 sessions), διαφορετικής καταγωγής (Λευκοί και Αφροαμερικάνοι), προκειμένου αυτό να πραγματοποιηθεί. Σύμφωνα με όσα εκτέθηκαν στο θεωρητικό πλαίσιο, το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να οφείλεται στο κοινωνικο-οικονομικό πλαίσιο στο οποίο μεγαλώνουν τα παιδιά, καθώς κοινωνικο-οικονομικοί παράγοντες μπορεί να επηρεάσουν την επαφή των παιδιών με διάφορα παιχνίδια και υλικά, με αποτέλεσμα να περιορίζονται οι ευκαιρίες τους στη συμμετοχή τέτοιων δραστηριοτήτων που συντελούν στην μαθηματική ανάπτυξη και ιδίως στην ανάπτυξη βασικών αριθμητικών δεξιοτήτων (Zhu, 2007), όπως είναι για παράδειγμα η έννοια του αριθμού ή οι δεξιότητες μέτρησης-απαρίθμησης, που όπως είδαμε διαδραματίζουν σπουδαίο ρόλο στην εκτέλεση δεξιοτήτων πολλαπλασιασμών. Παρόλα αυτά, δεν επηρεάστηκε η διαμόρφωση θετικών απόψεων από την πλευρά των παραπάνω μαθητών ως προς τις συγκεκριμένες μεθόδους και τεχνικές διδασκαλίας, καθώς υπήρχε σημαντική βελτίωση της επίδοσής τους από την αρχική έως την τελική αξιολόγηση.

Επιπλέον, είναι αξιοσημείωτο το γεγονός ότι δεν υπήρχαν μεγάλες διαφορές ως προς την επίδοση αλλά και στις απόψεις των μαθητών ως προς τις συγκεκριμένες διδακτικές προσεγγίσεις μεταξύ αγοριών και κοριτσιών, εύρημα που έρχεται σε συμφωνία με την έρευνα των Guiso, Monte, Sapienza και Zingales (2008), όπου βρέθηκε ότι σε κοινωνίες όπου υπάρχει ισότητα μεταξύ των δύο φύλων, η διαφορά που παρατηρείται μεταξύ αγοριών και κοριτσιών ως προς το γνωστικό πεδίο των μαθηματικών, που συνήθως τα αγόρια υπερτερούν συγκριτικά με τα κορίτσια, τείνει να εξαφανίζεται.

Έχοντας, λοιπόν, ως σημείο αναφοράς, τις ιδιαίτερα θετικές απόψεις όλων των μαθητών και των εκπαιδευτικών που έλαβαν μέρος στις προαναφερθείσες έρευνες, οι οποίες ήταν κοινές ανεξαρτήτως φύλου, ηλικίας, εθνικότητας και γενικά ανεξαρτήτως των δημογραφικών τους στοιχείων, αναφορικά με τις συγκεκριμένες μεθόδους και τεχνικές διδασκαλίας, μπορεί να προκύψει το συμπέρασμα ότι οι πολλαπλοί τρόποι αναπαράστασης της γνώσης σε συνδυασμό με τη σαφή διδασκαλία, ενδεχομένως να συντελούν στη δημιουργία θετικών απόψεων μεταξύ μαθητών με ΕΜΔ και εκπαιδευτικών, γεγονός που μπορεί να οδηγήσει σε θετική στάση απέναντι στα μαθηματικά, καθώς και σε μεγαλύτερα κίνητρα για μάθηση. Παρόμοια συμπεράσματα έχουν προκύψει και από άλλους ερευνητές (Collins, 2012· Agrawal & Morin, 2016· Jones & Tiller, 2017).

Ωστόσο, επειδή η πλειοψηφία των διδακτικών εφαρμογών που μελετήθηκαν (11/13), πραγματοποιήθηκαν με τη συμμετοχή 1 έως 4 μαθητών, γίνεται άμεσα αντιληπτό ότι δεν μπορεί να γίνει καθολική γενίκευση των αποτελεσμάτων, κάτι που θα αναφερθεί και στο κεφάλαιο των περιορισμών.

## 4.2. Συμπεράσματα

Από τη μελέτη των επιστημονικών άρθρων που επιλέχθηκαν για την εκπόνηση της παρούσας συστηματικής βιβλιογραφικής ανασκόπησης, συμπεραίνεται ότι οι μαθητές με ΕΜΔ μπορούν να βελτιώσουν σημαντικά την επίδοσή τους ως προς τις δεξιότητες εκτέλεσης πολλαπλασιασμών. Βασική προϋπόθεση για να επιτευχθεί αυτό είναι οι μέθοδοι και οι τεχνικές διδασκαλίας που εφαρμόζονται να προάγουν την εννοιολογική κατανόηση και όχι τη στείρα απομνημόνευση μαθηματικών γνώσεων και διαδικασιών, καθώς με αυτόν τον τρόπο υπονομεύεται η μαθησιακή πρόοδος των μαθητών με ΕΜΔ, λόγω των ιδιαίτερων μαθησιακών χαρακτηριστικών που εμφανίζουν.

Πιο συγκεκριμένα, σε ό,τι αφορά το πρώτο ερευνητικό ερώτημα και σύμφωνα με τη διεθνή και την ελληνική βιβλιογραφία, βρέθηκε ότι εφαρμόζονται συνδυαστικά διάφορες μέθοδοι και τεχνικές διδασκαλίας για την βελτίωση δεξιοτήτων εκτέλεσης πολλαπλασιασμών σε μαθητές με ΕΜΔ, οι οποίοι φοιτούν στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση. Οι επικρατέστερες από αυτές ήταν οι πολλαπλοί τρόποι αναπαράστασης της γνώσης είτε σε συνδυασμό με την κονστρουκτιβιστική προσέγγιση είτε σε συνδυασμό με τη σαφή διδασκαλία. Επιπλέον, σε ορισμένες περιπτώσεις χρησιμοποιήθηκε επιπροσθέτως και η διδασκαλία στρατηγικών μάθησης συνδυαστικά με τους πολλαπλούς τρόπους αναπαράστασης της γνώσης και τη σαφή διδασκαλία, σημειώνοντας επίσης αξιόλογα αποτελέσματα.

Επιπλέον, αναφορικά με το δεύτερο ερώτημα σχετικά με την αποτελεσματικότητα των διδακτικών μεθόδων και τεχνικών που εφαρμόστηκαν, είναι σημαντικό να αναφερθεί ότι όλοι οι μαθητές βελτίωσαν τις επιδόσεις τους από την αρχική έως την τελική αξιολόγηση. Παρόλα αυτά, από τις έρευνες που μελετήθηκαν, φάνηκε πως η προσεκτικά δομημένη σαφής και άμεση διδασκαλία σε συνδυασμό με τους πολλαπλούς τρόπους αναπαράστασης της γνώσης, πιθανώς να είναι πιο αποτελεσματική σε σύγκριση με την κονστρουκτιβιστική προσέγγιση, καθώς οι μαθητές κατάφεραν να βελτιώσουν σημαντικά την επίδοσή τους ως προς την ακρίβεια και σε ορισμένες περιπτώσεις και ως προς τη διατήρηση αλλά και ως προς τη γενίκευση, αναφορικά με τις δεξιότητες εκτέλεσης πολλαπλασιασμών. Μία πρώτη εξήγηση για αυτό φαίνεται να αποτελεί το γεγονός ότι οι μαθητές με ΕΜΔ στην περίπτωση των ΑΣ πολλαπλασιασμού, ενδεχομένως να διευκολύνθηκαν στην κατανόηση της έννοιας και των ιδιοτήτων του πολλαπλασιασμού, καθώς και του διαφορετικού ρόλου με τον οποίο είναι επιφορτισμένοι οι δύο τελεστές, ενώ στην περίπτωση των αλγορίθμων του πολλαπλασιασμού πιθανώς να συνέβαλε σε μεγάλο βαθμό το γεγονός ότι μπόρεσαν να αντιστοιχήσουν και να συνδέσουν τις υλικές ενέργειες με τα αλγοριθμικά βήματα. Μία δεύτερη εξήγηση για τα ενθαρρυντικά αυτά αποτελέσματα φαίνεται να είναι η κατανόηση της θεσιακής αξίας, η οποία παίζει καθοριστικό ρόλο στην εκτέλεση δεξιοτήτων πολλαπλασιασμών. Τέλος, μία τρίτη ερμηνεία των αποτελεσμάτων φαίνεται πως σχετίζεται με τις γνωστικές διεργασίες των μαθητών με ΕΜΔ. Συγκεκριμένα, οι μαθητές ενδεχομένως να κατάφεραν, με την προαναφερθείσα διδακτική προσέγγιση, να αποφορτίσουν την επιβαρυμένη μνήμη τους, την εργαζόμενη-βραχύχρονη αλλά και τη μακρόχρονη, με αποτέλεσμα να δώσουν την απαραίτητη προσοχή στις διαδικασίες και στα βήματα που απαιτούνται για την εκτέλεση δεξιοτήτων πολλαπλασιασμών.

