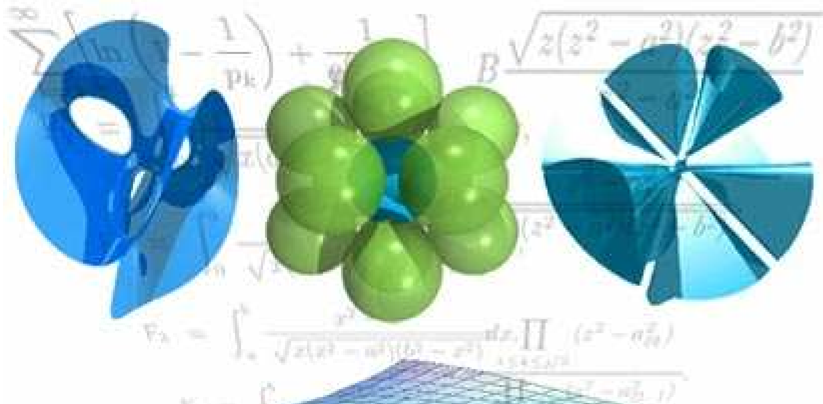
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ **Τ.Ε.Ι. ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ**

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΕΙΔΙΚΕΥΣΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΕΞΕΙΔΙΚΕΥΣΗ ΕΠΙΧΕΙΡΗΜΑΤΙΚΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ



Διπλωματική Εργασία

Θωμάς Κυριακίδης

Θέμα

«Το τροποποιημένο μοντέλο Spruce Budworm»

Επιβλέπων

Καθηγητής Ανδρέας Πετράκης

Κοζάνη, Ιούλιος 2006

Η έγκριση της μεταπτυχιακής εργασίας από το Τμήμα Εφαρμοσμένης Πληροφορικής του Πανεπιστημίου Μακεδονίας δεν υποδηλώνει απαραιτήτως και αποδοχή των απόψεων του συγγραφέα εκ μέρους του Τμήματος (Ν.5343/32 αρ.202 παρ.2).

Ευχαριστίες

Με το τέλος αυτού του ακαδημαϊκού κύκλου, θεωρώ χρέος μου να ευχαριστήσω όλους όσοι με στήριξαν κατά τη διάρκεια της εκπόνησης της διπλωματικής εργασίας μου και καθ' όλη τη διάρκεια του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών.

Οι θερμές μου ευχαριστίες ανήκουν στον επιβλέποντα Καθηγητή κ. Ανδρέα Πετράκη για την αμέριστη συμπαράσταση, τις κατευθύνσεις που μου έδωσε σε σχετικές συναντήσεις, τις εποικοδομητικές ιδέες και τη γόνιμη κριτική και βοήθεια κατά την εκπόνηση αυτής της εργασίας.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους καθηγητές μου στο Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Επιχειρηματική Πληροφορική που με την μεθοδικότητά τους, συνετέλεσαν τα μέγιστα στη διαδικασία της μάθησης.

Τέλος, ένα μεγάλο ευχαριστώ, ανήκει στους συμφοιτητές μου, για τις ζωηρές συζητήσεις και τη γενικότερη συναδελφικότητα που επέδειξαν.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η εργασία αυτή ασχολείται με τη Μαθηματική Μοντελοποίηση της Δυναμικής Οικοσυστημάτων. Το Μοντέλο που θα παρουσιαστεί είναι μία τροποποίηση του Μοντέλου **Spruce Budworm** και αναπτύχθηκε για να περιγράψει ένα φυσικό γεγονός, που έχει να κάνει με το ξέσπασμα του πληθυσμού του εντόμου **Spruce Budworm** (Choristoneura fumiferana - Clemens). Στο τροποποιημένο αυτό μοντέλο, ο **φυσικός ρυθμός ανάπτυξης** του πληθυσμού, θα είναι το μοντέλο Gompertz.

Συγκεκριμένα, θα παρουσιαστούν οι βασικές ιδιότητες του ανωτέρω μοντέλου με σοδειά και χωρίς σοδειά. Θα γίνει μελέτη των ισορροπημένων λύσεών του και θα μελετηθεί η «Περιοχή Ευσταθούς Κατάστασης» (Steady State Domain), προσπαθώντας να προσδιορίσουμε οριζόντιες ασύμπτωτες για τις καμπύλες που την ορίζουν.

Στην εργασία θα χρησιμοποιηθεί το *Ολοκληρωμένο Περιβάλλον για Τεχνικούς Υπολογισμούς* **Mathematica**.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΙΝΑΚΕΣ

ΕΙΚΟΝΕΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1. Εισαγωγή

Η *Μοντελοποίηση της Δυναμικής Οικοσυστημάτων* δίνει τη δυνατότητα δόμησης και εκτίμησης μαθηματικών μοντέλων για την *Οικολογία* (το κομμάτι της Βιολογίας που ασχολείται με την αλληλεπίδραση των ζωντανών οργανισμών με το περιβάλλον). Συγκεκριμένα τα μαθηματικά μοντέλα εξυπηρετούν ως προσεγγίσεις της δυναμικής οικοσυστημάτων, δηλαδή του πως οι μετρήσεις για ένα οικοσύστημα αλλάζουν με την πάροδο του χρόνου. Όπως θα δούμε και παρακάτω, ο χρόνος είναι μία μεταβλητή σχεδόν όλων των μοντέλων.

Σε αυτή την εργασία, θα παρουσιαστεί μία τροποποίηση του Μοντέλου Spruce Budworm. Το αρχικό μοντέλο αναπτύχθηκε για να περιγράψει το ξέσπασμα του πληθυσμού του εντόμου **Spruce Budworm** και χρησιμοποιεί ως **φυσικό ρυθμό αύξησης** του πληθυσμού το Logistic Model. Στην παραλλαγή που θα μελετήσουμε, ο φυσικός ρυθμός αύξησης θα είναι το Μοντέλο Gompertz.

Όπως συνηθίζεται, για την προσομοίωση της δυναμικής οικοσυστημάτων, τη γραφική αναπαράσταση δυναμικών φαινομένων και την εμπειρική επιβεβαίωση θεωρητικών αποτελεσμάτων, θα χρησιμοποιηθεί λογισμικό υπολογιστών. Συγκεκριμένα, θα εκμεταλλευτούμε τις δυνατότητες που μας δίνει το *Ολοκληρωμένο Περιβάλλον για Τεχνικούς Υπολογισμούς* **Mathematica**.

Πριν όμως προχωρήσουμε, θα κάνουμε μία περιγραφή της *Μαθηματικής Μοντελοποίησης της Δυναμικής Οικοσυστημάτων*, αναλύοντας τα επίπεδα Μοντελοποίησης, κάποια Ορολογία που χρησιμοποιείται, τα είδη των λύσεων, τα σημεία ισορροπίας και μία γενική μορφή των Πληθυσμιακών Μοντέλων.

1.2. Επίπεδα Μοντελοποίησης

Η Μοντελοποίηση της δυναμικής οικοσυστημάτων μπορεί να γίνει σε τέσσερα επίπεδα:

- **Μεμονωμένου Οργανισμού**, για παράδειγμα ένα ζώο.
- **Πληθυσμού οργανισμών του ίδιου είδους**.
- **Κοινωνίας**, δύο ή περισσότεροι πληθυσμοί διαφορετικών ειδών
- **Οικοσυστήματος**, ομαδοποιήσεις πληθυσμών παρόμοιων ειδών.

Παραδείγματα αυτής της ιεραρχίας σε όρους του τι ακριβώς μετριέται (ή μας ενδιαφέρει) κατά επίπεδο είναι:

1. **Μεμονωμένοι Οργανισμοί:**
   Η δυναμική των μεταβλητών ορίζεται για μεμονωμένους οργανισμούς. Για παράδειγμα:
   Πως αλλάζει το μέγεθος (μήκος ή βάρος) με την πάροδο του χρόνου; Σε ποιο στάδιο ωρίμανσης βρίσκεται;

2. **Πληθυσμού οργανισμών του ίδιου είδους:**
   Μας ενδιαφέρει η σχέση μεταξύ της δυναμικής του συνόλου κατά τη χρονική στιγμή t και τη χρονική στιγμή $t+1$:
   Μία πιο ακριβής, ή δομημένη, θεώρηση του επιπέδου του πληθυσμού θα ήταν να λάβουμε υπόψη το πλήθος των κατηγοριών των οργανισμών. Για παράδειγμα αριθμό των ανηλίκων, αριθμός θηλυκών πρώτης ηλικίας, κ.ο.κ.

3. **Κοινωνίας:**
   Σε μία κοινωνία, ο ανταγωνισμός για πόρους (π.χ. τροφή) και το κυνήγι είναι δύο διαδικασίες που μπορεί να επηρεάσουν τη δυναμική του συστήματος. Δηλαδή, μπορεί οι διάφοροι πληθυσμοί να τρέφονται με την ίδια τροφή, οπότε ανταγωνίζονται για αυτή ή ο ένας οργανισμός να κυνηγά τον άλλο ως τροφή.

4. **Οικοσυστήματος:**
   Σε ένα οικοσύστημα, μπορούμε να ομαδοποιήσουμε τους πληθυσμούς παρόμοιων ειδών σε κατηγορίες όπως: *Παραγωγοί* (Π), *Φυτοφάγοι* (Φ) και *Σαρκοφάγοι* (Σ).

1.3. Ορολογία

Ένα Μαθηματικό Μοντέλο είναι ένα σύνολο υποθέσεων που εκφράζεται ως ένα σύνολο εξισώσεων. Οι εξισώσεις αυτές αποτελούνται από:

- **Μεταβλητές κατάστασης** (state variables), που αλλάζουν με την πάροδο του χρόνου.
- **Παραμέτρους** (parameters), που είναι συνήθως σταθερές.
- **Αρχικές συνθήκες** (initial conditions), οι τιμές των μεταβλητών κατάστασης τη χρονική στιγμή $t = 0$ που θεωρείται ως η αρχική.
- **Συνοριακές συνθήκες** (boundary conditions), οι αρχικές τιμές x_0 των μεταβλητών κατάστασης.

Μία *μεταβλητή κατάστασης* είναι μία ποσότητα που περιγράφει την κατάσταση του συστήματος μία συγκεκριμένη χρονική στιγμή.

Παραδείγματα μεταβλητών κατάστασης:

Μεμονωμένα Μοντέλα: ηλικία, μέγεθος, βάρος, φύλο, αναπαραγωγική δυνατότητα.

Πληθυσμιακά Μοντέλα: συνολικός πληθυσμός, αριθμός ενήλικων θηλυκών.

1.3.1. Ντετερμινιστικά και Στοχαστικά Μοντέλα

Ένα Μαθηματικό Μοντέλο μπορεί να είναι *Ντετερμινιστικό* (Deterministic) ή *Στοχαστικό* (Stochastic).

Σε ένα **Ντετερμινιστικό Μοντέλο**, αν γνωρίζουμε την τωρινή κατάσταση του συστήματος και τις τιμές των παραμέτρων, μπορούμε να προβλέψουμε τις μελλοντικές καταστάσεις επακριβώς. Επίσης, κάθε φορά που χρησιμοποιούμε το μοντέλο με τις ίδιες τιμές στις παραμέτρους και τις ίδιες αρχικές συνθήκες, θα έχουμε την ίδια πρόβλεψη κάθε φορά. Δηλαδή, δεν υπάρχει ο τυχαίος παράγοντας στην όλη διαδικασία της εξέλιξης.

Παράδειγμα ντετερμινιστικού μοντέλου είναι ένα σύστημα στο οποίο κάθε έτος, το κάθε ζώο παράγει 3 νέα και μετά πεθαίνει. Έστω ότι τη χρονική στιγμή $t=1$ υπάρχουν $N_1=10$ ζώα, τότε τη χρονική στιγμή $t=3$ θα έχουμε:

$$N_2 = N_1 + γεννήσεις - θάνατοι$$

$$N_2 = N_1 + 3 \cdot N_1 - N_1$$

$$N_2 = N_1 + 3 \cdot N_1 - N_1$$

$$N_2 = 10 + 3 \cdot 10 - 10 = 30$$

οπότε

$$N_3 = 30 + 3 \cdot 30 - 30 = 90$$

Τα **Στοχαστικά Μοντέλα** δεν είναι απολύτως προβλέψιμα. Υπάρχει δηλαδή και κάποιο τυχαίο στοιχείο. Συχνά τα μοντέλα αυτά εκφράζονται με όρους πιθανότητας να συμβεί κάποιο γεγονός. Έτσι λαμβάνουμε διαφορετικές απαντήσεις κάθε φορά που χρησιμοποιούμε το μοντέλο, ακόμη και με τις ίδιες παραμέτρους και αρχικές συνθήκες.

Παράδειγμα τέτοιου μοντέλου είναι ένα σύστημα στο οποίο κάθε χρόνο, το κάθε ζώο γεννά 2 νέα με πιθανότητα 0,5 και 3 ζώα με πιθανότητα 0,5 και μετά οι γονείς πεθαίνουν με πιθανότητα 0,5.

1.3.2. Μοντέλα Διακριτού και Συνεχούς Χρόνου

Όπως προαναφέραμε, ο χρόνος είναι πάντα μία μεταβλητή στη δυναμική οικοσυστημάτων. Η μαθηματική διάκριση μεταξύ μοντέλων διακριτού και συνεχούς χρόνου έχει να κάνει με το πώς ορίζεται το πεδίο του χρόνου:

- Για μοντέλα διακριτού χρόνου, ο χρόνος *t* παίρνει διακριτές τιμές
- Για μοντέλα συνεχούς χρόνου, ο χρόνος *t* ορίζεται σε ένα συνεχόμενο διάστημα.

1.4. Είδη Λύσεων και Σημεία Ισορροπίας

Τα συνεχή μοντέλα μίας μεταβλητής συνήθως εκφράζονται σε μορφή Διαφορικής Εξίσωσης (Δ.Ε.):

$$\frac{dx}{dt} = F\left(x,t,\theta\right) \tag{1.1}$$

Όπου θ, οι διάφορες παράμετροι του μοντέλου. Στη μοντελοποίηση δυναμικών διαδικασιών $x\left(t\right)$, χρησιμοποιούνται Διαφορικές Εξισώσεις, γιατί μερικές φορές είναι ευκολότερο να μελετούμε το πώς αλλάζει στιγμιαία το $x\left(t\right)$, παρά να υπολογίζουμε την ακριβή τιμή του $x\left(t\right)$ σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές. Συνήθως οι παράμετροι *θ*, είναι σταθερές και τις παραλείπουμε από το μοντέλο. Έτσι η Δ.Ε. γράφεται:

$$\frac{dx}{dt} = F\left(x,t\right) \tag{1.2}$$

1.4.1. Αναλυτικές και Αριθμητικές Λύσεις

Οι Δ.Ε. έχουν δύο είδη λύσεων, *αναλυτικές* (analytical) και *αριθμητικές* (arithmetic) λύσεις.

Μία **αναλυτική λύση**, δίνει μία εξίσωση για το *x* συναρτήσει του *t* και *θ*.

$$x\left(t\right) = G\left(t,\theta\right) \tag{1.3}$$

Οι απλές διαφορικές εξισώσεις μπορούν να λυθούν ολοκληρώνοντας και έπειτα χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες που μας δίνονται για να προσδιορίσουμε τις σταθερές που προκύπτουν.

Για παράδειγμα η Δ.Ε. $x(t)=\theta t$, με αρχική συνθήκη $x(0)=2$, λύνεται ως εξής:

$$\frac{dx}{dt}=\theta t \Leftrightarrow \int \frac{dx}{dt}=\int \theta t dt \Leftrightarrow x(t)=\frac{\theta}{2}t^2+c$$

Χρησιμοποιώντας την αρχική συνθήκη, υπολογίζουμε τη σταθερά *c*:

$$x(0)=\frac{\theta}{2}0^2+c \Rightarrow c=2$$

Έτσι η αναλυτική λύση της Δ.Ε. είναι $x(t)=\frac{\theta}{2}t^2+2$. Γενικά, οι Δ.Ε. δεν είναι εύκολο να επιλυθούν αναλυτικά.

Μία **αριθμητική λύση** δίνει τιμές του *x* για ένα σύνολο τιμών του *t*, με δεδομένες τιμές των παραμέτρων *θ*. Οι αριθμητικές λύσεις βασίζονται σε προσεγγίσεις και είναι βολικές όταν δεν μπορούμε να βρούμε αναλυτικές. Συνήθως για τον υπολογισμό τέτοιου είδους λύσεων χρησιμοποιείται Η/Υ.

1.4.2. Σημεία Ισορροπίας

Ένα **σημείο ισορροπίας** (equilibrium) για ένα Μοντέλο Συνεχούς Χρόνου είναι μία τιμή για την οποία η Δ.Ε. γίνεται ίση με μηδέν. Δηλαδή, αν το πληθυσμιακό μοντέλο είναι

$$\frac{dx}{dt}=F(x) \tag{1.4}$$

Οι ρίζες της $F(x)=0$ λέγονται σημεία ισορροπίας. Ένα σημείο ισορροπίας μπορεί να είναι **ευσταθές** ή **ασταθές**. *Ευσταθές* είναι όταν το σύστημα καταλήγει σε αυτό για αρχικές τιμές του x κοντά σε αυτό, ενώ αν το σύστημα απομακρύνεται, είναι *ασταθές*.

