

ND: 14472

ΚΩΦ: 14341.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ  
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΚΑΙ ΚΟΙΝΩΝΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ  
ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ


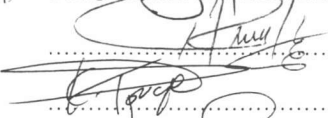
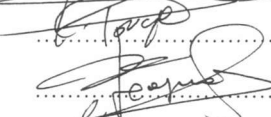
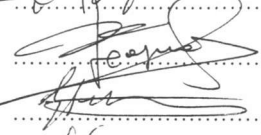
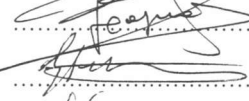
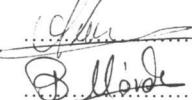
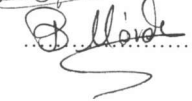
ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ  
ΓΙΑ ΤΟ ΧΡΩΜΑΤΙΣΜΟ, ΤΟ ΡΑΔΙΟΧΡΩΜΑΤΙΣΜΟ  
ΚΑΙ ΤΟΝ «ΠΡΟΚΑΘΟΡΙΣΜΕΝΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ» ΧΡΩΜΑΤΙΣΜΟ  
ΕΝΟΣ ΓΡΑΦΗΜΑΤΟΣ



ΕΡΙΦΥΛΛΗ Σ. ΣΑΒΒΙΔΟΥ  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ  
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ 2001

ΤΑ ΜΕΛΗ ΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΤΡΟΠΗΣ

1. Σατρατζέμη Μαρία – Αικατερίνη, ..... 
2. Παπαρρίζος Κων/νος, ..... 
3. Τσούρος Κων/νος, ..... 
4. Φραγκάκις Χαράλαμπος, ..... 
5. Κορτέσης Σταύρος, ..... 
6. Συννεφάκη Ασπασία, ..... 
7. Μάνθου Βσιλική, ..... 

Θεσσαλονίκη 12 Φεβρουαρίου 2001

στη Λίνα και στον Τάσο

## ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Τώρα που ολοκληρώθηκε ο μακροχρόνιος και επίπονος κύκλος της εκπόνησης της διδακτορικής μου διατριβής θα ήθελα να ευχαριστήσω τους ανθρώπους που μου συμπαραστάθηκαν και διευκόλυναν με κάθε τρόπο αυτήν την προσπάθεια.

Αρχικά θέλω να ευχαριστήσω το δάσκαλό μου κ. Κώστα Τσούρο, καθηγητή του Γενικού Τμήματος της Πολυτεχνικής Σχολής Θεσσαλονίκης, που με μύησε στο θαυμαστό κόσμο των αλγορίθμων και μου εμπιστεύτηκε τις γνώσεις και τις ιδέες του. Η σχέση με έναν φωτισμένο δάσκαλο είναι διαρκής και ουσιαστική, σε επηρεάζει και σε καθορίζει ως άνθρωπο.

Ευχαριστώ επίσης το Τμήμα Εφαρμοσμένης Πληροφορικής του Πανεπιστημίου Μακεδονίας που μου έδωσε τη δυνατότητα να εκπονήσω αυτή τη διατριβή. Ακόμη ευχαριστώ τον πρόεδρο του Τμήματος Εφαρμοσμένης Πληροφορικής του Πανεπιστημίου Μακεδονίας, κ. Αν. Κάτο, τον καθηγητή του Τμήματος Εφαρμοσμένης Πληροφορικής του Πανεπιστημίου Μακεδονίας, κ. Κ. Παπαρίζο, την επίκουρο καθηγήτρια του Τμήματος Εφαρμοσμένης Πληροφορικής του Πανεπιστημίου Μακεδονίας, κ. Μ. Σατρατζέμη και τον καθηγητή του Φαρμακευτικού Τμήματος του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης κ. Μ. Γεωργαράκη. Η συμβολή τους στην ολοκλήρωση της διατριβής μου ήταν ουσιαστική.

Ευχαριστώ βέβαια τους γονείς μου που όπως πάντα ήταν δίπλα μου, προσφέροντας. Τέλος θέλω να ευχαριστήσω θερμά τον πατέρα των παιδιών μου Δημήτρη και τους φίλους μου Αφροδίτη και Ανδρέα. Χωρίς τη βοήθειά τους η ολοκλήρωση αυτής της διατριβής θα παρέμενε στόχος.

Εριφύλλη Σαββίδου

Θεσσαλονίκη Δεκέμβριος 2000

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

<b>ΠΡΟΛΟΓΟΣ</b>	1
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1</b>	4
<u>Στοιχεία Θεωρίας Γραφημάτων</u>	
1.1 Γενικά	4
1.2 Έννοιες και ορισμοί	4
1.3 Παράσταση γραφήματος με πίνακες	13
1.4 Στοιχεία θεωρίας πολυπλοκότητας	16
1.5 Ευρετικοί αλγόριθμοι	18
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2</b>	
<u>Προηγούμενη έρευνα</u>	
2.1 Γενικά	19
2.2 Αλγόριθμοι εύρεσης ακριβούς χρωματικού αριθμού	
2.2.1 Διατύπωση προβλήματος εύρεσης χρωματικού αριθμού ως πρόβλημα 0-1 προγραμματισμού	19
2.2.2 Διατύπωση του προβλήματος χρωματισμού ως πρόβλημα κάλυψης	21
2.2.3 Αλγόριθμος A, εύρεσης ακριβούς χρωματικού αριθμού με δένδροειδή επεξεργασία	22
2.2.3.1 Συστηματική παρουσίαση του αλγορίθμου A	24
2.2.3.2 Συστηματική παρουσίαση του A με μορφή βημάτων	26
2.2.3.3 Βήματα αλγορίθμου A	27
2.2.3.4 Παράδειγμα	30
2.3 Προσεγγιστικοί αλγόριθμοι εύρεσης χρωματισμού ενός γραφήματος	32
2.3.1 Προσεγγιστικός αλγόριθμος σειριακής διαδικασίας χρωματισμού	33
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3</b>	
<u>Ευρετικοί αλγόριθμοι A1E, RADIO, W</u>	
3.1 Προσεγγιστικός αλγόριθμος A1E	34
3.1.1 Γενικά	34
3.1.2 Διαδικασία B	34
3.1.3 Θεωρητική ανάλυση του αλγορίθμου A1E	35
3.1.4 Αλγόριθμος A1E	39
3.1.5 Προγραμματισμός αλγορίθμου A1E	41
3.1.5.1 Δομές δεδομένων – Τεχνικές προγραμματισμού	41
3.1.5.2 Βήματα αλγορίθμου A1E	42

3.1.6 Πολυπλοκότητα του αλγορίθμου A1E	48
3.1.7 Παράδειγμα	49
3.2 Προσεγγιστικός αλγόριθμος RADIO	52
3.2.1 Ραδιοχρωματισμός-Γενικά	52
3.2.2 Αλγόριθμος RADIO	55
3.2.3 Προγραμματισμός αλγορίθμου RADIO	56
3.2.3.1 Δομές δεδομένων – Τεχνικές προγραμματισμού	56
3.2.3.2 Βήματα αλγορίθμου RADIO	56
3.2.4 Παράδειγμα	62
3.3 Μια γενίκευση του χρωματικού αριθμού	66
3.4 Μια άλλη γενίκευση του χρωματικού αριθμού	69
3.4.1 Γενικά	69
3.4.2 Αλγόριθμος W	71
3.4.3 Προγραμματισμός αλγορίθμου W	72
3.4.3.1 Δομές δεδομένων – Τεχνικές προγραμματισμού	72
3.4.3.2 Βήματα αλγορίθμου W	72
3.4.4 Παράδειγμα	77

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

### Υπολογιστική εμπειρία – Εφαρμογές - Συμπεράσματα

4.1 Γενικά	80
4.2 Αλγόριθμος δημιουργίας τυχαίων γραφημάτων	80
4.2.1 Γενικά	80
4.2.2 Αλγόριθμος RG	82
4.2.3 Προγραμματισμός αλγορίθμου RG	83
4.2.4 Παράδειγμα	85
4.3 Εφαρμογές	88
4.3.1 Εφαρμογή του A1E στη διαχείριση διαδρόμων απογείωσης-προσγείωσης των αεροδρομίων	88
4.3.2 Εφαρμογή του A1E στη στέγαση συμβατών προϊόντων	93
4.3.3 Εφαρμογή του RADIO στην ανάθεση συχνοτήτων	94
4.4 Υπολογιστική εμπειρία	97
4.5 Συμπεράσματα	105

<b>ΑΝΑΦΟΡΕΣ-ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ</b>	107
------------------------------	-----

<b>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ</b>	111
------------------	-----

## Πρόλογος

Η έννοια του χρωματικού αριθμού χρονολογείται εδώ και δύο αιώνες. Αρχικά είχε χρησιμοποιηθεί ως αντικείμενο εγκεφαλικού παιχνιδιού (σπαζοκεφαλιάς) για τους αναγνώστες κάποιων τοπικών εφημερίδων. Η πρώτη επιστημονική αναφορά στον χρωματισμό ενός γραφήματος περιέχεται ως εικασία σ' ένα γράμμα του Augustus De Morgan προς τον Sir William Hamilton, το 1852 [37]. Συγκεκριμένα, ο De Morgan διατύπωσε το ερώτημα, “αρκούν 4 το πολύ χρώματα για το χρωματισμό ενός επιπέδου γραφήματος;” Το παραπάνω ερώτημα το οποίο φαινόταν να έχει καταφατική απάντηση απασχόλησε μεγάλο πλήθος ερευνητών, για δεκάδες χρόνια, αποδείχτηκε όμως μόλις το 1979 με τη βοήθεια Ηλεκτρονικού Υπολογιστή, από τους Appel και Haken [4].

Η καθιέρωση της θεωρίας γραφημάτων ως ξεχωριστού κλάδου της μαθηματικής επιστήμης οδήγησε πολλούς ερευνητές να μορφοποιήσουν πολλά και σημαντικά πρακτικά προβλήματα ως προβλήματα χρωματισμού ενός γραφήματος. Η τάση αυτή των ερευνητών σε συνδυασμό με την εξέλιξη της τεχνολογίας των Η/Υ, οδήγησε στην προσπάθεια ανάπτυξης αλγορίθμων που σχετίζονται με το χρωματισμό ενός γραφήματος.

Το πρόβλημα του χρωματισμού ενός γραφήματος ανήκει στην κατηγορία των NP-complete προβλημάτων και ο εντοπισμός του χρωματικού αριθμού, στην κατηγορία των NP-hard [17]. Γι αυτό και ο μεγαλύτερος όγκος της σχετικής έρευνας έχει θεωρητικό χαρακτήρα. Ελάχιστοι είναι οι αλγόριθμοι, στη διεθνή αρθρογραφία, που εντοπίζουν το χρωματικό αριθμό ενός γραφήματος. Ο καλύτερος αλγόριθμος για τον ακριβή εντοπισμό του χρωματικού αριθμού μπορεί να επιλύσει γραφήματα με πολύ περιορισμένο μέγεθος. Έτσι, η ύπαρξη καλών προσεγγιστικών αλγορίθμων για την εύρεση του χρωματικού αριθμού και των αντίστοιχων χρωματικών κλάσεων ενός τυχαίου γραφήματος είναι πολύ χρήσιμη.

Στη διατριβή αυτή αναπτύσσουμε ένα νέο προσεγγιστικό αλγόριθμο για την εύρεση του χρωματικού αριθμού. Από την σχετική υπολογιστική εμπειρία, ο αλγόριθμος αυτός δίνει καλύτερα αποτελέσματα από τον αντιπροσωπευτικό σειριακό προσεγγιστικό αλγόριθμο του Wood που αναφέρεται στη βιβλιογραφία [49].

Ορίζονται επίσης οι νέες έννοιες του χρωματικού κόστους και της χρωματικής τιμής ενός γραφήματος. Η ανάπτυξη αλγορίθμων για τον προσδιορισμό των παραπάνω εννοιών αποτελεί αντικείμενο περαιτέρω έρευνας.

Ακόμη παρουσιάζονται νέες έννοιες χρωματισμού ενός γραφήματος και πιο συγκεκριμένα η έννοια του ραδιοχρωματισμού, του  $(κ, z)$ -ραδιοχρωματισμού και του «προκαθορισμένων διαφορών» χρωματισμού. Για αυτές τις κατηγορίες χρωματισμών αναπτύσσονται αντίστοιχοι προσεγγιστικοί αλγόριθμοι. Οι παραπάνω χρωματισμοί αποτελούν επεκτάσεις του απλού χρωματισμού και ανήκουν στην κατηγορία των NP-complete προβλημάτων τα δε αντίστοιχα προβλήματα βελτιστοποίησης ανήκουν προφανώς στην κατηγορία των NP-hard προβλημάτων.

Επίσης προτείνονται νέες εφαρμογές στις οποίες μπορούν να εφαρμοστούν οι αλγόριθμοι που παρουσιάζονται στην παρούσα διατριβή.

Η διατριβή ολοκληρώνεται με ένα παράρτημα που περιέχει σε κωδικοποιημένη μορφή σε γλώσσα QuickBasic τους αλγορίθμους που αναπτύχθηκαν στην παρούσα έρευνα

Για λόγους αυτοδυναμίας της διατριβής, στο Κεφάλαιο 1 παρουσιάζονται οι έννοιες της θεωρίας γραφημάτων που χρησιμοποιούνται στη συνέχεια.

Το Κεφάλαιο 2 είναι αφιερωμένο στους σημαντικότερους αλγόριθμους προσδιορισμού του χρωματικού αριθμού, που υπάρχουν στην αρθρογραφία.

Η κυρίως έρευνα αποτελεί το περιεχόμενο του 3ου Κεφαλαίου όπου

- i) αναπτύσσεται ένας νέος προσεγγιστικός αλγόριθμος για την εύρεση του χρωματικού αριθμού
- ii) ορίζονται οι έννοιες του ραδιοχρωματισμού, του ραδιοχρωματικού αριθμού, του ραδιοχρωματικού κόστους και της ραδιοχρωματικής τιμής και αναπτύσσεται αλγόριθμος για τον προσδιορισμό του ραδιοχρωματικού αριθμού για τυχαία γραφήματα
- iii) παρουσιάζεται μια γενίκευση του χρωματικού αριθμού, συγκεκριμένα ο  $(κ, z)$ -ραδιοχρωματισμός



iv) ορίζεται η έννοια του «προκαθορισμένων διαφορών» χρωματισμού και αναπτύσσεται αντίστοιχος αλγόριθμος.

Η διατριβή ολοκληρώνεται με το Κεφάλαιο 4 το οποίο περιέχει την υπολογιστική εμπειρία και τη διατύπωση νέων εφαρμογών των αλγορίθμων που παρουσιάστηκαν. Ακόμη αναπτύσσεται ένας νέος αλγόριθμος για τη δημιουργία τυχαίων συνεκτικών γραφημάτων. Η υπολογιστική εμπειρία πραγματοποιήθηκε σε τυχαία γραφήματα που δημιουργήθηκαν με τον αλγόριθμο αυτόν. Το κεφάλαιο 4 ολοκληρώνεται με τα συμπεράσματα και την παρουσίαση προβλημάτων για περαιτέρω έρευνα.

## Κεφάλαιο 1

### ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

#### 1.1 Γενικά

Για λόγους αυτοδυναμίας της παρούσας διατριβής αλλά και για το λόγο ότι η ορολογία των εννοιών της θεωρίας γραφημάτων δεν είναι τεκμηριωμένη [Harary], στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται οι βασικές έννοιες της θεωρίας γραφημάτων που είναι απαραίτητες στην ανάπτυξη του θέματος της διατριβής. Όπου κρίνεται σκόπιμο, παρατίθενται παραδείγματα ώστε η έννοια να αποσαφηνίζεται. Όταν ορίζεται η έννοια, αναγράφεται, μέσα σε παρένθεση, η ονομασία της στην Αγγλική γλώσσα.

#### 1.2 Έννοιες και ορισμοί

Έστω  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  ένα μη κενό σύνολο και  $E \subset V \times V$  ένα σύνολο ζευγών  $(v_i, v_j)$ . Το διατεταγμένο ζεύγος  $G = (V, E)$  ονομάζεται *γράφημα* (graph) [6,14,23].

Τα στοιχεία του συνόλου  $V$ , ονομάζονται *κορυφές* (vertices) ή *κόμβοι* (nodes) ή *σημεία* (points) και τα στοιχεία του συνόλου  $E$  ονομάζονται *ακμές* (edges) ή *τόξα* (arcs) ή *δεσμοί* (links).

Αν το σύνολο  $E$  είναι κενό, το αντίστοιχο γράφημα ονομάζεται *εκφυλισμένο* (degenerated).

Αν κάθε στοιχείο  $(v_i, v_j) \in E$  είναι διατεταγμένο ζεύγος, τότε το γράφημα  $G = (V, E)$  ονομάζεται *προσανατολισμένο γράφημα* (directed graph).

Αν κάθε στοιχείο  $(v_i, v_j) \in E$  είναι μη διατεταγμένο ζεύγος, τότε το γράφημα  $G = (V, E)$  ονομάζεται *μη προσανατολισμένο γράφημα* (undirected graph).

Σε ό,τι ακολουθεί, όπου αναφέρεται η λέξη γράφημα εννοείται το μη προσανατολισμένο γράφημα. Σε άλλη περίπτωση, θα αναφέρεται ο συγκεκριμένος τύπος γραφήματος.

Αν μια κορυφή  $v_i \in V$ , είναι άκρο μιας ακμής  $e_i \in E$ , δηλαδή  $e_i = (v_i, v_j)$  τότε, η κορυφή  $v_i$  *πρόσκειται* στην ακμή  $e_i$  και η ακμή  $e_i$  *συντρέχει* στην κορυφή  $v_i$ .

Δύο κορυφές  $v_i, v_j \in V$  ενός γραφήματος  $G = (V, E)$  ονομάζονται *γειτονικές* (neighboring) ή *παρακείμενες* (adjacent) αν είναι άκρα της ίδιας ακμής. Για κάθε κορυφή  $v$  του  $V$ , ορίζεται το σύνολο  $\Gamma(v) = \{u, (v, u) \in E\}$  που ονομάζεται *σύνολο των γειτονικών κορυφών* ή *γειτόνων* της κορυφής  $v$ .

Έστω  $S \subseteq V$ , τότε το σύνολο

$$\Gamma(S) = \bigcup_{v \in S} \Gamma(v) = \{u : v \in S \text{ και } (v, u) \in E\}$$

ονομάζεται *σύνολο των γειτονικών κορυφών του συνόλου των κορυφών του  $S$* .

Δύο ακμές  $e_i, e_j \in E$  ενός γραφήματος  $G = (V, E)$  ονομάζονται *γειτονικές* (adjacent) αν συντρέχουν σε κοινή κορυφή.

Το πλήθος των ακμών που συντρέχουν σε μια κορυφή  $v \in V$ , λέγεται *βαθμός* (degree)  $d(v)$  της κορυφής  $v$ .

Από τον ορισμό προκύπτει ότι ισχύει,  $d(v) = |\Gamma(v)|$  όπου  $|\Gamma(v)|$  είναι ο πληθικός αριθμός του συνόλου  $\Gamma(v)$ .

Αν για κάποια κορυφή  $v \in V$ , ισχύει  $d(v) = 0$  η κορυφή ονομάζεται *μεμονωμένη* (isolated). Ένα γράφημα  $G = (V, E)$  ονομάζεται *κενό* (null) ή *εκφυλισμένο* (degenerated) γράφημα αν όλες οι κορυφές του είναι μεμονωμένες. Αυτό σημαίνει ότι στο κενό γράφημα ισχύει  $E = \emptyset$ .

Έστω ένα γράφημα  $G = (V, E)$ . Η πεπερασμένη μη κενή ακολουθία κορυφών και ακμών εναλλάξ  $W(v_0, v_k) = v_0 e_1 v_1 e_2 \dots e_k v_k$  όπου  $v_0, v_1, v_2, \dots, v_k \in V$  και  $e_1, e_2, e_3, \dots, e_k \in E$  για την οποία ισχύει, κάθε ακμή να συντρέχει στην προηγούμενη και επόμενη της κορυφή, λέγεται *δρόμος* (walk). Σ' ένα δρόμο μια

ακμή εμφανίζεται ακριβώς μία φορά. Αν το ίδιο ισχύει και για τις κορυφές τότε ο δρόμος λέγεται *μονοπάτι* (path) και συμβολίζεται με  $\Delta(v_i, v_j)$ .

Ένα γράφημα που αποτελείται από ένα μόνο μονοπάτι με  $n$  κορυφές, συμβολίζεται με  $P_n$ .

Ένα γράφημα  $G = (V, E)$  ονομάζεται *συνεκτικό* αν για κάθε ζεύγος κορυφών  $v_i, v_j \in V$  υπάρχει πάντα, τουλάχιστον ένα μονοπάτι που να τις συνδέει.

Ορίζουμε ως  *$\kappa$ -βαθμό* μιας κορυφής ενός γραφήματος  $G$ , το πλήθος των μονοπατιών που ξεκινούν από την κορυφή και έχουν μήκος  $\kappa$ .

Ένα γράφημα  $G = (V, E)$  ονομάζεται *πλήρες* (complete) αν κάθε ζεύγος κορυφών του συνδέεται με μια ακμή. Από τον ορισμό προκύπτει πως κάθε πλήρες γράφημα είναι συνεκτικό και ισχύει  $\Gamma(v) = V - \{v\}, \forall v \in V$ .

Επίσης είναι προφανές ότι σε κάθε πλήρες γράφημα  $G = (V, E)$  ισχύει  $d(v) = |V| - 1$ , για κάθε  $v \in V$ .

Έστω ένα γράφημα  $G = (V, E)$ . Έστω επίσης  $n$  το πλήθος των κορυφών του  $G$  και  $e$  το πλήθος των ακμών του. Δηλαδή,  $n = |V|$  και  $e = |E|$ . Ο λόγος  $d = 2e / (n(n-1))$  ονομάζεται *πυκνότητα* (density) του γραφήματος  $G$ .

Απ' τον ορισμό του πλήρους και του εκφυλισμένου γραφήματος, είναι προφανές ότι η πυκνότητά τους είναι ίση με τη μονάδα και το μηδέν αντίστοιχα. Δηλαδή  $0 \leq d \leq 1$ .

Ένα γράφημα χαρακτηρίζεται ως πυκνό, αν η πυκνότητά του είναι κοντά στο 1 και αραιό αν είναι κοντά στο 0.

Ένα γράφημα  $G = (V, E)$  με  $|V| = n$ , ονομάζεται *δένδρο* (tree) αν είναι συνεκτικό και έχει  $n-1$  ακμές.

Έστω ένα γράφημα  $G = (V, E)$ . Ένα γράφημα  $G' = (V', E')$  ονομάζεται *υπογράφημα* (subgraph) του  $G = (V, E)$  και συμβολίζεται  $G(V')$ , αν  $V' \subset V$  και  $E' = \{(v, u) \in E \text{ και } u, v \in V'\}$  δηλαδή, αν  $V' \subset V$  και  $E' = (V' \times V') \cap E$ .

Ένα γράφημα  $G' = (V', E')$  ονομάζεται *μερικό γράφημα* (partial) του  $G = (V, E)$  αν  $V \equiv V'$  και  $E' \subset E$ .

Σε ένα γράφημα  $G = (V, E)$  ένα μερικό γράφημα που είναι δένδρο, ονομάζεται *δένδρο κάλυμα* (spanning tree). Επειδή περιέχει το μέγιστο πλήθος ακμών όλων των δένδρων που είναι υπογραφήματα του  $G$ , το δένδρο κάλυμμα ονομάζεται και *μείζον δένδρο του  $G$*  (maximal tree).

Αν σε κάθε ακμή  $(v_i, v_j) \in E$ , ενός γραφήματος  $G = (V, E)$ , αντιστοιχήσουμε έναν αριθμό  $c_{ij}$ , ο αριθμός αυτός ονομάζεται *βάρος* (weight) της ακμής και το γράφημα ονομάζεται γράφημα με *βάρη στις ακμές* (arc-weighted graph). Μπορούμε να αντιστοιχήσουμε βάρη και στις κορυφές ενός γραφήματος, δηλαδή σε κάθε  $v_i \in V$  να αντιστοιχήσουμε έναν αριθμό  $w_i$ , τότε το γράφημα ονομάζεται γράφημα με *βάρη στις κορυφές* (vertex-weighted graph). Ένα γράφημα με βάρη και στις ακμές και στις κορυφές, λέγεται απλώς *γράφημα με βάρη* (weighted graph). Ένα γράφημα με βάρη είτε στις ακμές είτε στις κορυφές ή και στα δύο λέγεται *δίκτυο* (network).

Σ' ένα δίκτυο με βάρη στις ακμές, έστω ένα μονοπάτι  $p$  που σχηματίζεται από τις ακμές  $e_1, e_2, \dots, e_k$  των οποίων τα αντίστοιχα βάρη είναι  $w_1, w_2, \dots, w_k$ . Ορίζουμε ως *μήκος* (length) ή *κόστος* (cost) του μονοπατιού το άθροισμα  $w_1 + w_2 + \dots + w_k$ . Η έννοια του μήκους ή κόστους μονοπατιού υπάρχει και στο γράφημα χωρίς βάρη στις ακμές. Στην περίπτωση αυτή κόστος μονοπατιού είναι το πλήθος των ακμών που το αποτελούν, δηλ.  $|\{e_1, e_2, \dots, e_k\}| = k$ .

Έστω ένα γράφημα  $G = (V, E)$  και ένα υποσύνολο  $S \subseteq V$  για το οποίο ισχύει:  $\Gamma(S) \cap S = \emptyset$ . Τότε το  $S \subseteq V$  ονομάζεται *ανεξάρτητο σύνολο* (independent set) ή *εσωτερικώς σταθερό* σύνολο (internally stable set).

Ένα ανεξάρτητο σύνολο  $S$  ονομάζεται *μείζον ανεξάρτητο σύνολο* (maximal independent set) αν δεν υπάρχει γνήσιο υπερσύνολο του  $S$  που να είναι ανεξάρτητο και να περιέχει το  $S$ .

Απ' όλα τα μείζονα ανεξάρτητα σύνολα του  $G = (V, E)$ , εκείνο που έχει το μεγαλύτερο πληθικό αριθμό, λέγεται *μέγιστο ανεξάρτητο σύνολο* (maximum independent set).

Ο πληθικός αριθμός ενός μέγιστου ανεξάρτητου συνόλου λέγεται *βαθμός ανεξαρτησίας* του  $G$  και συμβολίζεται με  $\alpha(G)$ .

Για τα μείζονα ανεξάρτητα σύνολα  $S$  ενός γραφήματος ισχύουν οι σχέσεις:

$$\Gamma(S) \cap S = \emptyset \qquad \Gamma(S) \cup S = V.$$

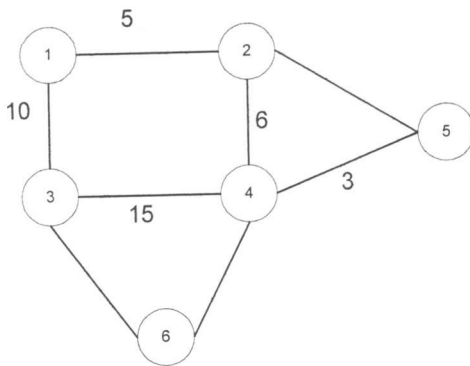
Ένα γράφημα  $G = (V, E)$  λέμε ότι είναι  *$\kappa$ -χρωματισμένο* ( $\kappa$ -chromatic) στις κορυφές του, αν μπορούμε χρησιμοποιώντας ακριβώς  $\kappa$  χρώματα, να αντιστοιχίσουμε σε κάθε κορυφή  $v \in V$  του γραφήματος ένα χρώμα (color),  $c(v)$ , έτσι ώστε δύο γειτονικές κορυφές να έχουν διαφορετικό μεταξύ τους χρώμα. Ο μικρότερος αριθμός  $\kappa$  για τον οποίο μπορώ να επιτύχω έναν  $\kappa$ -χρωματισμό κορυφών για ένα γράφημα  $G$ , λέγεται *χρωματικός αριθμός* του γραφήματος (chromatic number) και συμβολίζεται με  $\chi(G)$ .

Το πρόβλημα του χρωματισμού ενός γραφήματος (coloring problem) συνίσταται ακριβώς στο να βρεθεί ο χρωματικός του αριθμός.