Αντίθετα, στις έρευνες που εφαρμόστηκε ο συνδυασμός μόνο της κονστρουκτιβιστικής προσέγγισης με τους πολλαπλούς τρόπους αναπαράστασης της γνώσης, χωρίς δηλαδή να γίνει χρήση της σαφούς διδασκαλίας, τα αποτελέσματα δεν ήταν το ίδιο ενθαρρυντικά. Συγκεκριμένα, σε 2 έρευνες φάνηκε ότι οι μαθητές δεν κατάφεραν να κατασκευάσουν την έννοια των σύνθετων μονάδων και της διπλής μέτρησης, που αποτελούν τον πυρήνα του πολλαπλασιασμού, με αποτέλεσμα να μην μπορούν να επιλύσουν ορθά τους ΑΣ πολλαπλασιασμού που τους δόθηκαν. Επομένως, το εύρημα αυτό δείχνει ότι οι μαθητές πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης με ΕΜΔ, ενδεχομένως, να χρειάζονται περισσότερο την άμεση και σαφή διδασκαλία προκειμένου να κατακτήσουν την έννοια του πολλαπλασιασμού και να είναι σε θέση να βελτιώσουν τις δεξιότητες εκτέλεσης πολλαπλασιασμών.

Τέλος, ως προς το τρίτο ερευνητικό ερώτημα που αφορά τις απόψεις των μαθητών με ΕΜΔ αλλά και των εκπαιδευτικών για τις εφαρμοσθείσες μεθόδους και τεχνικές διδασκαλίας, προέκυψε το συμπέρασμα ότι ο συνδυασμός της σαφούς διδασκαλίας με τους πολλαπλούς τρόπους αναπαράστασης της γνώσης, μπορεί να δημιουργήσει θετικές απόψεις και συνεπώς να ενισχύσει τα κίνητρα των μαθητών για μάθηση. Αυτό προκύπτει, πρωτίστως, από το γεγονός ότι, όπως οι ίδιοι οι μαθητές δήλωσαν, έτσι μαθαίνουν με πιο ευχάριστο και διασκεδαστικό τρόπο και ότι θα προτιμούσαν να μαθαίνουν έτσι κι άλλες μαθηματικές έννοιες. Επιπλέον, το παραπάνω συμπέρασμα προκύπτει και από το γεγονός ότι κατάφεραν να επιλύσουν ορθά δύσκολα μαθηματικά έργα για εκείνους, καθώς όπως φάνηκε στις αρχικές τους αξιολογήσεις καταγράφηκαν ιδιαίτερα χαμηλές επιδόσεις.

Ακόμη, το συμπέρασμα αυτό ενισχύεται και από τις αντίστοιχα θετικές απόψεις που καταγράφηκαν από τους εκπαιδευτικούς, οι οποίοι δήλωσαν ότι θεωρούν εύκολη αλλά και ευχάριστη την εφαρμογή των συγκεκριμένων μεθόδων διδασκαλίας, καθώς έβλεπαν ότι οι μαθητές τους ανταποκρίνονταν γρήγορα και αποτελεσματικά. Μάλιστα, τονίζοντας την αποτελεσματικότητα αλλά και την ευκολία στην εφαρμογή, δήλωσαν ότι θα επαναλάμβαναν τις συγκεκριμένες διδακτικές εφαρμογές, συστήνοντάς τη χρήση τους και σε άλλα σχολεία.

Σημαντικό είναι το γεγονός, ότι δεν υπήρχε διαφορά στην επίδοση και στις απόψεις των μαθητών βάσει φύλου, δηλαδή μεταξύ αγοριών και κοριτσιών, γεγονός που οδηγεί στο συμπέρασμα ότι σε κοινωνίες που υπάρχει ισότητα μεταξύ των δύο φύλων, οι διαφορές τείνουν να εξαφανίζονται. Επιπρόσθετα, το γεγονός ότι υπήρχε μία σχετική διαφορά στο χρόνο που απαιτήθηκε από τους μαθητές λατινικής καταγωγής να κατακτήσουν τις δεξιότητες εκτέλεσης πολλαπλασιασμών σε σύγκριση με τους υπόλοιπους μαθητές διαφορετικής καταγωγής, μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι πιθανώς το κοινωνικο-οικονομικό πλαίσιο που μεγαλώνουν και ζουν τα παιδιά συμβάλει καθοριστικά στην μαθηματική ανάπτυξη και ιδίως στην ανάπτυξη βασικών αριθμητικών δεξιοτήτων, όπως είναι για παράδειγμα η έννοια του αριθμού ή οι δεξιότητες μέτρησης-απαρίθμησης, που διαδραματίζουν σπουδαίο ρόλο στην εκτέλεση δεξιοτήτων πολλαπλασιασμών.

Από την άλλη πλευρά, είναι σημαντικό να αναφερθεί το γεγονός ότι στις έρευνες που αξιοποίησαν την κονστρουκτιβιστική προσέγγιση δεν καταγράφηκαν οι απόψεις των μαθητών με ΕΜΔ και των εκπαιδευτικών, επομένως δεν κατέστη δυνατή η οποιαδήποτε σύγκρισή τους.

## 4.3. Περιορισμοί της έρευνας

Στην παρούσα συστηματική βιβλιογραφική ανασκόπηση υπάρχουν αρκετοί περιορισμοί. Πρωτίστως, είναι σημαντικό να αναφερθεί ότι οι περισσότερες έρευνες που συμπεριλήφθηκαν στην παρούσα βιβλιογραφική ανασκόπηση, περιλάμβαναν μικρό αριθμό συμμετεχόντων, οι οποίοι διδάχθηκαν σε ατομικό επίπεδο. Μόνο σε δύο από τις δεκατρείς συνολικά έρευνες, οι συμμετέχοντες διδάχθηκαν σε ομαδικό επίπεδο. Επομένως, όπως γίνεται αντιληπτό, τα προαναφερθέντα συμπεράσματα δεν θα μπορούσαν να χαρακτηριστούν ως αντιπροσωπευτικά για όλους τους μαθητές που έχουν διαγνωσθεί με ΕΜΔ. Επιπλέον, σε πολλές από τις έρευνες που εξετάστηκαν, το δείγμα των συμμετεχόντων περιλάμβανε και μαθητές που είχαν διαγνωσθεί με άλλου είδους αναπηρίες ή μαθητές που εμφάνιζαν ιδιαίτερα χαμηλή επίδοση, για λόγους σύγκρισης. Συνεπώς, εφόσον η συγκεκριμένη έρευνα αφορούσε μόνο μαθητές που είχαν διαγνωσθεί με ΕΜΔ, τα αποτελέσματα περιορίστηκαν μόνο σε αυτήν την κατηγορία του μαθητικού πληθυσμού, μειώνοντας ακόμη περισσότερο το δείγμα των συμμετεχόντων, καθιστώντας έτσι δύσκολη τη γενίκευση των αποτελεσμάτων.

Τέλος, άλλος ένας λόγος που εμποδίζει την απόλυτη παραδοχή των αποτελεσμάτων είναι ότι η συντριπτική πλειοψηφία των ερευνών, που εντοπίστηκαν ύστερα από την αναζήτηση σε τρεις βάσεις δεδομένων, ανήκουν στην αγγλική βιβλιογραφία, ενώ μόνο μία από αυτές έχει δημοσιευθεί στην Ελλάδα, παρόλο που τα ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν αφορούσαν έρευνες από τη διεθνή αλλά και την ελληνική βιβλιογραφία.

## 4.4. Εκπαιδευτικές επιπτώσεις

Τα ευρήματα της παρούσας έρευνας είναι ενθαρρυντικά και ελπιδοφόρα, καθώς αποδεικνύουν ότι οι μαθητές πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης με ΕΜΔ, μπορούν να βελτιώσουν σε σημαντικό βαθμό την επίδοσή τους ως προς τις δεξιότητες εκτέλεσης πολλαπλασιασμών. Οι σημαντικές πτυχές της συγκεκριμένης συστηματικής βιβλιογραφικής έρευνας είναι ότι πρώτον οι πολλαπλοί τρόποι αναπαράστασης της γνώσης σε συνδυασμό με τη σαφή διδασκαλία, μπορούν να ωφελήσουν σε μεγάλο βαθμό τον συγκεκριμένο μαθητικό πληθυσμό, καθώς έτσι οι μαθητές με ΕΜΔ διευκολύνονται στην κατανόηση της έννοιας της θεσιακής αξίας, στην κατανόηση της έννοιας και των ιδιοτήτων του πολλαπλασιασμού, καθώς και των σχέσεων μεταξύ των αριθμών. Επιπλέον, μπορούν να αντιστοιχήσουν τις υλικές ενέργειες με τα αλγοριθμικά βήματα μεταφέροντας έτσι τη γνώση τους σε συμβολικό επίπεδο.