Δηλαδή, αν x_1 ρίζα της $F(x)=0$ και $\lim_{t\to\infty} x(t)=x_1$, για όλα τα x_0 κοντά στο x_1 τότε η Διαφορική Εξίσωση είναι ασυμπτωτικά ευσταθής στο x_1 και το x_1 λέγεται **σημείο ευσταθούς ισορροπίας** (stable equilibrium).

Στην πράξη, ένα σημείο ευσταθούς ισορροπίας είναι σημαντικό γιατί αναπαριστά συμπεριφορά που δεν αλλάζει εύκολα. Επίσης, τα σημεία ευσταθούς ισορροπίας είναι χρήσιμα για προβλέψεις, επειδή πολλές λύσεις τελικά καταλήγουν σε αυτές τις τιμές.

Αν x_1 και x_2 ρίζες της $F(x)=0$, τότε

$$F(x_1)=0 \text{ και } F(x_2)=0 \tag{1.5}$$

Ισχύει όμως, ότι:

$$\frac{dx}{dt}=F(x) \tag{1.6}$$

δηλαδή για

$$x(t)=x_1 \text{ ή } x(t)=x_2 \tag{1.7}$$

είναι

$$\frac{dx}{dt}=0 \tag{1.8}$$

Άρα οι σταθερές συναρτήσεις $x(t)=x_1$ ή $x(t)=x_2$ είναι λύσεις της Διαφορικής εξίσωσης και λέγονται **ισορροπημένες λύσεις** της.

1.5. Πληθυσμιακά Μοντέλα

Μία πιο πλήρης μορφή των Πληθυσμιακών Μοντέλων, περιγράφεται από την παρακάτω Διαφορική Εξίσωση:

$$\frac{dx}{dt}=F(x)-h(x,t) \Leftrightarrow \frac{dx}{dt}=r(x)x-h(x,t) \tag{1.9}$$

Όπου:

$F(x)$ **:** ο **φυσικός ρυθμός ανάπτυξης** του πληθυσμού μεγέθους *x* τη χρονική στιγμή *t*

$r(x)$: ο **αναλογικός ρυθμός ανάπτυξης** του πληθυσμού

$x(t)$: ο **πληθυσμός** μία συγκεκριμένη χρονική στιγμή *t*

$h(x,t)$: ο **ρυθμός μείωσης του πληθυσμού** μεγέθους *x* τη χρονική στιγμή *t*, ο οποίος λέγεται και σοδειά ή θερισμός ή συγκομιδή (harvest)

Σε ένα Πληθυσμιακό Μοντέλο, ο φυσικός ρυθμός αύξησης του πληθυσμού είναι ίσος με το γινόμενο του αναλογικού ρυθμού ανάπτυξης και του πληθυσμού:

$$F(x) = r(x)x \tag{1.10}$$

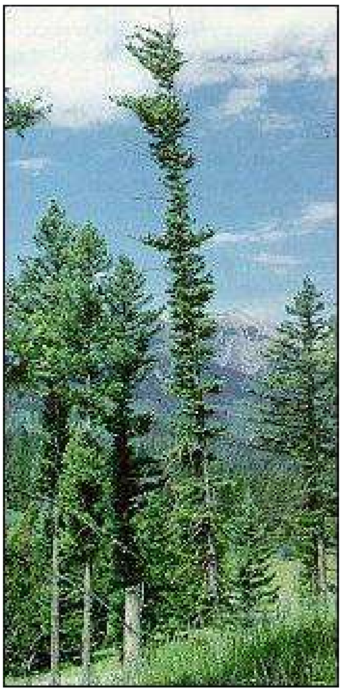
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ SPRUCE BUDWORM

2.1. Εισαγωγή

Το Μοντέλο Spruce Budworm αναπτύχθηκε για να περιγράψει ένα φυσικό γεγονός, που έχει να κάνει με το ξέσπασμα του πληθυσμού ενός εντόμου, του **Spruce Budworm** (Choristoneura fumiferana - Clemens). Το έντομο αυτό είναι ένα από τα πιο καταστροφικά για τα δάση ελάτων και άλλων κωνοφόρων δέντρων στις περιοχές των Ανατολικών ΗΠΑ και του Καναδά.

Το Spruce Budworm έχει υψηλή αναπαραγωγική ικανότητα, αλλά φυσικοί παράγοντες όπως κακοκαιρία, αρρώστιες, κυνηγοί και παράσιτα παίζουν σημαντικό ρόλο στη συγκράτηση του πληθυσμού του. Παρόλα αυτά, ευνοϊκές καιρικές συνθήκες για αρκετά διαδοχικά χρόνια (θερμή, ξηρή άνοιξη), επαρκής τροφή, και κατάλληλες περιοχές χειμερίας νάρκης, μπορεί να οδηγήσουν σε ξέσπασμα πέραν του ελέγχου αυτών και άλλων φυσικών παραγόντων. Όταν ξεκινήσει ένα ξέσπασμα, συνήθως συνεχίζει μέχρις ότου οι κάμπιες καταναλώσουν το μεγαλύτερο μέρος του διαθέσιμου φυλλώματος. Έτσι για την καταπολέμηση της επιδημίας μπορεί να χρειαστεί συμπληρωματικά, η χρήση βιολογικών και χημικών εντομοκτόνων.



Δέντρο κατεστραμμένο από Spruce Budworms

Η Δασική Υπηρεσία του Καναδά, εκτιμά ότι το φαινόμενο αυτό εμφανίζεται κάθε περίπου 29 χρόνια [4], σε άλλη βιβλιογραφία η περίοδος αυτή αναφέρεται ότι είναι 40 χρόνια [2], [8].

2.2. Το Μαθηματικό Μοντέλο

Σε μία προσπάθεια κατανόησης του κύκλου του πληθυσμού του Spruce Budworm, και με σκοπό την ανάπτυξη την χαμηλού κόστους και αποτελεσματική αντιμετώπιση του προβλήματος, πολλοί επιστήμονες στο Πανεπιστήμιο British Columbia (R. Morris, D. Ludwig, D. Jones and C.S. Holling) μελέτησαν το πρόβλημα και παρήγαγαν μία σειρά μαθηματικών μοντέλων.

Όπως συνηθίζεται στη μοντελοποίηση φαινομένων του πραγματικού κόσμου, τα μοντέλα έγιναν απλούστερα καθώς οι ερευνητές ανακάλυπταν ποιες διαδικασίες είναι κρίσιμες για τη δυναμική του συστήματος και ποιες μπορούν να αγνοηθούν, χωρίς να επηρεάσουν την αποτελεσματικότητά του.

Το απλούστερο μοντέλο είναι το παρακάτω:

$$\frac{dx}{dt} = F(x) - h(x) = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{bpx^2}{x^2 + a^2} \tag{2.1}$$

Όπου ***x*** είναι ο πληθυσμός των Spruce Budworms και είναι η μόνη **μεταβλητή κατάστασης** (state variable) στο πρόβλημα. Οι **παράμετροι** (parameters) του προβλήματος είναι:

- $x(t)$ **:** ο **πληθυσμός** μία συγκεκριμένη χρονική στιγμή t
- $F(x)$ **:** ο **φυσικός ρυθμός ανάπτυξης** πληθυσμού x τη χρονική στιγμή t
- $h(x)$ **:** ο **ρυθμός μείωσης του πληθυσμού** μεγέθους x τη χρονική στιγμή t, ο οποίος λέγεται και σοδειά ή θερισμός ή συγκομιδή (harvest)
- r **:** ο **εσωτερικός ρυθμός ανάπτυξης του πληθυσμού**, που εκφράζει την ικανότητα του πληθυσμού να αυξάνεται χωρίς εξωτερική παρεμβολή και είναι πάντα θετικός
- K **:** το **επίπεδο κορεσμού (saturation level ή environmental carrying capacity)**, είναι ο μέγιστος αριθμός σκουληκιών που μπορεί να έχει η μονάδα (πχ ένα δέντρο) και είναι πάντα θετικός αριθμός

b : το **μέτρο αρπακτικότητας** (predation efficiency), εκφράζει την ικανότητα των πουλιών να συλλαμβάνουν σκουλήκια (Όσο μεγαλύτερο, τόσο ευκολότερα πιάνουν τα πουλιά τα σκουλήκια)

p : το **επίπεδο πληθυσμού πουλιών**

a : **switching value**, είναι η κρίσιμη μάζα σκουληκιών που μπορεί να προκαλέσει την έλευση των πουλιών

Αυτό το μοντέλο είναι το ίδιο με το Logistic, με έναν επιπλέον όρο, που είναι σχεδιασμένος ώστε να λαμβάνει υπόψη τα αποτελέσματα της συγκομιδής.

Έχει παρατηρηθεί ότι οι παράμετροι a και K εξαρτώνται άμεσα από την **επιφάνεια του φυλλώματος** S κάθε δέντρου και είναι περίπου:

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{1}{2}\cdot S \\ K &= 4\cdot S \end{aligned}\right\} \Rightarrow K = 8\cdot a \tag{2.2}$$

Σε αυτήν την εργασία θα μελετήσουμε το Μοντέλο Spruce Budworm με συνάρτηση $F(x)$ το *Μοντέλο του Gompertz*:

$$\frac{dx}{dt} = F(x) - h(x) = r\ln\frac{K}{x} - \frac{bpx^2}{x^2+a^2} \tag{2.3}$$

2.3. Μελέτη της σοδειάς $h(x)$

Πριν προχωρήσουμε στη μελέτη του Τροποποιημένου Μοντέλου, θα αναλύσουμε τη συνάρτηση $h(x)$, που εκφράζει τη σοδειά. Η σοδειά στο Μοντέλο Spruce Budworm, δίνεται από τον τύπο:

$$h(x) = \frac{bpx^2}{x^2+a^2} \tag{2.4}$$

Στον τύπο αυτό, η παράμετρος b αναπαριστά το μέτρο αρπακτικότητας των πουλιών, το p τον πληθυσμό των πουλιών και ο υπόλοιπος όρος $\frac{x^2}{x^2+a^2}$ αποκαλείται **Συνάρτηση Συγκομιδής Holling Τύπου III** (predation function). Μετρά πόσο εντατικά τα πουλιά επιλέγουν τα spruce budworms για θήραμα.

Η βασική ιδέα είναι ότι τα πουλιά είναι τεμπέλικα και πηγαίνουν όπου υπάρχει υψηλή πυκνότητα φαγητού, κάτι το οποίο τους επιτρέπει να καταναλώνουν πολύ, σπαταλώντας ελάχιστη ενέργεια.

Αν η πυκνότητα του πληθυσμού των spruce budworms είναι μικρή, τα πουλιά θα προτιμήσουν κάποιο άλλο θήραμα, που πιθανόν ζει σε άλλα μέρη των δέντρων. Για παράδειγμα, αν τα πουλιά αποφασίσουν ότι τα σκαθάρια είναι άφθονα, θα συγκεντρωθούν γύρω από κορμούς δέντρων και κλαδιά, όπου υπάρχουν σκαθάρια, αφήνοντας ανενόχλητα τα spruce budworms.

Από την άλλη, όταν ο πληθυσμός των spruce budworms αυξηθεί, τα πουλιά θα αφήσουν τα σκαθάρια και θα εστιάσουν στο ευκολότερο θήραμα. Έτσι, η συγκομιδή των budworms παρουσιάζει αυτό το φαινόμενο εναλλαγής (*switching* phenomenon), αυτή ακριβώς η συμπεριφορά αναπαρίσταται από τη συνάρτηση Hollings Τύπου III. Η σημασία της παραμέτρου a (*switching* value), φαίνεται όταν $x=a$, οπότε η τιμή της Τύπου III συνάρτησης συγκομιδής γίνεται ακριβώς 0.5. Τότε τα πουλιά αρχίζουν να δείχνουν αυξημένο ενδιαφέρον στη συγκομιδή budworms.

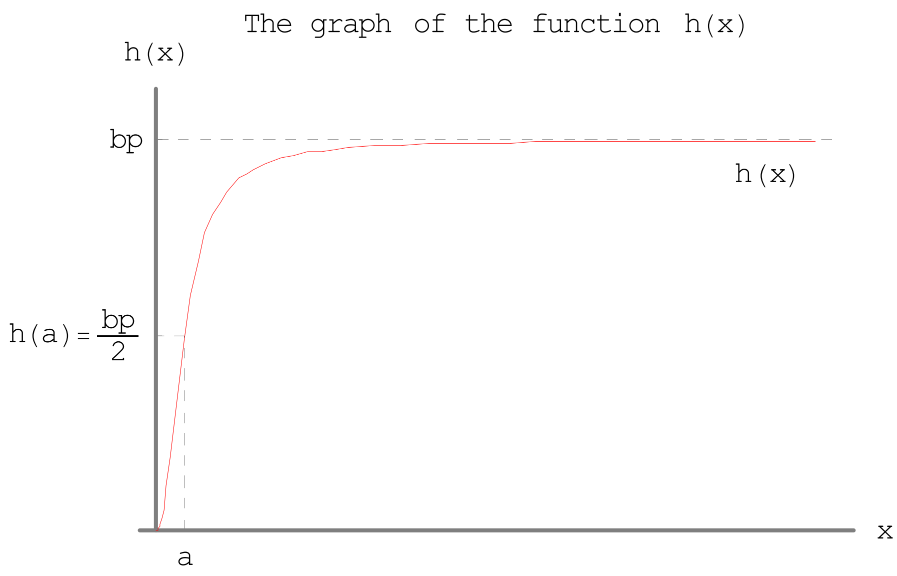
Η πρώτη παράγωγος της σοδειάς είναι:

$$h'(x)=\frac{bp2x\left(x^2+a^2\right)-bpx^2 2x}{\left(x^2+a^2\right)^2}=\frac{2bpxa^2}{\left(x^2+a^2\right)^2}>0 \qquad (2.5)$$

Η παράγωγος είναι θετική για κάθε $x\in\left(0,K\right)$, άρα η $h\left(x\right)$ είναι γνησίως αύξουσα στο *(0, K)*. Επίσης όταν $x\to\infty$, η $h\left(x\right)$ συγκλίνει στο bp.

$$\lim_{x\to\infty} h\left(x\right)=bp \qquad (2.6)$$

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της $h(x)$:



Εικόνα 1 - Η γραφική παράσταση της σοδειάς *h(x)*

Όπως φαίνεται και από τη γραφική παράσταση, όταν *x* = *α*, δηλαδή όταν ο πληθυσμός των σκουληκιών φτάσει την κρίσιμη μάζα που μπορεί να προκαλέσει την έλευση των πουλιών, η *h(x)* γίνεται ίση με το μισό της μέγιστης τιμής:

$$h(a) = \frac{bpa^2}{a^2 + a^2} = \frac{bp\cancel{a^2}}{2\cancel{a^2}} = \frac{bp}{2} = \frac{\lim\limits_{x \to \infty} h(x)}{2} \qquad (2.7)$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΟΥ GOMPERTZ ΧΩΡΙΣ ΣΟΔΕΙΑ

3.1. Το Μοντέλο του Gompertz

Στα Μοντέλα Εφοδιαστικής Αλυσίδας (Logistic) ο αναλογικός ρυθμός ανάπτυξης $r(x)$, δίνεται από τον τύπο:

$$r(x) = r \cdot \left(1 - \frac{x}{K}\right) \tag{3.1}$$

Ένα άλλο μοντέλο το οποίο παρουσιάζει ενδιαφέρον είναι το Μοντέλο του Gompertz, στο οποίο ο αναλογικός ρυθμός ανάπτυξης δίνεται από τον τύπο:

$$r(x) = r \ln \frac{K}{x} = r\left(\ln K - \ln x\right) \tag{3.2}$$

Ο παραπάνω τύπος εξάγεται από το **Νόμο Θνησιμότητας του Gompertz** (Gompertz's Law of Mortality), που με τη σειρά του εκφράζεται ως:

$$\frac{dx}{dt} = -rx \ln \frac{x}{K} \tag{3.3}$$

όπου $x(t)$ ο πληθυσμός τη χρονική στιγμή t, r ο εσωτερικός ρυθμός ανάπτυξης και K το επίπεδο κορεσμού.

Το παραπάνω μοντέλο αποτελεί δημογραφικό μοντέλο που δημοσιεύθηκε το 1825 από τον αυτοδίδακτο μαθηματικό *Benjamin Gompertz* [5]. Χρησιμοποιήθηκε από ασφαλιστικές εταιρίες για τον υπολογισμό του κόστος ασφαλειών ζωής. Η εξίσωση, γνωστή ως **καμπύλη του Gompertz**, χρησιμοποιείται

BENJAMIN GOMPERTZ

τώρα σε πολλές εφαρμογές για τη μοντελοποίηση χρονοσειρών, στις οποίες ο ρυθμός αύξησης είναι μικρός στην αρχή και το τέλος μίας περιόδου.

Η θεωρία του Gompertz λέει ότι οι ρυθμοί θνησιμότητας αυξάνουν με εκθετικούς ρυθμούς όσο αυξάνει η ηλικία. Δηλαδή, όσο ένας οργανισμός μεγαλώνει, η πιθανότητά του να πεθάνει, ανά μονάδα χρόνου αυξάνει εκθετικά.

Στις επόμενες ενότητες θα μελετήσουμε τον *αναλογικό* και το *φυσικό ρυθμό ανάπτυξης*, ως προς τις ρίζες, τη μονοτονία, τα ακρότατα και θα σχεδιάσουμε τις γραφικές τους παραστάσεις.