Έστω ότι έχουμε ένα γράφημα  $G = (V, E)$  και έστω  $\kappa$  ο χρωματικός του αριθμός. Δημιουργούνται έτσι  $\kappa$  υποσύνολα  $V_1, V_2, \dots, V_\kappa$  του συνόλου  $V$  των κορυφών του  $G$  τα οποία περιέχουν τις ομοιόχρωμες κορυφές. Τα  $V_1, V_2, \dots, V_\kappa$  είναι ανεξάρτητα σύνολα, αφού εξ ορισμού οι κορυφές που περιέχονται σ' αυτά, είναι μη γειτονικές.

Με το χρωματισμό των κορυφών ενός γραφήματος, ουσιαστικά επιτυγχάνουμε το διαμερισμό του συνόλου των κορυφών του σε χρωματικές κλάσεις, ξένες μεταξύ τους που κάθε μια τους αποτελεί ένα ανεξάρτητο σύνολο.

Ολοκληρώνοντας την παράγραφο αυτή, παρουσιάζουμε με σχηματικό τρόπο τις έννοιες που ορίστηκαν παραπάνω. Έστω το γράφημα  $G=(V, E)$  του σχήματος 1.1 με  $|V| = n = 6$ . Οι ονομασίες των κορυφών θα εκφραστούν με φυσικούς αριθμούς.



Σχήμα 1.1

Είναι  $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $E = \{(1,2), (1,3), (2,4), \dots, (6,4)\}$ .

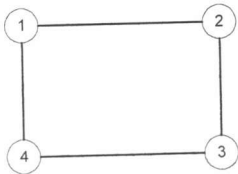
Έχουμε  $\Gamma(1) = \{2, 3\}$ ,  $\Gamma(2) = \{1, 4\}$ ,  $\dots$ ,  $\Gamma(6) = \{3, 4\}$ .

Αν  $S = \{1, 4\} \subset V$  τότε  $\Gamma(S) = \{2, 3, 5, 6\}$ .

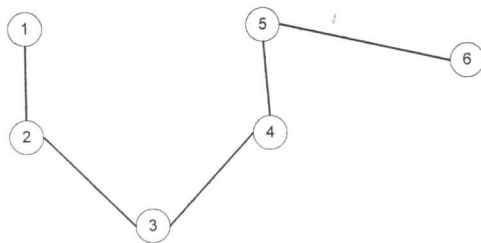
Ισχύει  $d(1) = |\Gamma(1)| = 2, \dots, d(4) = |\Gamma(4)| = 4$ .

Επειδή  $e = |E| = 8$ , η πυκνότητα του  $G$  είναι

$$d = 2e / (n(n-1)) = 8 / 15 = 0.53$$



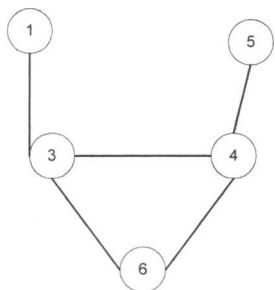
σχήμα 1.2



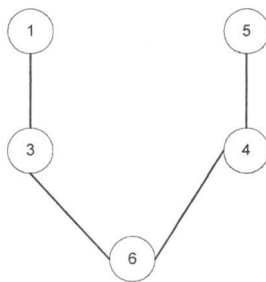
σχήμα 1.3

Το γράφημα του σχήματος 1.2 και το γράφημα του σχήματος 1.3 είναι αντίστοιχα, υπογράφημα και μερικό γράφημα, του γραφήματος του σχήματος 1.1.

Το γράφημα του σχήματος 1.4 και το γράφημα του σχήματος 1.5 είναι αντίστοιχα, δρόμος και μονοπάτι, στο γράφημα του σχήματος 1.1.

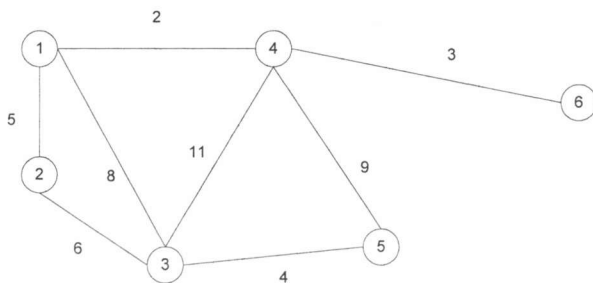


Σχήμα 1.4



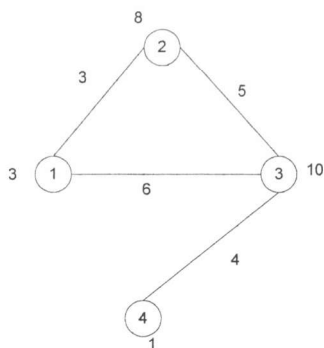
Σχήμα 1.5

Το γράφημα του σχήματος 1.6 είναι ένα δίκτυο με βάρη στις ακμές και το γράφημα του σχήματος 1.7 είναι ένα δίκτυο με βάρη και στις ακμές και στις κορυφές. Στο δίκτυο του σχήματος 1.6 το κόστος του μονοπατιού  $\{1,3,4,5\}$  είναι 26.



σχήμα 1.6



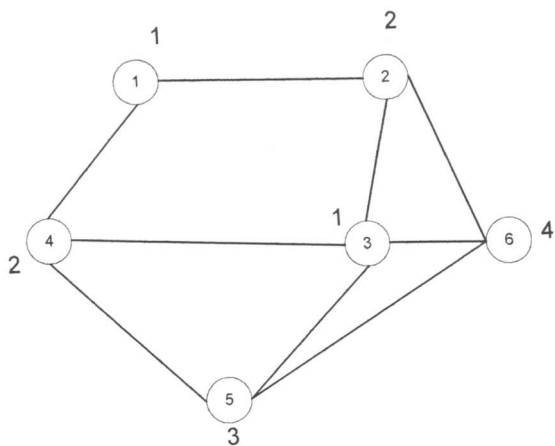


σχήμα 1.7

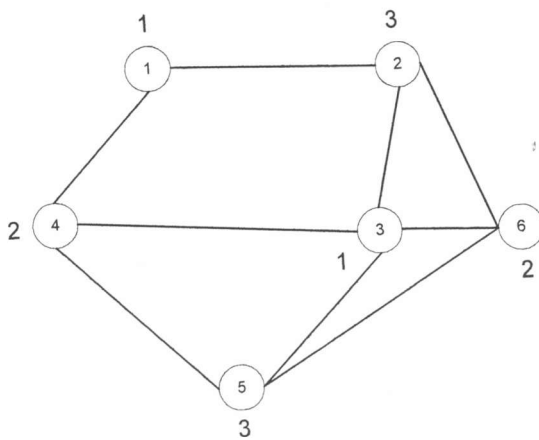
Στο γράφημα του σχήματος 1.1 το σύνολο  $S = \{1,4\}$  είναι ένα ανεξάρτητο σύνολο και μάλιστα ένα μείζον ανεξάρτητο σύνολο του  $G$ . Το  $S' = \{1,5,6\}$  είναι ένα μέγιστο ανεξάρτητο σύνολο του  $G$ .

Στα παρακάτω παραδείγματα αντιστοιχούμε τα χρώματα σε διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς.

Το γράφημα του σχήματος 1.8 είναι 4-χρωματισμένο. Ο χρωματικός του αριθμός, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.9, είναι  $\chi(G) = 3$ . Ο 3-χρωματισμός του γραφήματος του σχήματος 1.8 δημιουργεί τις χρωματικές κλάσεις  $V_1 = \{1,3\}, V_2 = \{4,6\}, V_3 = \{2,5\}$ .



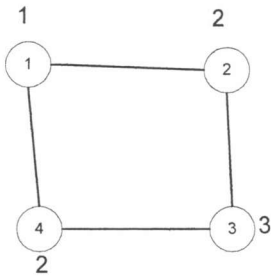
σχήμα 1.8



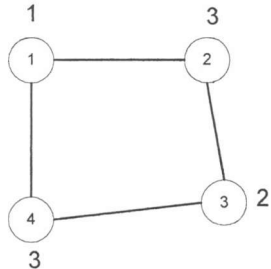
σχήμα 1.9

Πρόσφατα ορίστηκε η έννοια του χρωματικού κόστους [19].

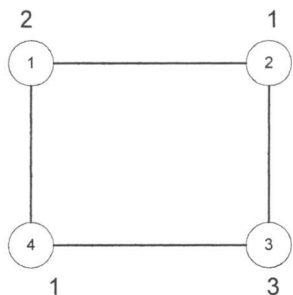
Το *χρωματικό κόστος*  $\chi(G)$  είναι το μικρότερο άθροισμα χρωμάτων που ανατέθηκαν στις κορυφές του  $G$  μεταξύ όλων των χρωματισμών του με  $\chi(G)$  χρώματα. Τα σχήματα 1.10, 1.11, 1.12, παρουσιάζουν τρεις διαφορετικούς χρωματισμούς του ίδιου γραφήματος που έχει χρωματικό αριθμό  $\chi(G) = 3$ . Ο χρωματισμός του γραφήματος στο σχήμα 1.12 αντιστοιχεί σε εκείνον που δίνει το χρωματικό κόστος  $\chi(G) = 7$ .



σχήμα 1.10



σχήμα 1.11



σχήμα 1.12

### 1.3 Παράσταση γραφήματος με πίνακες

Για τη λύση υπολογιστικών προβλημάτων της θεωρίας γραφημάτων χρειαζόμαστε :

α) έναν τρόπο να παραστήσουμε το γράφημα στη μνήμη μιάς υπολογιστικής μηχανής

β) μια πεπερασμένη και με ακρίβεια ορισμένη διαδικασία η οποία θα επενεργεί στις παραμέτρους του προβλήματος και θα υπολογίζει τη σωστή απάντηση, δηλαδή έναν αλγόριθμο.

Δεν υπάρχει ένας μοναδικός τρόπος παράστασης γραφήματος στη μνήμη ενός Η/Υ, ο οποίος να είναι το ίδιο αποτελεσματικός, για κάθε αλγόριθμο της θεωρίας γραφημάτων. Αντίθετα, μπορούμε να πούμε ότι για κάθε αλγόριθμο υπάρχει και ένας διαφορετικός καλύτερος τρόπος παράστασης γραφήματος στη μνήμη του Η/Υ. Η επιλογή του καταλληλότερου τρόπου παράστασης γραφήματος στη μνήμη ενός Η/Υ έχει μεγάλη σημασία, γιατί η απόδοση ενός αλγορίθμου εξαρτάται τελικά απ' το πώς παρασταίνεται το γράφημα στη μνήμη του Η/Υ.

Ο πιο συνηθισμένος τρόπος παράστασης ενός γραφήματος είναι με τη χρήση πινάκων :

#### α) Πίνακας γειτνίασης (adjacency matrix)

Για κάθε γράφημα  $G = (V, E)$  με  $n$  κορυφές και  $e$  ακμές ορίζεται ως πίνακας γειτνίασης ο δυαδικός πίνακας  $A = [a_{ij}]$ , τάξεως  $n \times n$  για τον οποίο ισχύει:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{αν } (v_i, v_j) \in E \text{ όπου } V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

#### β) Πίνακας λίστας γειτονικών κορυφών (adjacency list matrix)

Έστω ένα γράφημα  $G = (V, E)$  με  $n$  κορυφές  $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$  και  $e$  ακμές. Έστω  $m$  ο μέγιστος βαθμός κορυφής, δηλαδή  $m = \max \{d(v_i)\}$ . Ορίζεται ως πίνακας λίστας γειτονικών κορυφών ο πίνακας  $X = [x_{ij}]$  τάξεως  $n \times m$  για τον οποίο ισχύει:

$$X_{ij}, j=1, 2, \dots, \text{deg}(i) = \Gamma(i).$$

Στην περίπτωση ενός αλγορίθμου που χρειάζεται η πληροφορία εάν δύο κορυφές  $v_i, v_j$  είναι γειτονικές ή όχι, χρησιμοποιείται ο πίνακας γειτνίασης. Ενώ στην περίπτωση όπου χρειάζεται ο εντοπισμός όλων των γειτονικών κορυφών

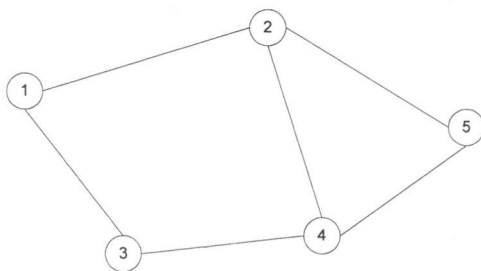
μιας συγκεκριμένης κορυφής  $v_i$ , τότε χρησιμοποιείται ο πίνακας λίστας γειτονικών κορυφών.

Ο πίνακας γειτνίασης του γραφήματος  $G=(V,E)$  του σχήματος 1.13, είναι:

$$A = \begin{matrix} & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

Ο πίνακας λίστας γειτονικών κορυφών του ίδιου γραφήματος είναι:

$$X = \begin{matrix} & 2 & 3 \\ & 1 & 4 & 5 \\ & 1 & 4 \\ & 2 & 3 & 5 \\ & 2 & 4 \end{matrix}$$



σχήμα 1.13

#### 1.4 Στοιχεία Θεωρίας Πολυπλοκότητας

Ο χρόνος που απαιτείται για την επίλυση ενός προβλήματος, με τη βοήθεια ενός αλγορίθμου, είναι αύξουσα συνάρτηση του μεγέθους του προβλήματος. Έτσι η ανάλυση για την αξιολόγηση ενός αλγορίθμου θα πρέπει να εξετάζει τη συναρτησιακή σχέση που συνδέει το χρόνο επίλυσης του προβλήματος και το μέγεθος του προβλήματος. Αυτή η συναρτησιακή σχέση ονομάζεται *πολυπλοκότητα χρόνου* [38,40,45]. Ως *πολυπλοκότητα χώρου* ορίζουμε αντίστοιχα τη συναρτησιακή σχέση που συνδέει τον απαιτούμενο χώρο μνήμης για την επίλυση του προβλήματος και το μέγεθος του προβλήματος.

Έστω  $\Delta_n$  το σύνολο των δυνατών δεδομένων ενός προβλήματος μεγέθους  $n$  και  $t_A(\delta_i, n)$  ο χρόνος που χρειάζεται για την επίλυση του προβλήματος ο αλγόριθμος  $A$  που χρησιμοποιεί δεδομένα της μορφής  $\delta_i$ .

Στο σύνολο  $t_A(\delta_i, n)$ ,  $i \in M = \{1, 2, \dots, \mu\}$  ορίζουμε μια σχέση μερικής διάταξης με τον παρακάτω τρόπο:

$$t_A(\delta_i, n) > t_A(\delta_j, n) \quad i, j \in M$$

$$\text{αν } \exists n_0 \in \mathbb{N}^+ \text{ τέτοιο ώστε : } t_A(\delta_i, n) > t_A(\delta_j, n) \quad \forall n > n_0.$$

Έστω ακόμη ότι  $\delta_j \in \Delta_n$  έτσι ώστε :

$$t_A(\delta_j, n) > t_A(\delta_k, n) \quad \forall k \in M - \{j\}.$$

Τότε η συνάρτηση  $T_A(n) = t_A(\delta_j, n)$  ορίζεται ως η *πολυπλοκότητα χρόνου* της δυσμενέστερης περίπτωσης του αλγορίθμου. Η συνάρτηση αυτή είναι γνωστή ως *ασυμπτωτική πολυπλοκότητα χρόνου* και χρησιμοποιείται ως κριτήριο για την αποτελεσματικότητα του χρόνου, στην αξιολόγηση ενός αλγορίθμου  $A$ .

Η συνάρτηση  $T_A(n)$  δίνει τον ανώτατο χρόνο που μπορεί να απαιτηθεί, για να επιλύσει ο αλγόριθμος  $A$ , ένα πρόβλημα μεγέθους  $n$ . Αν γνωρίζουμε τη συνάρτηση αυτή, μπορούμε να υπολογίσουμε το μεγαλύτερο μέγεθος ενός προβλήματος που μπορεί να επιλύσει ο συγκεκριμένος αλγόριθμος σε μια συγκεκριμένη χρονική περίοδο.

Όπως ήδη είπαμε η ασυμπτωτική πολυπλοκότητα χρόνου ενός αλγορίθμου στην ουσία είναι μια συνάρτηση. Μπορούμε να ομαδοποιήσουμε κατά έναν τρόπο αυτές τις συναρτήσεις, ανάλογα με τη μορφή τους. Ορίζουμε έτσι μια νέα έννοια που χαρακτηρίζει τους αλγόριθμους και τους ομαδοποιεί, το *βαθμό πολυπλοκότητας*. Για έναν αλγόριθμο  $A$  που έχει ασυμπτωτική συνάρτηση χρόνου  $T_A(n)$ , ο βαθμός πολυπλοκότητας συμβολίζεται με  $O(T_A(n))$ . Για έναν αλγόριθμο  $B$  ορίζουμε ότι έχει ασυμπτωτική πολυπλοκότητα  $T_B(n)$ , που ανήκει στην οικογένεια  $O(T_A(n))$ , αν και μόνον αν ισχύει  $T_B(n) \leq c T_A(n)$  για κάποιο  $c \in \mathbb{R}^+$  και  $\forall n \in \mathbb{N}^+$ .

Για το βαθμό πολυπλοκότητας χρόνου ισχύουν τα παρακάτω :

$$cO(T_A(n)) \subset O(T_A(n))$$

$$O(O(T_A(n))) \subset O(T_A(n))$$

$$O(T_A(n)) \cdot O(T_B(n)) \subset O(T_A(n) \cdot T_B(n))$$

$$O(T_A(n)) + O(T_B(n)) \subset O(T_A(n) + T_B(n))$$

όπου  $T_A(n)$ ,  $T_B(n)$  είναι οι ασυμπτωτικές πολυπλοκότητες χρόνου των αλγορίθμων  $A$  και  $B$  αντίστοιχα και  $c$  μια σταθερά.

Αυτές οι σχέσεις βοηθούν στον προσδιορισμό του βαθμού πολυπλοκότητας ενός αλγορίθμου, που είναι σύνθεση άλλων αλγορίθμων γνωστού βαθμού πολυπλοκότητας.

Ο βαθμός πολυπλοκότητας χρησιμοποιείται ως κριτήριο για την αξιολόγηση των αλγορίθμων. Έτσι, οι αλγόριθμοι κατατάσσονται ως προς την απόδοσή τους σε δυο βασικές κατηγορίες, τους *αποτελεσματικούς* και τους *μη αποτελεσματικούς*.

Αποτελεσματικοί αλγόριθμοι θεωρούνται εκείνοι των οποίων η συνάρτηση ασυμπτωτικής πολυπλοκότητας είναι πολυωνυμικής μορφής και ονομάζονται αλγόριθμοι πολυωνυμικού χρόνου. Αντίθετα μη αποτελεσματικοί αλγόριθμοι θεωρούνται εκείνοι των οποίων η συνάρτηση ασυμπτωτικής πολυπλοκότητας είναι εκθετικής μορφής και ονομάζονται αλγόριθμοι εκθετικού χρόνου.

Οι αλγόριθμοι εκθετικού χρόνου, μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την επίλυση προβλημάτων σχετικά μικρού μεγέθους. Αντίθετα η χρησιμοποίησή τους για την επίλυση προβλημάτων μεγαλύτερου μεγέθους είναι προβληματική και πολλές φορές αδύνατη.

Στην περίπτωση που ένα πρόβλημα επιλύεται με αλγόριθμους πολυωνυμικού χρόνου που οι αντίστοιχες συναρτήσεις ασυμπτωτικής πολυπλοκότητας χρόνου είναι πολώνυμα διαφορετικού βαθμού, τότε καλύτερος αλγόριθμος είναι εκείνος, που η αντίστοιχη συνάρτηση ασυμπτωτικής πολυπλοκότητας χρόνου είναι το πολώνυμο με το μικρότερο βαθμό.

### 1.5 Ευρετικοί αλγόριθμοι

Στα διακριτά μαθηματικά, υπάρχουν πολλά προβλήματα για τα οποία δεν έχουν αναπτυχθεί μέχρι τώρα αλγόριθμοι που να μπορούν να τα επιλύουν σε εφικτό χρονικό διάστημα. Για την αλγοριθμική επίλυση αυτών των προβλημάτων εφαρμόζονται συνήθως μέθοδοι τύπου δενδροειδούς αναζήτησης. Όταν όμως πρόκειται για πρόβλημα πραγματικού μεγέθους, πολλές φορές οι μέθοδοι αυτές απαιτούν υπολογιστικό χρόνο της τάξης των ετών και των αιώνων. Γι αυτό για την αντιμετώπιση τέτοιων δύσκολων προβλημάτων επιδιώκουμε την ανάπτυξη γρήγορων αλγορίθμων που δίνουν μία καλή λύση. Αυτό σημαίνει ότι η λύση αυτή δεν απέχει πολύ από τη βέλτιστη. Οι αλγόριθμοι αυτοί ονομάζονται *ευρετικοί* [21]. Ένας ευρετικός αλγόριθμος είναι καλύτερος από έναν άλλον επίσης ευρετικό, αν στις περισσότερες περιπτώσεις (διαφορετικά δεδομένα για το ίδιο μέγεθος προβλήματος) δίνει λύση που πλησιάζει περισσότερο στη βέλτιστη την οποία βέβαια δε γνωρίζουμε.

Σε μερικούς ευρετικούς αλγόριθμους η μέγιστη δυνατή απόκλιση της λύσης από τη βέλτιστη μπορεί να εκφραστεί με μια συνάρτηση των μεταβλητών που προσδιορίζουν το πρόβλημα. Γενικός κανόνας για την ανάπτυξη ευρετικών αλγορίθμων δεν υπάρχει. Όλα εξαρτώνται από την ικανότητα και την εμπειρία αυτού που προσπαθεί να αναπτύξει τον αλγόριθμο.



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

### ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΗ ΕΡΕΥΝΑ

#### 2.1 Γενικά

Είναι γνωστό ότι το πρόβλημα της ανάπτυξης ενός αλγορίθμου για την εύρεση του χρωματικού αριθμού  $\chi(G)$  ενός γραφήματος, ανήκει στην κατηγορία των NP-hard προβλημάτων [41,3,17]. Για το λόγο αυτό η εύρεση του χρωματικού αριθμού ενός γραφήματος  $G$  αντιμετωπίζεται με προσεγγιστικούς αλγόριθμους, όταν το μέγεθος του  $G$  είναι σχετικά μεγάλο. Στην παρούσα διατριβή θα αναπτυχθεί ένας προσεγγιστικός αλγόριθμος για την εύρεση του χρωματικού αριθμού. Ο αλγόριθμος αυτός ανήκει στην κατηγορία των ευρετικών αλγορίθμων που ακολουθούν διαδικασία σειριακής αναζήτησης [14] και επεξεργασίας. Είναι γνωστό ότι οι καλύτεροι προσεγγιστικοί αλγόριθμοι που έχουν εμφανισθεί στη βιβλιογραφία εφαρμόζουν σειριακή διαδικασία χρωματισμού των κορυφών. Ο όρος «καλύτερος προσεγγιστικός αλγόριθμος» σημαίνει ότι ο αντίστοιχος αλγόριθμος βρίσκει μικρότερο πλήθος χρωματικών κλάσεων χωρίς να εξετάζεται απαραίτητα ο υπολογιστικός του χρόνος, αφού στην αξιολόγηση ενός προσεγγιστικού αλγορίθμου, ο παράγοντας υπολογιστικός χρόνος δεν επηρεάζει σημαντικά.

#### 2.2 Αλγόριθμοι εύρεσης ακριβούς χρωματικού αριθμού

Σ' αυτήν την παράγραφο θα περιγράψουμε κάποιους αλγόριθμους εύρεσης του ακριβούς χρωματικού αριθμού σε αυθαίρετο γράφημα. Ο όρος «ακριβής» χρησιμοποιείται εδώ με την έννοια ότι ο αλγόριθμος βρίσκει το βέλτιστο χρωματισμό, δηλαδή χρωματισμό με το ελάχιστο πλήθος χρωμάτων.

#### 2.2.1 Διατύπωση προβλήματος εύρεσης χρωματικού αριθμού ως πρόβλημα 0-1 προγραμματισμού

Έστω  $m$  ένα άνω όριο για το χρωματικό αριθμό ενός γραφήματος  $G=(V,E)$ . Έστω  $B = [b_{ij}]$  πίνακας που συνδέει τις κορυφές του γραφήματος με τα χρώματα έτσι ώστε

$b_{ij} = 1$  αν η κορυφή  $x_i$  έχει χρωματισθεί με το χρώμα  $j$

$b_{ij} = 0$  αλλιώς.

Έστω  $A = [a_{ip}]$  ο πίνακας γειτνίασης του  $G$ . Για να έχουμε έναν επιτρεπτό χρωματισμό του γραφήματος, πρέπει να πληρούνται οι παρακάτω σχέσεις:

$$\sum_{j=1}^m b_{ij} = 1 \quad (\text{για όλα τα } i = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

$$L \cdot (1 - b_{ij}) - \sum_{p=1}^n a_{ip} b_{pj} \geq 0 \quad (\text{για όλα τα } i=1, 2, \dots, n \text{ και } j=1, 2, \dots, m) \quad (2)$$

Η ικανοποίηση της σχέσης (1) αποτρέπει το χρωματισμό μιας ήδη χρωματισμένης κορυφής με άλλο χρώμα.

Στη σχέση (2) το  $L$  είναι ένας μεγάλος θετικός αριθμός μεγαλύτερος από το πλήθος των κορυφών του γραφήματος. Η ικανοποίηση της σχέσης (2) αποτρέπει το χρωματισμό γειτονικών κορυφών με το ίδιο χρώμα.

Σε κάθε χρώμα  $j$ , αντιστοιχίζουμε έναν αριθμό  $c_j$ . Κάθε  $c_j$  προκύπτει από τον προηγούμενο, εφαρμόζοντας τη σχέση  $c_{j+1} > m \cdot c_j$ . Όπου  $c_1 = 1$  και  $m$  ένας αριθμός μεγαλύτερος από το βαθμό ανεξαρτησίας  $\alpha(G)$ , του γραφήματος. Είναι προφανές ότι ο βαθμός ανεξαρτησίας του πλήρους γραφήματος είναι  $m = n$ , όπου  $n$  το πλήθος των κορυφών του.

Το πρόβλημα του χρωματισμού του γραφήματος  $G=(V,E)$  ισοδυναμεί με το 0-1 πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού, της εύρεσης των  $b_{ij}$  και  $c_j$  ώστε να πληρούνται οι σχέσεις (1) και (2) και το παρακάτω άθροισμα να γίνεται

$$\text{ελάχιστο: } \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n c_j b_{ij}$$

Παραλλαγή στην παραπάνω διατύπωση αποτελεί η αντικατάσταση από τον Berge [5], της σχέσης (2) με τη σχέση (3) που ακολουθεί:

$$\sum_{i=1}^n f_{ik} b_{ij} \leq 1 \quad \text{για όλα τα } k = 1, 2, \dots, n \text{ και } j = 1, 2, \dots, m \quad (3)$$

όπου  $[f_{ik}]$  είναι ο πίνακας πρόσπτωσης του γραφήματος, για τον οποίο ισχύει  $f_{ik} = 1$  αν η πλευρά  $e_k$  προσπίπτει στην κορυφή  $v_i$ , αλλιώς  $f_{ik} = 0$ .

Για να αντληφθεί κανείς πόσο επηρεάζει το χρόνο που απαιτείται για να λυθεί το πρόβλημα, η επιλογή της σχέσης (2) ή της σχέσης (3) στη διατύπωση του προβλήματος, αρκεί να πάρει υπόψη του το παρακάτω στοιχείο:

Για ένα γράφημα με  $|V| = 100$  και  $d = 0.2$  από τη σχέση (2) προκύπτουν 100 συνθήκες που απαιτείται η ικανοποίησή τους, ενώ από τη σχέση (3) προκύπτουν 1000 συνθήκες που απαιτείται η ικανοποίησή τους.