Δεύτερον οι μαθητές με ΕΜΔ, ενδεχομένως να αναπτύσσουν θετικές απόψεις ως προς τη συγκεκριμένη διδακτική προσέγγιση ανεξαρτήτως φύλου και εθνικότητας και γενικά ανεξαρτήτως των δημογραφικών τους χαρακτηριστικών, κάτι που σαφώς δημιουργεί μεγαλύτερα κίνητρα για μάθηση ως προς το συγκεκριμένο γνωστικό πεδίο. Ακόμη, βρέθηκε ότι είναι ιδιαίτερα εύκολη και ευχάριστη η αξιοποίησή της συγκεκριμένης προσέγγισης από τους εκπαιδευτικούς, γεγονός που από μόνο του αποτελεί έναυσμα για την χρήση τους.

Τέλος, είναι σημαντικό να αναφερθεί ότι οι πολλαπλοί τρόποι αναπαράστασης της γνώσης σε συνδυασμό με τη σαφή διδασκαλία, μπορούν να αξιοποιηθούν από τους εκπαιδευτικούς είτε στο πλαίσιο της γενικής τάξης είτε στις δομές της ειδικής αγωγής, καθώς η συγκεκριμένη προσέγγιση συμβαδίζει με τη θεωρία των πολλαπλών νοημοσυνών και είναι δυνατόν να εφαρμοσθεί στο πλαίσιο της διαφοροποιημένης διδασκαλίας.

## 4.5. Προτάσεις για μελλοντική έρευνα

Η παρούσα έρευνα βασίστηκε στις αρχές της συστηματικής βιβλιογραφικής ανασκόπησης. Κατά τη διεξαγωγή της εντοπίστηκε μικρός αριθμός παρεμβατικών ερευνών που αφορούν τη βελτίωση των δεξιοτήτων εκτέλεσης πολλαπλασιασμών από μαθητές πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης με ΕΜΔ. Σε μελλοντικές έρευνες, επομένως, θα ήταν χρήσιμο να γίνουν περισσότερες παρεμβατικές έρευνες, που να έχουν ως αντικείμενο τη βελτίωση δεξιοτήτων εκτέλεσης πολλαπλασιασμών από μαθητές πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης με ΕΜΔ, αλλά με όσο το δυνατόν μεγαλύτερο αριθμό συμμετεχόντων, συμπεριλαμβάνοντας και ομάδα ελέγχου, για να μπορούν να γίνουν οι απαραίτητες αναλύσεις και μετρήσεις συγκριτικά με την επίδοση των συμμαθητών τους πάνω στο ίδιο γνωστικό αντικείμενο.

Ακόμη, θα ήταν χρήσιμο σε αυτές τις έρευνες να αξιοποιηθεί η σαφής διδασκαλία σε συνδυασμό με τους πολλαπλούς τρόπους αναπαράστασης της γνώσης, προκειμένου να αποδειχθεί η αποδοτικότητα αυτής της μεθόδου αλλά και να γίνει δυνατή η γενίκευση των ευρημάτων.

Επίσης, είναι σημαντική η διενέργεια ερευνών, όπου θα επικεντρώνονταν αρχικά στην αξιολόγηση των διαφορετικών επιπέδων κατοχής της έννοιας των σύνθετων μονάδων, που αποτελεί τον πυρήνα του πολλαπλασιασμού, καθώς σύμφωνα με τον Steffe (1994) υπάρχουν δύο διαφορετικά επίπεδα του σχήματος απαρίθμησης των σύνθετων μονάδων, τα οποία έχουν εκτεθεί αναλυτικά στην παρούσα έρευνα και τα οποία πιθανώς επηρεάζουν την επίδοση των μαθητών στην εκτέλεση των αριθμητικών δεξιοτήτων πολλαπλασιασμού. Επομένως, θα ήταν χρήσιμο εφόσον πραγματοποιηθεί η αρχική αξιολόγηση στη συνέχεια να εξεταστεί ο αντίκτυπος που μπορεί να έχουν τα διαφορετικά επίπεδα κατοχής της έννοιας των σύνθετων μονάδων, στον πολλαπλασιαστικό συλλογισμό και έπειτα στη βελτίωση δεξιοτήτων εκτέλεσης πολλαπλασιασμών σε μαθητές πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης με ΕΜΔ.

Τέλος, θα μπορούσαν να πραγματοποιηθούν παρεμβατικές έρευνες που να αξιοποιούν και άλλα μοντέλα αναπαράστασης της έννοιας του πολλαπλασιασμού, όπως για παράδειγμα το μοντέλο της παράταξης (array model) και όχι μόνο εκείνο της ένωσης αντικειμένων που έχουν τον ίδιο αριθμό σε κάθε ομάδα (grouping model), όπως συνέβη στην πλειοψηφία των ερευνών που εξετάστηκαν στην παρούσα έρευνα, διότι μπορεί το τελευταίο (grouping model) να αποτελεί βασικό συστατικό για την ανάπτυξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης και για την ευέλικτη ενασχόληση με την εκτέλεση πολλαπλασιασμών, όμως από την άλλη πλευρά θεωρείται πως δεν καλύπτει εννοιολογικά το ευρύ πεδίο του πολλαπλασιασμού. Στη συνέχεια, θα μπορούσε να εξεταστεί η επίδραση των παραπάνω μοντέλων αναπαράστασης της έννοιας του πολλαπλασιασμού ως προς την επίδοση μαθητών με ΕΜΔ στις δεξιότητες εκτέλεσης πολλαπλασιασμών.

**Βιβλιογραφικές Παραπομπές**

Αγαλιώτης, Ι. (2010). Πρόληψη και έγκαιρη παρέμβαση στην περίπτωση των Ειδικών Μαθησιακών Δυσκολιών στα Μαθηματικά μέσω σχεδιασμού προγραμμάτων, διδακτικών τεχνικών και περιεχομένου μαθημάτων. Στο Α.Ν. Κορνηλάκη, Μ.Α. Κυπριωτάκη & Γ. Μανωλίτσης (Επιμ.), *Πρώιμη Παρέμβαση: Διεπιστημονική Θεώρηση* (σελ.261-282). Αθήνα: Πεδίο.

Αγαλιώτης, Ι. (2011). *Διδασκαλία Μαθηματικών στην Ειδική Αγωγή και Εκπαίδευση*. Εκδόσεις Γρηγόρη.

Αγαλιώτης, Ι. (2012). *Εκπαιδευτική αξιολόγηση μαθητών με δυσκολίες μάθησης και προσαρμογής, Το Αξιολογικό Σύστημα Μαθησιακών Αναγκών*. Εκδόσεις Γρηγόρη.

Agaliotis, I., & Teli, A. (2016). Teaching Arithmetic Combinations of Multiplication and Division to Students with Learning Disabilities or Mild Intellectual Disability: The Impact of Alternative Fact Grouping and the Role of Cognitive and Learning Factors. *Journal of Education and Learning*, *5*(4), 90. https://doi.org/10.5539/jel.v5n4p90

Αγαλιώτης, Ι. (2020). *Διδασκαλία ακαδημαϊκών γνώσεων και δεξιοτήτων σε μαθητές με Ήπιες Εκπαιδευτικές Ανάγκες.* Σημειώσεις πανεπιστημιακών παραδόσεων. Θεσσαλονίκη: Πανεπιστήμιο Μακεδονίας.

Agrawal, J., & Morin, L. L. (2016). Evidence-Based Practices: Applications of Concrete Representational Abstract Framework across Math Concepts for Students with Mathematics Disabilities. *Learning Disabilities Research & Practice*, *31*(1), 34–44. https://doi.org/10.1111/ldrp.12093

Andersson, U. (2010). Skill development in different components of arithmetic and basic cognitive functions: Findings from a 3-year longitudinal study of children with different types of learning difficulties. *Journal of Educational Psychology*, *102*(1), 115–134. https://doi.org/10.1037/a0016838

Anghileri, J. (1989). An Investigation of Young Children's Understanding of Multiplication. *Educational Studies in Mathematics*, *20*(4), 367–385. Retrieved from http://www.jstor.org/stable/3482314

Anghileri, J. (1995). Language, Arithmetic, and the Negotiation of Meaning. *For the Learning of Mathematics*, *15*(3), 10–14. Retrieved from https://www.jstor.org/stable/40248182

Baddeley, A. (2000). The episodic buffer: a new component of working memory? *Trends in Cognitive Sciences*, *4*(11), 417–423. https://doi.org/10.1016/S1364-6613(00)01538-2

Baddeley, A. (2007). *Working Memory, Thought and Action*. Oxford University press.