3.2. Μελέτη του Αναλογικού Ρυθμού Ανάπτυξης r (x)

Ο αναλογικός ρυθμός ανάπτυξης, δίνεται από τον τύπο:

$$r(x) = r\ln\frac{K}{x} \tag{3.4}$$

και οι ρίζες του είναι:

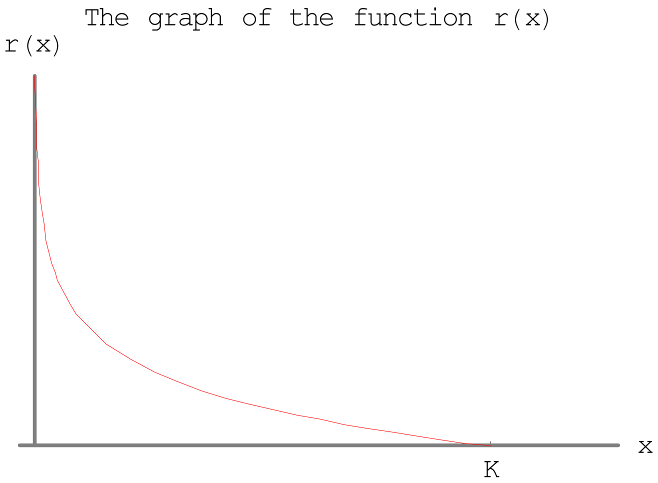
$$r(x) = 0 \Leftrightarrow r\ln\frac{K}{x} = 0 \Rightarrow \ln x = \ln K \tag{3.5}$$

Δηλαδή, η ρίζα της $r(x)$ είναι $x = K$. Προχωρώντας στη μελέτη μονοτονίας, υπολογίζουμε την παράγωγο της $r(x)$:

$$r'(x) = (r\ln K - r\ln x)' = -r\frac{1}{x} \Rightarrow$$

$$r'(x) = -\frac{r}{x} \tag{3.6}$$

Παρατηρούμε ότι $r'(x) < 0$, για $x \in [0, K]$, άρα η $r(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα σε αυτό το διάστημα και η γραφική της παράσταση είναι :



Εικόνα 2 - Η γραφική παράσταση του Αναλογικού Ρυθμού Ανάπτυξης *r (x)*

3.3. Μελέτη του Φυσικού Ρυθμού Ανάπτυξης F (x)

Αρχικά υπολογίζουμε τις ρίζες του φυσικού ρυθμού ανάπτυξης, οι οποίες, όπως προαναφέρθηκε, είναι τα σημεία ισορροπίας. Έχουμε:

$$F(x)=0 \Leftrightarrow rx\ln\frac{K}{x}=0 \Rightarrow rx(\ln K-\ln x)=0 \qquad (3.7)$$

Επειδή $\lim_{x\to 0^+} F(x)=0$ μπορούμε να ορίσουμε $F(0)=0$ τέτοιο ώστε το πεδίο ορισμού της να είναι το $[0,K]$. Έτσι, οι ρίζες της $F(x)$ είναι:

$x=0$ ή $x=K$

Προχωρώντας στη μελέτη μονοτονίας, υπολογίζουμε την παράγωγο της $F(x)$:

$$F'(x)=(rx\ln K-rx\ln x)'=r\ln K-r\ln x-r\cancel{x}\frac{1}{\cancel{x}} \Rightarrow$$

$$F'(x)=r\ln K-r(\ln x+1) \qquad (3.8)$$

Η ρίζα της $F'(x)$ είναι:

$$F'(x)=0 \Leftrightarrow r\ln K-r(\ln x+1)=0 \Leftrightarrow r(\ln x+\ln e)=r\ln K \Leftrightarrow$$

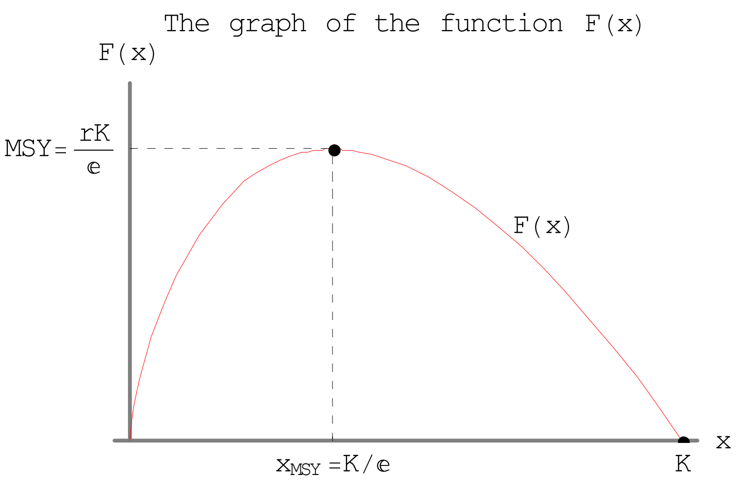
$$\ln(xe) = \ln K \Leftrightarrow x = \frac{K}{e} \qquad (3.9)$$

Κάνουμε τον πίνακα μονοτονίας και βλέπουμε ότι ο φυσικός ρυθμός αύξησης έχει τοπικό μέγιστο.

x	0		K/e		K
F΄(x)		+		-	
F(x)		↗	0	↘	

Πίνακας 1 - Πίνακας μονοτονίας της *F(x)*

Άρα η F(x) έχει τοπικό μέγιστο στο σημείο $\left(\frac{K}{e}, F\left(\frac{K}{e}\right)\right) = \left(\frac{K}{e}, \frac{rK}{e}\right)$ και η γραφική της παράσταση είναι :



Εικόνα 3 - Η γραφική παράσταση του Φυσικού Ρυθμού Ανάπτυξης *F(x)*

3.4. Το Μοντέλο χωρίς Σοδειά

Η Διαφορική Εξίσωση στην περίπτωση του Μοντέλου χωρίς σοδειά είναι:

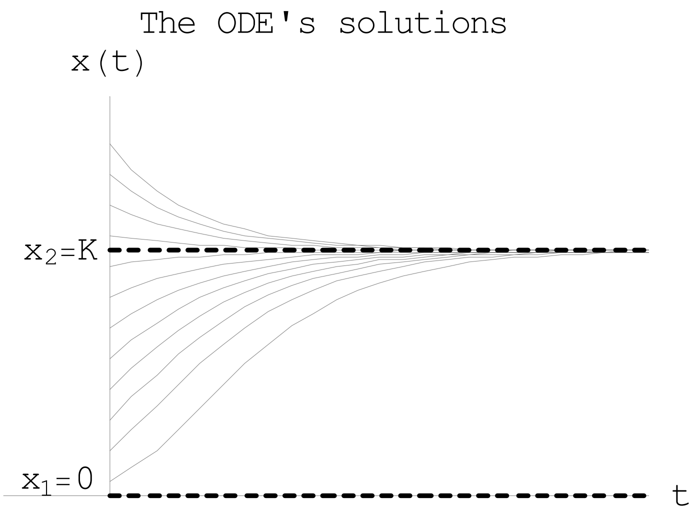
$$\frac{dx}{dt} = rx \ln \frac{K}{x} = F(x) \tag{3.10}$$

και έχει δύο ισορροπημένες λύσεις, τις ρίζες της *F(x)*.

$$x_1 = 0 \text{ και } x_2 = K$$

Από αυτές, η **x_1** είναι <u>ασταθής</u>, ενώ η **x_2** είναι <u>ευσταθής</u>. Άρα το *K*, είναι ένα ευσταθές σημείο ισορροπίας και η *x* = *K* μία ευσταθής ισορροπημένη λύση της Δ.Ε. Δηλαδή για κάθε $x(0) = x_0 > 0$, ισχύει ότι $\lim\limits_{x \to \infty} x(t) = K$.

Το παραπάνω συμπέρασμα φαίνεται αν σχεδιάσουμε τις λύσεις της Διαφορικής Εξίσωσης για διάφορες αρχικές τιμές του πληθυσμού:



Εικόνα 4 - Οι λύσεις του Μοντέλου του Gompertz χωρίς σοδειά

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΟΥ GOMPERTZ ΜΕ ΣΟΔΕΙΑ

4.1. Το Μοντέλο του Gompertz

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα εξετάσουμε την περίπτωση του Μοντέλου του Gompertz με σοδειά $h(x)=\frac{bpx^2}{x^2+a^2}$. Το μοντέλο με σοδειά είναι:

$$\frac{dx}{dt}=F(x)-h(x)=rx\ln\frac{K}{x}-\frac{bpx^2}{x^2+a^2} \tag{4.1}$$

Για να βρούμε τα σημεία επαφής των $F(x)$ και $h(x)$, τα οποία είναι και τα σημεία ισορροπίας της Διαφορικής Εξίσωσης, λύνουμε την :

$$\begin{aligned}&\frac{dx}{dt}=0\Leftrightarrow F(x)-h(x)=0\\&\Leftrightarrow F(x)=h(x)\\&\Leftrightarrow rx\ln\frac{K}{x}=\frac{bpx^2}{x^2+a^2}\\&\overset{x\neq 0}{\Rightarrow} r\ln\frac{x}{K}=\frac{bpx}{x^2+a^2}\end{aligned} \tag{4.2}$$

Για να συνεχίσω τη μελέτη θέτω:

$$R(x)=r\ln\frac{K}{x} \tag{4.3}$$

και

$$G(x)=\frac{bpx}{x^2+a^2} \tag{4.4}$$

Έτσι το πρόβλημα απλοποιείται και πλέον έχω να μελετήσω τις *R* και *G* αντί για τις *F* και *h*.

4.2. Μελέτη των $R(x)$ *και* $G(x)$

Η $R(x)$ είναι ίση με τον αναλογικό ρυθμό ανάπτυξης και έχει μελετηθεί στην Ενότητα 3.2. Όπως είδαμε, έχει ρίζα $x=K$ και είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0,K]$.

Προχωρώντας στη μελέτη της $G(x)$, υπολογίζουμε την πρώτη παράγωγό της:

$$
\begin{aligned}
G'(x) &= \frac{(bpx)'\left(x^2+a^2\right)-bpx\left(x^2+a^2\right)'}{\left(x^2+a^2\right)^2}= \\
&= \frac{bp\left(x^2+a^2\right)-bpx\cdot 2x}{\left(x^2+a^2\right)^2} \\
\Rightarrow G'(x) &= \frac{bp\left(a^2-x^2\right)}{\left(x^2+a^2\right)^2}
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

Οι ρίζες της πρώτης παραγώγου είναι:

$$
G'(x)=0 \Rightarrow \frac{bp\left(a^2-x^2\right)}{\left(x^2+a^2\right)^2}=0 \Leftrightarrow x=\pm a \tag{4.6}
$$

Η ρίζα **- α** δεν μας ενδιαφέρει γιατί το α είναι θετικό και $x\in[0,K]$. Έτσι σχεδιάζω τον πίνακα μονοτονίας:

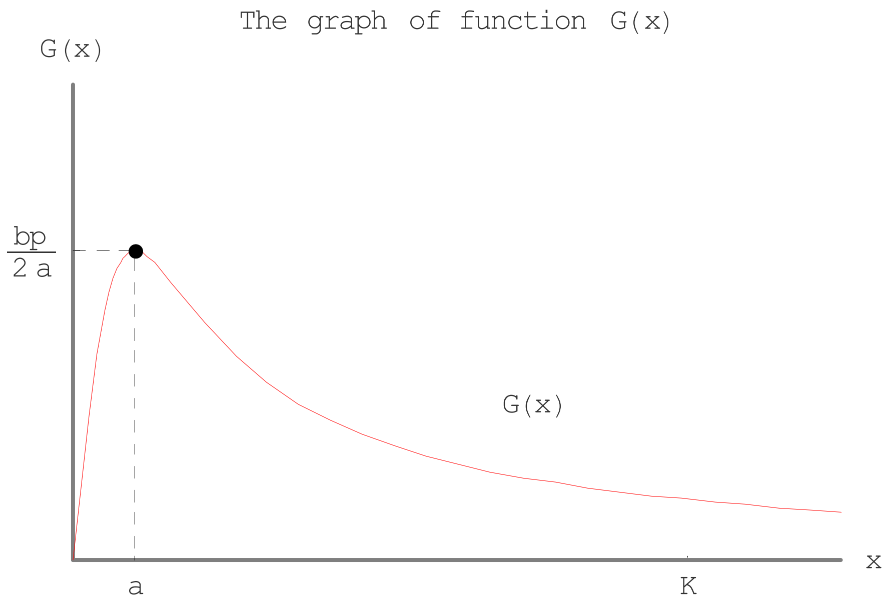
x	0		α		*K*
G´(x)		**+**		**-**	
G(x)		$\nearrow$	0	$\searrow$	

Πίνακας 2 - Πίνακας μονοτονίας της *G(x)*

Παρατηρούμε ότι η G(x) έχει τοπικό μέγιστο για x = α. Δηλαδή η μέγιστη τιμή της *G(x)* είναι:

$$G(a) = \frac{bpa}{a^2 + a^2} = \frac{bp}{2a}$$

Επειδή $\lim_{x\to\infty} G(x) = 0$, ο άξονας xx' είναι οριζόντια ασύμπτωτη της *G(x)*.



Εικόνα 5 - Η γραφική παράσταση της *G(x)*

4.3. Εύρεση σημείων επαφής των $R(x)$ και $G(x)$

Για να βρούμε τα σημεία επαφής των R(x) και G(x) θεωρούμε την εξίσωση:

$$R(x) - G(x) = 0 \Leftrightarrow R(x) = G(x)$$

$$\Leftrightarrow r\ln\frac{K}{x} - \frac{bpx}{x^2 + a^2} = 0 \Leftrightarrow r\ln\frac{K}{x} = \frac{bpx}{x^2 + a^2}$$

$$\Leftrightarrow \ln\frac{K}{x} = \frac{bpx}{r\left(x^2 + a^2\right)} \Leftrightarrow \frac{K}{x} = e^{\frac{bpx}{r\left(x^2+a^2\right)}}$$

$$\Leftrightarrow xe^{\frac{bpx}{r\left(x^2+a^2\right)}} - K = 0 \qquad (4.7)$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι εκθετική και δεν μπορούμε να βρούμε αναλυτική λύση. Έτσι θα χρησιμοποιηθούν υπολογιστικές τεχνικές για την διερεύνηση του αριθμού των ριζών και την εύρεση αριθμητικών λύσεων. Όσον αφορά το είδος των ριζών, γνωρίζουμε ότι υπάρχουν τρεις περιπτώσεις:

i) 1 πραγματική ρίζα
ii) 2 πραγματικές ρίζες
iii) 3 πραγματικές ρίζες

Πριν συνεχίσουμε τη μελέτη, θα εξετάσουμε την επίδραση που έχουν οι αλλαγές των τιμών των παραμέτρων στις συναρτήσεις $R(x)$ και $G(x)$. Η συνάρτηση $R(x)$, εμπεριέχει τις παραμέτρους *r* και *K*:

$$R(x) = r \ln \frac{K}{x}$$

Από τον τύπο παρατηρούμε ότι οι μεταβολές στην τιμή του *r*, είναι ευθέως ανάλογες με την τιμή της $R(x)$. Όσον αφορά την τιμή του *K*, όσο μεγαλύτερη είναι, τόσο πιο αργά συγκλίνει η $R(x)$ στον άξονα των *x*.

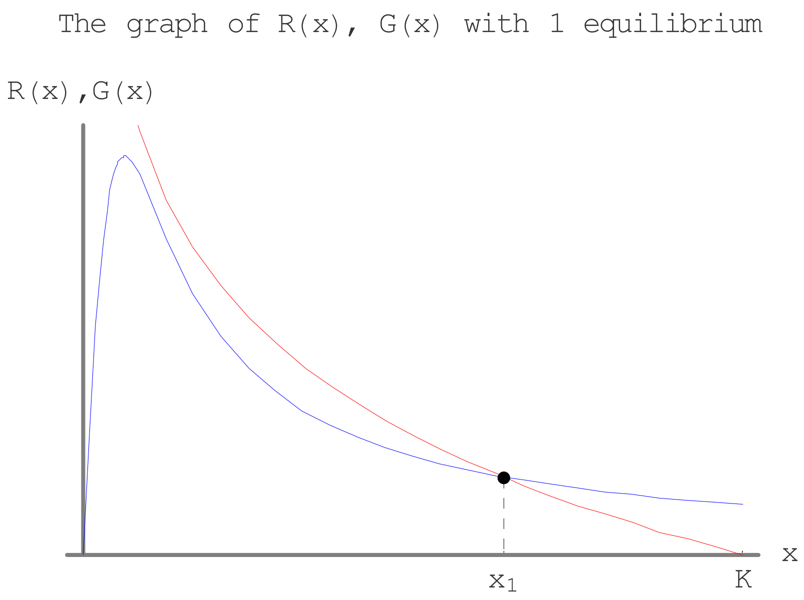
Η $G(x)$, έχει τις παραμέτρους *b*, *p* και *α*:

$$G(x) = \frac{bpx}{x^2 + a^2}$$

Στη μελέτη μας, η τιμή του α (switching value), θα θεωρηθεί ίση με 1. Οι παράμετροι b και p, μπορούν να θεωρηθούν ως ένας παράγοντας, αφού οι μεταβολές τους επηρεάζουν την $G(x)$ με τον ίδιο τρόπο. Ισχύει ότι η τιμή του γινομένου *bp*, είναι ευθέως ανάλογη της τιμής της $G(x)$.