### **2.2.2 Διατύπωση του προβλήματος χρωματισμού ως πρόβλημα κάλυψης**

Ένας επιτρεπτός χρωματισμός ενός γραφήματος ισοδυναμεί με το διαμερισμό του γραφήματος σε ανεξάρτητα σύνολα κορυφών. Μπορούμε να βρούμε τα μέγιστα ανεξάρτητα σύνολα ενός γραφήματος και οι κορυφές που ανήκουν σε δύο ή περισσότερα απ' αυτά να δημιουργήσουν τις εναλλακτικές λύσεις στο συγκεκριμένο χρωματισμό. Μετατρέπεται έτσι το πρόβλημα του χρωματισμού σε πρόβλημα εύρεσης των μέγιστων ανεξάρτητων συνόλων ενός γραφήματος. Μετά την εύρεση των μέγιστων ανεξάρτητων συνόλων πρέπει να βρεθεί ο ελάχιστος αριθμός από αυτά, ο οποίος απαιτείται για να καλυφθεί το γράφημα. Για να αντιμετωπισθεί το δεύτερο μέρος του προβλήματος κάλυψης ακολουθεί η παρακάτω διαδικασία:

Μετά την εύρεση των μέγιστων ανεξάρτητων συνόλων του γραφήματος, δημιουργούμε τον πίνακα  $\Pi = [\pi_{κλ}]$ , όπου  $\pi_{κλ}=1$  αν η κορυφή  $v_κ$  ανήκει στο ανεξάρτητο σύνολο  $\lambda$ , αλλιώς  $\pi_{κλ} = 0$ . Το πρόβλημα του χρωματισμού του γραφήματος μετατρέπεται τώρα σε πρόβλημα εύρεσης του μικρότερου αριθμού στηλών του πίνακα  $\Pi$  που καλύπτει όλες τις κορυφές.

Η αντιμετώπιση του προβλήματος εύρεσης του χρωματικού αριθμού ως πρόβλημα κάλυψης των κορυφών ενός γραφήματος δεν ελαττώνει αντίθετα αυξάνει το βαθμό δυσκολίας επίλυσης του προβλήματος εύρεσης του χρωματικού αριθμού. Διότι, οποιοσδήποτε αλγόριθμος εύρεσης του συνόλου των μέγιστων ανεξαρτήτων συνόλων ενός γραφήματος  $G$ , είναι εκθετικός μιας και το πλήθος των μέγιστων ανεξαρτήτων συνόλων αυξάνεται με ρυθμό εκθετικής συνάρτησης σε σχέση με το μέγεθος του γραφήματος.

### 2.2.3 Αλγόριθμος A, εύρεσης ακριβούς χρωματικού αριθμού με δένδροειδή επεξεργασία

Για την εύρεση της ακριβούς τιμής του  $\chi(G)$ , ο αποτελεσματικότερος αλγόριθμος που έχει αναπτυχθεί μέχρι σήμερα είναι εκείνος που εφαρμόζει μια διαδικασία έμμεσης απαρίθμησης δένδροειδούς αναζήτησης. Τον αλγόριθμο αυτόν τον ονομάζουμε ΑΛΓΟΡΙΘΜΟ A και εξ αιτίας της σπουδαιότητάς του, κρίθηκε σκόπιμο να παρουσιαστεί αναλυτικά.

Έστω ένα γράφημα  $G=(V,E)$  όπου  $V=\{x_1,x_2,x_3,\dots,x_n\}$ . Ας υποθέσουμε ότι οι κορυφές  $x_i$  του γραφήματος είναι αριθμημένες κατά μια διάταξη. Η κορυφή  $x_i$  βρίσκεται στη θέση  $i$  της διάταξης. Μπορούμε να χρωματίσουμε τις κορυφές αυτού του γραφήματος ακολουθώντας τον παρακάτω τρόπο:

- i) Χρωματίζουμε την κορυφή  $x_1$  με το χρώμα 1.
- ii) Χρωματίζουμε κάθε μια απ' τις μη χρωματισμένες κορυφές  $x_j$ ,

σειριακά, έτσι ώστε κάθε κορυφή να χρωματίζεται με το μικρότερο δυνατό χρώμα (δηλαδή με το μικρότερο χρώμα που δεν έχει χρωματίσει κάποια ήδη χρωματισμένη γειτονική της  $x_j$ ).

Ας υποθέσουμε ότι  $q$  είναι ο αριθμός των χρωμάτων που χρησιμοποιήθηκαν για τον παραπάνω χρωματισμό. Αν υπάρχει χρωματισμός στον οποίο μπορούν να χρησιμοποιηθούν  $q-1$  χρώματα, τότε όλες οι κορυφές που έχουν χρωματισθεί με το χρώμα  $q$  πρέπει να ξαναχρωματισθούν με κάποιο χρώμα  $j < q$ . Έστω  $x_{i^*}$  είναι η πρώτη κορυφή στην υπάρχουσα διάταξη των κορυφών που έχει χρωματισθεί με το χρώμα  $q$ .

Σύμφωνα με το ii), αυτή η κορυφή χρωματίστηκε με το χρώμα  $q$  γιατί δεν μπορούσε να χρωματισθεί με κάποιο άλλο χρώμα  $j < q$ . Αυτή η κορυφή, μπορεί να επαναχρωματισθεί με κάποιο χρώμα  $j < q$ , αν τουλάχιστον μια απ' τις γειτονικές της κορυφές μπορεί επίσης να επαναχρωματισθεί. Έτσι μπορεί να γίνει ένα βήμα οπισθοδρόμησης (backtracking) [20,41] απ' την κορυφή  $x_{i^*}$  με τον παρακάτω τρόπο :

Απ' τις κορυφές  $x_1, x_2, \dots, x_{i+1}$ , διαλέγω αυτές που είναι γειτονικές της  $x_{i+1}$  και επιλέγω αυτή με το μεγαλύτερο δείκτη, έστω τη  $x_k$ . Αν η  $x_k$  είναι χρωματισμένη με το χρώμα  $j_k$ , ξαναχρωματίζω τη  $x_k$  με το μικρότερο δυνατό χρώμα  $j'_k$ , τέτοιο ώστε  $j'_k \geq j_k + 1$ .

Αν  $j'_k < q$  συνεχίζουμε ξαναχρωματίζοντας σειριακά όλες τις κορυφές  $x_{k+1}$  έως  $x_n$  εφαρμόζοντας τη μέθοδο (ii), φροντίζοντας να μη χρησιμοποιηθεί το χρώμα  $q$ . Αν αυτό είναι εφικτό, τότε ένας καινούριος, καλύτερος χρωματισμός έχει επιτευχθεί, στον οποίο χρησιμοποιούνται λιγότερα από  $q$  χρώματα. Αλλιώς, δηλαδή αν δεν είναι εφικτός ένας τέτοιος χρωματισμός, τότε οπισθοδρομούμε απ' την κορυφή  $x_k$  (δηλαδή διαλέγουμε την αμέσως προηγούμενη κορυφή της  $x_k$ , στην αρχική διάταξη) και επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία.

Αν  $j'_k = q$  ή δεν υπάρχει άλλη εφικτή επιλογή επαναχρωματισμού με νέο χρώμα, τότε η διαδικασία οπισθοδρόμησης στην προηγούμενη κορυφή γίνεται αμέσως. Ο αλγόριθμος σταματά όταν, οπισθοδρομώντας φτάσουμε στην κορυφή  $x_1$ .

Οι παρακάτω παρατηρήσεις μπορεί να βοηθήσουν στην επίτευξη της παραπάνω διαδικασίας:

α) Ανεξάρτητα απ' τη διάταξη των κορυφών, τα επιτρεπτά για μια κορυφή  $x_i$  χρώματα, είναι τα χρώματα  $j$ , όπου  $j \leq i$  και  $i < q$ . Αυτό είναι προφανές, αν σκεφτούμε ότι στη διάταξη των κορυφών, προηγούνται της  $x_i$ ,  $i-1$  κορυφές, άρα χρώματα  $j > i$  δεν είναι δυνατό να χρειαστούν. Έτσι, για την κορυφή 1 επιτρεπτό χρώμα είναι το 1, για τη 2 τα 1 και 2 εκτός αν η 2 είναι γειτονική της 1 οπότε επιτρεπτό είναι μόνο το 2 κ.τ.λ.

β) Από τα παραπάνω, εύκολα συμπεραίνουμε ότι θα ήταν υπολογιστικά αποτελεσματικότερο, αν οι κορυφές διατάσσονταν με τέτοιο τρόπο ώστε οι πρώτες π.χ.  $p$  κορυφές να αποτελούσαν κορυφές μιας κλίμακας του γραφήματος. Επειδή κάθε κορυφή  $x_i$ ,  $1 \leq i \leq p$  μπορεί να χρωματισθεί μόνο με ένα χρώμα, π.χ. το  $i$ , ο αλγόριθμος θα σταματήσει γρηγορότερα καθώς οπισθοδρομεί, δηλαδή όταν φτάσει στην κορυφή  $x_p$ .

Όσο μεγαλύτερη, σε πλήθος κορυφών είναι η κλίμακα, τόσο γρηγορότερα θα πραγματοποιηθεί η οπισθοδρόμηση. Όμως και εδώ ισχύουν οι ίδιες

παρατηρήσεις όπως και στην περίπτωση της εύρεσης του χρωματικού αριθμού με τη χρήση μέγιστων ανεξαρτήτων συνόλων.

Επειδή ο αλγόριθμος  $A$  είναι ο ταχύτερος για τον προσδιορισμό του χρωματικού αριθμού ενός τυχαίου γραφήματος  $G$ , θα παρουσιαστούν στη συνέχεια οι διατεταγμένες διαδικασίες του  $A$  πρώτα με αλγεβρική μορφή και ακολούθως με συστηματική μορφή βημάτων ώστε να μπορεί να προγραμματιστεί άμεσα σε συμβολική γλώσσα προγραμματισμού.

### 2.2.3.1 Συστηματική παρουσίαση του αλγορίθμου $A$ .

ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ  $A_0$ .

Σ' ένα γράφημα  $G$ , που έχει δοθεί, χρωματίζουμε την κορυφή  $x_1$  με το χρώμα 1, δηλαδή  $c(x_1)=1$ .

Στη συνέχεια, χρωματίζουμε και τις υπόλοιπες κορυφές όπως περιγράφεται παρακάτω.

ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ  $A_1$ .

Χρωματίζουμε τις κορυφές  $x_2, x_3, x_4, \dots, x_n$  με το μικρότερο δυνατό χρώμα  $c(x_i)$ ,  $i=2, 3, 4, \dots, n$  ώστε

$$c(x_i) \neq c(x_j) \text{ για κάθε } x_j \in \Gamma(x_i) \quad (1)$$

Ο χρωματισμός πραγματοποιείται διαδοχικά από την κορυφή με το μικρότερο δείκτη στην κορυφή με το μεγαλύτερο δείκτη.

Στη συνέχεια, εφαρμόζουμε τη ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ  $A_2$ .

ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ  $A_2$ .

Έστω  $\mu$  το μεγαλύτερο χρώμα με το οποίο χρωματίστηκε κάποια κορυφή  $x_p$ . Εξετάζουμε αν

i)  $\mu = X(G)$

ii)  $\mu > X(G)$

Έστω  $\Gamma(x_p) = \{x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, x_{\lambda_3}, \dots, x_{\lambda_k}\}$ , όπου  $k = |\Gamma(x_p)|$ . Για να επαναχρωματισθεί η  $x_p$  με χρώμα μικρότερο του  $\mu$ , πρέπει να επαναχρωματισθεί το λιγότερο μία από τις κορυφές του  $\Gamma(x_p)$ , αφού το χρώμα  $\mu$ , με το οποίο χρωματίστηκε η  $x_p$ , ήταν το μικρότερο δυνατό χρώμα που ικανοποιούσε τη σχέση (1). Στη συνέχεια εφαρμόζουμε τη ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ A3.

### ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ A3.

Από τις γειτονικές κορυφές του  $x_p$ , επιλέγουμε εκείνη με τον μεγαλύτερο δείκτη, δηλαδή την  $x_{\lambda_k}$ , και έστω  $\zeta$  το μικρότερο δυνατό χρώμα για το οποίο ισχύει :

α)  $\zeta > c(x_{\lambda_k})$  και

β)  $\zeta \neq c(x_j)$  για κάθε  $x_j \in \Gamma(x_{\lambda_k})$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

#### Περίπτωση A3.1

$$\zeta = \mu$$

Στην περίπτωση αυτή, επαναλαμβάνουμε τη ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ A3, για την αμέσως προηγούμενη κορυφή της  $x_{\lambda_k}$  του  $\Gamma(x_p)$ , δηλαδή πραγματοποιούμε μια οπισθοδρόμηση (backtracking). Η διαδικασία οπισθοδρόμησης επαναλαμβάνεται μέχρι να βρεθεί μια κορυφή  $x_{\lambda_i} \in \Gamma(x_p)$  για την οποία να ισχύει η σχέση  $\zeta < \mu$ , οπότε θα ακολουθηθούν οι συλλογισμοί της περίπτωσης A3.2. Αν ισχύει  $\zeta = \mu$  για όλες τις κορυφές του  $\Gamma(x_p)$ , σημαίνει ότι ο αριθμός  $\mu$  είναι ο χρωματικός αριθμός του  $G$ , δηλαδή  $\mu = \chi(G)$ .

#### Περίπτωση A3.2

$$\zeta < \mu$$

Θεωρούμε ότι οι κορυφές  $x_{\lambda_{k+1}}, x_{\lambda_{k+2}}, \dots, x_n$  είναι άχρωμες και τις επαναχρωματίζουμε διαδοχικά, εφαρμόζοντας τη ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ A1, ξεκινώντας από την κορυφή  $x_{\lambda_{k+1}}$ . Αν μετά τη διαδικασία επαναχρωματισμού, για το μεγαλύτερο χρώμα  $\mu_1$  που προέκυψε, ισχύει,  $\mu_1 < \mu$ , τότε έχουμε επιτύχει νέο χρωματισμό του  $G$  με λιγότερες χρωματικές κλάσεις.

Αν όμως, για το μεγαλύτερο χρώμα  $\mu_1$ , ισχύει  $\mu_1 = \mu$ , τότε οπισθοδρομούμε στην αμέσως προηγούμενη γειτονική κορυφή της  $x_p$ , όπως κάναμε στην περίπτωση A3.1. Αν η διαδικασία οπισθοδρόμησης δεν οδηγήσει σε κορυφή  $x_{li} \in \Gamma(x_p)$  για την οποία να ισχύει  $\zeta < \mu$ , τότε ισχύει  $\mu = \chi(G)$ .

Σημειώνεται ότι η  $x_p$ , καθώς και όλες οι κορυφές οι οποίες είχαν χρωματισθεί με το χρώμα  $\mu$ , θα επαναχρωματισθούν, γιατί ανήκουν στις κορυφές του συνόλου  $\{x_{\lambda k+1}, x_{\lambda k+2}, x_{\lambda k+3}, \dots, x_n\}$  αφού χρωματίστηκαν μεταγενέστερα από την κορυφή  $x_{\lambda k+1}$ .

Αν κατά την εφαρμογή των παραπάνω, έχει βρεθεί ο χρωματικός αριθμός  $\chi(G)$ , ο αλγόριθμος σταματά. Στην περίπτωση όμως που μειώθηκε το πλήθος των χρωματικών κλάσεων, τότε επαναλαμβάνουμε τη ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ A2, ώστε είτε να διαπιστωθεί ότι με τον τελευταίο χρωματισμό το γράφημα  $G$  χρωματίστηκε με  $\chi(G)$  χρώματα, είτε να μειωθεί περαιτέρω το πλήθος των κλάσεων.

Ακολουθεί η συστηματική έκφραση του αλγορίθμου  $A$  με μορφή βημάτων.

### 2.2.3.2 Συστηματική παρουσίαση του $A$ με μορφή βημάτων

ΒΗΜΑ 0 : (είσοδος δεδομένων)

Διάβασε το  $n$  και το  $G(V,E)$ .

ΒΗΜΑ 1 : Θέσε :  $c(x_1) \leftarrow 1$

$i \leftarrow 1$

$LG \leftarrow 0$

$\pi_m \leftarrow 0$ .

ΒΗΜΑ 2 : (ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ A1)

Θέσε :  $i \leftarrow i + 1$

$c(x_i) \leftarrow \min \{ k \text{ ώστε } k \neq c(x_j) \text{ για κάθε } x_j \in \Gamma(x_i) \}$ .



Αν  $i = n$  πήγαινε στο ΒΗΜΑ 3

αλλιώς επανάλαβε το ΒΗΜΑ 2.

**ΒΗΜΑ 3 : (ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ A2)**

Εντόπισε την κορυφή  $x_p$ , ώστε  $c(x_p) = \mu = \max \{c(x_j), x_j \in V\}$ .

αν  $\mu = \pi_m$  και  $LG=1$  πήγαινε στο ΒΗΜΑ 7

αν  $\mu = \pi_m$  και  $LG=0$  πήγαινε στο ΒΗΜΑ 8

αλλιώς προχώρα στο ΒΗΜΑ 4 .

**ΒΗΜΑ 4 : (ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ A3)**

Θέσε  $y_1 \leftarrow x_{\lambda_1}, y_2 \leftarrow x_{\lambda_2}, \dots, y_k \leftarrow x_{\lambda_k}$

όπου  $k = |\Gamma(x_p)|$  και  $\Gamma(x_p) = \{x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \dots, x_{\lambda_k}\}$  .

Θέσε  $m \leftarrow k$  .

**ΒΗΜΑ 5 :** Αν  $m = 0$  πήγαινε στο ΒΗΜΑ 7

αλλιώς προσδιόρισε το χρώμα  $z$  ώστε

$z = \min \{p \text{ όπου } p > c(y_m) \text{ και } c(x_p) \neq c(x_j) \text{ για κάθε } x_j \in \Gamma(y_m)\}$ .

Αν  $z = \mu$  πήγαινε στο ΒΗΜΑ 7

αλλιώς θέσε  $c(y_m) \leftarrow z$  και προχώρα στο επόμενο ΒΗΜΑ.

**ΒΗΜΑ 6 :** Θέσε  $i \leftarrow \lambda_m$

$\pi_m \leftarrow \mu$

και πήγαινε στο ΒΗΜΑ 2 .

**ΒΗΜΑ 7 :** Τύπωσε τον αριθμό  $\mu = x(G)$  και σταμάτα.

**ΒΗΜΑ 8 :** Θέσε  $LG \leftarrow 1$  και πήγαινε στο ΒΗΜΑ 3.

### **2.2.3.3 Βήματα αλγορίθμου A**

**ΒΗΜΑ 0:** (είσοδος δεδομένων)

διάβασε το  $n$

θέσε  $NC \leftarrow -1$ ,  $S \leftarrow -1$ ,  $WD \leftarrow 0$

για  $I = 1$  έως  $n$

διάβασε  $DG(I)$

θέσε  $F(I) \leftarrow 0$

τέλος  $I$

για  $I = 1$  έως  $n$

για  $J = 1$  έως  $DG(I)$

διάβασε  $G$

θέσε  $LST(I,J) \leftarrow G$

τέλος  $J$

τέλος  $I$

ΒΗΜΑ1: (χρωματισμός γραφήματος)

για  $I1 = S$  έως  $n$

για  $J1 = 1$  έως  $NC$

για  $K1 = 1$  έως  $DG(I)$

θέσε  $A \leftarrow LST(I1,K1)$

αν  $A > I1$  πήγαινε τέλος  $K1$

αν  $F(A) = J1$  πήγαινε τέλος  $J1$

τέλος  $K1$

θέσε  $F(I1) \leftarrow J1$

πήγαινε τέλος  $I1$

τέλος  $J1$

θέσε  $NC \leftarrow NC + 1$

$F(I1) \leftarrow NC$

τέλος  $I1$

αν  $WD=1$  πήγαινε στο ΒΗΜΑ4

αλλιώς προχώρα στο επόμενο βήμα

ΒΗΜΑ2 : (εντοπισμός κορυφής με το μέγιστο χρώμα)

για  $I=1$  έως  $n$

αν  $F(I)=NC$

θέσε  $X←I$

πήγαινε στο ΒΗΜΑ3

τέλος  $I$

ΒΗΜΑ3 : (έλεγχος αν ο  $NC$  είναι χρωματικός αριθμός του γραφήματος)

για  $J=DG(X)$  έως  $1$  με βήμα  $-1$

θέσε  $Y←LST(X,J)$ ,  $NY←F(Y)+1$

για  $KK=NY$  έως  $NC-1$

για  $JJ=1$  έως  $DG(Y)$

θέσε  $Z←LST(Y,JJ)$

αν  $F(Z)≠KK$  πήγαινε τέλος  $JJ$

αλλιώς πήγαινε τέλος  $KK$

τέλος  $JJ$

θέσε  $F(Y)←KK$ ,  $S←Y+1$ ,  $OLDNC←NC$ ,

$NC←KK$ ,  $WD←1$

πήγαινε ΒΗΜΑ1

τέλος  $KK$

τέλος  $J$

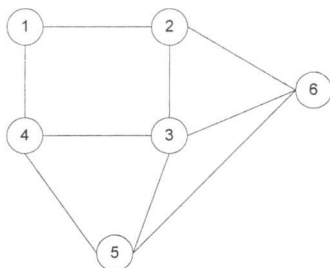
ΒΗΜΑ4 : (τερματισμός)

τύπωσε τις χρωματικές κλάσεις και το  $NC$

ΤΕΡΜΑΤΙΣΜΟΣ.

### 2.2.3.5 Παράδειγμα

Έστω το γράφημα του παρακάτω σχήματος 2.1,  $G=(V,E)$  με  $|V|=6$ .

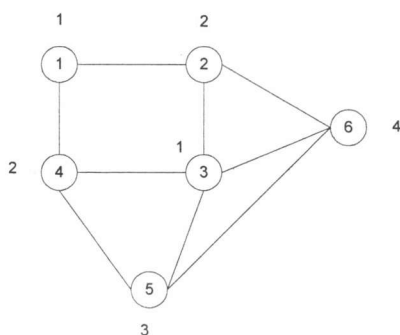


σχήμα 2.1

Ο αλγόριθμος αρχικά διαβάζει το γράφημα και δημιουργεί τον πίνακα λίστας γειτονικών κορυφών LST

	2	4		
	1	3	6	
LST =	2	4	5	6
	1	3	5	
	3	4	6	
	2	3	5	

Στη συνέχεια, ο αλγόριθμος ξεκινώντας από την κορυφή 1 χρωματίζει όλες τις κορυφές του γραφήματος με τη σειρά που έχουν διαταχθεί, χρησιμοποιώντας για κάθε κορυφή το πιο μικρό δυνατό χρώμα. Αυτό το επιτυγχάνει ελέγχοντας για κάθε κορυφή τις ήδη χρωματισμένες γειτονικές της κορυφές. Αν υπάρχουν κάποια χρώματα που δεν έχουν χρησιμοποιηθεί στις γειτονικές της αλλά έχουν χρησιμοποιηθεί μέχρι τώρα στο χρωματισμό του γραφήματος, χρωματίζει με το μικρότερο απ'αυτά την κορυφή. Αν δεν υπάρχουν τέτοια, χρωματίζει με νέο χρώμα την κορυφή. Για παράδειγμα, την κορυφή 2 δεν μπορεί να τη χρωματίσει με το χρώμα 1 λόγω της γειτονικής της κορυφής, 1, άρα χρησιμοποιεί νέο χρώμα για το χρωματισμό της, το χρώμα 2. Αντίθετα για την κορυφή 3 μπορεί να χρησιμοποιήσει το χρώμα 1 γιατί η γειτονική της χρωματισμένη κορυφή είναι η 2 η οποία έχει χρωματισθεί με το χρώμα 2. Ακολουθώντας αυτήν τη λογική ο αλγόριθμος χρωματίζει το γράφημα όπως στο σχήμα 2.2.

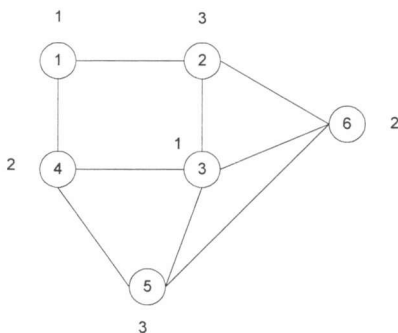


σχήμα 2.2

Με την ολοκλήρωση του χρωματισμού έχουν χρησιμοποιηθεί 4 χρώματα. Ο αλγόριθμος ελέγχει αν το 4 είναι ο χρωματικός αριθμός του γραφήματος. Επιλέγει την πρώτη κορυφή που είναι χρωματισμένη με το χρώμα 4, την κορυφή 6. Ελέγχει αν κάποια απ' τις γειτονικές της κορυφές μπορεί να επαναχρωματισθεί μ' ένα χρώμα  $k$  τέτοιο ώστε το  $k$  να είναι τουλάχιστον κατά 1 αυξημένο απ' το χρώμα που έχει ήδη και ταυτόχρονα να είναι μικρότερο απ' το 4. Τις γειτονικές

κορυφές της 6, τις ελέγχει ξεκινώντας απ' τη μεγαλύτερη προς τη μικρότερη. Δηλαδή στον πίνακα LST ξεκινά απ' την 5, συνεχίζει στην 3 και καταλήγει στη 2. Η μόνη κορυφή που μπορεί να επαναχρωματισθεί, τηρώντας τους όρους, είναι η 2. Αυτή είναι χρωματισμένη με το χρώμα 2. Αυξάνεται το χρώμα κατά 1, γίνεται 3, το οποίο είναι πράγματι μικρότερο του 4.

Στη συνέχεια, ο αλγόριθμος προχωρεί στον επαναχρωματισμό του γραφήματος ξεκινώντας απ' την κορυφή 3. Για το χρωματισμό του ακολουθείται αρχική διαδικασία χρωματισμού του γραφήματος. Τελικά, το γράφημα χρωματίζεται όπως φαίνεται στο σχήμα 2.3. Ο χρωματικός αριθμός  $\chi(G)$  του γραφήματος είναι 3.



σχήμα 2.3

### 2.3 Προσεγγιστικοί αλγόριθμοι εύρεσης χρωματισμού ενός γραφήματος

Υπάρχουν πολλοί ευρετικοί αλγόριθμοι που χρωματίζουν ένα γράφημα με αριθμό χρωμάτων κοντά στο χρωματικό του αριθμό. Το κέρδος με αυτούς τους αλγορίθμους είναι ότι μπορούν να εφαρμοστούν σε μεγάλα γραφήματα που η εφαρμογή ενός ακριβούς αλγορίθμου είναι αδύνατη.

### 2.3.1 Προσεγγιστικός αλγόριθμος σειριακής διαδικασίας χρωματισμού

Έστω ένα γράφημα  $G=(V,E)$ . Διατάσσουμε τις κορυφές του κατά φθίνουσα σειρά βαθμών. Χρωματίζουμε την πρώτη κορυφή της διάταξης με το χρώμα 1 και συνεχίζουμε χρωματίζοντας με τη σειρά με το χρώμα 1, όποιες κορυφές δεν είναι γειτονικές με κορυφές που ήδη χρωματίστηκαν με το χρώμα 1. Όταν η διαδικασία αυτή ολοκληρωθεί, ξεκινάμε από την πρώτη άχρωμη κορυφή της διάταξης και επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία με τους ίδιους περιορισμούς για το χρώμα 2. Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο έως ότου χρωματισθούν όλες οι κορυφές του γραφήματος. Ο αριθμός των χρωμάτων που θα χρησιμοποιηθούν για το χρωματισμό του γραφήματος με αυτόν τον τρόπο, πλησιάζει το χρωματικό αριθμό του [49].

Στον προσεγγιστικό αυτό αλγόριθμο μπορούμε, πριν ξεκινήσει η διαδικασία χρωματισμού με το νέο χρώμα, να διατάξουμε τις άχρωμες κορυφές του γραφήματος πάλι κατά φθίνουσα σειρά βαθμών. Αυτή τη φορά όμως θεωρείται ως βαθμός της κορυφής ο αριθμός των πλευρών που προσπίπτουν στην κορυφή και το άλλο άκρο τους καταλήγει σε άχρωμη κορυφή.

Στους παραπάνω αλγορίθμους, σε περίπτωση ομοιόβαθμων κορυφών η διάταξη γίνεται τυχαία. Μπορεί ακόμα, να διαταχθούν οι ομοιόβαθμες αυτές κορυφές κατά φθίνουσα σειρά του 2-βαθμού τους. Αν και πάλι υπάρχουν ομοιόβαθμες κορυφές μπορούν να διαταχθούν κατά φθίνουσα σειρά του 3-βαθμού τους κ.ο.κ. Επίσης μπορούν εξ αρχής να διαταχθούν οι κορυφές κατά φθίνουσα σειρά του 2-βαθμού ή του 3-βαθμού τους και μετά να εφαρμοστεί η σειριακή επεξεργασία χρωματισμού τους.