Baroody (1999). The development of basic counting, number and arithmetic knowledge among children classified as mentally handicapped. In Glidden, L. M. (Ed.), *International Review of Research in Mental Retardation* (pp. 52-104). San Diego, CA: Academic Press.

Baroody, A. J., Feil, Y., & Johnson, A. R. (2007). An Alternative Reconceptualization of Procedural and Conceptual Knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38*(2), 115–131. https://doi.org/10.2307/30034952

Bender, W. N., & Larkin, M. J. (2009). *Reading strategies for elementary students with learning difficulties : strategies for RTI*. Thousand Oaks, Calif.: Corwin Press.

Berninger, V. W. (1999). Coordinating Transcription and Text Generation in Working Memory during Composing: Automatic and Constructive Processes. *Learning Disability Quarterly*, *22*(2), 99–112. https://doi.org/10.2307/1511269

Boggan, M., Harper, S., & Whitmire, A. (2010). *Using manipulatives to teach elementary mathematics*. Retrieved from https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1096945.pdf

Bottge, B. A. (2001). Reconceptualizing Mathematics Problem Solving for Low-Achieving Students. *Remedial and Special Education*, *22*(2), 102–112. https://doi.org/10.1177/074193250102200204

Bouck, E. C., Satsangi, R., & Park, J. (2017). The Concrete–Representational–Abstract Approach for Students With Learning Disabilities: An Evidence-Based Practice Synthesis. *Remedial and Special Education*, *39*(4), 211–228. https://doi.org/10.1177/0741932517721712

Butterworth, B. (2005). The development of arithmetical abilities. *Journal of Child Psychology and Psychiatry*, *46*(1), 3–18. https://doi.org/10.1111/j.1469-7610.2004.00374.x

Büttner, G., & Hasselhorn, M. (2011). Learning Disabilities: Debates on definitions, causes, subtypes, and responses. *International Journal of Disability, Development and Education*, *58*(1), 75–87. https://doi.org/10.1080/1034912x.2011.548476

Canobi, K. H. (2004). Individual differences in children's addition and subtraction knowledge. *Cognitive Development*, *19*(1), 81–93. https://doi.org/10.1016/j.cogdev.2003.10.001

Carpenter, T. P., Levi, L., Franke, M. L., & Zeringue, J. K. (2005). Algebra in elementary school: Developing relational thinking. *Zentralblatt Für Didaktik Der Mathematik*, *37*(1), 53–59. https://doi.org/10.1007/bf02655897

Chinn, S. J., & Ashcroft, R. E. (2017). *Mathematics for dyslexics and dyscalculics: a teaching handbook*. Chichester, West Sussex, Malden, Ma: Wiley Blackwell.

Chung, P., & Patel, D. R. (2015). Dysgraphia. In D. E. Greydanus, D. R. Patel, H. D. Pratt, J. L. Calles, Jr., A. Nazeer, & J. Merrick (Eds.), *Behavioral pediatrics* (pp. 103–115). Nova Biomedical Books.

Colomer, C., Re, A., Miranda, A., & Lucangeli, D. (2013). Numerical and Calculation Abilities in Children with ADHD. *Learning Disabilities: A Contemporary Journal*, *11*(2), 1–15. Retrieved from https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1039820.pdf

Dehaene, S. (2001). Precis of The Number Sense. *Mind and Language*, *16*(1), 16–36. https://doi.org/10.1111/1468-0017.00154

DeStefano, D., & LeFevre, J. (2004). The role of working memory in mental arithmetic. *European Journal of Cognitive Psychology*, *16*(3), 353–386. https://doi.org/10.1080/09541440244000328

Ding, M., Li, X., & Capraro, M. M. (2013). Preservice elementary teachers' knowledge for teaching the associative property of multiplication: A preliminary analysis. *The Journal of Mathematical Behavior*, *32*(1), 36–52. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2012.09.002

Dowker, A., Sarkar, A., & Looi, C. Y. (2016). Mathematics Anxiety: What Have We Learned in 60 Years? *Frontiers in Psychology*, *7*(508). https://doi.org/10.3389/fpsyg.2016.00508

Dowker, A. (2019). *Individual Differences in Arithmetic*. Routledge.

Dowker, A., & Sheridan, H. (2022). Relationships Between Mathematics Performance and Attitude to Mathematics: Influences of Gender, Test Anxiety, and Working Memory. *Frontiers in Psychology*, *13*. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2022.814992

Downton, A., & Sullivan, P. (2017). Posing complex problems requiring multiplicative thinking prompts students to use sophisticated strategies and build mathematical connections. *Educational Studies in Mathematics*, *95*(3), 303–328. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9751-x

Else-Quest, N. M., Hyde, J. S., & Linn, M. C. (2010). Cross-national patterns of gender differences in mathematics: A meta-analysis. *Psychological Bulletin*, *136*(1), 103–127. https://doi.org/10.1037/a0018053

Fletcher, J. M., & Vaughn, S. (2009). Response to Intervention: Preventing and Remediating Academic Difficulties. *Child Development Perspectives*, *3*(1), 30–37. https://doi.org/10.1111/j.1750-8606.2008.00072.x

Fletcher, J. M., Stuebing, K. K., Morris, R. D. & Lyon G. R. (2013). Classification and Definition of Learning Disabilities: A Hybrid Model. In H. L. Swanson, Harris, K. R., & Graham, S. (Eds.), *Handbook of learning disabilities* (pp. 33-50). The Guilford Press.

Fletcher, J. M., & Miciak, J. (2017). Comprehensive Cognitive Assessments are not Necessary for the Identification and Treatment of Learning Disabilities. *Archives of Clinical Neuropsychology*, *32*(1), 2–7. https://doi.org/10.1093/arclin/acw103

Fletcher, J., G Reid Lyon, Fuchs, L. & Barnes, M. A. (2019). *Learning disabilities: from identification to intervention*. The Guilford Press.

Flores, M. M., Hinton, V., & Strozier, S. D. (2014). Teaching Subtraction and Multiplication with Regrouping Using the Concrete-Representational-Abstract Sequence and Strategic Instruction Model. *Learning Disabilities Research & Practice*, *29*(2), 75–88. https://doi.org/10.1111/ldrp.12032

Flores, M. M., Hinton, V. M., & Schweck, K. B. (2014). Teaching Multiplication with Regrouping to Students with Learning Disabilities. *Learning Disabilities Research & Practice*, *29*(4), 171–183. https://doi.org/10.1111/ldrp.12043

Flores, M. M., Kaffar, B. J., & Hinton, V. (2019). A comparison of the effectiveness of using CRASIM vs. direct instruction to teach multiplication with regrouping. *International Journal for Research in Learning Disabilities*, *4*(1), 27-40.

Flores, M. M., Moore, A. J., & Meyer, J. M. (2020). Teaching the partial products algorithm with the concrete representational abstract sequence and the strategic instruction model. *Psychology in the Schools*. https://doi.org/10.1002/pits.22335

Friedman, L. M., Rapport, M. D., Orban, S. A., Eckrich, S. J., & Calub, C. A. (2017). Applied Problem Solving in Children with ADHD: The Mediating Roles of Working Memory and Mathematical Calculation. *Journal of Abnormal Child Psychology*, *46*(3), 491–504. https://doi.org/10.1007/s10802-017-0312-7

Fuchs, L. S., Compton, D. L., Fuchs, D., Paulsen, K., Bryant, J. D., & Hamlett, C. L. (2005). The Prevention, Identification, and Cognitive Determinants of Math Difficulty. *Journal of Educational Psychology*, *97*(3), 493–513. https://doi.org/10.1037/0022-0663.97.3.493

Fuchs, L. S., Fuchs, D., Compton, D. L., Powell, S. R., Seethaler, P. M., Capizzi, A. M., Schatschneider, C. & Fletcher, J. M. (2006). The cognitive correlates of third-grade skill in arithmetic, algorithmic computation, and arithmetic word problems. *Journal of Educational Psychology*, *98*(1), 29–43. https://doi.org/10.1037/0022-0663.98.1.29

Fuchs, L. S., Powell, S. R., Cirino, P. T., Schumacher, R. F., Marrin, S., Hamlett, C. L., Fuchs, D. & Compton, D., L. (2014). Does calculation or word-problem instruction provide a stronger route to prealgebraic knowledge? *Journal of Educational Psychology*, *106*(4), 990–1006. https://doi.org/10.1037/a0036793

Fuchs, L. S., Bucka, N., Clarke, B., Dougherty, B., Jordan, N. C., Karp, K. S., Woodward, J., Jayanthi, M., Gersten, R., Newman-Gonchar, R., Schumacher, R., Haymond, K., Lyskawa, J., Keating, B. & Morgan, S. (2021). Assisting Students Struggling with Mathematics: Intervention in the Elementary Grades. Educator's Practice Guide. WWC 2021006. In *ERIC*. What Works Clearinghouse. Retrieved from https://eric.ed.gov/?id=ED611018

Fuson, K. C., Wearne, D., Hiebert, J. C., Murray, H. G., Human, P. G., Olivier, A. I., … Fennema, E. (1997). Children's Conceptual Structures for Multidigit Numbers and Methods of Multidigit Addition and Subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*(2), 130. https://doi.org/10.2307/749759

Fuson, K. C. (2009). Avoiding misinterpretations of Piaget and Vygotsky: Mathematical teaching without learning, learning without teaching, or helpful learning-path teaching? *Cognitive Development*, *24*(4), 343–361. https://doi.org/10.1016/j.cogdev.2009.09.009

Fuson, Karen. C., & Beckmann, S. (2012). Standard algorithm in the Common Core State Standards. *NCSM Journal*, *14 (2)*. https://workshops.sjcoe.org/Uploads/5420153465485678.pdf

Fuson, K. C. (2013). *Children's counting and concepts of number.* Springer.