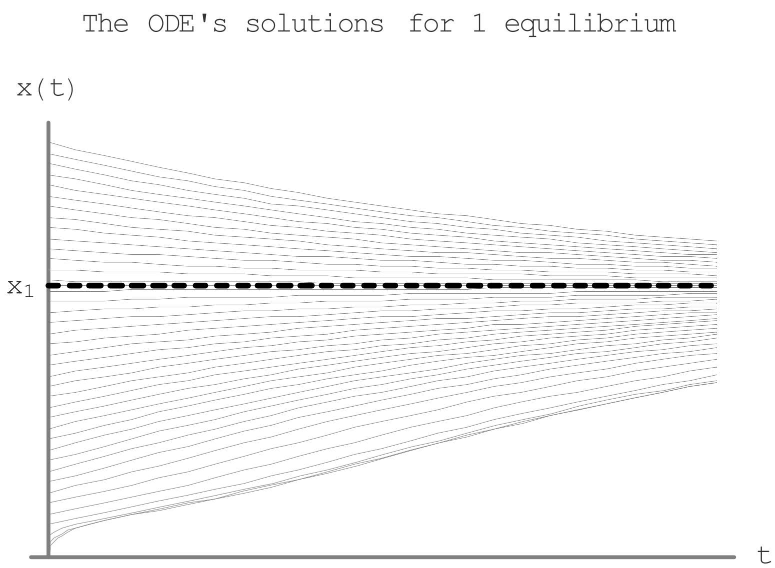
4.4. Ένα σημείο επαφής

Όταν οι $R(x)$ και $G(x)$ έχουν ένα σημείο επαφής, έστω x_1, τότε η $x = x_1$ είναι ευσταθής ισορροπημένη λύση της Διαφορικής Εξίσωσης. Παρακάτω βλέπουμε τις γραφικές παραστάσεις των $R(x)$ και $G(x)$.



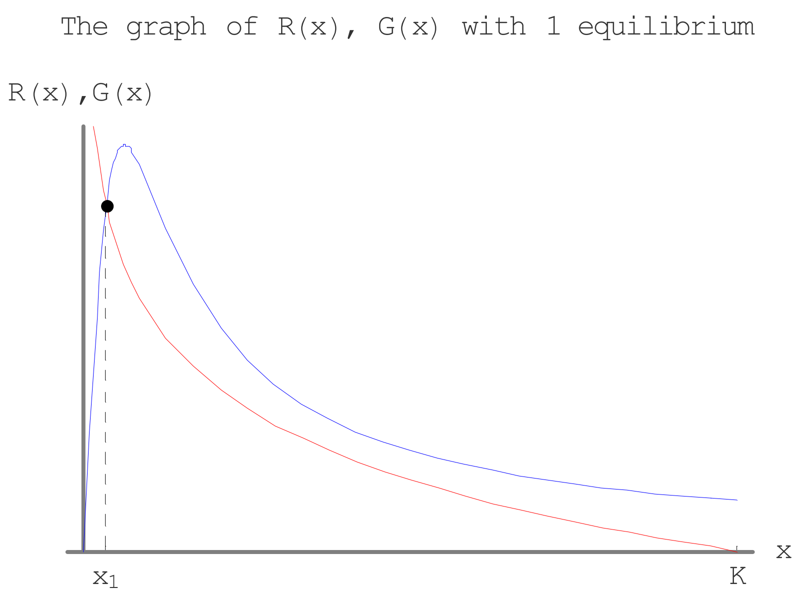
Εικόνα 6 - Οι R(x) και G(x) με 1 σημείο επαφής για $x_1 \rightarrow K$

Σε αυτήν την περίπτωση, δηλαδή όταν το x_1 τείνει στο K, ο πληθυσμός των σκουληκιών έχει μεγαλώσει πολύ και ό,τι και να κάνουν τα πουλιά δεν μπορούν να τον μειώσουν κάτω από αυτή την τιμή. Έτσι το δάσος καταστρέφεται.



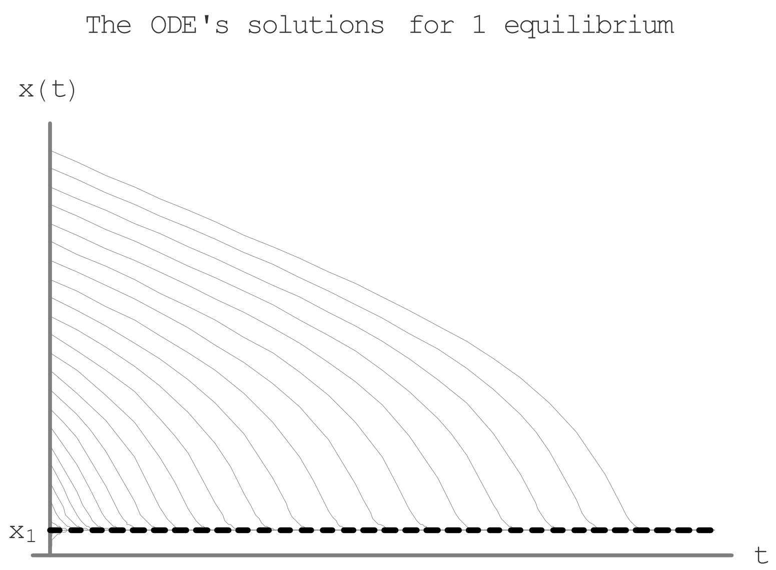
Εικόνα 7 - Οι λύσεις της Δ.Ε. για 1 σημείο ισορροπίας με $x_1 \rightarrow K$

Η ρίζα στην παραπάνω γραφική παράσταση είναι κοντά στο K, αλλά για πιο μικρές τιμές του *r* ή πιο μεγάλες τιμές του γινομένου *bp*, μπορεί να ανήκει στο $(0, x_{\max})$. Το $x_{\max}$ είναι η μέγιστη τιμή της G(x) και όπως αναφέρθηκε στην Ενότητα 4.2, έχει τιμή $x_{\max} = a$.



Εικόνα 8 - Οι R(x) και G(x) με 1 σημείο επαφής με $x_1 \in (0, x_{\max})$

Έτσι αν $x \in (0, x_{\max})$, τα πουλιά θα καταφέρουν να σταθεροποιήσουν τον πληθυσμό σε χαμηλά επίπεδα και το δάσος δεν κινδυνεύει, λόγω χαμηλού φυσικού ρυθμού ανάπτυξης των σκουληκιών.

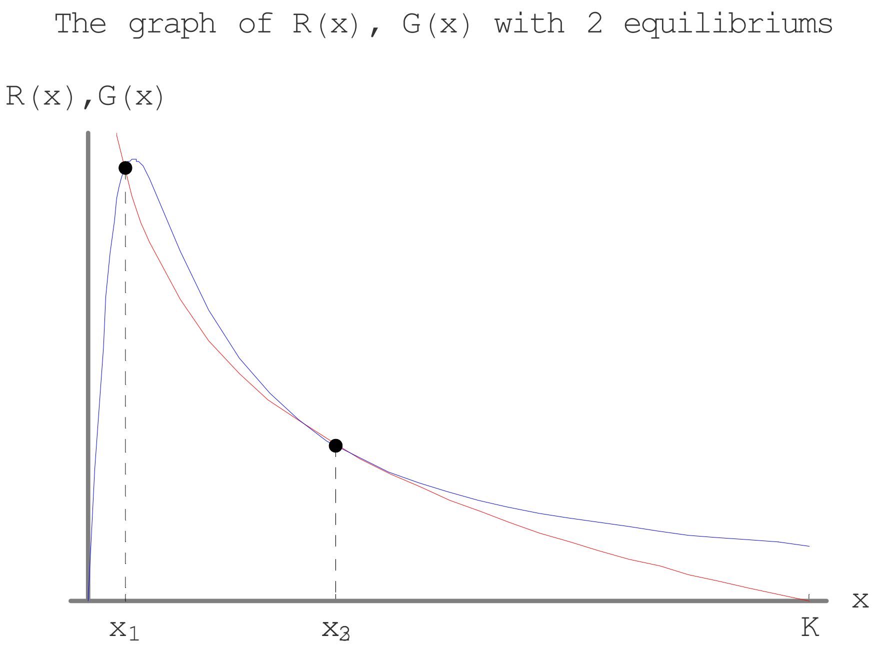


Εικόνα 9 - Οι λύσεις της Δ.Ε. για 1 σημείο ισορροπίας με $x_1 \in (0, x_{\max})$

Σε αυτή την περίπτωση ο πληθυσμός σταθεροποιείται σε χαμηλότερα επίπεδα, για αρχικές τιμές κοντά στο x_1.

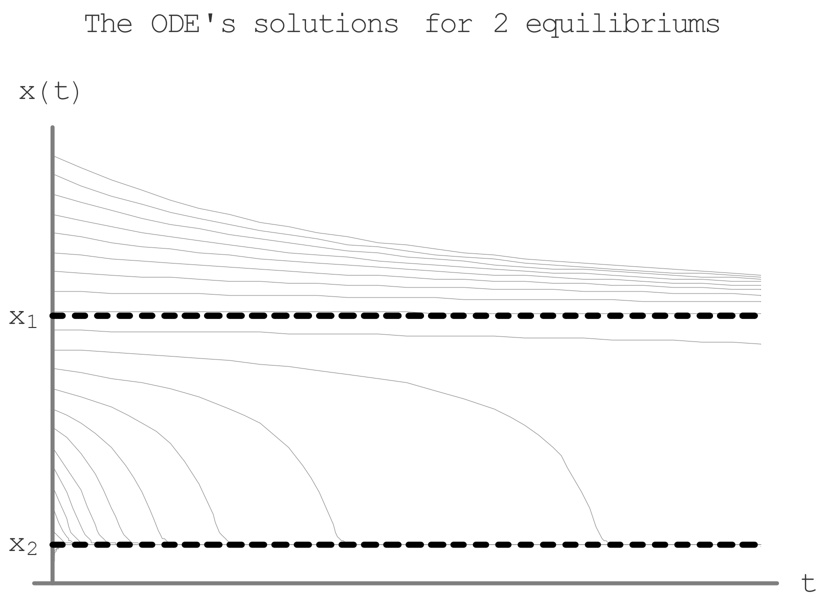
4.5. Δύο σημεία επαφής

Όταν οι $R(x)$ και $G(x)$, τέμνονται σε δύο σημεία, τότε η Δ.Ε. έχει δύο ευσταθείς λύσεις, x_1 και x_2. Οι γραφικές παραστάσεις των R και G είναι:



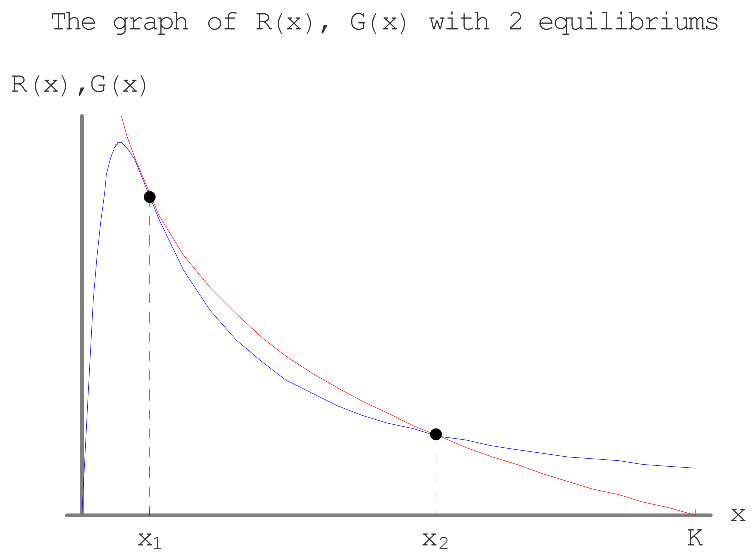
Εικόνα 10 - Οι R(x) και G(x) με 2 σημεία επαφής

Όπως φαίνεται και από τη γραφική παράσταση των λύσεων της Δ.Ε., η μία ρίζα (x_2) αποτελεί ευσταθή ισορροπημένη λύση της, ενώ η άλλη (x_1) είναι ημιευσταθής.



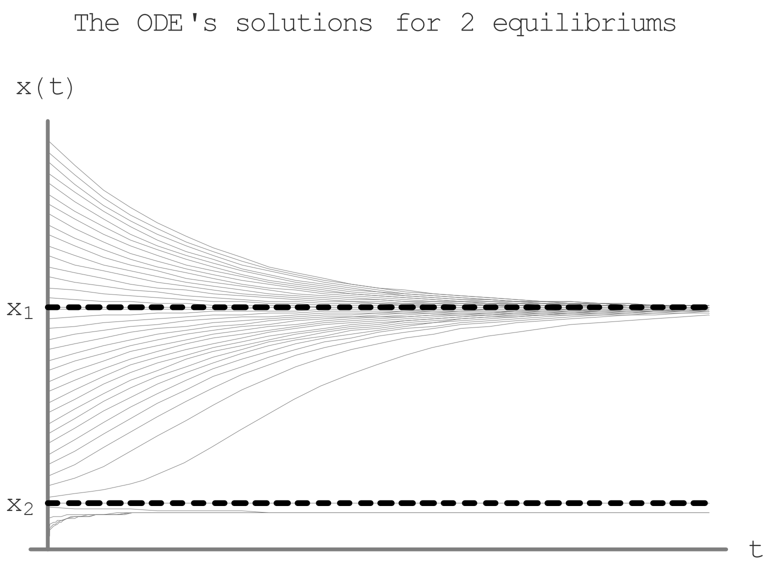
Εικόνα 11 - Οι λύσεις της Δ.Ε. για 2 σημεία ισορροπίας

Αν όμως η ρίζα x_1, είναι μεγαλύτερη του $x_{\max}$, τότε η x_2 αποτελεί ευσταθής ισορροπημένη λύση και η x_1 ασταθής.



Εικόνα 12 - Οι R(x) και G(x) με 2 σημεία επαφής και $x_1 > x_{max}$

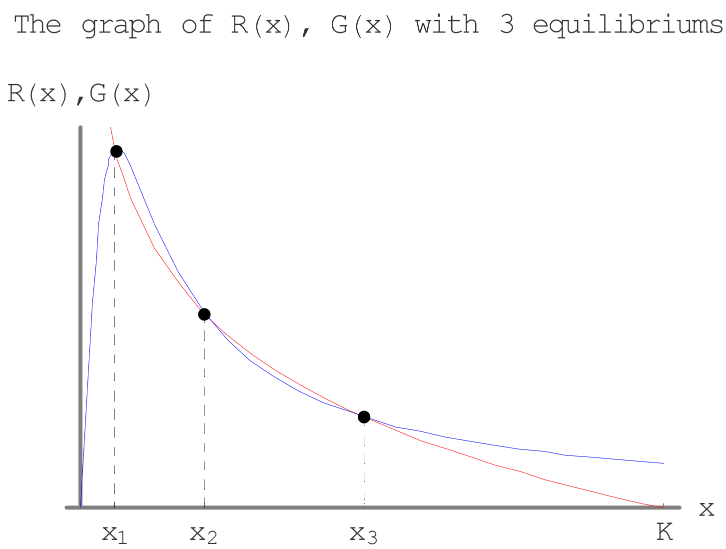
Σε αυτή την περίπτωση, παρατηρούμε ότι αν ο πληθυσμός των σκουληκιών ξεπεράσει την τιμή x_2, τότε τα πουλιά δεν μπορούν να τον ελέγξουν και το δάσος θα καταστραφεί.



Εικόνα 13 - Οι λύσεις της Δ.Ε. για 2 σημεία ισορροπίας και $x_1 > x_{max}$

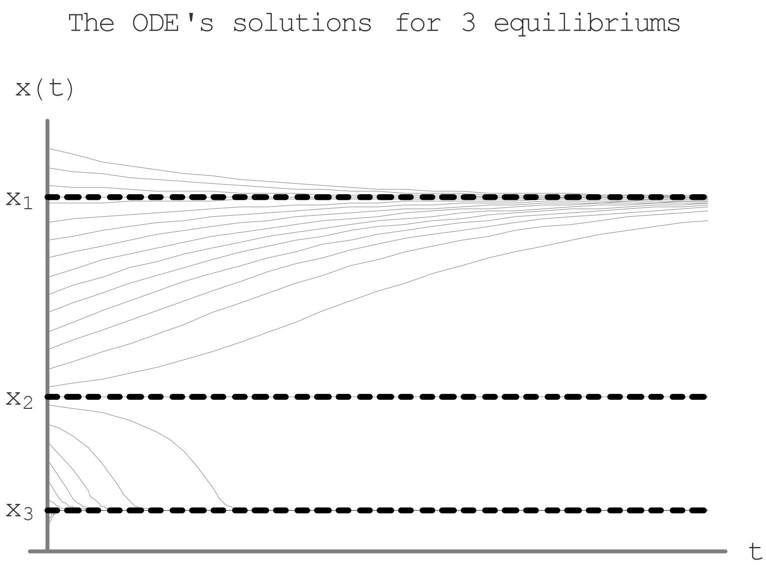
4.6. Τρία σημεία επαφής

Η τελευταία περίπτωση, είναι αυτή στην οποία οι $R(x)$ και $G(x)$, έχουν τρία σημεία επαφής. Τότε η γραφική παράστασή τους είναι:



Εικόνα 14 - Οι R(x) και G(x) με 3 σημεία επαφής

Οι τρεις ρίζες, x_1, x_2 και x_3, αποτελούν ισορροπημένες λύσεις της Διαφορικής Εξίσωσης, αλλά μόνο οι x_1 και x_3 είναι ευσταθείς. Η x_2, είναι ασταθής ισορροπημένη λύση, όπως φαίνεται και από την γραφική παράσταση των λύσεων:



Εικόνα 15 - Οι λύσεις της Δ.Ε. για 3 σημεία ισορροπίας

Από τη γραφική παράσταση διαπιστώνουμε ότι αν ο πληθυσμός των σκουληκιών έχει μεγαλώσει και είναι κοντά στο επίπεδο κορεσμού, τότε ό,τι και να κάνουν τα πουλιά δεν μπορούν να τον μειώσουν κάτω από μία τιμή (x_1). Δηλαδή με φυσικό τρόπο δεν μπορεί να γίνει τίποτα και το δάσος καταστρέφεται. Το x_2 είναι η κρίσιμη τιμή και ο πληθυσμός πρέπει να διατηρείται μικρότερος από αυτό.