Η σειριακή μέθοδος χρωματισμού των κορυφών ενός γραφήματος αποτελεί μια κλάση μεθόδων χρωματισμού. Βασικό στοιχείο που τις διαφοροποιεί μεταξύ τους είναι η διάταξη των κορυφών του γραφήματος. Η διάταξη αυτή μπορεί να είναι στατική ή δυναμική. Δηλαδή να γίνει μια φορά και να ισχύσει ως το τέλος του αλγορίθμου ή να επαναλαμβάνεται πολλές φορές κατά την εξέλιξη του αλγορίθμου. Επίσης η διάταξη των κορυφών μπορεί να γίνει κατά οποιοδήποτε μετρήσιμο στοιχείο αναφέρεται στις κορυφές ενός γραφήματος.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

### Ευρετικοί αλγόριθμοι A1E, RADIO, W

#### 3.1 ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΟΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ A1E

##### 3.1.1. ΓΕΝΙΚΑ

Στο κεφάλαιο αυτό που περιέχει την κύρια έρευνα της διατριβής, αναπτύσσεται ένας νέος προσεγγιστικός αλγόριθμος ο A1E, που βρίσκει προσεγγιστικά την τιμή του  $\chi(G)$  και τις αντίστοιχες χρωματικές κλάσεις. Ακόμα, ορίζονται καινούργιες έννοιες σχετικά με το χρωματισμό ενός γραφήματος, που έχουν σημαντικές εφαρμογές. Οι καινούργιες έννοιες είναι γενικεύσεις της έννοιας του χρωματισμού ενός γραφήματος .

Όπως είδαμε, για την εύρεση του ακριβούς χρωματικού αριθμού, οι αντίστοιχοι αλγόριθμοι μπορούν να αντιμετωπίσουν γραφήματα με σχετικά μικρό μέγεθος. Σε πολλές περιπτώσεις εφαρμογών, όμως, είναι χρήσιμο να ευρεθεί ο χρωματικός αριθμός ενός γραφήματος και ο αντίστοιχος χρωματισμός του, έστω και προσεγγιστικά, αν η εύρεση του ακριβούς χρωματικού αριθμού είναι αδύνατη. Για το λόγο αυτό έχουν εμφανισθεί στην αντίστοιχη αρθρογραφία, πολλοί αλγόριθμοι που επιλύουν το πρόβλημα της εύρεσης προσεγγιστικού χρωματικού αριθμού.

##### 3.1.2. ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ B

Η εμπειρία έδειξε ότι από τους αλγόριθμους αυτούς, οι αποτελεσματικότεροι είναι εκείνοι που εφαρμόζουν σειριακή διαδικασία χρωματισμού των κορυφών ενός γραφήματος που έχει δοθεί, η δε σειρά καθορίζεται από κάποια συγκεκριμένα κριτήρια. Η κύρια διαδικασία που χρησιμοποιούν αυτοί οι σειριακοί αλγόριθμοι για να προσδιορίσουν το χρωματικό αριθμό τυχαίου γραφήματος  $G$  με  $n$  κορυφές, εκφράζεται από τα βήματα της παρακάτω ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑΣ B:



## ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ Β

ΒΗΜΑ 1 : Οι κορυφές του  $G$  διατάσσονται με κάποιο κριτήριο διάταξης.

Θέσε  $x \leftarrow 1$  και  $\mu \leftarrow 0$ .

ΒΗΜΑ 2 : Επιλέγεται με κάποιο κριτήριο μια άχρωμη κορυφή, έστω  $z$  και χρωματίζεται με το χρώμα  $x$ . Το χρώμα  $x$  χρησιμοποιείται για πρώτη φορά.

Θέσε  $\mu \leftarrow \mu + 1$ .

ΒΗΜΑ 3 : Χρωματίζονται με το χρώμα  $x$  οι άχρωμες εκείνες κορυφές που δε γειτονεύουν με κάποια κορυφή στην οποία έχει ήδη ανατεθεί το χρώμα  $x$ .

Σε κάθε χρωματισμό κορυφής τίθεται  $\mu \leftarrow \mu + 1$ .

ΒΗΜΑ 4 : Αν  $\mu = n$  τότε τύπωσε το  $x$  και σταμάτα.

Αλλιώς θέσε  $x \leftarrow x + 1$  και πήγαινε στο ΒΗΜΑ 2.

### 3.1.3. ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ Α1Ε

Έστω  $G=(V,E)$  το γράφημα που πρόκειται να χρωματισθεί ακολουθώντας τη διαδικασία Β. Σε κάθε στάδιό της, οι κορυφές του συνόλου  $V$  είναι διαμερισμένες στα υποσύνολα  $F$  και  $\bar{F}$ , όπου το  $F$  περιέχει τις κορυφές οι οποίες έχουν ήδη χρωματισθεί ενώ το  $\bar{F}$  περιέχει τις υπόλοιπες κορυφές. Προφανώς  $\bar{F} = V - F$ . Όπως είδαμε και στο κεφάλαιο 2, το υπογράφημα που αποτελείται από τις κορυφές  $\bar{F}$ , συμβολίζεται με  $G(\bar{F})$  και ισχύει

$$G(\overline{F}) = (\overline{F}, \overline{E}) \text{ όπου } \overline{E} = \{(x,y) \in E, \text{ ώστε } x,y \in \overline{F}\}$$

Η βασική λογική που διέπη τους μέχρι τώρα σειριακούς αλγόριθμους, βρίσκεται στην τήρηση του παρακάτω κανόνα :

Σε κάθε στάδιο της διαδικασίας χρωματισμού ενός γραφήματος, επιλέγω να χρωματίσω με νέο χρώμα, εκείνο το υποσύνολο κορυφών του γραφήματος, για το οποίο, το προκύπτον υπογράφημα που αποτελείται από τις άχρωμες κορυφές, έχει όσο γίνεται μικρότερη πυκνότητα.

Η τήρηση του κανόνα αυτού, δημιουργεί ένα κριτήριο επιλογής για την κορυφή που θα χρωματισθεί για πρώτη φορά με νέο χρώμα. Έτσι, στην περίπτωση της ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑΣ Β επιλέγεται ως πρώτη κορυφή για χρωματισμό με το νέο χρώμα, η κορυφή που έχει το μεγαλύτερο βαθμό στο  $G(\overline{F})$ .

Η μέριμνα μετά από ένα χρωματισμό κάποιου υποσυνόλου κορυφών του γραφήματος το προκύπτον υπογράφημα των άχρωμων κορυφών, να είναι όσο γίνεται πιο αραιό, δικαιολογείται από την ιδιότητα των αραιών γραφημάτων να έχουν γενικά, λιγότερες χρωματικές κλάσεις από τα ομοίου πλήθους κορυφών, πυκνότερα γραφήματα. Η ιδιότητα αυτή προκύπτει από το παρακάτω θεώρημα.

### ΘΕΩΡΗΜΑ 1

Έστω τα γραφήματα  $G_1(V,E_1)$  και  $G_2(V,E_2)$  και  $E_2 \subset E_1$  τότε

$$\chi(G_2) \leq \chi(G_1).$$

### ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω  $Y \subset V$ , τέτοιο ώστε  $\forall y \in Y$  ισχύει ότι  $c(y) = \chi(G_1)$ .

Προφανώς  $c(x) < c(y)$  στο  $G_1$ ,  $\forall x \in V - Y$ .

Αν  $\forall y \in Y$  ισχύει η συνθήκη  $c(x) \neq c(z)$  στο  $G_1$ ,  $\forall z \in \Gamma(y)$  και  $\forall x: (x,y) \in E_1 - E_2$ , τότε η κορυφή  $y$  μπορεί να χρωματισθεί με το χρώμα  $c(x)$  στο  $G_2$ , δηλαδή  $\chi(G_2) < \chi(G_1)$ .

Αν δεν ισχύει η παραπάνω συνθήκη τότε έχουμε  $\chi(G_2) = \chi(G_1)$ .

Στον αλγόριθμο που αναπτύσσεται στη διατριβή αυτή, ακολουθείται μια άλλη μεθοδολογία η οποία οδηγεί, όπως έδειξε εκτεταμένη υπολογιστική εμπειρία, σε καλύτερα αποτελέσματα αφού σε όλες σχεδόν τις περιπτώσεις καταλήγει σε λιγότερες χρωματικές κλάσεις. Με τον όρο, καλύτερα αποτελέσματα, εννοείται ότι δίνει μικρότερο πλήθος χρωματικών κλάσεων. Η βασική ιδέα στη μεθοδολογία αυτή, βρίσκεται στη σειριακή διαδικασία επιλογής της κορυφής  $v$ , που για πρώτη φορά θα χρωματισθεί με νέο χρώμα, έστω  $x$ . Επιλέγεται λοιπόν για να χρωματισθεί με το χρώμα  $x$ , εκείνη η κορυφή που επιτρέπει να χρωματισθούν με το νέο χρώμα όσο γίνεται περισσότερες άχρωμες κορυφές.

Με  $Z(v)$  συμβολίζουμε το πλήθος των άχρωμων κορυφών που χρωματίζονται με το χρώμα που για πρώτη φορά χρωμάτισε την κορυφή  $v \in \bar{F}$ . Μ' άλλα λόγια,  $Z(v) = |H(v)|$  όπου  $H(v)$  περιέχει το μέγιστο πλήθος κορυφών που χρωματίστηκαν με το χρώμα  $c(v)$ , δηλαδή

$$Z(v) = \max\{|H(v)| : v \in \bar{F} \text{ και } H(v) \subseteq Q(v, \bar{F}) \text{ και } H(v) \cap \Gamma(v) = \emptyset\}.$$

Με  $Q(v, \bar{F})$  συμβολίζουμε το σύνολο των μη γειτονικών κορυφών της κορυφής  $v \in \bar{F}$ , στο υπογράφημα  $G(\bar{F})$ .

$$\text{Ισχύει, } Q(v, \bar{F}) = V - (\Gamma(v) \cup F) = \bar{F} - (\Gamma \bar{F}(v)).$$

## ΘΕΩΡΗΜΑ 2

Για  $v \in \bar{F}$ , το υποσύνολο  $H(v)$  είναι μείζον ανεξάρτητο σύνολο του γραφήματος  $G(\bar{F})$ .

## ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω ότι  $H(v)$  δεν είναι μείζον ανεξάρτητο υποσύνολο του  $\bar{F}$ . Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει μία τουλάχιστον κορυφή  $y \in \bar{F}$  έτσι ώστε  $\{y\} \cap \Gamma(H(v)) = \emptyset$ . Τότε όμως η  $y$  θα μπορούσε να χρωματισθεί με το χρώμα  $c(v)$ , γεγονός που αντιβαίνει στον ορισμό του υποσυνόλου  $H(v)$ .

Κάθε υποσύνολο  $H(v)$  αποτελείται από στοιχεία του  $Q(v, \overline{F})$  και πρέπει να είναι  $H(v) \cap \Gamma(H(v)) = \emptyset$ . Το πρόβλημα είναι, με ποιό τρόπο θα δημιουργηθεί το μείζον υποσύνολο  $H(v)$  του  $G(\overline{F})$ , που θα αποτελείται προφανώς από την κορυφή  $v$  και ένα υποσύνολο στοιχείων του  $Q(v, \overline{F})$ .

Μετά τη δημιουργία της χρωματικής κλάσης  $C_v$ , είναι επιθυμητό, οι υπόλοιπες άχρωμες κορυφές του γραφήματος να ορίζουν γράφημα  $G(\overline{F})$  όσο γίνεται πιο αραιό, σύμφωνα με το θεώρημα 1. Για το λόγο αυτό, οι κορυφές του υποσυνόλου  $Q(v, \overline{F}) = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  όπου  $k = |\overline{F}| - \deg_{\overline{F}}(v)$ , διατάσσονται έτσι ώστε

$$\deg_{\overline{F}}(v_i) \geq \deg_{\overline{F}}(v_j), \forall i, j \in \{1, 2, \dots, k\} \text{ και } i < j.$$

Έτσι η δημιουργία του συνόλου  $H(v)$  γίνεται με τη συνεχή προσθήκη, όπου αυτή είναι δυνατή, στοιχείων του  $Q(v, \overline{F})$  ξεκινώντας από την κορυφή  $v_1$  και ακολουθώντας την ορισθείσα διάταξη.

Όπως προαναφέρθηκε η κορυφή που θα επιλεγεί, είναι εκείνη στην οποία αντιστοιχεί η μεγαλύτερη τιμή  $|H(v)|$ . Στη διαδικασία επιλογής μιας τέτοιας κορυφής,  $L$ , ενδέχεται να υπάρχουν εναλλακτικές λύσεις. Μεταξύ των εναλλακτικών λύσεων, επιλέγουμε ως κορυφή  $L \in \overline{F}$ , την κορυφή εκείνη που έχει το μεγαλύτερο βαθμό στο υπογράφημα  $G(\overline{F})$ .

Δηλαδή,

$$\deg_{\overline{F}}(L) \geq \deg(v), v \in \overline{F} \text{ και } Z(L) = \max\{Z(x)\}.$$

$$x \in \overline{F}$$

Όλοι οι παραπάνω συλλογισμοί, για την εύρεση προσεγγιστικού χρωματικού αριθμού, συγκεντρώνονται στον αλγόριθμο A1E που ακολουθεί.

### 3.1.4. ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΑΙΕ

ΒΗΜΑ 1 (είσοδος δεδομένων)

Διάβασε τα  $n$  και  $\Gamma(x)$ , για κάθε  $x \in V = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ .

Θέσε  $F \leftarrow \emptyset$ ,  $\bar{F} \leftarrow V$ ,  $r \leftarrow 1$ .

ΒΗΜΑ 2 (δημιουργία του  $Q(v_i)$ )

Για κάθε  $v \in \bar{F}$ , θέσε  $Q(v, \bar{F}) \leftarrow \bar{F} - \Gamma_{\bar{F}}(v)$ .

Τα  $k = \deg_{\bar{F}}(v)$  στοιχεία διατάσσονται ώστε στο σύνολο

$Q(v, \bar{F}) = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  να ισχύει  $\deg_{\bar{F}}(v_i) \geq \deg_{\bar{F}}(v_j)$ ,

$\forall i, j \in \{1, 2, 3, \dots, k\}$  και  $i < j$ .

ΒΗΜΑ 3.0 (δημιουργία των συνόλων  $H(v)$ , για κάθε  $v \in \bar{F} = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ , όπου  $p = |\bar{F}|$ )

Θέσε  $i \leftarrow 1$ ,  $EN \leftarrow \emptyset$ .

ΒΗΜΑ 3.1 (εύρεση του  $H(v_i)$ )

Αν  $i > p$  τότε πήγαινε στο ΒΗΜΑ 4

αλλιώς, θέσε  $H(v) \leftarrow v$ ,  $NX \leftarrow -1$ ,  $MX \leftarrow -0$ .

ΒΗΜΑ 3.2

Αν  $Q(v, \bar{F}) = \emptyset$  πήγαινε στο ΒΗΜΑ 3.3

αλλιώς θέσε

$z = \min \{j \text{ ώστε } v_j \in Q(v, \bar{F}) \text{ και } \Gamma_{\bar{F}}(v_j) \cap H(v) = \emptyset\}$ ,

$$H(v) \leftarrow H(v) + \{v_z\}, Q(v, \bar{F}) \leftarrow Q(v, \bar{F}) - (\{v_z\} \cup \Gamma(v_z)),$$

$$NX \leftarrow NX + 1$$

και επανάλαβε το ΒΗΜΑ 3.2.

ΒΗΜΑ 3.3 (έλεγχος για  $\max |H(v)|$  και εναλλακτικών )

$$\text{Αν } NX = MX$$

θέσε  $EN \leftarrow EN \cup \{v_i\}$  και πήγαινε στο ΒΗΜΑ 3.4

αλλιώς αν  $NX > MX$

$$\text{θέσε } NX \leftarrow MX, EN \leftarrow \emptyset, EN \leftarrow \{v_i\}$$

και προχώρα στο επόμενο βήμα.

ΒΗΜΑ 3.4

Θέσε  $i \leftarrow i + 1$  και πήγαινε στο ΒΗΜΑ 3.1.

ΒΗΜΑ 4 (επιλογή μεταξύ εναλλακτικών  $H(v)$  με  $\max |H(v)|$  )

Επέλεξε την κορυφή  $L \in \bar{F}$  ώστε

$$\deg_{\bar{F}}(L) \geq \deg(v), v \in \bar{F}.$$

ΒΗΜΑ 5 (χρωματισμός κορυφών)

$$\text{Θέσε } C_r \leftarrow H(L).$$

ΒΗΜΑ 6 (έλεγχος τερματισμού)

Αν  $\bar{F} = \emptyset$ , εκτύπωσε τις χρωματικές κλάσεις

$$C_i, i=1,2,\dots,r \text{ και σταμάτα}$$

αλλιώς θέσε  $r \leftarrow r+1$  και πήγαινε στο ΒΗΜΑ 2.

Για να υλοποιηθούν οι ενέργειες των παραπάνω βημάτων, σε ηλεκτρονικό υπολογιστή, είναι απαραίτητο να χρησιμοποιηθούν κατάλληλες δομές δεδομένων και τεχνικές προγραμματισμού, οι οποίες περιγράφονται στην επόμενη παράγραφο.

### 3.1.5. ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ A1E

#### 3.1.5.1. Δομές δεδομένων-Τεχνικές προγραμματισμού

Ο παραπάνω αλγόριθμος A1E, υλοποιήθηκε σε πρόγραμμα H/Y, για να διαπιστωθεί η αποδοτικότητά του. Η παράγραφος αυτή, είναι αφιερωμένη στην παρουσίαση του τρόπου με τον οποίο το αντίστοιχο πρόγραμμα επεξεργάζεται και διαχειρίζεται τις μεταβλητές και τα σύνολα που υπεισέρχονται στον αλγόριθμο.

Το πλήθος των κορυφών του γραφήματος που έχει δοθεί, είναι  $n$ , το δε γράφημα αποθηκεύεται με τη μορφή πίνακα γειτνίασης, έστω  $ADJ(i,j)$ . Το στοιχείο  $ADJ(i,j)$  ισούται με 1 αν οι κορυφές  $i, j$  συνδέονται, διαφορετικά ισούται με 0. Τα υποσύνολα  $F$  και  $\bar{F}$  αποθηκεύονται σε ένα γραμμικό πίνακα  $P$ ,  $n$  στοιχείων. Τα στοιχεία του συνόλου  $F$  βρίσκονται στις θέσεις  $P(1), P(2), \dots, P(PN-1)$ . Τα στοιχεία του συνόλου  $\bar{F}$  βρίσκονται στις θέσεις  $P(PN), P(PN+1), \dots, P(N)$ . Ο διαχωρισμός των στοιχείων του  $P$ , σ' αυτά που ανήκουν στο  $F$  και σ' εκείνα που ανήκουν στο  $\bar{F}$ , γίνεται με τη βοήθεια ενός δείκτη  $PN$ , ο οποίος ενημερώνεται κατάλληλα.

Παράλληλα με τον πίνακα  $P$ , τηρείται και ενημερώνεται και ο γραμμικός πίνακας  $AP$ . Το στοιχείο  $AP(i)$ , δηλώνει τη θέση του στοιχείου  $i$  (κορυφή  $v_i$ ) στον πίνακα  $P$ .

Για παράδειγμα, έστω πίνακας  $P$  με 3 στοιχεία

$$P = \begin{bmatrix} & 1 & 2 & 3 \\ 2 & & & \\ & 3 & & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

τότε, ο αντίστοιχος AP είναι

$$AP = \begin{bmatrix} & 1 & 2 & 3 \\ & & & \\ 3 & & & \\ & 1 & & \\ & & & 2 \end{bmatrix}$$

Ο γραμμικός πίνακας F παρέχει την πληροφορία, αν μια κορυφή είναι ήδη χρωματισμένη και με ποιό χρώμα. Συγκεκριμένα, αν  $F(i) = 0$ , σημαίνει ότι η κορυφή  $i$ , σ' εκείνο το στάδιο, δεν έχει ακόμη χρωματισθεί. Αν όμως  $F(i) = j$ , τότε η κορυφή  $j$  έχει ήδη χρωματισθεί με το χρώμα  $j$ . Είναι φανερό ότι στο τέλος της διαδικασίας χρωματισμού, οι χρωματικές κλάσεις μπορούν εύκολα να ανακτηθούν από τον πίνακα F. Τα στοιχεία του πίνακα  $Q(v, \bar{F})$ ,  $v \in \bar{F}$  φυλάσσονται στον πίνακα λίστα  $Q(i,j)$ . Το πλήθος των στοιχείων της γραμμής  $i$ , φυλάσσεται στον γραμμικό πίνακα DQ. Δηλαδή,  $DQ(i)$  είναι το πλήθος των στοιχείων της γραμμής  $i$ , του πίνακα  $Q(i,j)$ . Τα στοιχεία του συνόλου H φυλάσσονται στις θέσεις  $H(1), H(2), \dots$  του γραμμικού πίνακα  $H(i)$ . Οι κορυφές, που αν επιλεγούν για να χρωματισθούν πρώτες με το νέο χρώμα, επιτρέπουν στο μέγιστο πλήθος άχρωμων κορυφών να χρωματισθούν με το ίδιο χρώμα, φυλάσσονται στις θέσεις  $EN(1), EN(2), \dots$  του γραμμικού πίνακα EN.

Οι μονοδιάστατοι πίνακες που προαναφέρθηκαν, περιέχουν το πολύ έως  $n$  στοιχεία ο καθένας. Ενώ οι διδιάστατοι πίνακες ADJ και Q είναι διαστάσεων,  $(n \times n)$  και  $(n \times (n-1))$  αντίστοιχα.

Στη συνέχεια παρουσιάζεται ο αλγόριθμος A1E, με τις μεταβλητές και τους πίνακες που προαναφέρθηκαν, ώστε να είναι δυνατός ο άμεσος προγραμματισμός του σε συμβολική γλώσσα προγραμματισμού (FORTRAN, PASCAL, BASIC, C++, ...).



ΒΗΜΑ 1 : (είσοδος δεδομένων)

διάβασε το n

θέσε  $NF \leftarrow 0, PN \leftarrow 1, NC \leftarrow 1, NN \leftarrow 0$

για I = 1 έως n

διάβασε DG(I)

θέσε  $P(I) \leftarrow I, AP(I) \leftarrow I, F(I) \leftarrow 0$

τέλος I

για I = 1 έως n

για J = 1 έως DG(I)

διάβασε G

θέσε  $ADJ(I,G) \leftarrow 1$

τέλος J

τέλος I

ΒΗΜΑ 1.1 : (δημιουργία πίνακα Q)

για I = 1 έως n

θέσε  $k \leftarrow 0$

για J = 1 έως n

αν I = J πήγαινε τέλος J

αν  $ADJ(I,J) = 0$

θέσε  $k \leftarrow k+1, Q(I,K) \leftarrow J$

τέλος J

θέσε  $DQ(I) \leftarrow k$

τέλος I

ΒΗΜΑ 2 : (ταξινόμηση των στοιχείων των γραμμών του νέου

πίνακα Q κατά αύξουσα τάξη)

για I = 1 έως n

αν  $F(I) \neq 0$  πήγαινε τέλος I

αλλιώς θέσε  $k \leftarrow 0$

για J = 1, ..., DQ(I)

αν  $F(Q(I,J)) = 0$

θέσε  $k \leftarrow k+1$ ,  $A(k) \leftarrow Q(I,J)$

τέλος J

θέσε  $DQ(I) \leftarrow k$ ,  $w \leftarrow k-1$ ,  $F \leftarrow 0$

$\alpha_1$  : για J = 1 έως w

αν  $DQ(A(J)) > DQ(A(J+1))$

θέσε  $Z \leftarrow A(J)$ ,  $A(J) \leftarrow A(J+1)$ ,  $A(J+1) \leftarrow Z$ ,  $F \leftarrow J$

τέλος J

αν  $F > 1$

θέσε  $W \leftarrow F-1$ ,  $F \leftarrow 0$

πήγαινε στην εντολή  $\alpha_1$

αλλιώς προχώρα στην επόμενη εντολή

για  $J=1$  έως  $k$

θέσε  $Q(I,J) \leftarrow A(J)$

τέλος  $J$

τέλος  $I$

ΒΗΜΑ 3 : (δημιουργία των πινάκων  $MFT(I)$ , για κάθε άχρωμη κορυφή)

θέσε  $MX \leftarrow 0, W \leftarrow 0$

για  $I=PN$  έως  $N$

θέσε  $NX \leftarrow 1, MFT(1) \leftarrow P(I)$

για  $J=1$  έως  $DQ(P(I))$

για  $k=1$  έως  $NX$

αν  $ADJ(Q(P(I), J), MFT(k)) = 1$

πήγαινε τέλος  $J$

αλλιώς πήγαινε στην επόμενη εντολή

τέλος  $k$

θέσε  $NX \leftarrow NX+1, MFT(NX) \leftarrow Q(P(I), J)$

τέλος  $J$

αν  $NX = MX$

θέσε  $W \leftarrow W+1, FT \leftarrow P(I)$

πήγαινε τέλος  $I$

αν  $NX > MX$

θέσε  $MX \leftarrow NX, W \leftarrow 1, FT(W) \leftarrow P(I)$

τέλος I

ΒΗΜΑ 4 : (επιλογή της άχρωμης κορυφής με το μεγαλύτερο βαθμό)

θέσε  $NFB \leftarrow N - PN + 1$ ,  $R \leftarrow 0$

για  $I = 1$  έως  $W$

θέσε  $Y \leftarrow NFB - DQ(FT(I))$

αν  $Y > R$

θέσε  $R \leftarrow Y$ ,  $L \leftarrow FT(I)$

τέλος I

θέσε  $U \leftarrow AP(L)$ ,  $R \leftarrow P(U)$ ,  $Y \leftarrow P(PN)$ ,

$P(U) \leftarrow Y$ ,  $P(PN) \leftarrow R$ ,  $AP(R) \leftarrow PN$ ,  $AP(Y) \leftarrow U$

ΒΗΜΑ 5 (χρωματισμός κορυφών)

θέσε  $F(P(PN)) \leftarrow NC$ ,  $NN \leftarrow NN + 1$ ,

$KNC \leftarrow 1$ ,  $KNC(1) \leftarrow P(PN)$

αν  $NN = N$  πήγαινε ΒΗΜΑ 6

αλλιώς για  $J = 1$  έως  $DQ(P(PN))$

θέσε  $Z \leftarrow Q(P(PN, J))$

αν  $F(Z) \neq 0$  πήγαινε τέλος J

αλλιώς για  $M = 1$  έως  $KNC$

αν  $ADJ(KNC(M), Z) = 1$

πήγαινε τέλος J

τέλος M

θέσε  $F(Z) \leftarrow NC, NN \leftarrow NN+1, PN \leftarrow PN+1,$

$U \leftarrow AP(Z), R \leftarrow P(U), Y \leftarrow P(PN),$

$P(U) \leftarrow Y, P(PN) \leftarrow R, AP(R) \leftarrow PN,$

$KNC \leftarrow KNC+1, KNC(KNC) \leftarrow Z$

$AP(Y) \leftarrow U$

αν  $NN=N$  πήγαινε ΒΗΜΑ 6

αλλιώς πήγαινε στην επόμενη εντολή

τέλος J

θέσε  $NC \leftarrow NC+1, PN \leftarrow PN+1$

πήγαινε ΒΗΜΑ 2

ΒΗΜΑ 6 : (τερματισμός)

για  $I = 1$  έως  $n$

θέσε  $P(I) \leftarrow 0$

τέλος I

για  $I = 1$  έως  $n$

θέσε  $J \leftarrow F(I), P(J) \leftarrow P(J)+1, Q(J, P(J)) \leftarrow I$

τέλος I

για  $I = 1$  έως  $NC$

τύπωσε I

για  $J=1$  έως  $P(I)$

τύπωσε  $Q(I,J)$

για  $J=1$  έως  $P(I)$

τύπωσε  $Q(I,J)$

τέλος  $J$

τέλος  $I$

ΤΕΡΜΑΤΙΣΜΟΣ.