Fuson, K., C. (2020). Best MultiDigit Computation Methods: A Cross-cultural Cognitive, Empirical and Mathematical Analysis. *Universal Journal of Educational Research*, *8 (4)*. https://www.hrpub.org/download/20200330/UJER21-13415313.pdf

Gardner, H. (1999). *Intelligence reframed: multiple intelligences for the 21st century*. New York: Basic Books.

Geary, D. C. (1995). Reflections of evolution and culture in children's cognition: Implications for mathematical development and instruction. *American Psychologist*, *50*(1), 24–37. https://doi.org/10.1037/0003-066x.50.1.24

Geary, D. C. (1996). Sexual selection and sex differences in mathematical abilities. *Behavioral and Brain Sciences*, *19*(2), 229–247. https://doi.org/10.1017/s0140525x00042400

Geary, D. C. (2004). Mathematics and Learning Disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, *37*(1), 4–15. https://doi.org/10.1177/00222194040370010201

Geary, D. C. (2007). Development of Mathematical Understanding. *Handbook of Child Psychology*. https://doi.org/10.1002/9780470147658.chpsy0218

Geary, D. C., Hoard, M. K., Byrd-Craven, J., Nugent, L., & Numtee, C. (2007). Cognitive Mechanisms Underlying Achievement Deficits in Children With Mathematical Learning Disability. *Child Development*, *78*(4), 1343–1359. https://doi.org/10.1111/j.1467-8624.2007.01069.x

Geary, D. C., Hoard, M. K., Nugent, L., & Byrd-Craven, J. (2008). Development of Number Line Representations in Children With Mathematical Learning Disability. Developmental Neuropsychology, 33(3), 277–299. https://doi.org/10.1080/87565640801982361

Geary, D. C. (2010). Mathematical disabilities: Reflections on cognitive, neuropsychological, and genetic components. *Learning and Individual Differences*, *20*(2), 130–133. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2009.10.008

Geary, D. C., Hoard, M. K., & Bailey, D. H. (2011). Fact Retrieval Deficits in Low Achieving Children and Children With Mathematical Learning Disability. *Journal of Learning Disabilities*, *45*(4), 291–307. https://doi.org/10.1177/0022219410392046

Geary, D. C., Hoard, M. K., Nugent, L., & Bailey, D. H. (2012). Mathematical cognition deficits in children with learning disabilities and persistent low achievement: A five-year prospective study. *Journal of Educational Psychology*, *104*(1), 206–223. https://doi.org/10.1037/a0025398

Gersten, R., & Chard, D. (1999). Number Sense. *The Journal of Special Education*, *33*(1), 18–28. https://doi.org/10.1177/002246699903300102

Gersten, R., Chard, D. J., Jayanthi, M., Baker, S. K., Morphy, P., & Flojo, J. (2009). Mathematics Instruction for Students With Learning Disabilities: A Meta-Analysis of Instructional Components. *Review of Educational Research*, *79*(3), 1202–1242. https://doi.org/10.3102/0034654309334431

Gervasoni, A., Roche, A., & Downton, A. (2021). Differentiating Instruction for Students Who Fail to Thrive in Mathematics: The Impact of a Constructivist-Based Intervention Approach. *Mathematics Teacher Education and Development*, *23*, 207–233. Retrieved from https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1321054.pdf

Greer, B. (1992). Multiplication and Division As Models of Situations: A Project of the National Council of Teachers of Mathematics. In Grouws, A., D. (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 276-295). New York, Macmillan.

Greer, B. (2011). Inversion in mathematical thinking and learning. *Educational Studies in Mathematics*, *79*(3), 429–438. https://doi.org/10.1007/s10649-011-9317-2

Götze, D. (2019). Language-Sensitive Support of Multiplication Concepts among at-Risk Children: A Qualitative Didactical Design Research Case Study. *Learning Disabilities: A Contemporary Journal*, *17*(2), 165–182. https://eric.ed.gov/?id=EJ1234946

Götze, D., & Baiker, A. (2020). Language-responsive support for multiplicative thinking as unitizing: results of an intervention study in the second grade. *ZDM – Mathematics Education*, *53*(2), 263–275. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01206-1

Guiso, L., Monte, F., Sapienza, P., & Zingales, L. (2008). DIVERSITY: Culture, Gender, and Math. *Science*, *320*(5880), 1164–1165. https://doi.org/10.1126/science.1154094

Hackenberg, A. J. (2010). Students' Reasoning With Reversible Multiplicative Relationships. *Cognition and Instruction*, *28*(4), 383–432. https://doi.org/10.1080/07370008.2010.511565

Harkness, S. S., & Thomas, J. (2008). Reflections on "Multiplication as Original Sin": The implications of using a case to help preservice teachers understand invented algorithms. *The Journal of Mathematical Behavior*, *27*(2), 128–137. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2008.07.004

Hemphill., F., C., Vanneman, A., & Rahman, T. (2011). *Achievement Gaps How Hispanic and White Students in Public Schools Perform in Mathematics and Reading on the National Assessment of Educational Progress Statistical Analysis Report NCES 2011-459 U.S. DEPARTMENT OF EDUCATION*. (n.d.). Retrieved from https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED520960.pdf

Hickendorff, M., Torbeyns, J., & Verschaffel, L. (2019). Multi-digit Addition, Subtraction, Multiplication, and Division Strategies. In Fritz, A., Haase, V., G. & Räsänen, P. (Eds), *International Handbook of Mathematical Learning Difficulties*, 543–560. https://doi.org/10.1007/978-3-319-97148-3_32

Hinton, V., Strozier, S. D., & Flores, M. M. (2014). Building Mathematical Fluency for Students with Disabilities or Students At-Risk for Mathematics Failure.

*International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology*, *2*(4), 257. https://doi.org/10.18404/ijemst.69677

Hord, C., Tzur, R., Xin, Y. P., Si, L., Kenney, R. H., & Woodward, J. (2016). Overcoming a 4th grader's challenges with working-memory via constructivist-based pedagogy and strategic scaffolds: Tia's solutions to challenging multiplicative tasks. *The Journal of Mathematical Behavior*, *44*, 13–33. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2016.09.002

Hord, C., Kastberg, S., & Draeger, A. L. (2021). Teaching and learning in multiplicative situations: A case study of tutoring an elementary school student with a learning disability. *School Science and Mathematics*, *121*(4), 223–233. https://doi.org/10.1111/ssm.12462

Hurst, C., & Hurrel, D. (2016). Multiplicative thinking. Much more than knowing multiplication facts and procedures. *Australian Primary Mathematics Classroom,* 21, 34–38. https://espace.curtin.edu.au/bitstream/handle/20.500.11937/51501/250554.pdf?sequence=2

Hughes, C. A., Morris, J. R., Therrien, W. J., & Benson, S. K. (2017). Explicit Instruction: Historical and Contemporary Contexts. *Learning Disabilities Research & Practice*, *32*(3), 140–148. https://doi.org/10.1111/ldrp.12142

Hyde, J. S., Lindberg, S. M., Linn, M. C., Ellis, A. B., & Williams, C. C. (2008). Gender Similarities Characterize Math Performance. *Science*, *321*(5888), 494–495. https://doi.org/10.1126/science.1160364

Izsak, A. (2004). Teaching and Learning Two-Digit Multiplication: Coordinating Analyses of Classroom Practices and Individual Student Learning. *Mathematical Thinking and Learning*, *6*(1), 37–79. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0601_3