4.7. Περιοχή Ευσταθούς Κατάστασης

Για να έχουμε μια πιο ολοκληρωμένη εικόνα των λύσεων της Διαφορικής Εξίσωσης, μπορούμε να κάνουμε μελέτη της **Περιοχής Ευσταθούς Κατάστασης** (Steady State Domain).

Γνωρίζουμε ότι αν *f* και *g* δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις, τότε η λύση του συστήματος:

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ f'(x) &= g'(x) \end{aligned}\right\}$$

με άγνωστο το x, μας δίνει τις τετμημένες των σημείων επαφής των δύο συναρτήσεων.

Στο τροποποιημένο μοντέλο που μελετάμε, είναι:

$$R(x) = r \ln \frac{K}{x}$$

$$G(x) = \frac{bpx}{x^2 + a^2}$$

και οι παράγωγοί τους είναι:

$$R'(x) = -\frac{r}{x} \tag{4.8}$$

$$G'(x) = \frac{bp\left(-x^2 + a^2\right)}{\left(x^2 + a^2\right)^2} \tag{4.9}$$

Αν τα p, b, a, K θεωρηθούν σταθερά τότε το σύστημα:

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases} \tag{4.10}$$

έχει αγνώστους τα x και r και οι λύσεις του μας δίνουν τις τιμές τους για τις οποίες οι γραφικές παραστάσεις $R(x)$ και $G(x)$ εφάπτονται.

Επειδή η $G(x)$ είναι πάντα η ίδια και η $R(x)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση, το σύστημα έχει πάντα δύο θετικές λύσεις τις:

$(x_1, r_{\min})$ και $(x_2, r_{\max})$, με $r_{\min} < r_{\max}$

Μεταβάλλοντας το K για το παραπάνω σύστημα, βρίσκουμε ένα σύνολο από λύσεις που είναι της μορφής:

$\left(x_1(K), r_{\min}(K)\right)$ και $\left(x_2(K), r_{\max}(K)\right)$, με $r_{\min}(K) < r_{\max}(K)$

Παίρνοντας τα σημεία $\left(K, r_{\min}(K)\right)$ και $\left(K, r_{\max}(K)\right)$, με $K \geq K_0$ (όπου K_0 η crisp value, δηλαδή η τιμή του K για την οποία $r_{\min}(K) = r_{\max}(K)$), ορίζουμε στο επίπεδο K – r, δύο φθίνουσες καμπύλες τις $c_{r\min}$ και $c_{r\max}$. Οι δύο αυτές καμπύλες, όταν απεικονιστούν στο ίδιο σύστημα, ορίζουν ένα τόπο

D στο επίπεδο, που λέγεται **Περιοχή Ευσταθούς Ισορροπίας** (Steady State Domain).

Μπορούμε να διαχωρίσουμε τρεις περιπτώσεις για το είδος των ριζών της Διαφορικής Εξίσωσης, ανάλογα με την περιοχή στην οποία ανήκει το σημείο (K,r):

1. Αν $r_{\min} < r < r_{\max}$, δηλαδή $(K,r) \in D$, η Διαφορική Εξίσωση έχει 3 ισορροπημένες λύσεις.
2. Αν το $r = r_{\min}$ ή $r = r_{\max}$, τότε η Διαφορική Εξίσωση έχει 2 ισορροπημένες λύσεις.
3. Αν $r_{\min} < r$ ή $r > r_{\max}$, η Διαφορική Εξίσωση έχει 1 ισορροπημένη λύση.

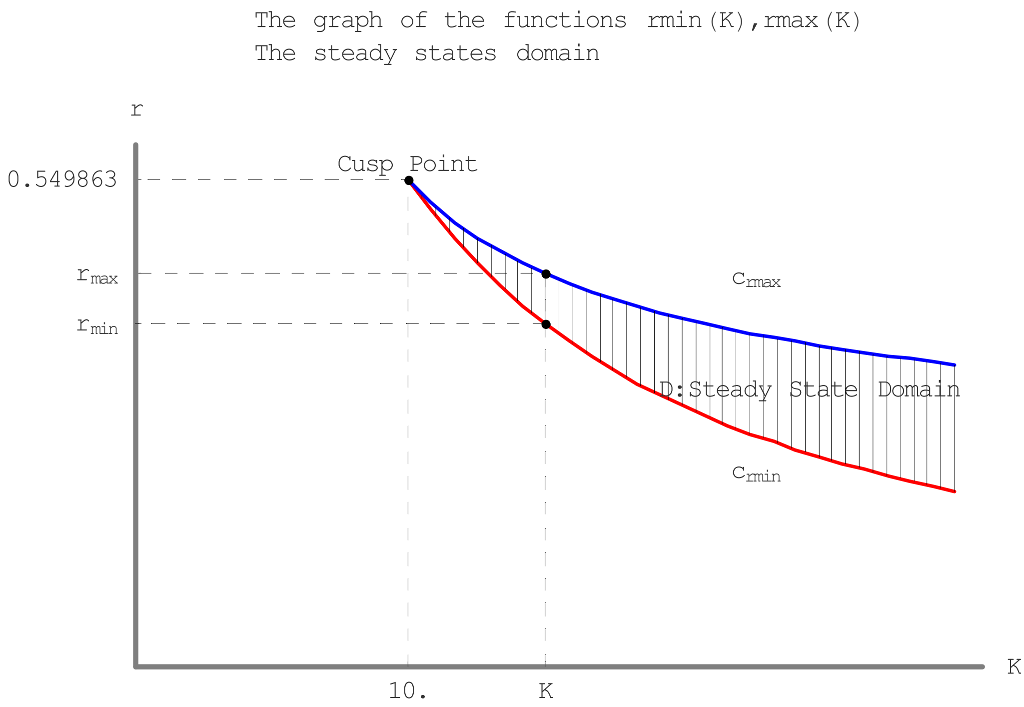
Με τη βοήθεια του Mathematica, υπολογίζουμε αρκετά ζευγάρια τιμών $(K, r_{\min}(K))$ και $(K, r_{\max}(K))$ και χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση Interpolate ώστε τελικά να σχεδιάσουμε τις καμπύλες $c_{r\min}$ και $c_{r\max}$. Στην εφαρμογή μας, χρησιμοποιούμε τις παρακάτω τιμές:

Παράμετρος	**Τιμή**
ελάχιστο επίπεδο κορεσμού (crisp value)	$K_0 = 10$
μέγιστο επίπεδο κορεσμού	$K_{max} = 30$
βήμα για το επίπεδο κορεσμού	$K_{step} = 0.5$
μέτρο αρπακτικότητας	$b = 1.7$
επίπεδο πληθυσμού πουλιών	$p = 1.3$
switching value	$\alpha = 1$

Το crisp value υπολογίστηκε με δοκιμές στο Mathematica και είναι το σημείο στο οποίο $r_{\min}(K) = r_{\max}(K)$. Παρακάτω παρουσιάζεται ο πίνακας με τις τιμές των ***K***, $\boldsymbol{r_{min}}$ και $\boldsymbol{r_{max}}$ που υπολόγισε το Mathematica.

K	r_{min}	r_{max}
10	0,549683	0,549863
10,5	0,52922	0,533108
11	0,509456	0,518701
11,5	0,49069	0,505964
12	0,473005	0,494544
12,5	0,45635	0,484205
13	0,440705	0,474773
13,5	0,42598	0,466115
14	0,412137	0,458127
14,5	0,399097	0,450723
15	0,386806	0,443833
15,5	0,375207	0,437399
16	0,364249	0,431372
16,5	0,353885	0,425709
17	0,34407	0,420375
17,5	0,334765	0,415339
18	0,325933	0,410574
18,5	0,317541	0,406055
19	0,309557	0,401762
19,5	0,301954	0,397677
20	0,294707	0,393782
20,5	0,287791	0,390065
21	0,281185	0,38651
21,5	0,274869	0,383108
22	0,268825	0,379846
22,5	0,263037	0,376716
23	0,257488	0,373709
23,5	0,252164	0,370817
24	0,247053	0,368032
24,5	0,242142	0,365348
25	0,237419	0,362759
25,5	0,232875	0,36026
26	0,228499	0,357845
26,5	0,224282	0,35551
27	0,220217	0,35325
27,5	0,216295	0,351061
28	0,212508	0,34894
28,5	0,20885	0,346883
29	0,205315	0,344887
29,5	0,201896	0,342949
30	0,198589	0,341066

Με αυτές τις τιμές και τη συνάρτηση Interpolate σχεδιάζουμε τελικά τις δύο καμπύλες:



Εικόνα 16 - Η Περιοχή Ευσταθούς Κατάστασης

4.8. Οριζόντιες ασύμπτωτες των καμπυλών c_{rmax} και c_{rmin}

Σε αυτή την ενότητα θα διερευνήσουμε την ύπαρξη οριζόντιων ασύμπτωτων των καμπυλών $c_{r\min}$ και $c_{r\max}$. Για τις τιμές που δόθηκαν στις παραμέτρους στην προηγούμενη Ενότητα:

Παράμετρος	Τιμή
ελάχιστο επίπεδο κορεσμού (crisp value)	$K = 12$
μέτρο αρπακτικότητας	$b = 1.7$
επίπεδο πληθυσμού πουλιών	$p = 1.3$
switching value	$\alpha = 1$

και χρησιμοποιώντας το Mathematica, θα υπολογίσουμε τις τιμές $r_{\max}(K)$ και $r_{\min}(K)$ για διάφορες, πολύ μεγάλες τιμές του *K*.

Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι αλλάζουμε τις τιμές του **μέγιστου επιπέδου κορεσμού** (Kmax) και του **βήματος για το επίπεδο κορεσμού** (Kstep). Το μέγιστο επίπεδο κορεσμού παίρνει πολύ μεγάλες τιμές, τέτοιες ώστε να μπορούμε να θεωρήσουμε ότι τείνει στο άπειρο. Το βήμα μεγαλώνει, μαζί με το μέγιστο επίπεδο κορεσμού ώστε να μειώσουμε το χρόνο που απαιτεί το Mathematica για τους υπολογισμούς των $r_{\max}(K_{\max})$ και $r_{\min}(K_{\max})$.

Τέλος, αφού υπολογίσουμε τις τιμές των $r_{\max}(K_{\max})$ και $r_{\min}(K_{\max})$ για διάφορα $K_{\max}$ (ώστε να προσεγγίσουμε τις ασύμπτωτες όσο καλύτερα μπορούμε), θα προσπαθήσουμε να δούμε πως επηρεάζονται τις τιμές $r_{\max}(K)$ και $r_{\min}(K)$, από τις μεταβολές των παραμέτρων του συστήματος.

4.8.1. Οριζόντιες ασύμπτωτες για διάφορα K_{max}

Θέτοντας τις παρακάτω τιμές στα $K_{\min}$, $K_{\max}$ και K_{step}:

Παράμετρος	Τιμή
ελάχιστο επίπεδο κορεσμού (crisp value)	K_{min} = 10
μέγιστο επίπεδο κορεσμού	K_{max} = 9×10^{15}
βήμα για το επίπεδο κορεσμού	K_{step} = 5×10^{11}

υπολογίζονται οι παρακάτω τιμές:

Παράμετρος	Τιμή
$r_{\min}(K_{\max})$	6.67489×10^{-16}
$r_{\max}(K_{\max})$	0.0300906

Για τις παρακάτω τιμές στα $K_{\min}$, $K_{\max}$ και K_{step}:

Παράμετρος	Τιμή
ελάχιστο επίπεδο κορεσμού (crisp value)	K_{min} = 10
μέγιστο επίπεδο κορεσμού	K_{max} = 9×10^{17}
βήμα για το επίπεδο κορεσμού	K_{step} = 5×10^{12}

υπολογίζονται οι παρακάτω τιμές:

Παράμετρος	**Τιμή**
$r_{\min}(K_{\max})$	6.67489×10^{-18}
$r_{\max}(K_{\max})$	0.0267366

Τέλος, θέτοντας τις παρακάτω τιμές στα $K_{\min}$, $K_{\max}$ και K_{step}:

Παράμετρος	**Τιμή**
ελάχιστο επίπεδο κορεσμού (crisp value)	$K_{min} = 10$
μέγιστο επίπεδο κορεσμού	$K_{max} = 10^{100}$
βήμα για το επίπεδο κορεσμού	$K_{step} = 5 \times 10^{95}$

υπολογίζονται οι παρακάτω τιμές:

Παράμετρος	**Τιμή**
$r_{\min}(K_{\max})$	6.0074×10^{-100}
$r_{\max}(K_{\max})$	0.004799

Για αυτή την περίπτωση παρατηρούμε ότι τιμή του $r_{\max}(K_{\max})$ συνεχίζει να μικραίνει και φτάνει σε πολύ χαμηλά επίπεδα.

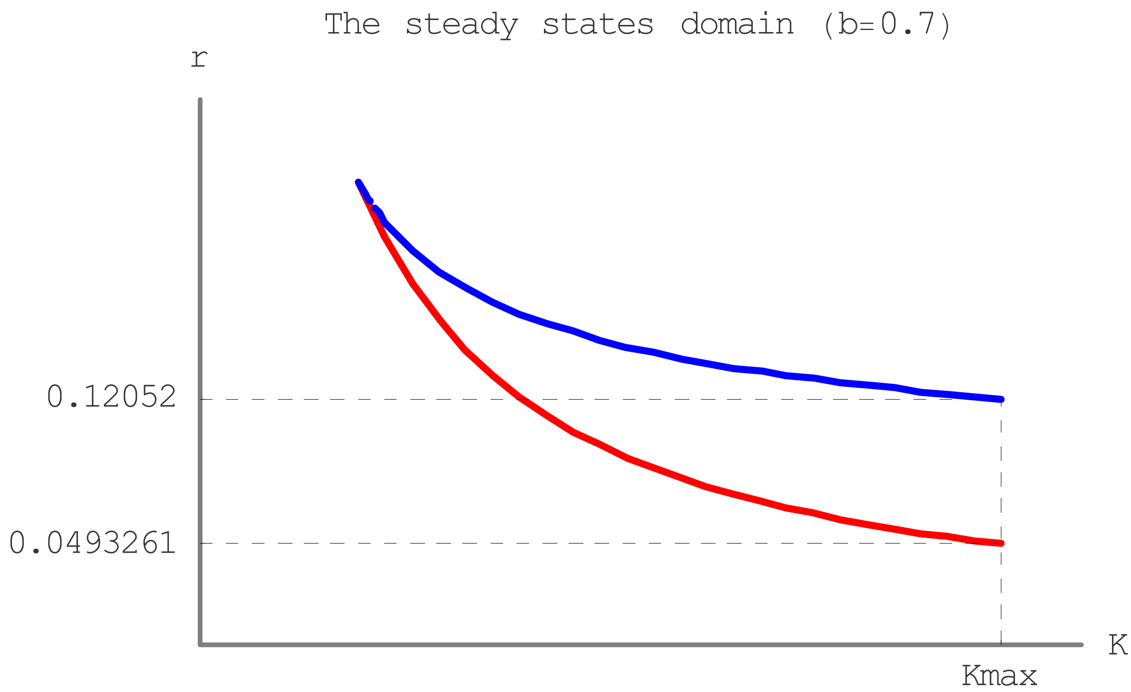
Από τις παραπάνω δοκιμές μπορούμε να συμπεράνουμε με ασφάλεια ότι η $c_{r\min}$ έχει ως οριζόντια ασύμπτωτη τον οριζόντιο άξονα. Όσον αφορά την $c_{r\max}$ δεν μπορούμε να εξάγουμε κάποιο συμπέρασμα, καθότι όσο μεγαλύτερο θέτουμε το Kmax, τόσο μικρότερη γίνεται η τιμή του $r_{\max}(K_{\max})$.

Συνεπώς, για να έχουμε μία καλύτερη εικόνα για την ασύμπτωτη, στις παρακάτω ενότητες, θα εξετάσουμε πώς επηρεάζεται το $r_{\max}(K_{\max})$ από μεταβολές στις τιμές των παραμέτρων b, p και a.

4.8.2. Μεταβολές στις οριζόντιες ασύμπτωτες για διάφορα b

Σε αυτή την ενότητα θα θέσουμε τρεις διαφορετικές τιμές στην παράμετρο b και χρησιμοποιώντας το Mathematica θα σχεδιάσουμε την Περιοχή Ευσταθούς Κατάστασης, με τις δύο καμπύλες $c_{r\min}$ και $c_{r\max}$.