### 3.1.6 Πολυπλοκότητα του Αλγορίθμου ΑΙΕ

Μετά την παρουσίαση του ΑΙΕ με μορφή βημάτων προγράμματος είναι φανερό ότι :

-στο ΒΗΜΑ 2 ο αλγόριθμος ταξινόμησης έχει πολυπλοκότητα  $O(n^2)$

-το ΒΗΜΑ 3 που αποτελείται από τρεις ανακυκλώσεις που αναφέρονται στις κορυφές του γραφήματος, έχει πολυπλοκότητα  $O(n^3)$

-το ΒΗΜΑ 4 έχει πολυπλοκότητα  $O(n)$

-το ΒΗΜΑ 5 έχει 2 ανακυκλώσεις, τη μια μέσα στην άλλη (εμφωλιασμένες) που αναφέρονται στις κορυφές του γραφήματος, άρα έχει πολυπλοκότητα  $O(n^2)$ .

Έτσι λοιπόν, η συνολική επεξεργασία των βημάτων από το ΒΗΜΑ 2 έως το ΒΗΜΑ 5 που αποτελούν τον κορμό του αλγορίθμου, έχει πολυπλοκότητα

$$O(n^2) + O(n^3) + O(n) + O(n^2).$$

Επειδή  $O(n) \subset O(n^2) \subset O(n^3)$  ισχύει

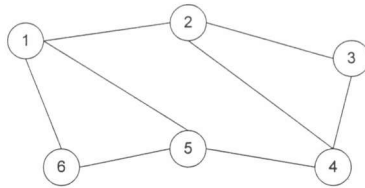
$$O(n^2) + O(n^3) + O(n) + O(n^2) \subset O(4n^3) = O(n^3).$$

Τα παραπάνω βήματα θα εκτελεστούν  $O(n)$  φορές άρα η συνολική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου είναι  $O(n^4)$ .

### 3.1.7 Παράδειγμα

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε σ' ένα μικρό γράφημα ένα παράδειγμα εφαρμογής του αλγορίθμου ΑΙΕ.

Έστω το γράφημα του παρακάτω σχήματος 3.1,  $G=(V,E)$  με  $|V|=6$ .



σχήμα 3.1

Ο αλγόριθμος αρχικά διαβάζει το γράφημα και δημιουργεί τον πίνακα γειτνίασης ADJ :

	0	1	0	0	1	1
	1	0	1	1	0	0
ADJ =	0	1	0	1	0	0
	0	1	1	0	1	0
	1	0	0	1	0	1
	1	0	0	0	1	0

Μετά δημιουργεί τον αρχικό πίνακα (μη γειτόνων) Q :

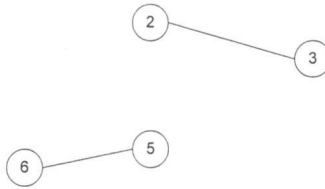
	3	4	
	5	6	
Q =	1	5	6
	1	6	
	2	3	
	2	3	4

Ο πίνακας αυτός ταξινομείται, σε κάθε γραμμή, κατά φθίνουσα σειρά βαθμού κορυφής και γίνεται έτσι :

	4	3	
	5	6	
Q =	1	5	6
	1	6	
	2	3	
	2	4	3

Στο αρχικό γράφημα όποια κορυφή κι αν επιλεγεί για να χρωματισθεί με το πρώτο χρώμα, θα χρωματίσει τον εαυτό της και μία ακόμη με το ίδιο χρώμα. Άρα υπάρχουν εναλλακτικές λύσεις στο ποια κορυφή είναι καλύτερο να χρωματισθεί με το πρώτο χρώμα. Απ' αυτές τις κορυφές, ο αλγόριθμος επιλέγει την κορυφή 1 επειδή είναι μία από τις κορυφές που στο αρχικό γράφημα G έχει το μεγαλύτερο βαθμό. Στη συνέχεια, αφού χρωματισθεί η κορυφή 1 με το χρώμα 1, ο αλγόριθμος επιλέγει να χρωματίσει με το ίδιο χρώμα τη μη γειτονική κορυφή της 1, την 4. Το γράφημα των άχρωμων κορυφών που απομένει, παρουσιάζεται στο παρακάτω σχήμα 3.2.





σχήμα 3.2

Και σ' αυτό το γράφημα όποια κορυφή κι αν επιλεγεί για να χρωματισθεί πρώτη με το δεύτερο χρώμα, χρωματίζει δύο κορυφές, τον εαυτό της και άλλη μία. Επίσης, όλες οι κορυφές είναι ομοιόβαθμες στο εναπομείναν γράφημα. Ο αλγόριθμος επιλέγει για να χρωματίσει με το χρώμα 2, πρώτα την κορυφή 3 και μετά την κορυφή 5. Το εναπομείναν γράφημα με τις άχρωμες κορυφές είναι τώρα το γράφημα του σχήματος 3.3.



σχήμα 3.3

Οι κορυφές 6 και 2 χρωματίζονται τώρα με το χρώμα 3. Στο σημείο αυτό, όπου όλες οι κορυφές έχουν χρωματισθεί με κάποιο χρώμα, ο αλγόριθμος τυπώνει τις χρωματικές κλάσεις που είναι

$$K_1 = \{1, 4\}$$

$$K_2 = \{3, 5\}$$

$$K_3 = \{2, 6\}$$

και σταματά.

## 3.2 ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΟΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ RADIO

### 3.2.1 ΡΑΔΙΟΧΡΩΜΑΤΙΣΜΟΣ-ΓΕΝΙΚΑ

Ο όρος ραδιοχρωματισμός ορίστηκε πρόσφατα από τον F. HARARY. Ο ραδιοχρωματισμός παρουσιάζει σημαντικό ενδιαφέρον τόσο από θεωρητικής πλευράς όσο και από πλευράς εφαρμογών κυρίως στην περιοχή των τηλεπικοινωνιών.

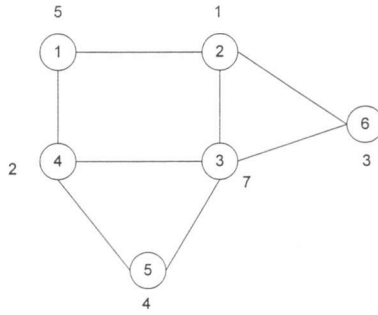
#### ΟΡΙΣΜΟΣ

Ένα γράφημα  $G=(V,E)$  είναι *ραδιοχρωματισμένο* αν κάθε κορυφή του  $i \in V$  έχει χρωματισθεί μ' ένα χρώμα  $c(i)$ , έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι παρακάτω συνθήκες :

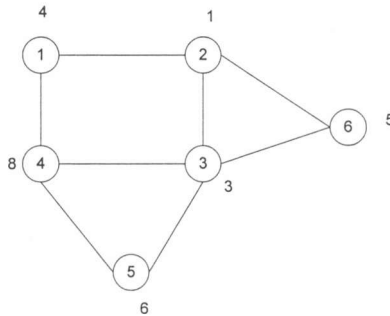
- i)  $|c(i) - c(j)| \geq 2$ , για κάθε  $(i, j) \in E$
- ii) αν  $d(i, j) = 2$  τότε  $c(i) \neq c(j)$ .

Το μικρότερο πλήθος χρωμάτων που απαιτείται για να ραδιοχρωματισθεί ένα γράφημα  $G$ , ονομάζεται *ραδιοχρωματικός αριθμός* του γραφήματος και συμβολίζεται με  $\rho\chi(G)$ . *Ραδιοχρωματική τιμή*  $\rho\chi_t(G)$ , είναι η μικρότερη δυνατή τιμή του μέγιστου απαιτούμενου χρώματος για να ραδιοχρωματισθεί το  $G$ . Το *ραδιοχρωματικό κόστος*  $\rho\chi_c(G)$ , ορίζεται αντίστοιχα όπως το χρωματικό κόστος που αναφέρθηκε στο κεφάλαιο 1.

Στα σχήματα 3.4 και 3.5 παρουσιάζονται δύο διαφορετικοί ραδιοχρωματισμοί του ίδιου γραφήματος.



σχήμα 3.4



σχήμα 3.5

Σε κάθε ραδιοχρωματισμό ενός δοσμένου γραφήματος  $G = (V,E)$  με  $V = n$  αντιστοιχεί μια ραδιοχρωματική αξία,  $\rho\chi\alpha(G,C)$ , όπου  $C$  είναι διάνυσμα και το στοιχείο  $c(i)$ ,  $i=1,2,\dots,n$  είναι το χρώμα που ανατέθηκε στην κορυφή  $i$ , όπως αναφέρθηκε και παραπάνω. Προφανώς ένα τέτοιο διάνυσμα ορίζει ένα ραδιοχρωματισμό. Η ραδιοχρωματική αξία είναι η τιμή του μεγαλύτερου χρώματος που ανατέθηκε σε κορυφή του  $G$ , δηλαδή,

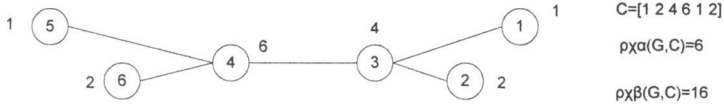
$$\rho\chi\alpha(G,C) = \max \{c(i), c(i) \in C \}.$$

Αντίστοιχα, ορίζεται για κάθε ραδιοχρωματισμό του  $G$  το ραδιοχρωματικό βάρος  $\rho\chi\beta(G,C)$  που εκφράζει το άθροισμα των τιμών των χρωμάτων που ανατέθηκαν στις κορυφές του  $G$ , δηλαδή,

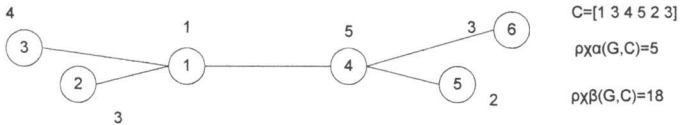
$$\rho\chi\beta(G,C) = \sum_{c(i) \in C} c(i).$$

Στο γράφημα του σχήματος 3.4, η ραδιοχρωματική αξία,  $\rho\chi\alpha(G,C) = 7$  αφού  $C = [5, 1, 7, 2, 4, 3]$  ενώ το ραδιοχρωματικό βάρος,  $\rho\chi\beta(G,C) = 22$ . Στο γράφημα του σχήματος 3.5, η ραδιοχρωματική αξία,  $\rho\chi\alpha(G,C) = 8$  αφού  $C = [4, 1, 3, 8, 6, 5]$  και το ραδιοχρωματικό βάρος,  $\rho\chi\beta(G,C) = 27$ .

Όπως φαίνεται στα παρακάτω σχήματα, ένα γράφημα με μικρότερη ραδιοχρωματική αξία δε σημαίνει ότι έχει αναγκαστικά και μικρότερο ραδιοχρωματικό βάρος. Ο ραδιοχρωματισμός στο σχ. 3.7, αν και έχει μικρότερη ραδιοχρωματική αξία από τον ραδιοχρωματισμό στο σχ. 3.6, έχει μεγαλύτερο ραδιοχρωματικό βάρος.



σχήμα 3.6



σχήμα 3.7

Έχουμε λοιπόν

$\rho\chi(G) = \min\{q, \text{όπου } C = [c_{(1)}, c_{(2)}, \dots, c_{(q)}]\}$  αντιστοιχεί σε ραδιοχρωματισμό του  $G$  }

$\rho\chi\tau(G) = \min\{\rho\chi\alpha(G,C), \text{για κάποιο ραδιοχρωματισμό } C \text{ του } G\}$

$\rho\chi\kappa(G) = \min\{\rho\chi\beta(G,C), \text{για κάποιο ραδιοχρωματισμό } C \text{ του } G\}$ .

### 3.2.2 ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ RADIO

Στη διατριβή αυτή θα παρουσιασθεί για πρώτη φορά μέχρι σήμερα, ένας προσεγγιστικός αλγόριθμος, ο RADIO, για την εύρεση του ραδιοχρωματικού αριθμού ενός γραφήματος  $G$  που έχει δοθεί.

Ο αλγόριθμος RADIO, ακολουθεί παραπλήσιους συλλογισμούς με αυτούς του A1E. Οι χρωματικές κλάσεις αναφέρονται σε χρώματα με περιττή αρίθμηση, δηλαδή στα 1,3,5,... Έτσι, η  $i$ -οστή κλάση, αντιστοιχεί στο χρώμα  $2i - 1$ . Ο δεύτερος περιορισμός, σύμφωνα με τον οποίο, δύο κορυφές που έχουν απόσταση 2 ακμές οφείλουν να έχουν διαφορετικό χρώμα, λαμβάνεται υπόψη στη διαδικασία δημιουργίας των συνόλων  $H(v)$ . Έτσι, το ΒΗΜΑ 3.2 του αλγορίθμου A1E, αντικαθίσταται από το παρακάτω ΒΗΜΑ 3.2, στον αλγόριθμο RADIO.

#### ΒΗΜΑ 3.2

Αν  $Q(v, \bar{F}) = \emptyset$  πήγαινε στο ΒΗΜΑ 3.3

αλλιώς θέσε

$$z \leftarrow \min \{ j \text{ ώστε } v_j \in Q(v, \bar{F}) \text{ και } d(v_j, v_k) > 2 \forall v_k \in H(v) \}$$

$$H(v) \leftarrow H(v) + \{v_z\}, Q(v, \bar{F}) \leftarrow Q(v, \bar{F}) - (\{v_z\} \cup \Gamma(v_z))$$

Θέσε  $NX \leftarrow NX + 1$  και επανάλαβε το ΒΗΜΑ 3.2

Επίσης, το ΒΗΜΑ 6 του αλγορίθμου A1E, αντικαθίσταται από το παρακάτω ΒΗΜΑ 6, στον αλγόριθμο RADIO.

ΒΗΜΑ 6 : ( έλεγχος τερματισμού )

Αν  $\bar{F} = \emptyset$ , τύπωσε τις χρωματικές κλάσεις

$C_{2i-1}, i = 1, 2, \dots, r$  και σταμάτα

αλλιώς θέσε  $r \leftarrow r+1$  και

πήγαινε στο ΒΗΜΑ 2.\_

### 3.2.3 ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ RADIO

#### 3.2.3.1 ΔΟΜΕΣ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ - ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

Η διαχείριση και η επεξεργασία των μεταβλητών και πινάκων στον αλγόριθμο RADIO γίνονται όπως στον αλγόριθμο A1E. Υπάρχει μια ουσιαστική διαφορά στην ενημέρωση του πίνακα  $ADJ(i,j)$ . Στη θέση  $ADJ(i,j)$  του πίνακα θέτουμε τον αριθμό 2 όταν η απόσταση των κορυφών  $i, j \in V$  ισούται με 2, δηλαδή  $d(i,j) = 2$ .

Η ενημέρωση του πίνακα  $ADJ(i,j)$  γίνεται στην αρχή του αλγορίθμου RADIO.

Ακολουθεί η παρουσίαση των βημάτων του αλγορίθμου RADIO ώστε να είναι δυνατός ο άμεσος προγραμματισμός του σε συμβολική γλώσσα προγραμματισμού, όπως έγινε και στον αλγόριθμο A1E.

#### 3.2.3.2 ΒΗΜΑΤΑ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ RADIO

ΒΗΜΑ 1 : (είσοδος δεδομένων)

διάβασε το  $n$

θέσε  $NF \leftarrow 0, PN \leftarrow -1, NC \leftarrow -1, NN \leftarrow 0$

για  $I = 1$  έως  $n$

διάβασε  $DG(I)$

θέσε  $P(I) \leftarrow I, AP(I) \leftarrow I, F(I) \leftarrow 0$

τέλος I

για I = 1 έως n

για J = 1 έως DG(I)

διάβασε G

θέσε  $ADJ(I,G) \leftarrow 1$ ,  $Q(I,J) \leftarrow G$

τέλος J

τέλος I

ΒΗΜΑ 1 : (είσοδος δεδομένων)

διάβασε το n

θέσε  $NF \leftarrow 0$ ,  $PN \leftarrow 1$ ,  $NC \leftarrow 1$ ,  $NN \leftarrow 0$

για I = 1 έως n

διάβασε DG(I)

θέσε  $P(I) \leftarrow I$ ,  $AP(I) \leftarrow I$ ,  $F(I) \leftarrow 0$

τέλος I

για I = 1 έως n

για J = 1 έως DG(I)

διάβασε G

θέσε  $ADJ(I,G) \leftarrow 1$ ,  $Q(I,J) \leftarrow G$

τέλος J

τέλος I

ΒΗΜΑ 1.0 : (ενημέρωση πίνακα ADJ)

για  $I = 1$  έως  $n$

για  $J = 1$  έως  $DG(I)$

θέσε  $L \leftarrow Q(I, J)$

για  $M = 1$  έως  $DG(L)$

αν  $Q(L, M) = I$  πήγαινε τέλος  $M$

αλλιώς θέσε  $ADJ(I, Q(L, M)) \leftarrow 2$

τέλος  $M$

τέλος  $J$

τέλος  $I$

ΒΗΜΑ 1.1 : (δημιουργία πίνακα  $Q$ )

για  $I = 1$  έως  $n$

θέσε  $k \leftarrow 0$

για  $J = 1$  έως  $n$

αν  $I = J$  πήγαινε τέλος  $J$

αν  $ADJ(I, J) \neq 1$

θέσε  $k \leftarrow k+1$ ,  $Q(I, K) \leftarrow J$

τέλος  $J$

θέσε  $DQ(I) \leftarrow k$

τέλος  $I$

ΒΗΜΑ 2 : (ταξινόμηση των στοιχείων των γραμμών του νέου



πίνακα Q κατά αύξουσα τάξη)

όπως το ΒΗΜΑ 2 στον αλγόριθμο A1E

ΒΗΜΑ 3 : (δημιουργία των πινάκων MFT(I), για κάθε άχρωμη κορυφή)

θέσε  $MX \leftarrow 0, W \leftarrow 0$

για  $I = PN$  έως  $N$

θέσε  $NX \leftarrow 1, MFT(1) \leftarrow P(I)$

για  $J = 1$  έως  $DQ(P(I))$

για  $k = 1$  έως  $NX$

αν  $ADJ(Q(P(I), J), MFT(k)) = 1$  ή  $2$

πήγαινε τέλος J

αλλιώς πήγαινε στην επόμενη εντολή

τέλος k

θέσε  $NX \leftarrow NX + 1, MFT(NX) \leftarrow Q(P(I), J)$

τέλος J

αν  $NX = MX$

θέσε  $W \leftarrow W + 1, FT(W) \leftarrow P(I)$

πήγαινε τέλος I

αν  $NX > MX$

θέσε  $MX \leftarrow NX, W \leftarrow 1, FT(W) \leftarrow P(I)$

τέλος I

ΒΗΜΑ 4 : (επιλογή της άχρωμης κορυφής με το μεγαλύτερο βαθμό)

όπως το ΒΗΜΑ 4 στον αλγόριθμο Α1Ε

ΒΗΜΑ 5 (χρωματισμός κορυφών)

θέσε  $F(P(PN)) \leftarrow NC$ ,  $NN \leftarrow NN+1$ ,

$KNC \leftarrow -1$ ,  $KNC(1) \leftarrow P(PN)$

αν  $NN=N$  πήγαινε ΒΗΜΑ 6

αλλιώς για  $J = 1$  έως  $DQ(P(PN))$

θέσε  $Z \leftarrow Q(P(PN,J))$

αν  $F(Z) \neq 0$  πήγαινε τέλος J

αλλιώς για  $M=1$  έως  $KNC$

αν  $ADJ(KNC(M),Z) = 1$  ή  $2$

πήγαινε τέλος J

τέλος M

θέσε  $F(Z) \leftarrow NC$ ,  $NN \leftarrow NN+1$ ,  $PN \leftarrow PN+1$ ,

$U \leftarrow AP(Z)$ ,  $R \leftarrow P(U)$ ,  $Y \leftarrow P(PN)$ ,

$P(U) \leftarrow Y$ ,  $P(PN) \leftarrow R$ ,  $AP(R) \leftarrow PN$ ,

$KNC \leftarrow KNC+1$ ,  $KNC(KNC) \leftarrow Z$

$AP(Y) \leftarrow U$

αν  $NN=N$  πήγαινε ΒΗΜΑ 6

αλλιώς πήγαινε στην επόμενη εντολή

τέλος J

θέσε  $NC \leftarrow NC+1$ ,  $PN \leftarrow PN+1$

πήγαινε ΒΗΜΑ 2

ΒΗΜΑ 6 : (τερματισμός)

για  $I = 1$  έως  $n$

θέσε  $P(I) \leftarrow 0$

τέλος  $I$

για  $I = 1$  έως  $n$

θέσε  $J \leftarrow F(I)$ ,  $P(J) \leftarrow P(J)+1$ ,  $Q(J,P(J)) \leftarrow 2I - 1$

τέλος  $I$

για  $I = 1$  έως  $NC$

τύπωσε  $I$

για  $J=1$  έως  $P(I)$

τύπωσε  $Q(I,J)$

τέλος  $J$

τέλος  $I$

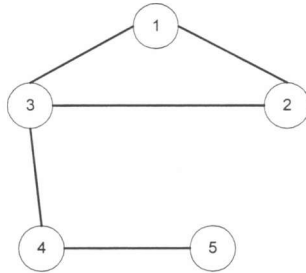
ΤΕΡΜΑΤΙΣΜΟΣ.

Μετά την παρουσίαση του αλγορίθμου RADIO με μορφή βημάτων προγράμματος είναι φανερό ότι αν ακολουθήσουμε την ανάλυση της παραγράφου 3.1.6 ο αλγόριθμος RADIO προκύπτει να έχει πολυπλοκότητα ίδια με αυτήν του A1E, δηλαδή  $O(n^4)$ .

### 3.2.4 Παράδειγμα

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε σ' ένα μικρό γράφημα ένα παράδειγμα εφαρμογής του αλγορίθμου RADIO.

Έστω το παρακάτω γράφημα του σχήματος 3.8,  $G=(V,E)$  με  $|V| = 5$ .



σχήμα 3.8

Ο αλγόριθμος αρχικά διαβάζει το γράφημα και δημιουργεί τον πίνακα γειτνίασης ADJ :

$$\text{ADJ} = \begin{pmatrix}
 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\
 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\
 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\
 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 2 & 1 & 0
 \end{pmatrix}$$

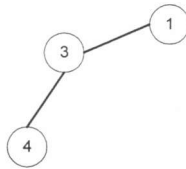
Μετά δημιουργεί τον αρχικό πίνακα Q :

$$\text{Q} = \begin{pmatrix}
 & 4 & 5 \\
 4 & 5 & \\
 5 & & \\
 1 & 2 & \\
 1 & 2 & 3
 \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας αυτός ταξινομείται και παραμένει ο ίδιος.

Στο αρχικό γράφημα, με το ίδιο χρώμα μπορούν να χρωματισθούν το πολύ δύο κορυφές. Οι κορυφές που αν επιλεγούν να χρωματισθούν με το πρώτο χρώμα 1, μπορούν να χρωματίσουν τον εαυτό τους και άλλη μία, είναι οι κορυφές 1, 2 και 5. Άρα, υπάρχουν εναλλακτικές λύσεις στο ποια κορυφή πρέπει να χρωματισθεί με το πρώτο χρώμα. Απ' αυτές, επιλέγεται ως πρώτη

κορυφή η κορυφή 2 γιατί είναι μία από τις κορυφές με το μεγαλύτερο βαθμό στο αρχικό γράφημα  $G$ . Στη συνέχεια, αφού χρωματισθεί η κορυφή 2 με το χρώμα 1, ο αλγόριθμος επιλέγει να χρωματίσει με το ίδιο χρώμα τη μη γειτονική κορυφή της 2 που ταυτόχρονα απέχει απόσταση από την 2 μεγαλύτερη από 2, την 5. Το γράφημα των άχρωμων κορυφών που απομένει, παρουσιάζεται στο παρακάτω σχήμα 3.9.



σχήμα 3.9

Σ' αυτό το γράφημα όποια κορυφή κι αν επιλεγεί για να χρωματισθεί πρώτη με το δεύτερο χρώμα, χρωματίζει μόνο μία κορυφή, τον εαυτό της. Η κορυφή 3 όμως έχει βαθμό 2 στο εναπομείναν γράφημα. Για το λόγο αυτό, ο αλγόριθμος επιλέγει να χρωματίσει με το χρώμα  $2 \cdot 2 - 1 = 3$ , πρώτα την κορυφή 3. Το εναπομείναν γράφημα με τις άχρωμες κορυφές είναι τώρα το γράφημα του σχήματος 3.10



σχήμα 3.10

Η κορυφή 4 επιλέγεται να χρωματισθεί με το επόμενο χρώμα  $2 \cdot 3 - 1 = 5$  και επειδή στον πίνακα ADJ το στοιχείο  $ADJ(4,1)=2$  η κορυφή 1 χρωματίζεται με το επόμενο χρώμα  $2 \cdot 4 - 1 = 7$ . Στο σημείο αυτό, όπου όλες οι κορυφές έχουν χρωματισθεί με κάποιο χρώμα, ο αλγόριθμος τυπώνει τις χρωματικές κλάσεις που είναι

$$K_1 = \{2, 5\}$$

$$K_3 = \{3\}$$

$K_5 = \{4\}$

$K_7 = \{1\}$

και σταματά.

### 3.3 ΜΙΑ ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ ΤΟΥ ΧΡΩΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

Μπορούμε να επεκτείνουμε τις έννοιες των προηγούμενων παραγράφων και να γενικεύσουμε τις έννοιες του χρωματισμού και του ραδιοχρωματισμού.

Έστω το γράφημα  $G=(V,E)$  και  $k, z$  δύο φυσικοί αριθμοί. Λέμε ότι το  $G$  είναι  $(k,z)$ -ραδιοχρωματισμένο αν για κάθε  $x, y \in V$  ικανοποιούνται οι παρακάτω συνθήκες :

α) όταν  $d(x, y) = 1$ , δηλαδή  $(x, y) \in E$ , τότε  $|c(x) - c(y)| \geq k$

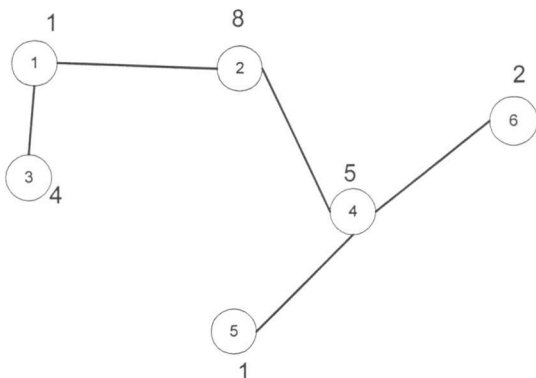
β) όταν  $d(x, y) \leq z$ , τότε  $c(x) \neq c(y)$ .

Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει εύκολα ότι ο απλός χρωματισμός ενός γραφήματος ισοδυναμεί με τον  $(1,1)$ -ραδιοχρωματισμό του και στην περίπτωση αυτή οι συνθήκες α) και β) ταυτίζονται. Όσο για το ραδιοχρωματισμό του, ισοδυναμεί με το  $(2,2)$ -ραδιοχρωματισμό του.

Η  $(k,z)$ -ραδιοχρωματική αξία,  $\chi_a(G,k,z,C)$  και το  $(k,z)$ -ραδιοχρωματικό βάρος,  $\chi_b(G,k,z,C)$  ορίζονται κατ' αντιστοιχία με τη ραδιοχρωματική αξία και το ραδιοχρωματικό βάρος. Όπως και στην περίπτωση του ραδιοχρωματισμού, το διάνυσμα  $C$ , ορίζει έναν  $(k,z)$ -ραδιοχρωματισμό.

Στα σχήματα 3.11 και 3.12, παρουσιάζονται δύο διαφορετικοί  $(k,z)$ -ραδιοχρωματισμοί του ίδιου γραφήματος, όπου  $k=3$  και  $z=2$ .