Jacob, L., & Willis, S. G. (2003). The development of multiplicative thinking in young children. In L. Bragg, C. Campbell, G. Herbert, & J. Mousley (Eds.), *Mathematics Education Research: Innovation, Networking, Opportunity: Proceedings of the 26th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australia* (Vol. 1, pp. 460–467). Melbourne, Australia: Deakin University. https://www.researchgate.net/profile/Lorraine-Jacob/publication/264876861_The_Development_of_Multiplicative_Thinking_in_Young_Children/links/5bc699e392851cae21a86a1b/The-Development-of-Multiplicative-Thinking-in-Young-Children.pdf

Jitendra, A. K. &  Xin, Y., P.  (1999). The Effects of Instruction in Solving Mathematical Word Problems for Students with Learning Problems. *The Journal of Special Education*, *32*(4), 207–225. https://doi.org/10.1177/002246699903200402

Jitendra, A. K., & Star, J. R. (2011). Meeting the Needs of Students With Learning Disabilities in Inclusive Mathematics Classrooms: The Role of Schema-Based Instruction on Mathematical Problem-Solving. Theory into Practice, 50(1), 12–19. https://doi.org/10.1080/00405841.2011.534912

Jitendra, A. K., Nelson, G., Pulles, S. M., Kiss, A. J., & Houseworth, J. (2016). Is Mathematical Representation of Problems an Evidence-Based Strategy for Students With Mathematics Difficulties? *Exceptional Children*, *83*(1), 8–25. https://doi.org/10.1177/0014402915625062

Jitendra, A. K., Dougherty, B., Sanchez, V., & Suchilt, L. (2022). Using Multiple Representations to Foster Multiplicative Reasoning in Students With Mathematics Learning Disabilities. *Teaching Exceptional Children* https://doi.org/10.1177/00400599221115627

Jones, J., P. & Tiller, M. (2017). Using Concrete Manipulatives in Mathematical Instruction. *Dimensions of Early Childhood,* 45(1), 18-23. https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1150546.pdf

Kaufmann, O. T. (2018). The problem of distinguishing multiplicative from additive reasoning in primary school classroom context. *European Journal of Science and Mathematics Education*, *6*(3), 100–112. https://doi.org/10.30935/scimath/9526

Kaufmann, L., & Von Aster, M. (2012). The Diagnosis and Management of Dyscalculia. *Deutsches Aerzteblatt Online*, *109*(45). https://doi.org/10.3238/arztebl.2012.0767

Käser, T., Baschera, G.-M., Kohn, J., Kucian, K., Richtmann, V., Grond, U., Gross, M., & von Aster, M. (2013). Design and evaluation of the computer-based training program Calcularis for enhancing numerical cognition. *Frontiers in Psychology*, *4*. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2013.00489

Kirschner, P. A., Sweller, J., & Clark, R. E. (2006). Why Minimal Guidance During Instruction Does Not Work: An Analysis of the Failure of Constructivist, Discovery, Problem-Based, Experiential, and Inquiry-Based Teaching. *Educational Psychologist*, *41*(2), 75–86. https://doi.org/10.1207/s15326985ep4102_1

Kiru, E. W., Doabler, C. T., Sorrells, A. M., & Cooc, N. A. (2017). A Synthesis of Technology-Mediated Mathematics Interventions for Students With or at Risk for Mathematics Learning Disabilities. *Journal of Special Education Technology*, *33*(2), 111–123. https://doi.org/10.1177/0162643417745835

Kosko, K. W. (2019). Third-grade teachers' self-reported use of multiplication and division models. *School Science and Mathematics*, *119*(5), 262–274. https://doi.org/10.1111/ssm.12337

Krawec, J. L. (2012). Problem Representation and Mathematical Problem Solving of Students of Varying Math Ability. *Journal of Learning Disabilities*, *47*(2), 103–115. https://doi.org/10.1177/0022219412436976

Krawec, J., Huang, J., Montague, M., Kressler, B., & Melia de Alba, A. (2012). The Effects of Cognitive Strategy Instruction on Knowledge of Math Problem-Solving Processes of Middle School Students With Learning Disabilities. *Learning Disability Quarterly*, *36*(2), 80–92. https://doi.org/10.1177/0731948712463368

Kroesbergen, E. H., & van Luit, J. E. H. (2002). Teaching multiplication to low math performers: Guided versus structured instruction. *Instructional Science*, *30*(5), 361–378. https://doi.org/10.1023/a:1019880913714

Kroesbergen, E. H., & Van Luit, J. E. H. (2003). Mathematics Interventions for Children with Special Educational Needs. *Remedial and Special Education*, *24*(2), 97–114. https://doi.org/10.1177/07419325030240020501

Kroesbergen, E. H., Luit, J. E. H. V., & Maas, C. J. M. (2004). Effectiveness of Explicit and Constructivist Mathematics Instruction for Low-Achieving Students in the Netherlands. *The Elementary School Journal*, *104*(3), 233–251. Retrieved from https://www.jstor.org/stable/3202951

Lambert, K., & Moeller, K. (2019). Place-value computation in children with mathematics difficulties. *Journal of Experimental Child Psychology*, *178*, 214–225. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2018.09.008

Lambert, R., & Harriss, E. (2022). Insider accounts of dyslexia from research mathematicians. *Educational Studies in Mathematics*. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10140-2

Lamon, S. J. (1993). Ratio and Proportion: Connecting Content and Children's Thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, *24*(1), 41. https://doi.org/10.2307/749385

Larsson, K., Pettersson, K., & Andrews, P. (2017). Students' conceptualizations of multiplication as repeated addition or equal groups in relation to multi-digit and decimal numbers. *The Journal of Mathematical Behavior*, *48*, 1–13. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.07.003

Learning Disabilities Association of America. (2013). *Types of Learning Disabilities*. Learning Disabilities Association of America. https://ldaamerica.org/types-of-learning-disabilities/

Lee, J.-E. (2014). Deciphering Multiplication Algorithms with the Area model. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *19 (9)*. https://www.researchgate.net/profile/Ji-Eun-Lee-9/publication/267327820_Deciphering_multiplication_algorithms_using_the_area_model/links/580260a308ae1c5148cf33a7/Deciphering-multiplication-algorithms-using-the-area-model.pdf

Lee, H.-J., Han, C., Kim, H., & Herner-Patnode, L. (2021). Teaching Multiplication to Students with Mathematical Learning Disabilities (MLD): Analysis of Preservice Teachers' Lesson Design. *Sustainability*, *13*(21), 11813. https://doi.org/10.3390/su132111813

Lei Q., Xin, Y., P., Morita-Mullaney, T., & Tzur, R. (2020). Instructional Scaffolds in Mathematics Instruction for English Learners with Learning Disabilities: An Exploratory Case Study. *Learning Disabilities: A Contemporary Journal*, *18*(1). Retrieved from https://www.ldw-ldcj.org/images/open_access_articles/Lei_Xin_Morita-Mullaney__Tzur_2020.pdf

Lesh, R.A., Cramer, K., Doerr, H., Post, T. & Zawojewski, J. (2003) Model development sequences. In Lesh, R.A. & Doerr, H. (Eds.), *Beyond Constructivism: A Models and Modeling Perspective on Mathematics Problem Solving, Learning and Teaching* (pp. 35-58). Erlbaum: Mahwah, NJ, USA.

McDonough, E., M., Flanagan, D., P., Sy, M. & Alfonso, V., C. (2017). Specific Learning Disorder. In Goldstein, S. & DeVries, M. (Eds.), *Handbook of DSM-5 Disorders in Children and Adolescents* (pp. 77-104), Springer, Cham https://doi.org/10.1007/978-3-319-57196-6_4

Maki, K. E., & Adams, S. R. (2019). Specific Learning Disabilities Identification: Do the Identification Methods and Data Matter? *Learning Disability Quarterly*, *00*(0), 1-12. https://doi.org/10.1177/0731948719826296

Mammarella, I. C., Lucangeli, D., & Cornoldi, C. (2010). Spatial Working Memory and Arithmetic Deficits in Children With Nonverbal Learning Difficulties. *Journal of Learning Disabilities*, *43*(5), 455–468. https://doi.org/10.1177/0022219409355482

Mammarella, I. C., & Cornoldi, C. (2013). An analysis of the criteria used to diagnose children with Nonverbal Learning Disability (NLD). *Child Neuropsychology*, *20*(3), 255–280. https://doi.org/10.1080/09297049.2013.796920

Marshall, S. P. (1995). *Schemas in problem solving*. Cambridge England and New York: Cambridge University Press.

Matney, G. T., & Daugherty, B. N. (2013). Seeing Spots and Developing Multiplicative Sense Making. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *19*(3), 148–155. https://doi.org/10.5951/mathteacmiddscho.19.3.0148

Mayer, R. E. & Wittrock, M. C. (2006). Problem Solving. In Alexander, P. A. & Winnie P. H. (Eds.), *Handbook of Educational Psychology* (pp. 287-303). New York: Routledge.