Για **b = 0.7**, η Περιοχή Ευσταθούς Κατάστασης είναι:



Εικόνα 17 - Η Περιοχή Ευσταθούς Κατάστασης για b = 0.7

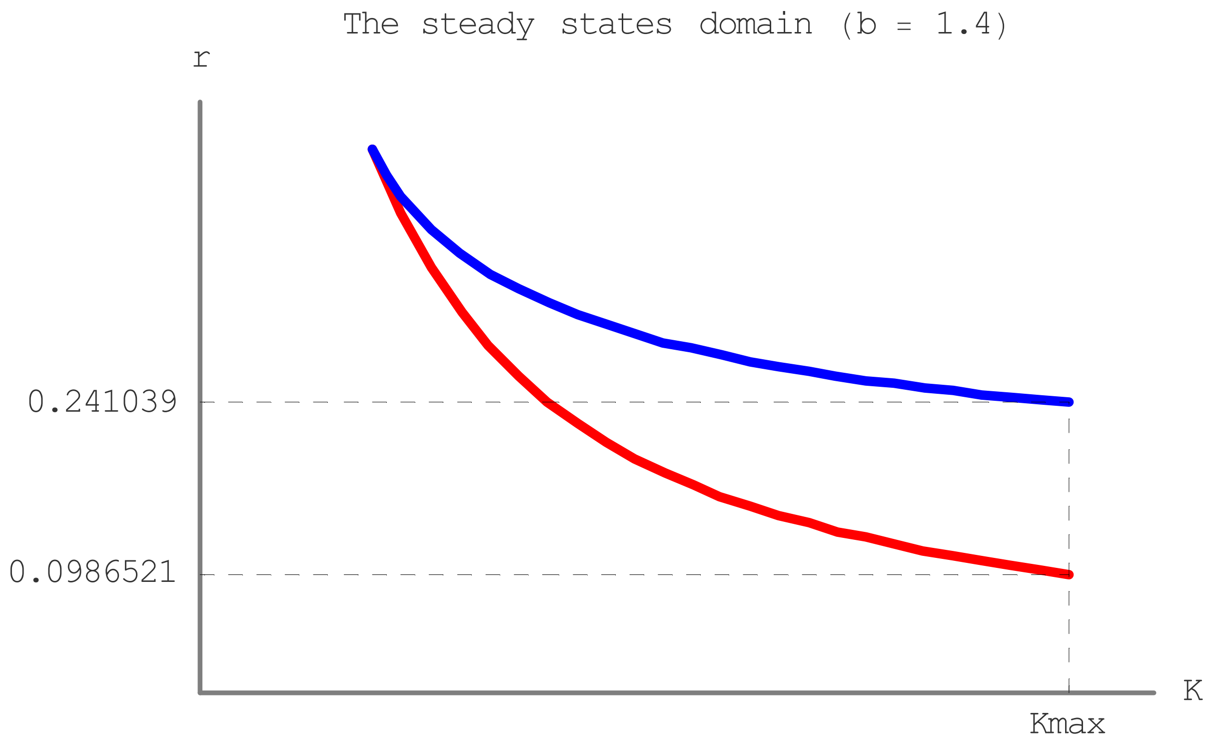
Από τη γραφική παράσταση φαίνεται ότι

$$r_{\max}\left(K_{\max}\right)=0.1252$$

Στην περίπτωση που θέσουμε K_{max} = 10^{100}, το $r_{\max}$ γίνεται:

$$r_{\max}\left(K_{\max}\right)=0.00197606$$

Για τιμή του b διπλάσια από την προηγούμενη, δηλαδή **b = 1.4**, η Περιοχή Ευσταθούς Κατάστασης είναι:



Εικόνα 18 - Η Περιοχή Ευσταθούς Κατάστασης για b = 1.4

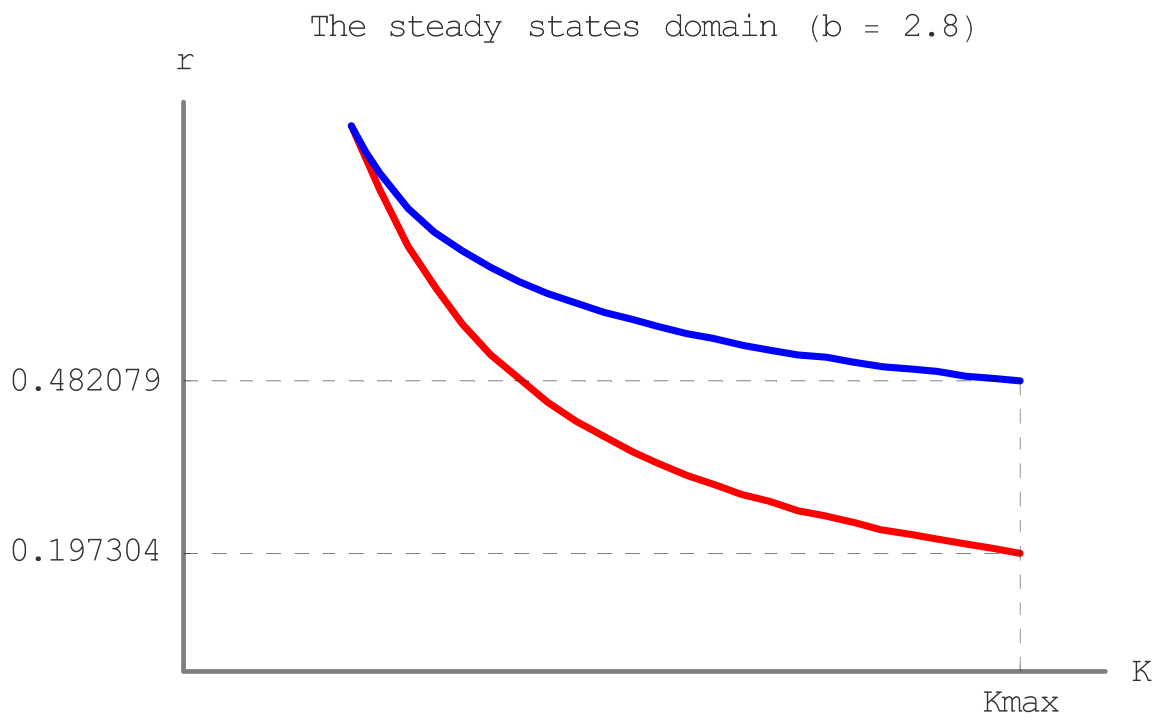
από τη γραφική παράσταση παρατηρούμε ότι το $r_{\max}(K_{\max})$ περίπου διπλασιάζεται:

$$r_{\max}(K_{\max}) = 0.241039$$

Στην περίπτωση που θέσουμε $K_{max} = 10^{100}$, το $r_{\max}$ γίνεται:

$$r_{\max}(K_{\max}) = 0.00395212$$

Τέλος, για **b = 2.8**, η Περιοχή Ευσταθούς Κατάστασης είναι:



Εικόνα 19 - Η Περιοχή Ευσταθούς Κατάστασης για b = 2.8

Και εδώ το $r_{\max}(K_{\max})$ διπλασιάζεται σε σχέση με την προηγούμενη περίπτωση:

$$r_{\max}(K_{\max}) = 0.482079$$

Στην περίπτωση που θέσουμε $K_{max} = 10^{100}$, το $r_{\max}$ γίνεται:

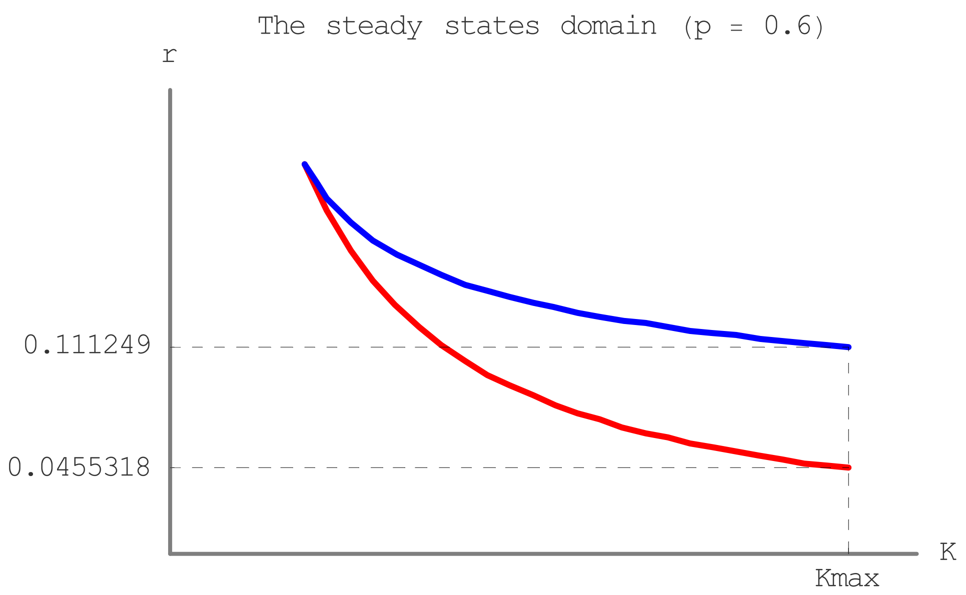
$$r_{\max}(K_{\max}) = 0.00790423$$

Έτσι συμπεραίνουμε από τα 3 ζεύγη τιμών, ότι υπάρχει ευθέως ανάλογη σχέση μεταξύ της τιμής της παραμέτρου b και του $r_{\max}(K_{\max})$.

4.8.3. Μεταβολές στις οριζόντιες ασύμπτωτες για διάφορα p

Προχωράμε τώρα στην μελέτη της επίδρασης της παραμέτρου p στην $r_{\max}(K_{\max})$.

Θέτουμε **p = 0.6**, η Περιοχή Ευσταθούς Κατάστασης είναι:



Εικόνα 20 - Η Περιοχή Ευσταθούς Κατάστασης για p = 0.6

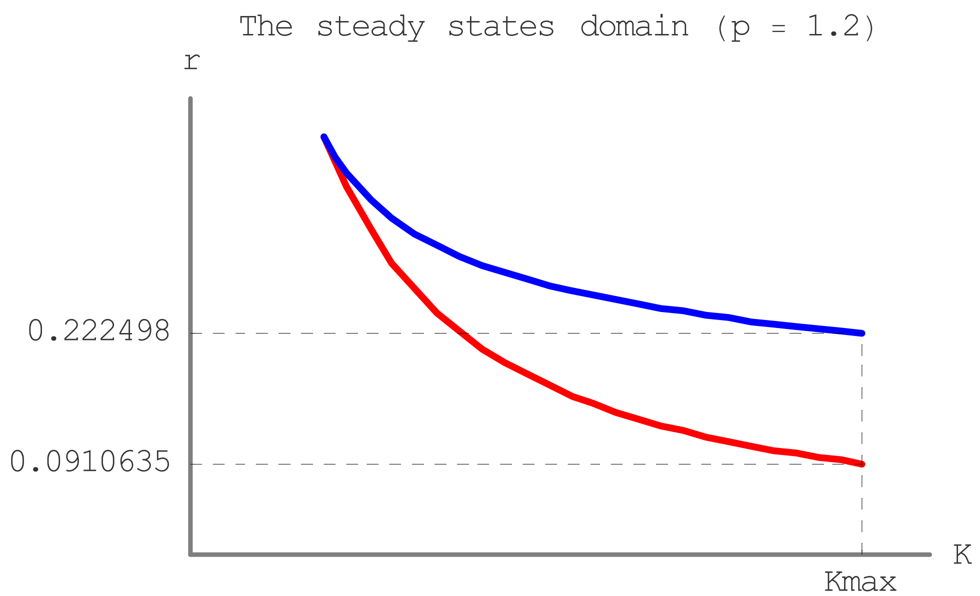
Από τη γραφική παράσταση φαίνεται ότι

$$r_{\max}\left(K_{\max}\right) = 0.111249$$

Στην περίπτωση που θέσουμε K_{max} = 10^{100}, το $r_{\max}$ γίνεται:

$$r_{\max}\left(K_{\max}\right) = 0.00182405$$

Για τιμή του p διπλάσια από την προηγούμενη, δηλαδή **p = 1.2**, η Περιοχή Ευσταθούς Κατάστασης είναι:



Εικόνα 21 - Η Περιοχή Ευσταθούς Κατάστασης για p = 1.2

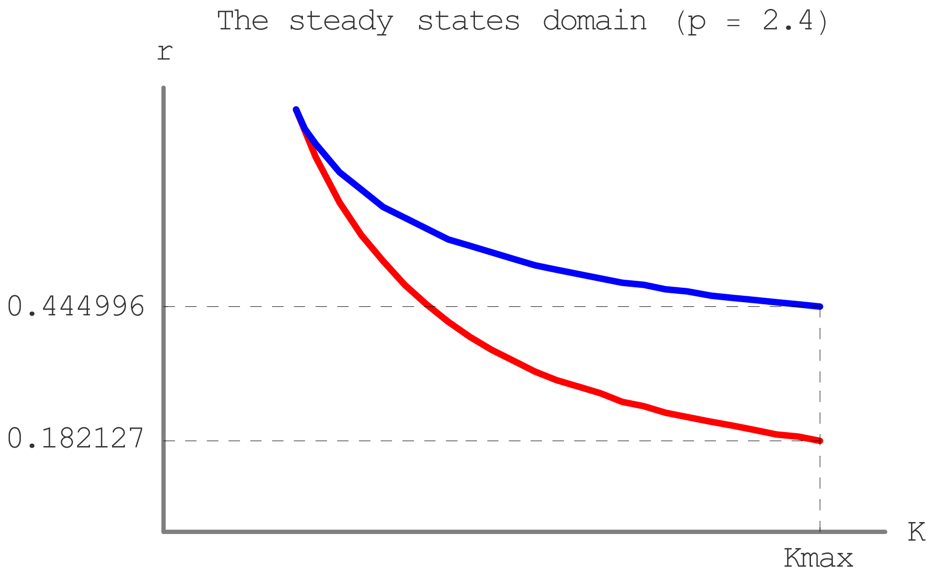
από τη γραφική παράσταση παρατηρούμε ότι το $r_{\max}(K_{\max})$ διπλασιάζεται:

$$r_{\max}(K_{\max}) = 0.222498$$

Στην περίπτωση που θέσουμε $K_{max} = 10^{100}$, το $r_{\max}$ γίνεται:

$$r_{\max}(K_{\max}) = 0.00364811$$

Τέλος, για **p = 2.4**, η Περιοχή Ευσταθούς Κατάστασης είναι:



Εικόνα 22 - Η Περιοχή Ευσταθούς Κατάστασης για p = 2.4

Και εδώ το $r_{\max}(K_{\max})$ διπλασιάζεται σε σχέση με την προηγούμενη περίπτωση:

$$r_{\max}(K_{\max}) = 0.444996$$

Στην περίπτωση που θέσουμε $K_{max} = 10^{100}$, το $r_{\max}$ γίνεται:

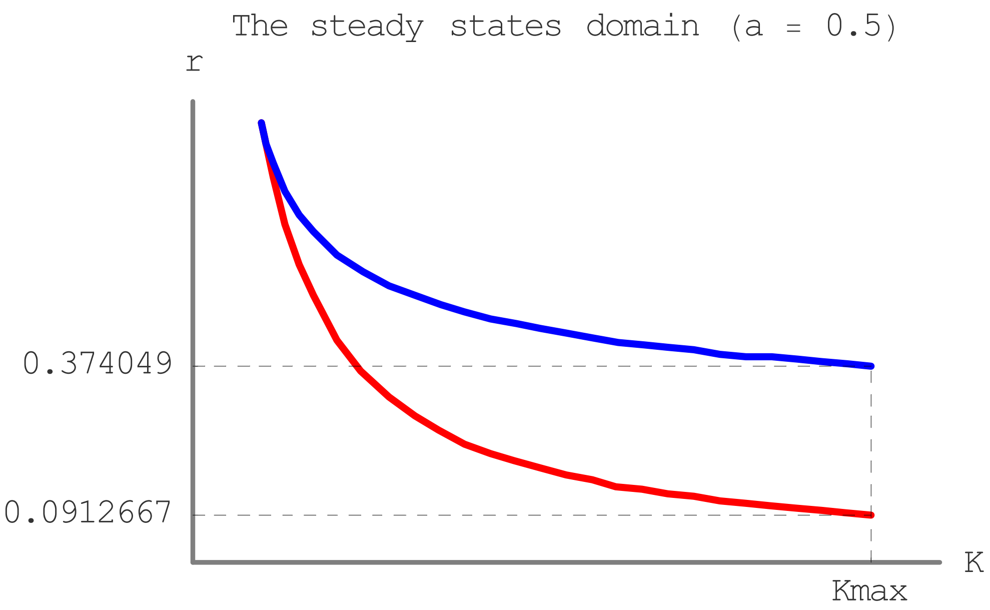
$$r_{\max}(K_{\max}) = 0.00729622$$

Έτσι συμπεραίνουμε από τα 3 ζεύγη τιμών, ότι υπάρχει ευθέως ανάλογη σχέση μεταξύ της τιμής της παραμέτρου p και του $r_{\max}(K_{\max})$.

4.8.4. Μεταβολές στις οριζόντιες ασύμπτωτες για διάφορα a

Ολοκληρώνουμε τη μελέτη μας θέτοντας διάφορες τιμές στην παράμετρο a.