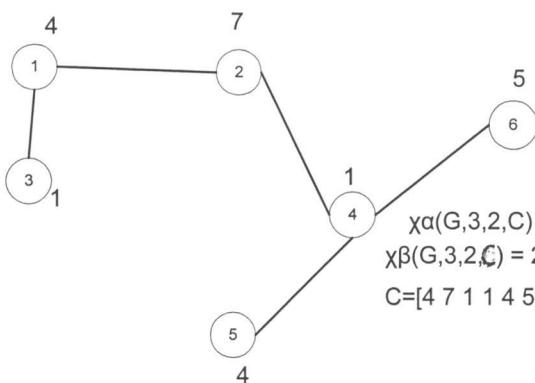


$$\chi_{\alpha}(G,3,2,C) = 8$$

$$\chi_{\beta}(G,3,2,C) = 21$$

$$C=[1 \ 8 \ 4 \ 5 \ 1 \ 2]$$

σχήμα 3.11



$$\chi_{\alpha}(G,3,2,C) = 7$$

$$\chi_{\beta}(G,3,2,C) = 22$$

$$C=[4 \ 7 \ 1 \ 1 \ 4 \ 5]$$

σχήμα 3.12

Παρατηρούμε ότι το  $(3,2)$ -ραδιοχρωματικό βάρος του ραδιοχρωματισμού του σχήματος 3.11, είναι μικρότερο από το  $(3,2)$ -ραδιοχρωματικό βάρος του ραδιοχρωματισμού του σχήματος 3.12, αν και η  $(3,2)$ -ραδιοχρωματική αξία του ραδιοχρωματισμού του σχήματος 3.11, είναι μεγαλύτερη από εκείνη του σχήματος 3.12.

Ο  $(k,z)$ -ραδιοχρωματικός αριθμός  $\chi(G,k,z)$ , η  $(k,z)$ -ραδιοχρωματική τιμή  $\chi_t(G,k,z)$  και το  $(k,z)$ -ραδιοχρωματικό κόστος  $\chi_c(G,k,z)$  ορίζονται κατ' αντιστοιχία με το ραδιοχρωματικό αριθμό, τη ραδιοχρωματική τιμή και το ραδιοχρωματικό κόστος.

Η ανάπτυξη αλγορίθμων για την εύρεση του προσεγγιστικού  $(k,z)$ -ραδιοχρωματικού αριθμού ακολουθεί παρόμοια διαδικασία με αυτήν του αλγορίθμου RADIO της προηγούμενης παραγράφου. Η ουσιαστική διαφοροποίηση βρίσκεται στο ΒΗΜΑ 3.2 του αλγορίθμου, όπου μια κορυφή  $v_j \in Q(v, \bar{F})$  δε μπορεί να αποτελεί στοιχείο του συνόλου  $H(v)$  αν ισχύει  $d(v_j, v_k) \leq z$ .

Σε ό,τι αφορά την ενημέρωση του αντίστοιχου πίνακα  $ADJ(i,j)$ , θέτουμε  $ADJ(i,j) = k$ , όταν η απόσταση των κορυφών  $i, j \in V$  είναι ίση με  $k$ , δηλαδή όταν  $d(i,j) = k$ .

### 3.4 ΜΙΑ ΑΛΛΗ ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ ΤΟΥ ΧΡΩΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

#### 3.4.1 ΓΕΝΙΚΑ

Έστω το γράφημα  $G=(V,E)$ . Σε κάθε ακμή του γραφήματος αντιστοιχίζουμε έναν αριθμό, που προδιορίζει το βάρος της αντίστοιχης ακμής. Δηλαδή, για κάθε  $(i,j) \in E$  υπάρχει ο αντίστοιχος  $w(i,j)$ . Έστω  $W$  το σύνολο των  $w(i,j)$ .

#### ΟΡΙΣΜΟΣ

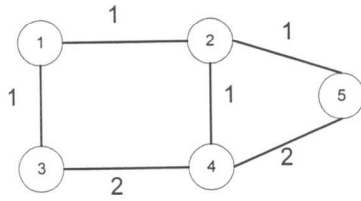
Ένα γράφημα είναι χρωματισμένο με «προκαθορισμένων διαφορών» χρωματισμό ή πιο σύντομα είναι  $W$ -χρωματισμένο αν είναι χρωματισμένο έτσι ώστε να ισχύει

$$|c(i) - c(j)| \geq w(i,j) \text{ για κάθε } (i,j) \in E.$$

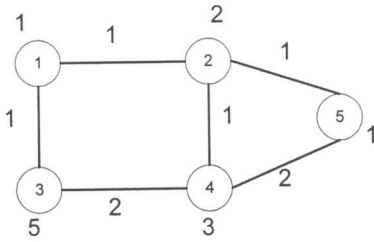
Εύκολα γίνεται αντιληπτό πως στην ειδική περίπτωση που ισχύει  $w(i,j) = 1$  για κάθε  $(i,j) \in E$ , δηλαδή  $W = \{1\}$ , ο  $W$ -χρωματισμός ταυτίζεται με το χρωματισμό.

Ο  $W$ -χρωματικός αριθμός  $W\text{-}\chi(G,W)$ , η  $W$ -χρωματική τιμή  $W\text{-}\chi(G,W)$  και το  $W$ -χρωματικό κόστος  $W\text{-}\chi(G,W)$  ορίζονται κατ' αντιστοιχία με το χρωματικό αριθμό, τη χρωματική τιμή και το χρωματικό κόστος.

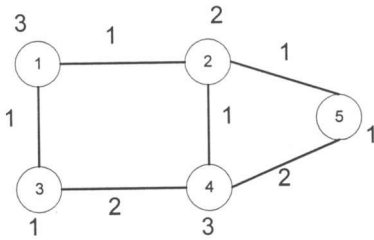
Στα σχήματα 3.14 και 3.15 παρουσιάζονται δύο «προκαθορισμένων διαφορών» χρωματισμοί δηλαδή δύο  $w$ -χρωματισμοί του γραφήματος  $G = (V,E)$  του σχήματος 3.13.



σχήμα 3.13



σχήμα 3.14



σχήμα 3.15

Στο σχ. 3.14  $\chi_a(G,W) = 5$  και  $\chi_c(G,W) = 12$  ενώ στο σχ.3.15  $\chi_t(G,W) = 4$  και  $\chi_c(G,W) = 12$ .

Προφανώς,  $\chi(G) \leq \chi(G,W)$ . Επειδή στο γράφημα του σχήματος 3.14 ο χρωματικός αριθμός είναι  $\chi(G) = 3$  εύκολα φαίνεται από το σχήμα 3.15 ότι  $\chi(G,W) = 3$ .

### 3.4.2 ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ W

Για την εύρεση του W-χρωματικού αριθμού, ο προσεγγιστικός αλγόριθμος W που ακολουθείται στην παρούσα διατριβή, ακολουθεί περίπου όμοια βήματα με αυτά του αλγορίθμου A1E.

Η ουσιαστική διαφοροποίηση βρίσκεται, όπως και στον αλγόριθμο RADIO, στη δημιουργία των συνόλων  $H(v)$ . Η κυρίαρχη σκέψη στον τρόπο δημιουργίας του  $H(v)$  είναι, η κορυφή που θα επιλεγεί για να χρωματισθεί πρώτη με το νέο χρώμα, να οδηγεί σε χρωματισμό με το χρώμα αυτό, όσο γίνεται περισσότερων άχρωμων κορυφών. Στο σημείο αυτό απαιτείται ένας επιπλέον έλεγχος για τις άχρωμες κορυφές. Αν, το νέο χρώμα και τα ήδη υπάρχοντα σε γειτονικές τους κορυφές χρώματα, πληρούν την προκαθορισμένη διαφορά χρωμάτων.

Στον αλγόριθμο W λοιπόν, το αντίστοιχο ΒΗΜΑ 3.2 του A1E, τροποποιείται έτσι

#### ΒΗΜΑ 3.2

Αν  $Q(v, \bar{F}) \neq \emptyset$  πηγαίνει στο ΒΗΜΑ 3.3

αλλιώς θέσει

$$z \leftarrow \min \{ j \text{ ώστε } v_j \in Q(v, \bar{F}) \wedge (\Gamma_{\bar{F}}(v_j) \cap H(v)) = \emptyset \wedge$$

$$r-c(v_k) \geq w(v_j, v_k) \text{ για κάθε } (v_k \in \Gamma_{\bar{F}}(v_j)) \}$$

$$H(v) \leftarrow H(v) + \{ v_z \},$$

$$Q(v, \bar{F}) \leftarrow Q(v, \bar{F}) - (\{ v_z \} \cup \Gamma(v_z)).$$

Θέσε  $NX \leftarrow NX + 1$  και επανάλαβε το ΒΗΜΑ 3.2.

### 3.4.3 ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ W

#### 3.4.3.1 ΔΟΜΕΣ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ – ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

Η ερμηνεία των μεταβλητών και πινάκων στον ΑΛΓΟΡΙΘΜΟ W, είναι ίδια όπως στον αλγόριθμο A1E, εκτός από τη δημιουργία του πίνακα ADJ(i,j).

Τον πίνακα αυτόν, τον δημιουργούμε στην αρχή του αλγορίθμου W, θέτοντας στη θέση ADJ(i,j), τον αριθμό  $w(i,j)$ , από τον οποίο θέλουμε η διαφορά  $c(i) - c(j)$ , να είναι μεγαλύτερη ή ίση, αν  $(i,j) \in E$ .

Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα βήματα του αλγορίθμου W ώστε να είναι δυνατός ο άμεσος προγραμματισμός του σε συμβολική γλώσσα προγραμματισμού όπως έγινε και στον αλγόριθμο A1E.

#### 3.4.3.2 ΒΗΜΑΤΑ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ W

ΒΗΜΑ 1 : (είσοδος δεδομένων)

διάβασε το n

θέσε  $NF \leftarrow 0, PN \leftarrow 1, NC \leftarrow 1, NN \leftarrow 0$

για  $I = 1$  έως n

διάβασε DG(I)

θέσε  $P(I) \leftarrow I, AP(I) \leftarrow I, F(I) \leftarrow 0$

τέλος I

για  $I = 1$  έως n

για  $I = 1$  έως  $n$

για  $J = 1$  έως  $DG(I)$

διάβασε  $G, W$

θέσε  $LIST(I, J) \leftarrow G, ADJ(I, G) \leftarrow 1$

τέλος  $J$

τέλος  $I$

ΒΗΜΑ 1.1 : (δημιουργία πίνακα  $Q$ )

όπως το ΒΗΜΑ 1.1 του αλγορίθμου A1E

ΒΗΜΑ 2 : (ταξινόμηση των στοιχείων των γραμμών του νέου

πίνακα  $Q$  κατά αύξουσα τάξη)

όπως το ΒΗΜΑ 2 του αλγορίθμου A1E

ΒΗΜΑ 3 : (δημιουργία των πινάκων  $MFT(I)$ , για κάθε άχρωμη κορυφή)

θέσε  $MX \leftarrow 0, W \leftarrow 0$

για  $I = PN$  έως  $N$

για  $JJ = 1$  έως  $DG(P(I))$

θέσε  $H \leftarrow LST(P(I), JJ)$

αν  $F(H) = 0$  πήγαινε τέλος  $JJ$

αν  $NC - F(H) < ADJ(P(I), H)$

θέσε  $BOOL \leftarrow 1$

πήγαινε στην εντολή α2

τέλος  $JJ$

θέσε  $BOOL \leftarrow 0$

α2 : αν  $BOOL = 1$  πήγαινε τέλος I

αλλοιώς πήγαινε στην επόμενη εντολή

θέσε  $NX \leftarrow 1, MFT(1) \leftarrow P(I)$

για  $J=1$  έως  $DQ(P(I))$

  για  $k=1$  έως  $NX$

    αν  $ADJ(Q(p(I), J), MFT(k)) = 1$

      πήγαινε τέλος J

    αλλοιώς πήγαινε στην επόμενη εντολή

  τέλος k

για  $JJ = 1$  έως  $DG(P(I))$

θέσε  $H \leftarrow LST(P(I), JJ)$

αν  $F(H) = 0$  πήγαινε τέλος JJ

αν  $NC - F(H) < ADJ(P(I), H)$

  θέσε  $BOOL \leftarrow 1$

  πήγαινε στην εντολή α3

  τέλος JJ

  θέσε  $BOOL \leftarrow 0$

α3 : αν  $BOOL = 1$  πήγαινε τέλος J

αλλοιώς πήγαινε στην επόμενη εντολή

θέσε  $NX \leftarrow N+1, MFT(NX) \leftarrow Q(P(I), J)$



τέλος J

αν  $NX = MX$

θέσε  $W \leftarrow W+1, FT \leftarrow P(I)$

πήγαινε τέλος I

αν  $NX > MX$

θέσε  $MX \leftarrow NX, W \leftarrow 1, FT(W) \leftarrow P(I)$

τέλος I

ΒΗΜΑ 4 : (επιλογή της άχρωμης κορυφής με το μεγαλύτερο βαθμό)

όπως το ΒΗΜΑ 4 του αλγορίθμου A1E

ΒΗΜΑ 5 (χρωματισμός κορυφών)

θέσε  $F(P(PN)) \leftarrow NC, NN \leftarrow NN+1,$

$KNC \leftarrow 1, KNC(1) \leftarrow P(PN)$

αν  $NN=N$  πήγαινε ΒΗΜΑ 6

αλλιώς για  $J = 1$  έως  $DQ(P(PN))$

θέσε  $Z \leftarrow Q(P(PN, J))$

αν  $F(Z) \neq 0$  πήγαινε τέλος J

αλλιώς για  $M=1$  έως  $KNC$

αν  $ADJ(KNC(M), Z) = 1$

πήγαινε τέλος J

τέλος M

για  $JJ = 1$  έως  $DG(P(I))$

θέσε  $H \leftarrow LST(P(I), JJ)$

αν  $F(H) = 0$  πήγαινε τέλος JJ

αν  $NC - F(H) < ADJ(P(I), H)$

θέσε  $BOOL \leftarrow 1$

πήγαινε στην εντολή α3

τέλος JJ

θέσε  $BOOL \leftarrow 0$

α3 : αν  $BOOL = 1$  πήγαινε τέλος J

αλλιώς πήγαινε στην επόμενη εντολή

θέσε  $F(Z) \leftarrow NC, NN \leftarrow NN+1, PN \leftarrow PN+1,$

$U \leftarrow AP(Z), R \leftarrow P(U), Y \leftarrow P(PN),$

$P(U) \leftarrow Y, P(PN) \leftarrow R, AP(R) \leftarrow PN,$

$KNC \leftarrow KNC+1, KNC(KNC) \leftarrow Z$

$AP(Y) \leftarrow U$

αν  $NN=N$  πήγαινε ΒΗΜΑ 6

αλλιώς πήγαινε στην επόμενη εντολή

τέλος J

θέσε  $NC \leftarrow NC+1, PN \leftarrow PN+1$

πήγαινε ΒΗΜΑ 2

ΒΗΜΑ 6 : (τερματισμός)

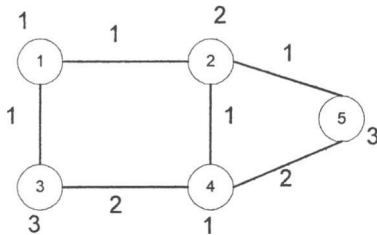
όπως το ΒΗΜΑ 6 του αλγορίθμου Α1Ε

Μετά την παρουσίαση του αλγορίθμου RADIO με μορφή βημάτων προγράμματος είναι φανερό ότι αν ακολουθήσουμε την ανάλυση της παραγράφου 3.1.6 ο αλγόριθμος W προκύπτει να έχει πολυπλοκότητα ίδια με αυτήν του A1E, δηλαδή  $O(n^4)$ .

### 3.4.4 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε σ' ένα μικρό γράφημα ένα παράδειγμα εφαρμογής του αλγορίθμου W.

Έστω το παρακάτω γράφημα του σχήματος 3.16  $G=(V,E)$  με  $|V| = 5$ .



σχήμα 3.16

Ο αλγόριθμος αρχικά διαβάξει το γράφημα και δημιουργεί τον πίνακα γειτνίασης ADJ:

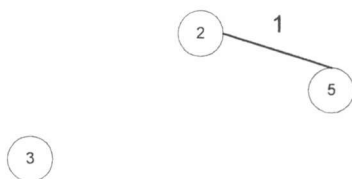
$$\text{ADJ} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Μετά δημιουργεί τον αρχικό πίνακα μη γειτόνων Q:

$$\text{Q} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ & 3 \\ 2 & 5 \\ & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Σε κάθε γραμμή του πίνακα αυτού, οι κορυφές ταξινομούνται κατά φθίνουσα σειρά βαθμού. Μετά την ταξινόμηση ο πίνακας παραμένει ίδιος.

Στο αρχικό γράφημα όποια κορυφή κι αν επιλεγεί για να χρωματισθεί με το πρώτο χρώμα, θα χρωματίσει τον εαυτό της και μία ακόμα με το ίδιο χρώμα. Άρα υπάρχουν εναλλακτικές λύσεις στο ποια κορυφή είναι καλύτερο να χρωματισθεί με το πρώτο χρώμα. Απ' αυτές τις κορυφές ο αλγόριθμος επιλέγει την κορυφή 4 επειδή είναι μία από τις κορυφές που στο αρχικό γράφημα έχουν το μεγαλύτερο βαθμό. Στη συνέχεια, αφού χρωματισθεί η κορυφή 4 με το χρώμα 1, ο αλγόριθμος επιλέγει να χρωματίσει με το ίδιο χρώμα τη μη γειτονική κορυφή της 4, την 1. Το γράφημα των άχρωμων κορυφών που απομένει, παρουσιάζεται στο παρακάτω σχήμα 3.17.



σχήμα 3.17

Σ' αυτό το γράφημα μόνο η κορυφή 2 μπορεί να χρωματισθεί με το χρώμα 2. Τα βάρη στις ακμές  $\{4,3\}$  και  $\{4,5\}$  δεν επιτρέπουν στις κορυφές 3 και 5 να χρωματισθούν με το χρώμα 2. Το εναπομείναν γράφημα με τις άχρωμες κορυφές είναι τώρα το γράφημα του σχήματος 3.18.



σχήμα 3.18

Οι κορυφές 5 και 3 χρωματίζονται τώρα με το χρώμα 3. Στο σημείο αυτό, όπου όλες οι κορυφές έχουν χρωματισθεί με κάποιο χρώμα, ο αλγόριθμος τυπώνει τις χρωματικές κλάσεις που είναι

$$K1=\{1,4\}$$

$$K2=\{2\}$$

$$K3=\{3,5\}$$

και σταματά.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

### ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΜΠΕΙΡΙΑ –ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ-ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

#### 4.1 ΓΕΝΙΚΑ

Ο αλγόριθμος A1E που παρουσιάστηκε στο κεφάλαιο 3, όπως και οι υπόλοιποι αλγόριθμοι που αναπτύχθηκαν στη συνέχεια, εφαρμόστηκαν σε τυχαία γραφήματα διαφόρων μεγεθών ώστε να εκτιμηθεί η αποτελεσματικότητά τους. Η υπολογιστική εμπειρία των αλγορίθμων αυτών έχει ενδιαφέρον και νόημα όταν αφορά συνεκτικά γραφήματα. Έτσι, θα αναπτύξουμε παρακάτω έναν αλγόριθμο ο οποίος δημιουργεί τυχαία συνεκτικά γραφήματα με δεδομένο αριθμό κορυφών και δεδομένη πυκνότητα, ώστε να διαπιστωθεί η αποδοτικότητα των αλγορίθμων που παρουσιάστηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο.

#### 4.2 ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑΣ ΤΥΧΑΙΩΝ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

##### 4.2.1 Γενικά

Η μεθοδολογία που ακολουθεί ο αλγόριθμος για τη δημιουργία ενός γραφήματος με  $n$  κορυφές και  $d$  πυκνότητα, είναι, να αφαιρεί το κατάλληλο πλήθος ακμών από το πλήρες γράφημα  $n$  κορυφών.

Για να εξασφαλισθεί η συνεκτικότητα του γραφήματος  $n$  κορυφών, που δημιουργούμε, φροντίζουμε η αφαίρεση των ακμών να γίνεται έτσι ώστε να διατηρείται ένα δένδρο κάλυμα  $n-1$  πλευρών.

Για την πιο αντικειμενική εκτίμηση της απόδοσης των αλγορίθμων που αναπτύσσονται στη διατριβή αυτή, χρησιμοποιούμε συνάρτηση ομοιόμορφης κατανομής για τον καθορισμό των βαθμών κάθε κορυφής του τυχαίου γραφήματος.

Είδαμε στο κεφάλαιο 2, ότι η πυκνότητα ενός γραφήματος, δίνεται από τη σχέση

$$d = 2e/[n(n-1)].$$

Άρα, το πλήθος των ακμών ενός γραφήματος με δεδομένα το πλήθος των κορυφών  $n$  και την πυκνότητα  $d$ , είναι

$$e = n(n-1)d/2$$

και το πλήθος των ακμών που πρέπει να αφαιρεθούν είναι

$$m = n(n-1)/2 - n(n-1)d/2 = n(n-1)(1-d)/2$$

αφού, το πλήθος των ακμών του πλήρους γραφήματος με  $n$  κορυφές είναι

$$n(n-1)/2.$$

Οι αριθμοί που εκφράζουν τις κορυφές  $\kappa$  και  $\lambda$ , που ορίζουν την ακμή  $(\kappa, \lambda) \in E$  και που δεν έχει αφαιρεθεί σε προηγούμενο στάδιο της διαδικασίας, δημιουργούνται με μια γεννήτρια συνάρτηση τυχαίων αριθμών, έστω την  $rd$ , στο διάστημα  $(0, 1)$ . Τέτοια συνάρτηση προσφέρεται σ' όλες τις συμβολικές γλώσσες προγραμματισμού.

Κάθε τυχαίος αριθμός  $r$  που δημιουργείται στο διάστημα  $(0, 1)$  αντιστοιχίζεται σ' έναν τυχαίο ακέραιο αριθμό του διαστήματος  $[1, n]$  [46], με τη σχέση

$$r = \lfloor (n-1)rd + 1.5 \rfloor.$$

Έστω ένα γράφημα  $G$  με  $n$  κορυφές.

Λήμμα : Το μερικό υπογράφημα  $S$  του  $G$ , με  $n-1$  ακμές, για το οποίο ισχύει  $(v_i, v_{i+1}) \in E$  για κάθε  $i=1,2,\dots,n-1$  είναι ένα δένδρο κάλυμμα.

Απόδειξη :

Για κάθε ζεύγος κορυφών  $v_i, v_j \in V$  υπάρχει πάντα ένα και μοναδικό μονοπάτι  $\Delta(v_i, v_j)$  που συνδέει τις κορυφές  $v_i, v_j$ . Πράγματι, έστω ότι  $i < j$  τότε στο  $S$  υπάρχει πάντα η ακολουθία  $(v_i, v_{i+1}, \dots, v_j)$  αφού  $(v_i, v_{i+1}) \in E \forall$

$$i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Θεώρημα :

Ο αλγόριθμος RG δημιουργεί πάντα συνεκτικά γραφήματα.

Η απόδειξη προκύπτει από το παραπάνω λήμμα

Οι παραπάνω συλλογισμοί συστηματοποιούνται στα βήματα που ακολουθούν.

#### 4.2.1 Αλγόριθμος RG

ΒΗΜΑ 1 : ( είσοδος δεδομένων , αρχικές συνθήκες)

Διάβασε το  $n$  και το  $d$ .

Θέσε  $G=(V,E) \leftarrow K_n$ ,  $m \leftarrow n(n-1)(1-d)/2$ ,

$p \leftarrow 0$ ,  $r \leftarrow$  γεννήτωρ αριθμός .

ΒΗΜΑ 2 : ( επιλογή τυχαίας ακμής)

Θέσε  $k \leftarrow \lfloor (n-1)rd + 1.5 \rfloor$ ,  $l \leftarrow \lfloor (n-1)rd + 1.5 \rfloor$ .

Αν  $|k-l| \leq 1$  επανάλαβε το ΒΗΜΑ 2.

ΒΗΜΑ 3 : (αφαίρεση ακμής)

Αν  $(k, l) \in E$  θέσε  $E \leftarrow E - \{(k, l)\}$  και πήγαινε στο ΒΗΜΑ 4

αλλιώς πήγαινε στο ΒΗΜΑ 2.

ΒΗΜΑ 4 : (έλεγχος τερματισμού)

Θέσε  $p \leftarrow p + 1$ .

Αν  $p = m$  πήγαινε στο ΒΗΜΑ 5

αλλιώς πήγαινε στο ΒΗΜΑ 2.

ΒΗΜΑ 5 : (εκτύπωση αποτελέσματος)

Τύπωσε το γράφημα  $G = (V, E)$  και σταμάτα.



#### 4.2.2 Προγραμματισμός αλγορίθμου RG

Στη συνέχεια ακολουθεί η παρουσίαση των βημάτων του αλγορίθμου RG ώστε να είναι δυνατός ο άμεσος προγραμματισμός του σε συμβολική γλώσσα προγραμματισμού.

Σημειώνεται ότι το γράφημα παριστάνεται με τον αντίστοιχο πίνακα γειτνίασης,  $LG(i, i)$ .

ΒΗΜΑ1: (αρχικές συνθήκες)

διάβασε  $R, n, D$

θέσε  $NQ \leftarrow N+1,$

$ND \leftarrow N*(N-1)$

για  $I=1$  έως  $n$

για  $J=1$  έως  $n$

θέσε  $LG(I,J) \leftarrow 1$

τέλος  $J$

τέλος  $I$

για  $I=1$  έως  $n$

θέσε  $LG(I,J) \leftarrow 0,$

$MR(I) \leftarrow n-1, MC(I) \leftarrow n-1$

τέλος  $I$

θέσε  $M \leftarrow \lfloor n(n-1)(1-D) \rfloor,$

$M \leftarrow \lfloor M/2 \rfloor,$

$MN \leftarrow 0,$

$T \leftarrow \text{RND}(R)$

BHMA2: (επιλογή τυχαίας ακμής και αφαίρεσή της)

θέσε  $K \leftarrow \lfloor (n-1)\text{RND}(R)+1.5 \rfloor$

αν  $\text{MR}(K)=1$  πήγαινε στο BHMA2

a1 θέσε  $L \leftarrow \lfloor (n-1)\text{RND}(R)+1.5 \rfloor$

αν  $\text{LG}(K,L)=0$  πήγαινε στο BHMA2

αν  $\text{MC}(L)=1$  ή  $\text{MC}(K)=1$  ή  $\text{MR}(L)=1$

πήγαινε στην a1

αλλιώς θέσε  $\text{LG}(K,L) \leftarrow 0$

$\text{LG}(L,K) \leftarrow 0$

$\text{MR}(K) \leftarrow \text{MR}(K)-1$

$\text{MR}(L) \leftarrow \text{MR}(L)-1$

$\text{MC}(K) \leftarrow \text{MC}(K)-1$

$\text{MC}(L) \leftarrow \text{MC}(L)-1$

$MN \leftarrow MN+1$

BHMA3: (έλεγχος τερματισμού)

αν  $MN \neq M$  πήγαινε στο BHMA2

αλλιώς πήγαινε στο επόμενο βήμα

BHMA4:

για  $I=1$  έως  $n$

για  $J=1$  έως  $n$

αν  $LG(I,J)=1$

θέσε  $AD(I) \leftarrow AD(I)+1,$

$LG(I,AD(I)) \leftarrow J$

τέλος  $J$

τέλος  $I$

ΒΗΜΑ5: (τερματισμός)

για  $I=1$  έως  $n$

για  $J=1$  έως  $AD(I)$

τύπωσε  $LG(I,J)$

τέλος  $J$

τέλος  $I$

ΤΕΡΜΑΤΙΣΜΟΣ .

#### 4.2.2 Παράδειγμα

Έστω ότι θέλουμε να δημιουργήσουμε ένα τυχαίο γράφημα 5 κορυφών με πυκνότητα 0.5. Ο αλγόριθμος αρχικά διαβάζει τον αριθμό των κορυφών και την πυκνότητα. Δημιουργεί έναν πίνακα γειτνίασης  $5 \times 5$  για ένα πλήρες γράφημα 5 κορυφών, τον LG.

$$\begin{array}{rcccc}
 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 \text{LG=} & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0
 \end{array}$$

Το πλήθος των ακμών που πρέπει να αφαιρεθούν είναι

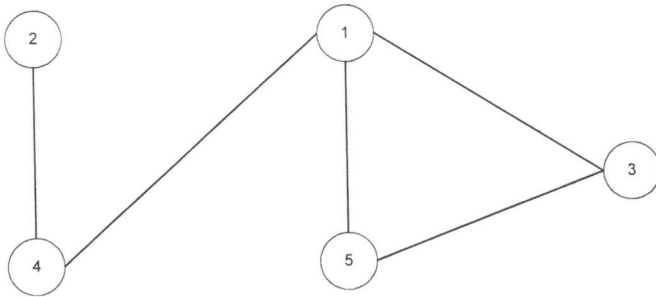
$$m = \lfloor n(n-1)(1-d)/2 \rfloor = 5.$$

Ο αλγόριθμος έστω ότι δημιουργεί τα παρακάτω αποδεκτά ζευγάρια δεικτών του πίνακα LG: (5,3), (1,3), (2,4), (1,4), (1,5).