Mayer, R. E. (2010). Problem Solving and Reasoning. In Aukrust, V., G. (Ed.), Learning and Cognition (pp. 112-117). Elsevier.

Mazzocco, M. M. & Vukovic, R. (2018). How SLD manifests in Mathematics. In Alfonso, V. C., & Flanagan, D. P. (Eds.), *Essentials of specific learning disability identification* (pp. 59-102). John Wiley & Sons.

Miles, T. R. (2004). Theoretical Background. In Miles, T. R., & Miles, E. (Eds.). *Dyslexia and mathematics* (pp. 1-20). London and New York Routledge.

Miller, S. P., Butler, F. M., & Lee, K. (1998). Validated Practices for Teaching Mathematics to Students With Learning Disabilities: A Review of Literature. *Focus on Exceptional Children*, *31*(1). https://doi.org/10.17161/foec.v31i1.6763

Miller, S. P., & Hudson, P. J. (2007). Using Evidence-Based Practices to Build Mathematics Competence Related to Conceptual, Procedural, and Declarative Knowledge. *Learning Disabilities Research & Practice*, *22*(1), 47–57. https://doi.org/10.1111/j.1540-5826.2007.00230.x

Miller, S. P., Stringfellow, J. L., Kaffar, B. J., Ferreira, D., & Mancl, D. B. (2011). Developing Computation Competence among Students Who Struggle with Mathematics. *TEACHING Exceptional Children*, *44*(2), 38–46. https://doi.org/10.1177/004005991104400204

Milton, J. H., Flores, M. M., Moore, A. J., Taylor, J. J., & Burton, M. E. (2018). Using the Concrete–Representational–Abstract Sequence to Teach Conceptual Understanding of Basic Multiplication and Division. *Learning Disability Quarterly*, *42*(1), 32–45. https://doi.org/10.1177/0731948718790089

Mc Donough, E. M., Flanagan, D. P., Sy, M., & Alfonso, V. M Goldstein, S., & Devries, M. (2017). Specific Learning Disorder. In Goldstein, S., & Devries, M. (Eds), *Handbook of DSM-5 Disorders in Children and Adolescents*. Springer International Publishing.

Moher, D., Liberati, A., Tetzlaff, J., & Altman, D. G. (2009). Preferred Reporting Items for Systematic Reviews and meta-analyses: the PRISMA Statement. *BMJ*, *339*(jul21 1), b2535–b2535. https://doi.org/10.1136/bmj.b2535

Moher, D., Shamseer, L., Clarke, M., Ghersi, D., Liberati, A., Petticrew, M., Shekelle, P. & Stewart, L. A. (2015). Preferred Reporting Items for Systematic Review and meta-analysis Protocols (PRISMA-P) 2015 Statement. *Systematic Reviews*, *4*(1). https://doi.org/10.1186/2046-4053-4-1

Montague, M., Krawec, J., Enders, C., & Dietz, S. (2014). Supplemental Material for The Effects of Cognitive Strategy Instruction on Math Problem Solving of Middle-School Students of Varying Ability. Journal of Educational Psychology, 106(2), 469-481. https://doi.org/10.1037/a0035176.supp

Morin, L. L., Watson, S. M. R., Hester, P., & Raver, S. (2017). The Use of a Bar Model Drawing to Teach Word Problem Solving to Students With Mathematics Difficulties. *Learning Disability Quarterly*, *40*(2), 91–104. https://doi.org/10.1177/0731948717690116

Mulligan, J. T., & Mitchelmore, M. C. (1997). Young Children's Intuitive Models of Multiplication and Division. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*(3), 309. https://doi.org/10.2307/749783

Nesher, P. (1992). Solving Multiplication Word Problem. In Leinhardt, G., Ralph Putnam, R. & Hattrup., R. A. (Eds.), *Analysis of Arithmetic for Mathematics Teaching* (pp. 189-220). Routledge.

Nunes, T., & Schliemann, A. D. (1988). Culture, Arithmetic and Mathematical Models. *Cultural Dynamics*, *1*(2), 180–194. https://doi.org/10.1177/092137408800100204

Nuerk, H., C., Moeller, K., & Willmes, K. (2016). Multi-digit number processing. In Kadosh R., C., & Dowker, A. (Eds.), *The Oxford handbook of numerical cognition* (pp. 106-139). Oxford, Uk, New York: Oxford University Press.

Pape, S. J., & Tchoshanov, M. A. (2001). The Role of Representation(s) in Developing Mathematical Understanding. *Theory into Practice*, *40*(2), 118–127. Retrieved from https://www.jstor.org/stable/1477273

Park, J.-H., & Nunes, T. (2001). The development of the concept of multiplication. *Cognitive Development*, *16*(3), 763–773. https://doi.org/10.1016/s0885-2014(01)00058-2

Park, J., Bouck, E. C., & Fisher, M. H. (2020). Using the Virtual–Representational–Abstract With Overlearning Instructional Sequence to Students With Disabilities in Mathematics. *The Journal of Special Education*, 002246692091252. https://doi.org/10.1177/0022466920912527

Phipps, L., & Beaujean, A. A. (2016). Review of the Pattern of Strengths and Weaknesses Approach in Specific Learning Disability Identification. *Research and Practice in the Schools, 4*(1), 18-28.

Powell, S. R., Fuchs, L. S., & Fuchs, D. (2013). Reaching the Mountaintop: Addressing the Common Core Standards in Mathematics for Students with Mathematics Difficulties. *Learning Disabilities Research & Practice*, *28*(1), 38–48. https://doi.org/10.1111/ldrp.12001

Pullen, P. C., Lane, H. B., Ashworth K. E., & Lovelace, S. P. (2017). Specific Learning Disabilities. In Kauffman, J. M., Hallahan, D. P., & Pullen, P. C. (Eds), *Handbook of special education*. Routledge.

Reed, D. K., Zimmermann, L. M., Reeger, A. J., & Aloe, A. M. (2019). The effects of varied practice on the oral reading fluency of fourth-grade students. *Journal of*

*School Psychology*, 77(0022-4405/), 24–35.
https://doi.org/10.1016/j.jsp.2019.10.003

Robinson, C. S., Menchetti, B. M., & Torgesen, J. K. (2002). Toward a Two-Factor Theory of One Type of Mathematics Disabilities. *Learning Disabilities Research and Practice*, *17*(2), 81–89. https://doi.org/10.1111/1540-5826.00035

Robinson, K. M., & LeFevre, J.-A. (2012). The inverse relation between multiplication and division: Concepts, procedures, and a cognitive framework. *Educational Studies in Mathematics*, *79*(3), 409–428. Retrieved from http://www.jstor.org/stable/41413121

Ross, S. H. (1989). Parts, Wholes, and Place Value: A Developmental View. *The Arithmetic Teacher*, *36*(6), 47–51. https://doi.org/10.5951/at.36.6.0047

Schuchardt, K., Gebhardt, M., & Mäehler, C. (2010). Working memory functions in children with different degrees of intellectual disability. *Journal of Intellectual Disability Research*, *54*(4), 346–353. https://doi.org/10.1111/j.1365-2788.2010.01265.x

Schumacher, R. F., & Fuchs, L. S. (2012). Does understanding relational terminology mediate effects of intervention on compare word problems? *Journal of Experimental Child Psychology*, *111*(4), 607–628. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2011.12.001

Shamseer, L., Moher, D., Clarke, M., Ghersi, D., Liberati, A., Petticrew, M., Shekelle, P. & Stewart, L. A. (2015). Preferred reporting items for systematic review and meta-analysis protocols (PRISMA-P) 2015: elaboration and explanation. *BMJ*, *349*(jan02 1), g7647–g7647. https://doi.org/10.1136/bmj.g7647

Southwell, B., & Penglase, M. (2005). Mathematical knowledge of pre-service primary teachers. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 4, pp. 209-216). Melbourne, Australia: PME

Steffe, L. P. (1992). Schemes of action and operation involving composite units. *Learning and Individual Differences*, *4*(3), 259–309. https://doi.org/10.1016/1041-6080(92)90005-y

Steffe, L. (1994). Children's Multiplying Schemes. In Harel, G. & Confrey, J (Eds), *The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics* (pp. 3-40). State University of New York Press, Albany.