Για **a = 0.5**, η Περιοχή Ευσταθούς Κατάστασης είναι:



Εικόνα 23 - Η Περιοχή Ευσταθούς Κατάστασης για a = 0.5

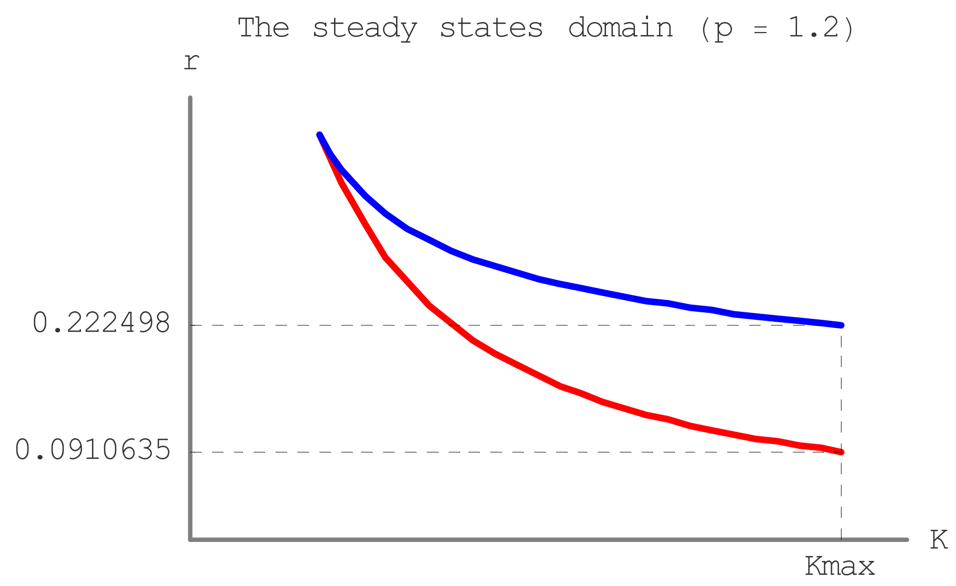
Από τη γραφική παράσταση φαίνεται ότι

$$r_{\max}\left(K_{\max}\right) = 0.374049$$

Στην περίπτωση που θέσουμε $K_{max} = 10^{100}$, το $r_{\max}$ γίνεται:

$$r_{\max}\left(K_{\max}\right) = 0.00581282$$

Για τιμή του a διπλάσια από την προηγούμενη, δηλαδή **a = 1**, η Περιοχή Ευσταθούς Κατάστασης είναι:



Εικόνα 24 - Η Περιοχή Ευσταθούς Κατάστασης για a = 1

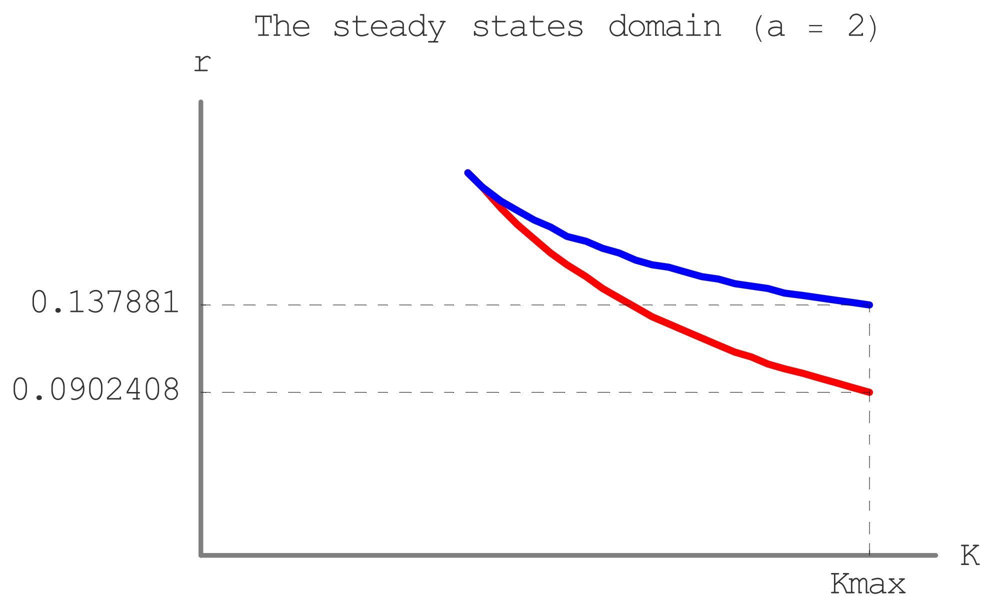
από τη γραφική παράσταση παρατηρούμε ότι το $r_{\max}\left(K_{\max}\right)$ γίνεται ίσο με 59,5% της προηγούμενης τιμής:

$$r_{\max}\left(K_{\max}\right)=0.222498$$

Στην περίπτωση που θέσουμε $K_{max} = 10^{100}$, το $r_{\max}$ γίνεται 62,7%:

$$r_{\max}\left(K_{\max}\right)=0.00364811$$

Τέλος, για **a = 2**, η Περιοχή Ευσταθούς Κατάστασης είναι:



Εικόνα 25 - Η Περιοχή Ευσταθούς Κατάστασης για a = 2

Εδώ το $r_{\max}\left(K_{\max}\right)$ είναι περίπου ίσο με το 62% της προηγούμενης τιμής:

$$r_{\max}\left(K_{\max}\right)=0.137881$$

Ενώ για K_{max} = 10^{100} γίνεται ίσο με το 50,1% της προηγούμενης τιμής:

$$r_{\max}\left(K_{\max}\right)=0.00182956$$

Έτσι προκύπτει ότι το a είναι περίπου αντιστρόφως ανάλογο του $r_{\max}\left(K_{\max}\right)$. Έτσι πρέπει να διερευνήσουμε λίγο περισσότερο αυτή την παράμετρο, χρησιμοποιώντας τη διαδικασία της Ακριβής Παρεμβολής.

4.8.5. Παρεμβολή

Αρχικά υπολογίζουμε αρκετά ζεύγη τιμών $\left(a, r_{\max}\left(K_{\max}\right)\right)$, με τη χρήση του Mathematica. Ξεκινάμε θέτοντας τις παραμέτρους b και p ίσες με 1 και με τιμές του a από 0.125 μέχρι 8 με βήμα 0.125:

Παράμετρος	Τιμή
b	1
p	1
$\mathbf{a_{min}}$	0,125
$\mathbf{a_{step}}$	0,125
$\mathbf{a_{max}}$	8

Δηλαδή, σύνολο 64 ζεύγη τιμών, που είναι ένας ικανοποιητικός αριθμός δειγμάτων. Τα αποτελέσματα εμφανίζονται παρακάτω:

a	$r_{max}(K_{max})$
0,125	0.615236
0,250	0.344901
0,375	0.247536
0,500	0.196343

0,625	0.164436
0,750	0.142497
0,875	0.1264130
1,000	0.1140750
1,125	0.1042850
1,250	0.0963129
1,375	0.0896839
1,500	0.0840778
1,625	0.0792697
1,750	0.0750968
1,875	0.0714382
2,000	0.0682023
2,125	0.0653182
2,250	0.0627304
2,375	0.0603945
2,500	0.0582747
2,625	0.0563418
2,750	0.0545717
2,875	0.0529443
3,000	0.0514428
3,125	0.0500530
3,250	0.0487626
3,375	0.0475613
3,500	0.0464402
3,625	0.0453913
3,750	0.0444080
3,875	0.0434843
4,000	0.0426150
4,125	0.0417953
4,250	0.0410213
4,375	0.0402893
4,500	0.0395960

4,625	0.0389385
4,750	0.0383142
4,875	0.0377208
5,000	0.0371560
5,125	0.0366180
5,250	0.0361049
5,375	0.0356153
5,500	0.0351476
5,625	0.0347006
5,750	0.0342730
5,875	0.0338636
6,000	0.0334716
6,125	0.0330959
6,250	0.0327356
6,375	0.0323900
6,500	0.0320584
6,625	0.0317401
6,750	0.0314344
6,875	0.0311407
7,000	0.0308586
7,125	0.0305876
7,250	0.0303272
7,375	0.0300771
7,500	0.0298367
7,625	0.0296059
7,750	0.0293843
7,875	0.0291716
8,000	0.0289677

Γνωρίζοντας ότι οι παράμετροι b και p είναι ανάλογοι της τιμής $r_{\max}\left(K_{\max}\right)$ και η τιμή της παραμέτρου a είναι αντιστρόφως ανάλογη της

$r_{\max}\left(K_{\max}\right)$ μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η ασύμπτωτη μπορεί να είναι της μορφής:

$$yr_{\max} = \frac{c_1 \cdot b \cdot p}{c_2 \cdot a + c_3}, \text{ όπου } c_1, c_2, c_3 \text{ σταθερές}$$

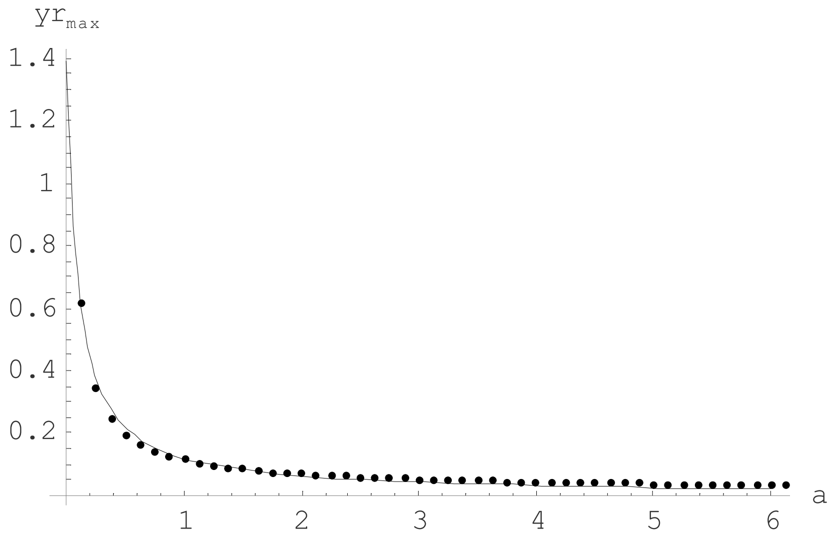
Χρησιμοποιώντας τα ζεύγη τιμών $\left(a, r_{\max}\left(K_{\max}\right)\right)$ που υπολογίσαμε και τη διαδικασία της Παρεμβολής (Interpolation) σε συνάρτηση της μορφής:

$$yr_{\max} = \frac{c_1 \cdot b \cdot p}{c_2 \cdot a + c_3}$$

με $b = p = 1$, οι παράμετροι παίρνουν τιμές:

$$c_1 = 2,67222$$
$$c_2 = 20,7282$$
$$c_3 = 1,91808$$

Σχεδιάζοντας τη γραφική παράσταση της $yr_{\max}$ μαζί με τα ζεύγη σημείων έχουμε:



Εικόνα 26 - Παρεμβολή σε συνάρτηση της μορφής $yr_{\max} = \dfrac{c_1 \cdot b \cdot p}{c_2 \cdot a + c_3}$

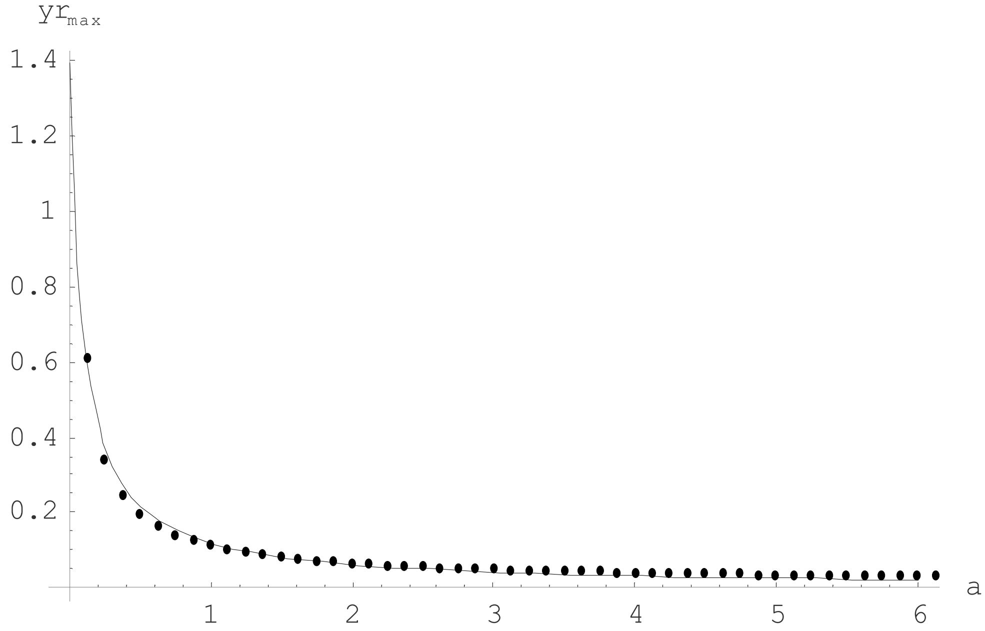
Απαλείφοντας την παράμετρο c_2, η συνάρτηση γίνεται:

$$yr_{\max} = \frac{c_1 \cdot b \cdot p}{a + c_3}$$

και με Παρεμβολή (πάλι με $b = p = 1$), οι παράμετροι παίρνουν τιμές:

$$c_1 = 0{,}128917$$
$$c_3 = 0.0925347$$

Σχεδιάζοντας τη νέα γραφική παράσταση της $yr_{\max}$, με τα ζευγάρια σημείων, προκύπτει:



Εικόνα 27 - Παρεμβολή σε συνάρτηση της μορφής $yr_{\max} = \dfrac{c_1 \cdot b \cdot p}{a + c_3}$

Παρατηρούμε ότι και στις 2 μορφές έχουμε αρκετά καλή προσέγγιση. Λόγω της απλούστερης μορφής που έχει, προτιμούμε τη δεύτερη μορφή της συνάρτησης:

$$yr_{\max} = \frac{0{,}128987 \cdot b \cdot p}{a + 0{,}0925347}$$

4.8.6. Επαλήθευση του τύπου της ασύμπτωτης

Για να επαληθεύσουμε τον τύπο της ασύμπτωτης, υπολογίζουμε και συγκρίνουμε τις τιμές $r_{\max}(K)$ και $yr_{\max}$, για διάφορα b, p και a. Έτσι έχουμε:

a	$r_{max}(K)$	yr_{max}
0,125	0.6152360	0.5929490
0,250	0.3449010	0.3765660
0,375	0.2475360	0.2758880
0,500	0.1963430	0.2176870
0,625	0.1644360	0.1797640
0,750	0.1424970	0.1530940
0,875	0.1264130	0.1333150
1,000	0.1140750	0.1180620
1,125	0.1042850	0.1059410
1,250	0.0963129	0.0960772
1,375	0.0896839	0.0878937
1,500	0.0840778	0.0809948
1,625	0.0792697	0.0751001
1,750	0.0750968	0.0700052
1,875	0.0714382	0.0655577
2,000	0.0682023	0.0616415
2,125	0.0653182	0.0581668
2,250	0.0627304	0.0550630
2,375	0.0603945	0.0522736
2,500	0.0582747	0.0497532
2,625	0.0563418	0.0474647
2,750	0.0545717	0.0453775
2,875	0.0529443	0.0434660
3,000	0.0514428	0.0417092
3,125	0.0500530	0.0400888
3,250	0.0487626	0.0385896
3,375	0.0475613	0.0371985
3,500	0.0464402	0.0359042
3,625	0.0453913	0.0346969
3,750	0.0444080	0.0335682
3,875	0.0434843	0.0325106
4,000	0.0426150	0.0315176
4,125	0.0417953	0.0305835
4,250	0.0410213	0.0297032

4,375	0.0402893	0.0288721
4,500	0.0395960	0.0280862
4,625	0.0389385	0.0273420
4,750	0.0383142	0.0266363
4,875	0.0377208	0.0259660
5,000	0.0371560	0.0253286
5,125	0.0366180	0.0247218
5,250	0.0361049	0.0241434
5,375	0.0356153	0.0235914
5,500	0.0351476	0.0230641
5,625	0.0347006	0.0225599
5,750	0.0342730	0.0220772
5,875	0.0338636	0.0216148
6,000	0.0334716	0.0211713
6,125	0.0330959	0.0207457
6,250	0.0327356	0.0203368
6,375	0.0323900	0.0199438
6,500	0.0320584	0.0195656
6,625	0.0317401	0.0192015
6,750	0.0314344	0.0188508
6,875	0.0311407	0.0185126
7,000	0.0308586	0.0181863
7,125	0.0305876	0.0178713
7,250	0.0303272	0.0175671
7,375	0.0300771	0.0172730
7,500	0.0298367	0.0169887
7,625	0.0296059	0.0167135
7,750	0.0293843	0.0164471
7,875	0.0291716	0.0161891
8,000	0.0289677	0.0159390

Παρατηρούμε ότι οι τιμές της ασύμπτωτης είναι σχεδόν όλες μικρότερες από τις αντίστοιχες $r_{\max}(K)$, έτσι μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η $yr_{\max}$ είναι ασύμπτωτή της.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην εργασία αυτή εξετάσαμε μία τροποποιημένη μορφή του Πληθυσμιακού Μοντέλου Spruce Budworm, στην οποία ο φυσικός ρυθμός ανάπτυξης ήταν το Μοντέλο του Gompertz.

Ο λόγος για τον οποίο επιλέχθηκε αυτό το μοντέλο, πέραν του μαθηματικού ενδιαφέροντος που παρουσιάζει, είναι ότι βασίζεται στο ότι οι ρυθμοί θνησιμότητας της βιομάζας αυξάνουν με εκθετικούς ρυθμούς όσο αυξάνει η ηλικία της. Έτσι θεωρείται πιο ρεαλιστικό για Πληθυσμιακά Μοντέλα.