Τελικά ο πίνακας γειτνίασης LG μετασχηματίζεται όπως παρακάτω.

$$\begin{array}{rcccc}
 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 \text{LG=} & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0
 \end{array}$$

Το τυχαίο γράφημα με 5 κορυφές και πυκνότητα 0.5 είναι το γράφημα του σχήματος 4.1.



σχήμα 4.1

### 4.3 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιάσουμε εφαρμογές που δεν εμφανίζονται στην αρθρογραφία-βιβλιογραφία και που αναφέρονται στους αλγόριθμους που αναπτύχθηκαν στο κεφάλαιο 3. Έτσι θα παρουσιάσουμε εφαρμογές που σχετίζονται με τους αλγορίθμους ΑΙΕ, RADIO.

#### 4.3.1 Εφαρμογή του ΑΙΕ στη διαχείριση διαδρόμων απογείωσης-προσγείωσης των αεροδρομίων

Η διαχείριση διαδρόμων απογείωσης-προσγείωσης σε ένα αεροδρόμιο είναι ένα σημαντικό πρόβλημα που έχει σχέση με θέματα όπως κόστος, αξιοπιστίας των αεροπορικών εταιρειών κ.λ.π. Γι αυτό και η διαχειριστή τους ανάλογα με τιθέμενα κριτήρια, έχει αποτελέσει θέμα μελέτης και έρευνας.

Η εφαρμογή που θα παρουσιάσουμε εδώ αναφέρεται στο κριτήριο της ταχύτερης ολοκλήρωσης των διαδικαδιών προσγείωσης και απογείωσης. [1,7,16,36,47,48].

Σε αεροδρόμια που έχουν πυκνή κίνηση υπάρχει σχετικά μεγάλο πλήθος από διαδρόμους απογείωσης-προσγείωσης. Ακόμη, λόγω της πυκνής κίνησης, πολλές φορές αεροπλάνα αναμένουν αρκετή ώρα είτε για να προσγειωθούν είτε για να απογειωθούν. Είναι προφανές ότι είναι σημαντικό, ο σχεδιασμός εξυπηρέτησης των αεροπλάνων (προσγείωση ή απογείωση) να πρέπει να γίνει κατά τέτοιον τρόπον ώστε η εξυπηρέτηση των αεροπλάνων να πραγματοποιείται στο λιγότερο δυνατό χρόνο. Έτσι, θα επιτυγχάνεται ταχύτερη εξυπηρέτηση των επιβατών και ταυτόχρονα μείωση του οικονομικού κόστους αναμονής (κατανάλωση καυσίμων κ.λ.π), μείωση της μόλυνσης του περιβάλλοντος, αποφυγή ψυχονευρωτικών φαινομένων και εξασφάλιση του κύρους του αεροδρομίου.

Όλα τα παραπάνω, παίζουν ακόμη μεγαλύτερο ρόλο όταν πρόκειται για αεροδρόμια μιας τουριστικής χώρας όπως είναι η Ελλάδα.

Η μείωση της αναμονής στην εξυπηρέτηση των αεροπλάνων, επιτυγχάνεται όταν η διαχείριση χρήσης των διαδρόμων γίνεται με στόχο να εξυπηρετούνται ταυτόχρονα όσο γίνεται πιο πολλά αεροπλάνα.

Η έννοια του χρωματικού αριθμού προσφέρει μια λύση στο παραπάνω πρόβλημα .

Έστω λοιπόν ένα αεροδρόμιο που διαθέτει  $n$  διαδρόμους απογείωσης-προσγείωσης. Οι διάδρομοι δεν είναι όλοι κατασκευασμένοι σε παράλληλη διάταξη, αφού στο σχεδιασμό τους λαμβάνονται υπόψη διάφοροι παράγοντες, όπως μορφολογία του εδάφους της γύρω περιοχής, συνήθης κατεύθυνση των ανέμων, ύπαρξη γειτονικών κατοικημένων περιοχών, κ.τ.λ. Γι αυτό υπάρχουν πάντα διάδρομοι οι οποίοι λόγω της διάταξής τους, δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν ταυτόχρονα.

Η απαγορευτική σχέση ταυτόχρονης χρήσης των διαδρόμων μπορεί να εκφραστεί με ένα γράφημα.

Κατασκευάζουμε ένα γράφημα  $G=(V,E)$  και αντιστοιχούμε σε κάθε κορυφή του ένα διάδρομο. Τα στοιχεία του συνόλου  $E$ , εκφράζουν ζεύγη διαδρόμων που η ταυτόχρονη χρήση τους είναι αμοιβαίως αποκλειόμενη. Το γράφημα  $G$  το ονομάζουμε γράφημα συμβατότητας. Ένα ανεξάρτητο σύνολο του γραφήματος αποτελείται από κορυφές που αντιστοιχούν σε διαδρόμους που μπορούν να χρησιμοποιηθούν ταυτόχρονα. Ονομάζουμε/ φάση κάθε ταυτόχρονη εξυπηρέτηση ενός αριθμού αεροπλάνων.

Η πραγματοποίηση όσο γίνεται λιγότερων φάσεων είναι ο ταχύτερος τρόπος για την καλύτερη αξιοποίηση των διαδρόμων από πλευράς εξυπηρέτησης.

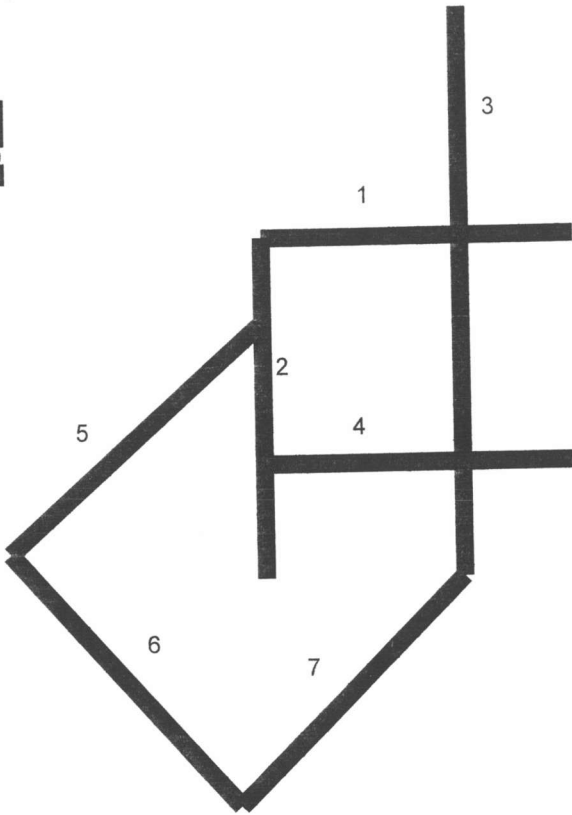
Έτσι λοιπόν, ο διαμερισμός των κορυφών του γραφήματος στο μικρότερο πλήθος ξένων μεταξύ τους ανεξάρτητων συνόλων, αντιστοιχεί στο μικρότερο αριθμό φάσεων που απαιτούνται για να εξυπηρετηθούν το γρηγορότερο τόσα αεροπλάνα όσα είναι οι διάδρομοι.

Ένας διαμερισμός όπως τον περιγράψαμε παραπάνω, έχει πλήθος ανεξάρτητων συνόλων που ταυτίζεται με το χρωματικό αριθμό του γραφήματος  $G$ . Γι αυτό η εύρεση του χρωματικού αριθμού  $\chi(G)$  του γραφήματος  $G$  εκφράζει την εύρεση του μικρότερου αριθμού φάσεων. Κάθε χρωματική κλάση εκφράζει τις κορυφές που αντιστοιχούν σε διαδρόμους απογείωσης-προσγείωσης οι οποίοι μπορούν να χρησιμοποιηθούν ταυτόχρονα. Στη συνέχεια εφαρμόζουμε τα παραπάνω σ' ένα μικρό παράδειγμα.

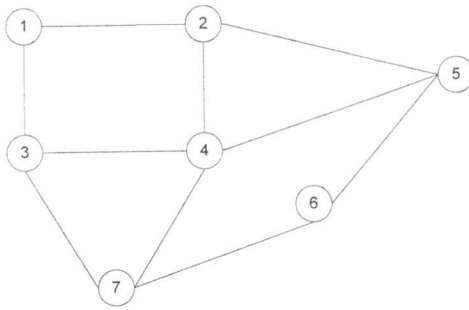
#### Παράδειγμα :

Το σχήμα 4.2 απεικονίζει 7 διαδρόμους, σ' ένα υποθετικό αεροδρόμιο. Το γράφημα του σχήματος 4.3 είναι το γράφημα συμβατότητας του αεροδρομίου μας. Τα σχήματα 4.4, 4.5, 4.6 δείχνουν 3 διαφορετικούς χρωματισμούς του  $G$ , με τις αντίστοιχες χρωματικές τους κλάσεις.

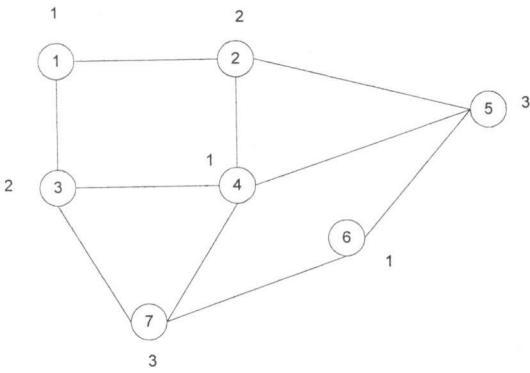




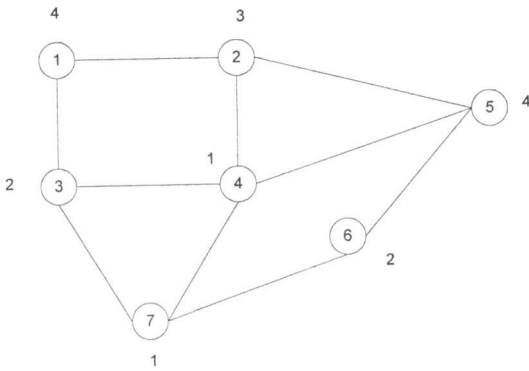
σχήμα 4.2



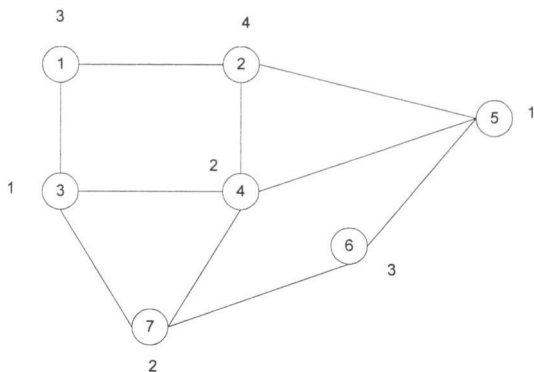
σχήμα 4.3



σχήμα 4.4



σχήμα 4.5



σχήμα 4.6

Το γράφημα αυτό έχει  $\chi(G)=3$ . Είναι προφανές ότι ο χρωματισμός του σχήματος 4.4, είναι συμφερότερος από τους άλλους αφού αντιστοιχεί στις λιγότερες δυνατές φάσεις.

#### 4.3.2 Εφαρμογή του AIE στη στέγαση συμβατών προϊόντων

Στο σχεδιασμό στέγασης προϊόντων σε αποθήκες, εμφανίζεται πολλές φορές η ανάγκη, να αποφευχθεί η ταυτόχρονη αποθήκευση, στον ίδιο χώρο, ενός συνδυασμού προϊόντων. Είτε για λόγους αλλοίωσης των προϊόντων είτε για λόγους πυρασφάλειας. Για παράδειγμα, οι αναθυμιάσεις των καπνών ή των λιπασμάτων, αν αποθηκευτούν με ευπαθή φρούτα, μπορεί να αλλοιώσουν την οσμή ή τη γεύση τους. Το βαμβάκι, επίσης δεν πρέπει να αποθηκεύεται μαζί με άλλα εύφλεκτα προϊόντα, προληπτικά για προστασία από τη φωτιά.

Ονομάζουμε *συμβατά* προϊόντα, εκείνα τα προϊόντα που μπορούν να αποθηκευτούν ταυτόχρονα στον ίδιο στεγαστικό χώρο. Με την προϋπόθεση

ότι δεν υπάρχει πρόβλημα χωρητικότητας στις αποθήκες, το πρόβλημα ανάγεται στο διαμερισμό των προϊόντων σε υποσύνολα συμβατών προϊόντων.

Μπορούμε να εκφράσουμε το πρόβλημα αυτό, γραφοθεωρητικά. Κατασκευάζουμε ένα γράφημα  $G = (V, E)$  με  $|V| = n$ , όπου  $n$  εκφράζει το πλήθος των διαφορετικών προϊόντων. Κάθε κορυφή του  $V$  αντιστοιχεί σε ένα προϊόν. Ενώνουμε με μια ακμή τις κορυφές  $v_i, v_j$  αν τα προϊόντα που αντιστοιχούν στις κορυφές αυτές δεν είναι συμβατά. Ένα ανεξάρτητο σύνολο κορυφών του  $V$  αντιστοιχεί σε προϊόντα που μπορούν να αποθηκευτούν ταυτόχρονα στην ίδια αποθήκη. Άρα μια οικογένεια ξένων μεταξύ τους, ανεξάρτητων συνόλων η ένωση των οποίων ισούται με  $V$ , είναι λύση για το πρόβλημα. Κάθε τέτοιο ανεξάρτητο σύνολο μπορεί να θεωρηθεί ως μια χρωματική κλάση κάποιου χρωματισμού του  $G$  και τα προϊόντα που αντιστοιχούν στις κορυφές κάθε χρωματικής κλάσης μπορούν να αποθηκευτούν ταυτόχρονα στην ίδια αποθήκη. Έτσι, για να αποθηκευτούν όλα τα προϊόντα στο μικρότερο πλήθος αποθηκών πρέπει να έχουμε τις λιγότερες χρωματικές κλάσεις, δηλαδή να χρωματίσουμε το  $G$  με τόσα χρώματα, όσα είναι ο χρωματικός του αριθμός,  $\chi(G)$ .

#### 4.3.3 Εφαρμογή του RADIO στην ανάθεση συχνοτήτων

Η διαχείριση του φάσματος ραδιοσυχνοτήτων με τον καλύτερο δυνατό τρόπο είναι ένα συνεχώς διογκούμενο πρόβλημα που μπορεί να έχει τοπικό χαρακτήρα ή εθνικό ή και παγκόσμιο. Σε κάθε περίπτωση, ο φορέας που διαχειρίζεται τις ραδιοσυχνότητες και έχει αρμοδιότητα να τις εκχωρεί, είτε είναι δημόσιος είτε ιδιωτικός, έχει κυρίως να αντιμετωπίσει το πρόβλημα της μη παρεμβολής των εκτεμπομένων συχνοτήτων.

Για προβλήματα μη παρεμβολής εκτεμπομένων συχνοτήτων ανάλογα με τιθέμενα κριτήρια, έχουν δημοσιευτεί σχετικές έρευνες [10,12,22,35,50].

Η μη παρεμβολή των συχνοτήτων ή η επικάλυψή τους εξαρτάται από τη μορφολογία του εδάφους της περιοχής στην οποία βρίσκονται οι σταθμοί

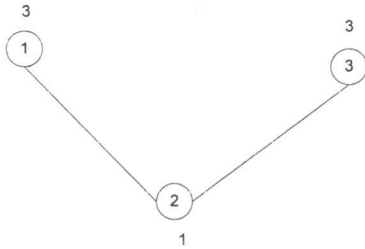
εκπομπής, από την ισχύ του πομπού, από την κατευθυντικότητα της κεραίας, από τις κλιματολογικές συνθήκες κ.λ.π.

Εδώ θεωρούμε ότι σε μια δεδομένη περιοχή υπάρχουν  $n$  σταθμοί εκπομπής σε σταθερά σημεία που έχουν κάποια απόσταση μεταξύ τους και ζητείται να τους εκχωρηθούν συχνότητες οι οποίες πρέπει να μην επικαλύπτουν η μία την άλλη. Στο πρόβλημα αυτό μπορεί να δώσει λύση η εφαρμογή του αλγορίθμου RADIO. Κατασκευάζουμε ένα γράφημα  $G=(V,E)$   $n$  κορυφών. Σε κάθε κορυφή αντιστοιχούμε ένα σταθμό εκπομπής. Συνδέουμε με γραμμή, κάθε ζεύγος κορυφών δηλαδή σταθμών εκπομπής που η άμεση απόστασή τους είναι τέτοια ώστε οι συχνότητές τους πρέπει να διαφέρουν κατά μία ποσότητα, έστω  $k=2$ , για να αποφευχθούν οι παρεμβολές. Αντιστοιχούμε τις συχνότητες που θα εκχωρηθούν, στα χρώματα χρωματισμού του γραφήματος. Όπως ήδη έχουμε πει χωρίς περιορισμό της γενικότητας, μπορούμε να απεικονίσουμε τα χρώματα με τους διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς  $1,2,3,\dots,n$ . Το φυσικό αριθμό που αντιστοιχεί σε κάποιο χρώμα με το οποίο έχει χρωματισθεί η κορυφή  $i \in V$ , το συμβολίζουμε με  $c(i)$ . Το πρόβλημα της ανάθεσης συχνοτήτων μπορεί να διατυπωθεί τώρα, ως πρόβλημα ραδιοχρωματισμού του γραφήματος  $G$ . Δηλαδή, σε κάθε κορυφή  $i$  του  $G$  θέλουμε να αντιστοιχίσουμε ένα χρώμα  $c(i)$  τέτοιο ώστε:

- i)  $|c(i) - c(j)| \geq 2$ , για κάθε  $(i, j) \in E$  και
- ii) αν  $d(i,j) = 2$  τότε  $c(i) \neq c(j)$

Είναι προφανές πως ο αριθμός 2 στη διαφορά των χρωμάτων στην περίπτωση των διαδοχικών κορυφών μπορεί να αντικατασταθεί με οποιονδήποτε άλλο φυσικό αριθμό.

Στην περίπτωση των κορυφών που έχουν απόσταση 2, πρέπει να τους έχει ανατεθεί διαφορετικό χρώμα, διότι σε άλλη περίπτωση, η κοινή γειτονική τους κορυφή θα δέχεται την ίδια συχνότητα από δύο πηγές δηλαδή ενισχυμένη, με αποτέλεσμα τη δημιουργία παρεμβολών, όπως φαίνεται στο σχήμα 4.6



σχήμα 4.6

Στο υπογράφημα του σχήματος 4.6 ικανοποιείται η πρώτη σχέση δεν ικανοποιείται όμως η δεύτερη. Αν η κορυφή 2 δεχόταν τη συχνότητα που αντιστοιχεί στο χρώμα 3 μόνο από την κορυφή 1 δε θα υπήρχαν προβλήματα παρεμβολής. Επειδή τη δέχεται όμως και από την κορυφή 3 ταυτόχρονα, η συχνότητα ενισχύεται και η παρεμβολή δεν μπορεί να αποφευχθεί.

#### 4.4 ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΜΠΕΙΡΙΑ

Ο προσεγγιστικός αλγόριθμος σειριακής διαδικασίας χρωματισμού που περιγράφεται στο Κεφάλαιο 2, στην παράγραφο 2.3.1 θεωρείται ο καλύτερος προσεγγιστικός αλγόριθμος για την εύρεση του χρωματικού αριθμού. Όπως επίσης αναφέρθηκε στην παραπάνω παράγραφο, στον αλγόριθμο αυτό μπορούν να γίνουν τροποποιήσεις ώστε η απόδοσή του να βελτιωθεί από πλευράς αποτελέσματος (πλήθος χρωμάτων). Κατά την υπολογιστική εμπειρία και την αντίστοιχη έρευνα που πραγματοποιήθηκε, παρατηρήθηκε ότι ο παραπάνω αλγόριθμος δίνει καλύτερα αποτελέσματα όταν στην επαναληπτική διαδικασία χρωματισμού με νέο χρώμα, επιλέγεται ως πρώτη κορυφή χρωματισμού με το νέο χρώμα, η κορυφή με το μεγαλύτερο βαθμό στο γράφημα με τις άχρωμες κορυφές. Για λόγους αξιολόγησης του αλγορίθμου A1E, ο προσεγγιστικός αλγόριθμος της παραγράφου 2.3.1 με την προσθήκη της παραπάνω διαδικασίας επιλογής της κορυφής που θα χρωματισθεί πρώτη με το νέο χρώμα, κωδικοποιήθηκε σε πρόγραμμα H/Y. Τον αλγόριθμο αυτό ονομάζουμε αλγόριθμο B. Επίσης κωδικοποιήθηκαν σε πρόγραμμα H/Y οι αλγόριθμοι A1E, RADIO και W. Όλες οι κωδικοποιήσεις έγιναν σε γλώσσα QBasic και δοκιμάστηκαν σε τυχαία γραφήματα που είχαν διαφορετικά μεγέθη. Σε κάθε περίπτωση το πλήθος των χρωματικών κλάσεων είναι ο μέσος όρος του πλήθους των χρωματικών κλάσεων, για 10 εκτελέσεις κάθε αλγόριθμου σε 10 διαφορετικά τυχαία γραφήματα. Το πλήθος των κλάσεων είναι σε όλες τις περιπτώσεις μια προσεγγιστική τιμή. Η απόκλιση των αποτελεσμάτων από το μέσο όρο ήταν πάντα ελάχιστη.

Οι πίνακες Π4.1 και Π4.2 περιέχουν το πλήθος των χρωματικών κλάσεων που προέκυψε από την εφαρμογή των αλγορίθμων B και A1E αντίστοιχα. Επίσης οι πίνακες Π4.3 και Π4.4 περιέχουν το μέσο όρο του χρωματικού κόστους για τα ίδια τυχαία γραφήματα που χρησιμοποιήθηκαν στους πίνακες Π4.1 και Π4.2. Με D συμβολίζεται η πυκνότητα του γραφήματος, ενώ με N το πλήθος των κορυφών.

Από τους πίνακες αυτούς προκύπτει ότι ο προσεγγιστικός αλγόριθμος Α1Ε υπερέχει του Β και στον προσδιορισμό του χρωματικού αριθμού αλλά και στον προσδιορισμό του χρωματικού κόστους.

ΠΙΝΑΚΑΣ Π4.1 ΧΡΩΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ ΜΕ ΤΟΝ Α1Ε

**D**

0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

**N**

25	3	4	6	6	6	8	9	11	15
50	4	6	7	9	10	12	15	18	23
75	5	8	9	12	14	16	21	24	31
100	7	9	11	14	16	21	25	31	39
125	7	10	12	16	21	24	29	35	45
150	7	11	15	18	23	26	34	42	55



ΠΙΝΑΚΑΣ Π4.2 ΧΡΩΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ ΜΕ ΤΟΝ Β

**D**

0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

**N**

25	3	4	6	6	8	9	9	12	15
50	4	7	9	10	12	14	16	20	25
75	5	8	10	14	16	19	23	29	35
100	6	10	12	16	20	23	28	33	42
125	7	11	15	19	23	29	31	42	55
150	8	13	17	22	27	39	41	50	59

ΠΙΝΑΚΑΣ Π4.3 ΧΡΩΜΑΤΙΚΟΥ ΚΟΣΤΟΥΣ ΜΕ ΤΟΝ ΑΙΕ

**D**

0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

N

25	42	53	57	66	80	99	112	138	166
50	105	136	175	211	241	282	335	425	544
75	179	259	317	391	469	577	675	797	1055
00	293	<b>391</b>	414	510	641	743	965	1125	1352
25	386	577	746	894	1151	1377	1677	2015	2632
50	513	773	1010	1245	1574	3738	2266	2786	3738

ΠΙΝΑΚΑΣ Π4.4 ΧΡΩΜΑΤΙΚΟΥ ΚΟΣΤΟΥΣ ΜΕ ΤΟΝ Β

**D**

0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

**N**

25	42	59	70	76	106	114	129	148	195
50	111	152	205	248	298	343	410	501	634
75	198	304	376	513	604	724	879	1057	1278
100	309	450	579	751	964	1126	1324	1670	2035
125	443	644	884	1139	1409	1668	1997	2457	3418
150	548	865	1207	1496	1834	4385	2906	3571	4385

Ακολουθούν οι πίνακες Π4.5 και Π4.6 που περιέχουν τα αποτελέσματα των αλγορίθμων RADIO και W για την εύρεση του προσεγγιστικού ραδιοχρωματικού αριθμού  $\rho\chi(G)$  και του προσεγγιστικού W-χρωματικού αριθμού  $W-\chi(G,W)$ . Τα αποτελέσματα αυτά δεν μπορούν να συγκριθούν με αποτελέσματα αντίστοιχων αλγορίθμων αφού δεν έχουν αναπτυχθεί μέχρι σήμερα σχετικοί αλγόριθμοι.

ΠΙΝΑΚΑΣ Π4.5 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ RADIO

		D				
		0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
N	25	6	11	20	24	25
	50	16	30	46	49	50
	75	23	51	75	75	75
	100	36	81	100	100	100
	125	46	109	124	125	125
	150	56	140	150	150	150

Από τον παραπάνω πίνακα φαίνεται ότι σε γραφήματα με ίδιο πλήθος κορυφών και πυκνότητα, το πλήθος των χρωματικών κλάσεων στην περίπτωση του αλγορίθμου RADIO είναι εμφανώς μεγαλύτερο από το πλήθος των χρωματικών κλάσεων που δημιουργούνται από τον αλγόριθμο AIE. Αυτό

δικαιολογείται αν σκεφτεί κανείς πως ο ραδιοχρωματισμός απαιτεί την ικανοποίηση περισσότερων περιορισμών απ' ότι ο απλός χρωματισμός.

Από την υπολογιστική εμπειρία επίσης διαπιστώνεται ότι για τυχαία γραφήματα με πυκνότητα  $D \geq 0.5$  και πλήθος κορυφών  $N > 25$ , το πλήθος των χρωμάτων που χρειάζεται για το ραδιοχρωματισμό τους ισούται με το πλήθος των κορυφών του γραφήματος.

ΠΙΝΑΚΑΣ Π4.6 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ W

<b>D</b>	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
----------	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

**N**

25	4	7	8	10	9	11	14	14	16
50	6	8	12	15	16	26	28	32	39
75	8	12	16	17	22	26	28	32	39
100	10	14	19	23	26	32	35	41	49
125	12	16	21	25	29	35	44	50	60
150	12	18	24	28	33	39	47	57	70

Τα βάρη των τυχαίων γραφημάτων που χρησιμοποιήθηκαν στην εκτέλεση του αλγορίθμου W είχαν τιμή 1 ή 2. Η σχέση του πλήθους  $\pi_1$  των

ακμών που είχαν βάρος 1 με το πλήθος  $\pi_2$  των ακμών που είχαν βάρος 2, είναι  $\pi_1 = \pi_2 \pm 2$ .