Stevens, E. A., Walker, M. A., & Vaughn, S. (2016). The Effects of Reading Fluency Interventions on the Reading Fluency and Reading Comprehension Performance of Elementary Students With Learning Disabilities: A Synthesis of the Research from 2001 to 2014. *Journal of Learning Disabilities*, 50(5), 576–590. https://doi.org/10.1177/0022219416638028

Swanson, H., L., & Sachse-Lee, C. (2000). A Meta-Analysis of Single-Subject-Design Intervention Research for Students with LD. *Journal of Learning Disabilities*, *33*(2), 114–136. https://doi.org/10.1177/002221940003300201

Swanson, H. L., & Beebe-Frankenberger, M. (2004). The Relationship Between Working Memory and Mathematical Problem Solving in Children at Risk and Not at Risk for Serious Math Difficulties. *Journal of Educational Psychology*, *96*(3), 471–491. https://doi.org/10.1037/0022-0663.96.3.471

Träff, U., & Passolunghi, M. C. (2015). Mathematical skills in children with dyslexia. *Learning and Individual Differences*, *40*, 108–114. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2015.03.024

Torgesen, J. K. (2004). Learning disabilities: An historical and conceptual overview. In B. Y. L. Wong (Ed.), *Learning about learning disabilities* (3rd ed., pp. 3–40). Amsterdam, The Netherlands: Elsevier.

Τζεκάκη, Μ., Σταγιόπουλος, Π., & Μπαραλός, Γ. (2011, April 7). Προσαρμογές αναλυτικών προγραμμάτων για τα μαθηματικά στο Γυμνάσιο: Σχέδια διδασκαλίας για μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες (τεύχος Α'). Retrieved March 1, 2023, from repository.edulll.gr website: http://repository.edulll.gr/963

Tzur, R., Xin, Y. P., Si, L., Kenney, R., & Guebert, A. (2010). Students with Learning Disability in Math Are Left Behind in Multiplicative Reasoning? Number as Abstract Composite Unit Is a Likel. In *ERIC*. Retrieved from https://eric.ed.gov/?id=ED510991

Tzur, R., Johnson, H. L., McClintock, E., Kenney, R. H., Xin, Y. P., Si, L., Woodward, J., Hord, C. & Jin, X. (2013). Distinguishing schemes and tasks in children's development of multiplicative reasoning. *Digibug.ugr.es*. Retrieved from http://hdl.handle.net/10481/23477

Tzur, R., Johnson, H., L., Hodkowski, N., Nathenson-Mejia, S., Davis, A. & Gardner, A. (2020). Promoting conceptual understanding of multiplication. *APMC*, 25(4), 35-40. Retrieved from https://www.researchgate.net/publication/348437961_

Vanneman, A., Hamilton, L., Anderson, J., B., & Rahman, T. (2009). *Achievement Gaps How Black and White Students in Public Schools Perform in Mathematics and Reading on the National Assessment of Educational Progress*. (n.d.). Retrieved from https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED505903.pdf

Van De Ritz, B. A. M., & Van Luit, J. E. H. (1999). Milestones in the development of infant numeracy. *Scandinavian Journal of Psychology*, *40*(1), 65–71. https://doi.org/10.1111/1467-9450.00099

Van De Walle, J. A. (2005). *Μαθηματικά για το Δημοτικό και το Γυμνάσιο: Μια εξελικτική διαδικασία.* Τυπωθήτω/Δάρδανος.

Verschaffel, L., Luwel, K., Torbeyns, J., & Van Dooren, W. (2009). Conceptualizing, investigating, and enhancing adaptive expertise in elementary mathematics education. *European Journal of Psychology of Education*, *24*(3), 335–359. https://doi.org/10.1007/bf03174765

Verschaffel, L., & De Corte, E. (2012). Number and Arithmetic. In Bishop, A., M.A. (Ken) Clements, Keitel-Kreidt, C., Kilpatrick, J., & Laborde, C. (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 99-138). Springer Science & Business Media.

Verschaffel, L., Schukajlow, S., Star, J., & Van Dooren, W. (2020). Word problems in mathematics education: a survey. *ZDM*, *52*(1), 1–16. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01130-4

Verschaffel, L. (2023). Strategy flexibility in mathematics. *ZDM – Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s11858-023-01491-6

Von Aster, M. G., & Shalev, R. S. (2007). Number development and developmental dyscalculia. *Developmental Medicine & Child Neurology*, *49*(11), 868–873. https://doi.org/10.1111/j.1469-8749.2007.00868.x

Vukovic, R. K., & Siegel, L. S. (2010). Academic and Cognitive Characteristics of Persistent Mathematics Difficulty from First Through Fourth Grade. *Learning Disabilities Research & Practice*, *25*(1), 25–38. https://doi.org/10.1111/j.1540-5826.2009.00298.x

Vukovic, R. K., Lesaux, N. K., & Siegel, L. S. (2010). The mathematics skills of children with reading difficulties. *Learning and Individual Differences*, *20*(6), 639–643. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2010.08.004

Verschaffel, L. (2023). Strategy flexibility in mathematics. *ZDM – Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s11858-023-01491-6

Wei, W., Lu, H., Zhao, H., Chen, C., Dong, Q., & Zhou, X. (2012). Gender Differences in Children's Arithmetic Performance Are Accounted for by Gender Differences in Language Abilities. *Psychological Science*, *23*(3), 320–330. https://doi.org/10.1177/0956797611427168

Woodward, J., & Baxter, J. (1997). The Effects of an Innovative Approach to Mathematics on Academically Low-Achieving Students in Inclusive Settings. *Exceptional Children*, *63*(3), 373–388. https://doi.org/10.1177/001440299706300306

Woodward, J. (2006). Developing Automaticity in Multiplication Facts: Integrating Strategy Instruction with Timed Practice Drills. *Learning Disability Quarterly*, *29*(4), 269–289. https://doi.org/10.2307/30035554

Xin, Y. P., Jitendra, A. K., &Deatline-Buchman, A. (2005). Effects of Mathematical Word Problem—Solving Instruction on Middle School Students with Learning Problems. *The Journal of Special Education*, *39*(3), 181–192. https://doi.org/10.1177/00224669050390030501

Xin, Y. P., Tzur, R., Hord, C., Liu, J., Park, J. Y., & Si, L. (2016). An Intelligent Tutor-Assisted Mathematics Intervention Program for Students With Learning Difficulties. *Learning Disability Quarterly*, *40*(1), 4–16. https://doi.org/10.1177/0731948716648740

Xin, Y. P., Chiu, M. M., Tzur, R., Ma, X., Park, J. Y., & Yang, X. (2019). Linking Teacher–Learner Discourse With Mathematical Reasoning of Students With Learning Disabilities: An Exploratory Study. *Learning Disability Quarterly*, *43*(1), 43–56. https://doi.org/10.1177/0731948719858707

Xin, Y. P., Park, J. Y., Tzur, R., & Si, L. (2020). The impact of a conceptual model-based mathematics computer tutor on multiplicative reasoning and problem-solving of students with learning disabilities. *The Journal of Mathematical Behavior*, *58*, 100762. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2020.100762

Yang, D.-C. (2007). Investigating the Strategies Used by Pre-Service Teachers in Taiwan When Responding to Number Sense Questions. *School Science and Mathematics*, *107*(7), 293–301. https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2007.tb17790.x

Yang, D.-C., Reys, R. E., & Reys, B. J. (2008). Number Sense Strategies Used by Pre-Service Teachers in Taiwan. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *7*(2), 383–403. https://doi.org/10.1007/s10763-007-9124-5

Yang, D.-C., & Wu, W.-R. (2010). The Study of Number Sense: Realistic Activities Integrated into Third-Grade Math Classes in Taiwan. *The Journal of Educational Research*, *103*(6), 379–392. https://doi.org/10.1080/00220670903383010

Yang, X.-S. (2014). *Introduction to Computational Mathematics*. World Scientific Publishing Company.

Zeleke, S. (2004). Learning disabilities in mathematics: a review of the issues and children's performance across mathematical tests. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 26(4), 1-18.*

Zhang, D., Xin, Y. P., & Si, L. (2011). Transition From Intuitive to Advanced Strategies in Multiplicative Reasoning for Students With Math Difficulties. *The Journal of Special Education*, *47*(1), 50–64. https://doi.org/10.1177/0022466911399098

Zhang, D., Ding, Y., Barrett, D. E., Xin, Y. P., & Liu, R. (2013). A comparison of strategic development for multiplication problem solving in low-, average-, and high-achieving students. *European Journal of Psychology of Education*, *29*(2), 195–214. https://doi.org/10.1007/s10212-013-0194-1

Zhang, D., Ding, Y., Lee, S., & Chen, J. (2016). Strategic development of multiplication problem solving: Patterns of students' strategy choices. *The Journal of Educational Research*, *110*(2), 159–170. https://doi.org/10.1080/00220671.2015.1060928

Zhang, J., Zhao, N., & Kong, Q. P. (2019). The Relationship Between Math Anxiety and Math Performance: A Meta-Analytic Investigation. *Frontiers in Psychology*, *10*. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2019.01613

Zhu, Z. (2007). Gender differences in mathematical problem-solving patterns: A review of literature. *International Education Journal*, *8*(2), 187–203. Retrieved from https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ834219.pdf

https://www.thefreelibrary.com/Learning+disabilities+in+mathematics%3A+a+review+of+the+issues+and...-a0125948681