#### 4.5 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στη διατριβή αυτή αναπτύχθηκαν ευρετικοί αλγόριθμοι για διάφορους τρόπους χρωματισμού. Πιο συγκεκριμένα κατασκευάστηκε ο αλγόριθμος A1E για την εύρεση του χρωματικού αριθμού σε τυχαίο γράφημα, με καλή προσέγγιση. Από την υπολογιστική εμπειρία διαφαίνεται ότι ο αλγόριθμος αυτός δίνει καλύτερα αποτελέσματα, στις περισσότερες περιπτώσεις από τους αναφερόμενους στην αρθρογραφία-βιβλιογραφία αντίστοιχους αλγόριθμους. Ορίστηκε η πρόσφατη έννοια του ραδιοχρωματισμού ενός γραφήματος, όπως αυτή διατυπώθηκε από τον F. Harary [47] και αναπτύχθηκε για πρώτη φορά αλγόριθμος για τον προσεγγιστικό προσδιορισμό του ραδιοχρωματικού αριθμού. Στο κεφάλαιο 3, διατυπώθηκαν καινούργιες έννοιες σχετικές με το χρωματισμό. Οι έννοιες αυτές είναι το ραδιοχρωματικό κόστος και η ραδιοχρωματική τιμή που ο προσδιορισμός τους σε τυχαίο γράφημα είναι προφανώς πρόβλημα που ανήκει στην κατηγορία των NP-hard προβλημάτων. Επίσης επεκτάθηκε η έννοια του ραδιοχρωματισμού στην έννοια του  $(k, z)$ -ραδιοχρωματισμού. Ακόμη, ορίστηκε ο «προκαθορισμένων διαφορών» χρωματισμός για τυχαίο γράφημα που αποτελεί μια γενίκευση του χρωματισμού και αναπτύχθηκε αντίστοιχος αλγόριθμος για τον παραπάνω χρωματισμό. Στο κεφάλαιο 4, κατασκευάστηκε ένας νέος αλγόριθμος για τη δημιουργία συνεκτικών τυχαίων γραφημάτων τα οποία χρησιμοποιήθηκαν στην υπολογιστική εμπειρία. Ακόμη αναπτύχθηκαν νέες εφαρμογές του αλγόριθμου εύρεσης του χρωματικού αριθμού ενός γραφήματος, στην επίλυση προβλημάτων που ανάγονται σε προβλήματα χρωματισμού.

Η ανάπτυξη προσεγγιστικών αλγορίθμων για τα παρακάτω προβλήματα παρουσιάζουν ενδιαφέρον τόσο από θεωρητικής άποψης όσο και από πλευράς εφαρμογών. Λέμε προσεγγιστικών γιατί δεν αναμένεται να αναπτυχθούν ακριβείς αλγόριθμοι για τα προβλήματα αυτά:

1. Προσεγγιστικός προσδιορισμός του ραδιοχρωματικού κόστους σε τυχαίο γράφημα.
2. Προσεγγιστικός προσδιορισμός της ραδιοχρωματικής τιμής σε τυχαίο γράφημα.

3. Διερεύνηση του ραδιοχρωματικού αριθμού, κόστους και τιμής καθώς επίσης και του «προκαθορισμένων διαφορών» χρωματικού αριθμού, κόστους και τιμής για γραφήματα ειδικής μορφής.

4. Κατασκευή αλγορίθμων που σχετίζονται με τον  $(k,z)$ -ραδιοχρωματισμό.

5. Ανακατανομή του φάσματος ραδιοσυχνοτήτων για τη βελτιστοποίηση των εκχωρήσεων των συχνοτήτων με βάση κάποια κριτήρια, όπως ποιότητα σημάτων για κάθε τόπο, κόστος εκχώρησης συχνότητας κ.λ.π. Στην επίλυση του προβλήματος αυτού η ύπαρξη των αλγορίθμων ραδιοχρωματισμού και «προκαθορισμένων διαφορών» χρωματισμού είναι καθοριστική. Ακόμη οι αλγόριθμοι αυτοί μπορούν να χρησιμοποιηθούν αποτελεσματικά στο πρόβλημα εκχώρησης ίδιων ραδιοσυχνοτήτων σε διαφορετικούς χρήστες κατά διαφορετικές χρονικές περιόδους. Επίσης με τη χρήση του αλγορίθμου «προκαθορισμένων διαφορών» μια εταιρεία κινητής τηλεφωνίας μπορεί να εντοπίσει την καλύτερη θέση τοποθέτησης κεραιών για την κάλυψη μεγαλύτερης περιοχής ή ακόμη να μελετήσει το κόστος εγκατάστασης κεραιών σε σχέση με την έκταση της περιοχής κάλυψης.



## ΑΝΑΦΟΡΕΣ- ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] J. Abela, D. Abramson, M. Krishnamoorthy, A. De Silva and G. Mills, Computing Optimal Schedules for landing aircraft, Proc 12<sup>th</sup> National ASOR Conf, Adelaide, Australia, 1993, pp. 71-90.
- [2] A.V. Aho, J.E. Hopcroft and H.D.Ullman, The design and analysis of computer Algorithms, Addison-Wesley, 1974.
- [3] A.V. Aho, J.E. Hopcroft and H.D.Ullman, Data structures and algorithms, Addison-Wesley, 1983.
- [4] Appel K. and Haken W., Every planar map is four colorable, Illinois Journal of Mathematics, vol 21, 429-567, 1977.
- [5] J. L. Balcazar, J. Diaz, J. Gabarro, Structural Complexity I, Springer-Verlag, 1988.
- [6] Berge C., Theorie des graphes et ses applications, Dunod, Paris, 1962.
- [7] L. Bianco and A.R. Odoni (editors), Large scale computation and information processing in air traffic control, Springer-Verlag, 1993.
- [8] B. Bollobas, Graph theory, an introductory course, Springer-Verlag, 1979.
- [9] Bondy, A.J. – Murty, S.R., Graph theory with applications, The Macmillan Press LTD, 1976.
- [10] F. Box, A heuristic technique for assigning frequencies to mobile radio nets, IEEE Trans. Veh. Technol. Vol. VT-27, pp 57-74, May 1978.
- [11] F. Buckley, F. Harary, Distance in graphs, Addison-Wesley, 1990.
- [12] S. Cameron and Y. Wu, A frequency assignment algorithm based on a minimum residual difficulty heuristic, Proc. IEEE Int. Symp. EMC '79(CH 13839 EMC), p.p. 350-354, Oct. 1979.
- [13] T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest, Introduction to algorithms, The MIT Press, 1990.
- [14] Cristofides N., Graph theory an algorithmic approach, Academic press, 1975.
- [15] Deo, N., Graph theory with applications to engineering and computer science, Prentice Hall, Englewood Cliffs N.J., 1974.
- [16] Andreas T.Ernst, Mohan Krishnamoorthy, Robert H. Storer, Heuristic and Exact Algorithms for Scheduling Aircraft Landings, Networks 34 (1999), 229-241

- [17] Garey M.R. and D.S. Johnson, Computers and Intractability : A guide to the theory of NP-Completeness, 1979, Freeman, San Francisco.
- [18] Gibbons Alan, Algorithmic graph theory, Cambridge University Press, 1985.
- [19] Gionfriddo M., Harary F., Tuza Z., The color cost of a caterpillar, Discrete Mathematics, V174, n 1/3, 1997.
- [20] Golomb, W.S. – Baumert, D.L., Backtrack programming, Journ.Ass.Comp.Machin., vol.12, n 4, 516-524, 1965.
- [21] S.E. Goodman and S.T. Hedetniemi, Introduction to the design and analysis of algorithms, McGraw-Hill, 1977.
- [22] William K. Hale, Frequency assignment : Theory and applications, Proceedings of the IEEE, Vol. 68, No. 12, December 1980.
- [23] Harary F., Graph theory, Addison-Wesley, 1969.
- [24] Harary F., : προσωπική επικοινωνία.
- [25] Horowitz E.-Sahni S., Fundamentals of computer algorithms, Computer Science Press, 1978.
- [26] D.E. Knuth, The art of computer programming, Vol. 1 : Fundamental Algorithms, 2<sup>nd</sup> ed., Addison-Wesley, 1973.
- [27] D.E. Knuth, The art of computer programming, Vol. 3 : Sorting and Searching, Addison-Wesley, 1973.
- [28] D.E. Knuth, The art of computer programming, Vol. 2 : Seminumerical algorithms, Addison-Wesley, 1969.
- [29] E. Loukakis and C. Tsouros, A depth first search algorithm to generate the family of maximal independent sets of graph lexicographically, Computing, 27, 349-366, 1981.
- [30] Λουκάκης Μ., Δομές δεδομένων Αλγόριθμοι, Τόμος Α', Ιθάκη, 1987.
- [31] L. Lovasz, An algorithmic theory of numbers, graphs and convexity, Society for industrial and applied mathematics, 1986.
- [32] C. W. Marshall, Applied graph theory, Wiley-Interscience, 1971.
- [33] Michaels John G., Rosen Kenneth H., Applications of discrete mathematics, McGraw-Hill Inc., 1991.

- [34] Microsoft Corporation, Microsoft Quickbasic, manual, 1986.
- [35] Lawrence C. Middlekamp, Laboratory Division OCE, UHF TABOOS-History and development, IEEE Transactions on Consumer Electronics, Vol. CE-24, No. 4, November 1978.
- [36] J. Milan, The flow management problem in air traffic control: a model of assigning priorities for landings at a congested airport, Trans Plan Technol 20 (1997), 131-162.
- [37] Ore Oystein, The four-color problem, Academic Press, 1967.
- [38] Papadimitriou C., N., and Steiglitz K., Combinatorial Optimization : Algorithms and complexity, Prentice Hall, 1982.
- [39] Παπαθεοδώρου Θεόδωρος, Αλγόριθμοι-εισαγωγικά θέματα και παραδείγματα, Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών, 1999.
- [40] Παπαρίζος Κ., Ανάλυση πολυπλοκότητας αλγορίθμων και προβλημάτων, Πανεπιστημιακές παραδόσεις, Πανεπιστήμιο Μακεδονίας, 1994.
- [41] E.M. Reingold, J. Nievergelt and N. Deo, Combinatorial Algorithms : Theory and practice, Prentice Hall, 1977.
- [42] F. S. Roberts, Graph theory and its applications to problems of society, SIAM, 1978.
- [43] R.E.Tarjan, Data structures and network algorithms, CBMS-NSF, 1983.
- [44] A. M. Tenenbaum, M. J. Augenstein, Data structures using Pascal, Prentice-Hall, 1981.
- [45] Τσούρος Κ., Μείζονα ανεξάρτητα σύνολα της θεωρίας των γραφημάτων, (Θεωρία-Αλγόριθμοι), Διδακτορική Διατριβή, Θεσσαλονίκη 1980.
- [46] Τσούρος Κ., Αλγόριθμοι-Προγράμματα-Εφαρμογές με Basic, Εκδόσεις «Ζυγός», 1995.
- [47] C.S. Venkatakrisnan, A. Barnett and A.R. Odoni, Landings at logan airport : Describing and increasing airport capacity, Trans Sci 27 (1993), 211-227.
- [48] H. Winter and H.G. Nuber (Editors), Advanced Technologies for air traffic flow, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [49] Wood D. C., A technique for colouring a graph applicable to large scale timetabling problem, The computer Jl., 12, p 317, 1969.

[50] J. A. Zoellner and C.L. Beall, A breakthrough in spectrum conserving frequency assignment technology, IEEE Trans. Electromagn. Compat., vol EMC-19, pp 313-319, Aug. 1977.

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

REM -----A1E-----

REM -----

OPEN "I", 1, "C:\YPO\DCOL.DAT"

INPUT #1, N, D

NQ = N + 1

NF = 0

PN = 1

NC = 1

NN = 0

KK = 1

DIM F%(N), DG%(NQ), P%(N), ADJ%(N, N), Q%(N, N), DQ%(N), FT%(N), MFT%(N)

DIM A%(N), KNC%(N), AP%(N)

FOR I = 1 TO N

INPUT #1, DG%(I)

P%(I) = I

AP%(I) = I

NEXT

FOR I = 1 TO N

FOR J = 1 TO DG%(I)

INPUT #1, G

ADJ%(I, G) = 1

NEXT J

NEXT I

FOR I = 1 TO N

K = 0

FOR J = 1 TO N

IF I = J THEN 130

IF ADJ%(I, J) = 0 THEN K = K + 1: Q%(I, K) = J

NEXT

DQ%(I) = K

NEXT I

T\$ = TIME\$

GOSUB 610

T1 = T

GOSUB 500

GOSUB 370

L = P%(PN)

F%(L) = NC

NN = NN + 1

KNC = 1

KNC%(1) = L

IF NN = N THEN 280

FOR J = 1 TO DQ%(L)

Z = Q%(L, J)

FOR M = 1 TO KNC

X = KNC%(M)

IF ADJ%(X, Z) = 1 THEN 270

NEXT M

F%(Z) = NC

NN = NN + 1

PN = PN + 1

U = AP%(Z)

R = P%(U)

Y = P%(PN)

P%(U) = Y

P%(PN) = R

AP%(R) = PN

AP%(Y) = U

KNC = KNC + 1

KNC%(KNC) = Z

IF NN = N THEN 280

NEXT J

NC = NC + KK

PN = PN + 1

```

GOTO 170
T$ = TIMES$
GOSUB 610
T2 = T
TT = T2 - T1
FOR I = 1 TO N
    P%(I) = 0
NEXT
XM = N / NC
DEV = 0
FOR I = 1 TO N
    J = F%(I)
    P%(J) = P%(J) + 1
    Q%(J, P%(J)) = I
NEXT
FOR I = 1 TO NC STEP KK
    PRINT I; " ) ";
    DEV = DEV + ABS(P%(I) - XM)
    FOR J = 1 TO P%(I)
        PRINT TAB(5 * J + 5); Q%(I, J);
    NEXT
    PRINT
NEXT
PRINT
PRINT "A1E "; " N = "; N; " D="; D; TAB(30); "CHROMATIC NUMBER = ";
PRINT TAB(60); "TIME = "; TT; "SEC"
END
REM *****
MX = 0
W = 0
FOR I = PN TO N
    X = P%(I)
    NX = 1
    MFT%(1) = X
    FOR J = 1 TO DQ%(X)
        Z = Q%(X, J)
        FOR K = 1 TO NX
            V = MFT%(K)
            IF ADJ%(Z, V) = 1 THEN 450
        NEXT K
        NX = NX + 1
        MFT%(NX) = Z
    NEXT J
    IF NX = MX THEN W = W + 1: FT%(W) = X: GOTO 470
    IF NX > MX THEN MX = NX: W = 1: FT%(W) = X
NEXT I
NFB = N - PN + 1
R = 0
FOR I = 1 TO W
    Y = NFB - DQ%(FT%(I))
    IF Y > R THEN R = Y: L = FT%(I)
NEXT I
U = AP%(L)
R = P%(U)
Y = P%(PN)
P%(U) = Y
P%(PN) = R
AP%(R) = PN
AP%(Y) = U
RETURN
REM *****SORT ARRAY Q *****
FOR I = 1 TO N
    IF F%(I) <> 0 THEN 526
    NM = DQ%(I)

```

```

K = 0
FOR J = 1 TO NM
  Z = Q%(I, J)
  IF F%(Z) = 0 THEN K = K + 1: Q%(I, K) = Z
NEXT J
DQ%(I) = K
6 NEXT I
FOR I = 1 TO N
  NM = DQ%(I)
  FOR J = 1 TO NM
    Z = Q%(I, J)
    A%(J) = Z
  NEXT J
  W = NM - 1
  F = 0
  FOR J = 1 TO W
    X1 = DQ%(A%(J))
    X2 = DQ%(A%(J + 1))
    IF X1 > X2 THEN Z = A%(J): A%(J) = A%(J + 1): A%(J + 1) = Z: F =
  NEXT J
  IF F > 1 THEN W = F - 1: GOTO 530
  FOR J = 1 TO NM
    Q%(I, J) = A%(J)
  NEXT
NEXT I
RETURN
10 REM *****
T = 3600 * VAL(LEFT$(T$, 2)) + 60 * VAL(MID$(T$, 3, 2)) + VAL(RIGHT$(T$,

```



```

REM          -----RADIO-----
REM -----
OPEN "I", 1, "C:\YPO\DCOL.DAT"
INPUT #1, N, D
NQ = N + 1
NF = 0
PN = 1
NC = 1
NN = 0
KK = 1
DIM F(N), DG(NQ), P(N), ADJ%(N, N), Q%(N, N), DQ%(N), FT(N), MFT(N), AP(N)
DIM A(N), KNC(N)
FOR I = 1 TO N
    INPUT #1, DG(I)
    P(I) = I
    AP(I) = I
NEXT I
FOR I = 1 TO N
    FOR J = 1 TO DG(I)
        INPUT #1, G
        ADJ%(I, G) = 1
        Q%(I, J) = G
    NEXT J
NEXT I
GOSUB 780
FOR I = 1 TO N
    K = 0
    FOR J = 1 TO N
        IF I = J THEN 140
        IF ADJ%(I, J) <> 1 THEN K = K + 1: Q%(I, K) = J
    NEXT J
    DQ%(I) = K
NEXT I
T$ = TIMES$
GOSUB 760
T1 = T
GOSUB 570
GOSUB 390
L = P(PN)
F(L) = NC
NN = NN + 1
KNC = 1
KNC(1) = L
IF NN = N THEN 290
FOR J = 1 TO DQ%(L)
    Z = Q%(L, J)
    IF F(Z) <> 0 THEN 280
    FOR M = 1 TO KNC
        X = KNC(M)
        IF ADJ%(Z, X) = 1 OR ADJ%(Z, X) = 2 THEN 280
    NEXT M
    F(Z) = NC
    NN = NN + 1
    PN = PN + 1
    U = AP(Z)
    R = P(U)
    Y = P(PN)
    P(U) = Y
    P(PN) = R
    AP(R) = PN
    AP(Y) = U
    KNC = KNC + 1
    KNC(KNC) = Z
    IF NN = N THEN 290

```

```

00 NEXT J
   NC = NC + KK
   PN = PN + 1
   GOTO 180
00 T$ = TIME$
   GOSUB 760
   T2 = T
   TT = T2 - T1
   FOR I = 1 TO N
     P(I) = 0
   NEXT
   XM = N / NC
   DEV = 0
   FOR I = 1 TO N
     J = F(I)
     P(J) = P(J) + 1
     Q%(J, P(J)) = I
   NEXT
   FOR I = 1 TO NC STEP KK
     PRINT I; " ) ";
     DEV = DEV + ABS(P(I) - XM)
     FOR J = 1 TO P(I)
       PRINT TAB(5 * J + 5); Q%(I, J);
     NEXT
     PRINT
   NEXT
   PRINT
   PRINT "RADIO "; " N = "; N; " D="; D; TAB(30); "CHROMATIC NUMBER = "; N
   PRINT TAB(60); "TIME = "; TT; "SEC"
   END
   REM *****
00 MX = 0
   W = 0
   FOR I = PN TO N
     X = P(I)
     NX = 1
     MFT(1) = X
     FOR J = 1 TO DQ%(X)
       Z = Q%(X, J)
       IF F(Z) <> 0 THEN GOTO 470
       FOR K = 1 TO NX
         V = MFT(K)
         IF ADJ%(Z, V) = 1 OR ADJ%(Z, V) = 2 THEN 470
       NEXT K
       NX = NX + 1
       MFT(NX) = Z
     NEXT J
     IF NX = MX THEN W = W + 1: FT(W) = X: GOTO 500
     IF NX > MX THEN MX = NX: W = 1: FT(W) = X
00 NEXT I
   NFB = N - PN + 1
   R = 0
   FOR I = 1 TO W
     Y = NFB - DQ%(FT(I))
     IF Y > R THEN R = Y: L = FT(I)
   NEXT I
   U = AP(L)
   R = P(U)
   Y = P(PN)
   P(U) = Y
   P(PN) = R
   AP(R) = PN
   AP(Y) = U
   RETURN

```

```

0 REM *****SORT ARRAY Q *****
  FOR I = 1 TO N
    IF F(I) <> 0 THEN 620
    NM = DQ%(I)
    K = 0
    FOR J = 1 TO NM
      Z = Q%(I, J)
      IF F(Z) = 0 THEN K = K + 1: Q%(I, K) = Z
    NEXT J
    DQ%(I) = K
20 NEXT I
  FOR I = 1 TO N
    NM = DQ%(I)
    FOR J = 1 TO NM
      Z = Q%(I, J)
      A(J) = Z
    NEXT J
    W = NM - 1
    F = 0
    FOR J = 1 TO W
      X1 = DQ%(A(J))
      X2 = DQ%(A(J + 1))
      IF X1 > X2 THEN Z = A(J): A(J) = A(J + 1): A(J + 1) = Z: F = J
    NEXT J
    IF F > 1 THEN W = F - 1: GOTO 660
    FOR J = 1 TO NM
      Q%(I, J) = A(J)
    NEXT
  NEXT I
  RETURN
REM *****
60 T = 3600 * VAL(LEFT$(T$, 2)) + 60 * VAL(MID$(T$, 3, 2)) + VAL(RIGHT$(T$,
  REM
80 REM *****
  FOR I = 1 TO N
    FOR J = 1 TO DG(I)
      L = Q%(I, J)
      FOR M = 1 TO DG(L)
        JJ = Q%(L, M)
        IF JJ = I THEN 840
        ADJ%(I, JJ) = 2
40      NEXT M
    NEXT J
  NEXT I
  RETURN

```

```

REM          -----W-----
REM -----
OPEN "I", 1, "C:\YPO\DCOL.DAT"
INPUT #1, N, D
NQ = N + 1
NF = 0
PN = 1
NC = 1
NN = 0
KK = 1
DIM F(N), DG(NQ), P(N), ADJ%(N, N), Q%(N, N), DQ%(N), MFT(N), AP(N)
DIM A(N), KNC(N), LST%(N, N), FT(N)
FOR I = 1 TO N
  INPUT #1, DG(I)
  P(I) = I
  AP(I) = I
NEXT I
FOR I = 1 TO N
  FOR J = 1 TO DG(I)
    INPUT #1, G
    F(J) = G
    LST%(I, J) = G
  NEXT J
  FOR J = 1 TO DG(I)
    INPUT #1, W
    ADJ%(I, F(J)) = W
  NEXT J
NEXT I
FOR I = 1 TO N
  K = 0
  FOR J = 1 TO N
    IF I = J THEN 150
    IF ADJ%(I, J) = 0 THEN K = K + 1: Q%(I, K) = J
  NEXT J
  DQ%(I) = K
NEXT I
FOR I = 1 TO N
  F(I) = 0
NEXT I
T$ = TIMES$
GOSUB 810
T1 = T
GOSUB 620
GOSUB 420
L = P(PN)
F(L) = NC
NN = NN + 1
KNC = 1
KNC(1) = L
IF NN = N THEN 320
FOR J = 1 TO DQ%(L)
  Z = Q%(L, J)
  IF F(Z) <> 0 THEN 310
  FOR M = 1 TO KNC
    X = KNC(M)
    IF ADJ%(X, Z) = 1 THEN 310
  NEXT M
  ZZ = Z
GOSUB 820
IF BOOL = 1 THEN 310
F(Z) = NC
NN = NN + 1
PN = PN + 1
U = AP(Z)

```

```

R = P(U)
Y = P(PN)
P(U) = Y
P(PN) = R
AP(R) = PN
AP(Y) = U
KNC = KNC + 1
KNC(KNC) = Z
IF NN = N THEN 320
0 NEXT J
NC = NC + KK
PN = PN + 1
GOTO 200
0 T$ = TIME$
GOSUB 810
T2 = T
TT = T2 - T1
FOR I = 1 TO N
    P(I) = 0
NEXT
XM = N / NC
DEV = 0
FOR I = 1 TO N
    J = F(I)
    P(J) = P(J) + 1
    Q%(J, P(J)) = I
NEXT
FOR I = 1 TO NC STEP KK
    PRINT I; " ) ";
    DEV = DEV + ABS(P(I) - XM)
    FOR J = 1 TO P(I)
        PRINT TAB(5 * J + 5); Q%(I, J);
    NEXT
    PRINT
NEXT
PRINT
PRINT "W "; " N = "; N; " D="; D; TAB(30); "CHROMATIC NUMBER = "; NC
PRINT TAB(60); "TIME = "; TT; "SEC"
END
REM *****
0 MX = 0
W = 0
FOR I = PN TO N
    X = P(I)
    ZZ = X
    GOSUB 820
    IF BOOL = 1 THEN 550
    NX = 1
    MFT(1) = X
    FOR J = 1 TO DQ%(X)
        Z = Q%(X, J)
        IF F(Z) <> 0 THEN GOTO 520
        FOR K = 1 TO NX
            V = MFT(K)
            IF ADJ%(Z, V) = 1 THEN 520
        NEXT K
        ZZ = Z
        GOSUB 820
        IF BOOL = 1 THEN 520
        NX = NX + 1
        MFT(NX) = Z
    NEXT J
    IF NX = MX THEN W = W + 1: FT(W) = X: GOTO 550
    IF NX > MX THEN MX = NX: W = 1: FT(W) = X

```

```

0 NEXT I
NFB = N - PN + 1
R = 0
FOR I = 1 TO W
  Y = NFB - DQ%(FT(I))
  IF Y > R THEN R = Y: L = FT(I)
NEXT I
U = AP(L)
R = P(U)
Y = P(PN)
P(U) = Y
P(PN) = R
AP(R) = PN
AP(Y) = U
RETURN
0 REM *****SORT ARRAY Q *****
FOR I = 1 TO N
  IF F(I) <> 0 THEN 670
  NM = DQ%(I)
  K = 0
  FOR J = 1 TO NM
    Z = Q%(I, J)
    IF F(Z) = 0 THEN K = K + 1 : Q%(I, K) = Z
  NEXT J
  DQ%(I) = K
0 NEXT I
FOR I = 1 TO N
  NM = DQ%(I)
  FOR J = 1 TO NM
    Z = Q%(I, J)
    A(J) = Z
  NEXT J
  W = NM - 1
  F = 0
  FOR J = 1 TO W
    X1 = DQ%(A(J))
    X2 = DQ%(A(J + 1))
    IF X1 > X2 THEN Z = A(J): A(J) = A(J + 1): A(J + 1) = Z: F = J
  NEXT J
  IF F > 1 THEN W = F - 1: GOTO 710
  FOR J = 1 TO NM
    Q%(I, J) = A(J)
  NEXT
NEXT I
RETURN
0 REM *****
T = 3600 * VAL(LEFT$(T$, 2)) + 60 * VAL(MID$(T$, 3, 2)) + VAL(RIGHT$(T$,
0 REM *****
FOR JJ = 1 TO DG(ZZ)
  H = LST%(ZZ, JJ)
  IF F(H) = 0 THEN 860
  IF NC - F(H) < ADJ%(ZZ, H) THEN BOOL = 1: RETURN
0 NEXT JJ
BOOL = 0
RETURN

```

```

REM-----R-----
REM-----
REM -----RANDOM GENERATOR-----
READ R
DATA 3
CLS : INPUT "NUMBER OF NODES = ", N
INPUT "DENSITY = ", D
NQ = N + 1
ND = N * (N - 1)
DIM LG%(N, N), MR(N), WT(N), AD%(NQ), DS%(ND), ADD(NQ), MC(N)
FOR I = 1 TO N
  FOR J = 1 TO N
    LG%(I, J) = 1
  NEXT J
NEXT I
FOR I = 1 TO N
  LG%(I, I) = 0
  MR(I) = N - 1
  MC(I) = N - 1
NEXT I
M = INT((N * (N - 1) * (1 - D)))
M = INT(M / 2)
MN = 0
REM-----RANDOM GRAPH-----
RANDOMIZE (R)
REM-----ROW SELECTION-----
K = INT((N - 1) * RND + 1.5)
IF MR(K) = 1 THEN 170
REM----- COLUMN SELECTION-----
L = INT((N - 1) * RND + 1.5)
IF ABS(K - L) = 1 THEN 200
IF LG%(K, L) = 0 THEN 170
IF MC(L) = 1 OR MC(K) = 1 OR MR(L) = 1 THEN 200
LG%(K, L) = 0
LG%(L, K) = 0
MR(K) = MR(K) - 1
MR(L) = MR(L) - 1
MC(L) = MC(L) - 1
MC(K) = MC(K) - 1
MN = MN + 1
IF MN <> M THEN 170
FOR I = 1 TO N
  FOR J = 1 TO N
    IF LG%(I, J) = 1 THEN AD%(I) = AD%(I) + 1: LG%(I, AD%(I)) = J
  NEXT J
NEXT I
REM -----COMPUTE RANDOM GRAPH-----
REM -----PRINTOUT-----
OPEN "O", 1, "C:\YPO\DCOL.DAT"
WRITE #1, N, D
FOR I = 1 TO N
  WRITE #1, AD%(I)
NEXT I
FOR I = 1 TO N
  FOR J = 1 TO AD%(I)
    WRITE #1, LG%(I, J)
  NEXT J
NEXT I
CLOSE #1
END
FOR I = 1 TO N
  PRINT I; " ";
  FOR J = 1 TO AD%(I)
    PRINT LG%(I, J); " ";

```



```
    NEXT
    PRINT
NEXT
PRINT
PRINT
END
FOR I = 1 TO N
    PRINT I; " ";
    FOR J = 1 TO AD%(I)
        PRINT G%(I,J); " ";
    NEXT
    PRINT
NEXT
```