Στη μελέτη, δεν ήταν δυνατό να βρεθούν αναλυτικές λύσεις για τη Διαφορική Εξίσωση του Μοντέλου, λόγω της μορφής της:

$$\frac{dx}{dt} = rx\ln\frac{K}{x} - \frac{bpx^2}{x^2 + a^2}$$

Έτσι, προχωρήσαμε σε υπολογιστική μελέτη, από την οποία προέκυψε ότι η Διαφορική Εξίσωση μπορεί να έχει μία, δύο ή τρεις λύσεις. Τα διαστήματα στα οποία έχουμε αυτές τις λύσεις προσδιορίστηκαν από το γράφημα της Περιοχή Ευσταθούς Κατάστασης. Με αυτό το γράφημα και για συγκεκριμένο σημείο κορεσμού K, μπορούμε να προσδιορίσουμε τις τιμές του εσωτερικού ρυθμού ανάπτυξης για τις οποίες έχουμε 1, 2 ή 3 λύσεις στη Διαφορική Εξίσωση.

Τέλος, μελετήθηκε η ύπαρξη οριζόντιων ασύμπτωτων για τις καμπύλες $c_{r\min}$ και $c_{r\max}$, που ορίζουν την Περιοχή Ευσταθούς Κατάστασης. Προέκυψε ότι η $c_{r\min}$ έχει ως ασύμπτωτη τον οριζόντιο άξονα, ενώ για την $c_{r\max}$, δεν ήταν δυνατό να εξαχθούν συμπεράσματα, καθότι όσο μεγάλωνε η τιμή του K, τόσο μικρότερη γινόταν η τιμή της, χωρίς να σταθεροποιείται.

Μελετώντας όμως, τη συμπεριφορά των τιμών του $r_{\max}(K)$, για διάφορες τιμές των παραμέτρων b, p και a, βρέθηκε η σχέση με που έχουν με την οριζόντια ασύμπτωτη. Για τον ακριβή προσδιορισμό της συνάρτησης από την οποία δίνεται η ασύμπτωτη, υπολογίσαμε αρκετά ζευγάρια τιμών $\left(a, r_{\max}(K)\right)$ και κάναμε Παρεμβολή (Interpolation) σε 2 μορφές συναρτήσεων. Τελικά και μετά από επαλήθευση, προέκυψε ότι η πιο ακριβής μορφή της συνάρτησης είναι:

$$yr_{\max} = \frac{0,128987 \cdot b \cdot p}{a + 0,0925347}$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ MATHEMATICA

Σχήματα 1, 2, 3, 4

```
(* Fig.1,2,3,4-h(x) Gompertz r(x),F(x) - No Harvest.nb *)

Clear[F, R, ode, eqns, xf, f, sol, H, G];

R[u_] := r*Log[K/u];
F[u_] := u*R[u];
G[u_] := (b*p*u)/(u^2 + a^2);
H[u_] := (b*p*u^2)/(u^2 + a^2);

r = 0.3; K = 8; b = 1.8; p = 0.6; a = 1.;
imin = 0.5; imax = 12; istep = 1;
tmin = 0.; tmax = 20;

(* Η γραφική παράσταση της h(x) *)
ch = Plot[H[u], {u, 0, K},
   PlotLabel -> "The graph of the function h(x)\n",
   AxesLabel -> {"x", "h(x)"},
   AxesStyle -> {GrayLevel[0.5], Thickness[0.007]},
   PlotRange -> {0, b*p + 0.3},
   PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0], Thickness[0.005]},
   DisplayFunction -> Identity];

Show[ch,
 Graphics[{Dashing[{0.015}], GrayLevel[0.5], Thickness[0.004],
   Line[{{0, b*p}, {K + 1, b*p}}],
   Line[{{a, 0.0}, {a, b*p/2}, {0, b*p/2}}]}],
 Graphics[Text["h(x)", {K - 2, b*p - 0.2}, {0, 0}]],
```

```
Ticks→ {{{a, "a"}}, {{b*p, "bp"}, {b*p/2, "h(a)= bp/2 "}}},
  DisplayFunction→ $DisplayFunction];

(* Η γραφική παράσταση της r(x) *)
cr = Plot[R[u], {u, 0, K + 2},
   PlotRange→ {0, 2},
   PlotLabel→ "The graph of the function r(x)\n",
   AxesLabel→ {"x", "r(x)"},
   AxesStyle→ {GrayLevel[0.5], Thickness[0.007]},
   PlotStyle→ {RGBColor[1, 0, 0], Thickness[0.005]},
   Ticks→ {{{K, "K"}}, {}},
   DisplayFunction→ Identity];

Show[cr,
  TextStyle→ {FontSize→ 14},
  DisplayFunction→ $DisplayFunction];

(* Η γραφική παράσταση της F(x) *)
cf = Plot[F[u], {u, 0, K},
   PlotRange→ {0, F[K/e] + 0.2},
   PlotLabel→ "The graph of the function F(x)\n",
   AxesLabel→ {"x", "F(x)"},
   AxesStyle→ {GrayLevel[0.5], Thickness[0.007]},
   PlotStyle→ {RGBColor[1, 0, 0], Thickness[0.005]},
   Ticks→ {{{K/e, "xMSY=K/e"}, {K, "K"}}, {{F[K/e], "MSY= rK/e "}}},
   DisplayFunction→ Identity];

Show[cf,
  Graphics[{Dashing[{0.015}],
    Line[{{0, F[K/e]}, {K/e, F[K/e]}, {K/e, 0}}]}],
  Graphics[{PointSize[0.02],
    Point[{K/e, F[K/e]}], Point[{K, F[K]}]}],
  Graphics[Text["F(x)", {3K/4, F[2*K/3]}, {0, 0}]],
  TextStyle→ {FontSize→ 14},
  DisplayFunction→ $DisplayFunction];
```

```
Do[ode[i] = {x[i]'[t] == F[x[i][t]], x[i][0] == i},
                 {i, imin, imax, istep}];
eqns = Table[ode[i], {i, imin, imax, istep}];
xf = Table[x[i][t], {i, imin, imax, istep}];

f = NDSolve[eqns, xf, {t, tmin, tmax}];
sol = Evaluate[Table[x[i][t] /. f, {i, imin, imax, istep}]];

csol = Plot[Evaluate[{sol}], {t, tmin, tmax},
      PlotRange → {{-4, tmax}, {0, imax + istep}},
      AxesLabel → {"t", "x(t)"},
      PlotLabel → "\n\nThe ODE's solutions\n",
      AxesStyle → {GrayLevel[0.5], Thickness[0.007]},
      PlotStyle → {{GrayLevel[0.5], Thickness[0.003]}},
      Ticks → {None, {{K, "x2=K"}}},
      DisplayFunction → Identity];

Show[csol,
  Graphics[{Dashing[{0.015}],
    Thickness[0.01], Line[{{0, K}, {20, K}}], Line[{{0, 0}, {20, 0}}]}],
  Graphics[Text["x1=0", {-2, 0.5}, {0, 0}]],
  TextStyle → {FontSize → 14},
  DisplayFunction → $DisplayFunction];
```

Σχήμα 5

```
(* Fig.5 - The Modified Gompertz Model - G(x)  *)
Clear[fg, G];
G[u_] := (b*p*u)/(u^2 + a^2);
(* Parameters Values *)
r = 1.2; K = 12; b = 1.4; p = 1.6; a = 1;
imin = 0.5; imax = 12; istep = 0.5;
tmin = 0.; tmax = 20;

fg = Plot[G[u], {u, 0, K + 3},
   PlotLabel → "The graph of function G(x)\n",
   AxesLabel → {"x", "G(x)"},
   PlotRange → {{0, K + 3}, {0, G[a] + 0.5}},
   AxesStyle → {GrayLevel[0.5], Thickness[0.007]},
   PlotStyle → {RGBColor[1, 0, 0], Thickness[0.005]},
   TextStyle → {FontSize → 14, FontColor → GrayLevel[0.2]},
   Ticks → {{{K, "K"}, {a, "a"}}, {{(b*p)/(2*a), "bp/(2a)"}}},
   DisplayFunction → Identity];

Show[fg,
  Graphics[{Dashing[{0.015}], Line[{{0, G[a]}, {a, G[a]}, {a, 0}}]}],
  Graphics[{PointSize[0.02], Point[{a, G[a]}]}],
  Graphics[Text["G(x)", {3K/4, (b*p)/(4*a)}, {0, 0}]],
  DisplayFunction → $DisplayFunction];
```

Σχήματα 6, 7

```
(* Fig.6,7 The Modified Gompertz Model - 1 Equilibrium  *)

Clear[R, ode, eqns, xf, f, sol, G];

R[u_] := r*Log[K/u];
G[u_] := (b*p*u)/(u^2 + a^2);

r = .28; K = 16; b = 1.3; p = 1.; a = 1.;
imin = 0.01; imax = 16; istep = .4;
tmin = 0.; tmax = 80;

(* Equilibrium Point *)
Clear[p1, p2, p3];
p1 = FindRoot[R[u] - G[u] == 0., {u, 9K/10., K/3., K}];
p1 = p1[[1]][[2]];
p2 = FindRoot[R[u] - G[u] == 0., {u, (2.*a+K-10)/4., a, K/2.}];
p2 = p2[[1]][[2]];
p3 = FindRoot[R[u] - G[u] == 0., {u, a/2., 0.0001, a}];
p3 = p3[[1]][[2]];

Print["\n\nThe Equilibrium point is :"];
If[R[p1] == G[p1] && p1 > 0., {Print["x3 = ", p1]; q1 = p1;}, q1 = 0;];
If[R[p2] == G[p2] && p2 > 0., {Print["x2 = ", p2]; q2 = p2;}, q2 = 0;];
If[R[p3] == G[p3] && p3 > 0., {Print["x1 = ", p3]; q3 = p3;}, q3 = 0;];

rg = Plot[{R[u], G[u]}, {u, 0, K},
      PlotLabel → "The graph of R(x), G(x) with 1 equilibrium\n\n",
      AxesLabel → {"x", "R(x),G(x)"},
      PlotRange → {0, G[a] + 0.05},
      AxesStyle → {GrayLevel[0.5], Thickness[0.007]},
      PlotStyle → {{RGBColor[1, 0, 0], Thickness[0.005]},
                   {RGBColor[0, 0, 1], Thickness[0.005]}},
      TextStyle → {FontSize → 14, FontColor → GrayLevel[0.2]},
      DisplayFunction → Identity];
```

```
Show[rg,
  Graphics[{PointSize[0.02], Point[{p1, R[p1]}]}],
  Graphics[{Dashing[{0.015}], Line[{{p1, R[p1]}, {p1, 0}}]}],
  Ticks→ {{{K, "K"}, {p1, "x1"}}, None},
  DisplayFunction→ $DisplayFunction];

Do[ode[i] = {x[i]'[t] == R[x[i][t]] - G[x[i][t]], x[i][0] == i},
                  {i, imin, imax, istep}];
eqns = Table[ode[i], {i, imin, imax, istep}];
xf = Table[x[i][t], {i, imin, imax, istep}];

f = NDSolve[eqns, xf, {t, tmin, tmax}];
sol = Evaluate[Table[x[i][t] /. f, {i, imin, imax, istep}]];

rx = Plot[Evaluate[{q1, q2, q3, sol}], {t, tmin, tmax},
       PlotRange→ {0, imax + istep},
       AxesLabel→ {"t", "x(t)"},
       PlotLabel→ "The ODE's solutions for 1 equilibrium\n\n",
       AxesStyle→ {GrayLevel[0.5], Thickness[0.007]},
       PlotStyle→ {{GrayLevel[0.5], Thickness[0.003]}},
       TextStyle→ {FontSize→ 14, FontColor→ GrayLevel[0.2]},
       DisplayFunction→ Identity];

Show[rx,
  Graphics[{Dashing[{0.015}], Thickness[0.01],
    Line[{{0, p1}, {tmax, p1}}]}],
  Ticks→ {None, {{p1, "x1"}}},
  DisplayFunction→ $DisplayFunction];

Print["\nThe Given Constants are:"];
Print["K=", K];
Print["a=", a];
Print["b=", b];
Print["p=", p];
```

Σχήματα 8, 9

```
(* Fig.8,9 The Modified Gompertz Model - 1 Equilibrium < xmax *)

Clear[R, ode, eqns, xf, f, sol, G];

R[u_] := r*Log[K/u];
G[u_] := (b*p*u)/(u^2 + a^2);

r = .28; K = 16; b = 1.7; p = 1.3; a = 1.;
imin = 0.01; imax = 9; istep = .4;
tmin = 0.; tmax = 80;

(* Equilibrium Point *)
Clear[p1, p2, p3];
p1 = FindRoot[R[u] - G[u] == 0., {u, 9K/10., K/3., K}];
p1 = p1[[1]][[2]];
p2 = FindRoot[R[u] - G[u] == 0., {u, (2.*a + K - 10)/4., a, K/2.}];
p2 = p2[[1]][[2]];
p3 = FindRoot[R[u] - G[u] == 0., {u, a/2., 0.0001, a}];
p3 = p3[[1]][[2]];

Print["\n\nThe Equilibrium point is :"];
If[R[p1] == G[p1] && p1 > 0., {Print["x3 = ", p1]; q1 = p1;}, q1 = 0;];
If[R[p2] == G[p2] && p2 > 0., {Print["x2 = ", p2]; q2 = p2;}, q2 = 0;];
If[R[p3] == G[p3] && p3 > 0., {Print["x1 = ", p3]; q3 = p3;}, q3 = 0;];

rg = Plot[{R[u], G[u]}, {u, 0, K},
      PlotLabel -> "The graph of R(x), G(x) with 1 equilibrium\n\n",
      AxesLabel -> {"x", "R(x),G(x)"},
      PlotRange -> {0, G[a] + 0.05},
      AxesStyle -> {GrayLevel[0.5], Thickness[0.007]},
      PlotStyle -> {{RGBColor[1, 0, 0], Thickness[0.005]},
                    {RGBColor[0, 0, 1], Thickness[0.005]}},
      TextStyle -> {FontSize -> 14, FontColor -> GrayLevel[0.2]},
      DisplayFunction -> Identity];
```

```
Show[rg,
  Graphics[{PointSize[0.02], Point[{p3, R[p3]}]}],
  Graphics[{Dashing[{0.015}], Line[{{p3, R[p3]}, {p3, 0}}]}],
  Ticks→ {{{K, "K"}, {p3, "x1"}}, None},
  DisplayFunction→ $DisplayFunction];

Do[ode[i] = {x[i]'[t] == R[x[i][t]] - G[x[i][t]], x[i][0] == i},
                {i, imin, imax, istep}];
eqns = Table[ode[i], {i, imin, imax, istep}];
xf = Table[x[i][t], {i, imin, imax, istep}];

f = NDSolve[eqns, xf, {t, tmin, tmax}];
sol = Evaluate[Table[x[i][t] /. f, {i, imin, imax, istep}]];

rx = Plot[Evaluate[{q1, q2, q3, sol}], {t, tmin, tmax},
       PlotRange→ {0, imax + istep},
       AxesLabel→ {"t", "x(t)"},
       PlotLabel→ "The ODE's solutions for 1 equilibrium\n\n",
       AxesStyle→ {GrayLevel[0.5], Thickness[0.007]},
       PlotStyle→ {{GrayLevel[0.5], Thickness[0.003]}},
       TextStyle→ {FontSize→ 14, FontColor→ GrayLevel[0.2]},
       DisplayFunction→ Identity];

Show[rx,
  Graphics[{Dashing[{0.015}], Thickness[0.01],
    Line[{{0, p3}, {tmax, p3}}]}],
  Ticks→ {None, {{p3, "x1"}}},
  DisplayFunction→ $DisplayFunction];

Print["\nThe Given Constants are:"];
Print["K=", K];
Print["a=", a];
Print["b=", b];
Print["p=", p];
```

Σχήματα 10, 11

```
(* Fig.10,11 The Modified Gompertz Model - 2 Equilibriums  *)

Clear[R, ode, eqns, xf, f, sol, G];

R[u_] := r*Log[K/u];
G[u_] := (b*p*u)/(u^2 + a^2);

r = .28; K = 16; b = 1.7; p = 1.; a = 1.; (*b=1.6988376144929*)
imin = 0.01; imax = 9; istep = .4;
tmin = 0.; tmax = 300;

(* Equilibrium Point *)
Clear[p1, p2, p3];
p1 = FindRoot[R[u] - G[u] == 0., {u, 9K/10., K/3., K}];
p1 = p1[[1]][[2]];
p2 = FindRoot[R[u] - G[u] == 0., {u, (2.*a + K - 10)/4., a, K/2.}];
p2 = p2[[1]][[2]];
p3 = FindRoot[R[u] - G[u] == 0., {u, a/2., 0.0001, a}];
p3 = p3[[1]][[2]];

Print["\n\nThe Equilibrium point is :"];
If[R[p1] == G[p1] && p1 > 0., {Print["x3 = ", p1]; q1 = p1;}, q1 = 0;];
If[R[p2] == G[p2] && p2 > 0., {Print["x2 = ", p2]; q2 = p2;}, q2 = 0;];
If[R[p3] == G[p3] && p3 > 0., {Print["x1 = ", p3]; q3 = p3;}, q3 = 0;];

Print["x3 = ", p1];
Print["x2 = ", p2];
Print["x1 = ", p3];

rg = Plot[{R[u], G[u]}, {u, 0, K},
     PlotLabel -> "The graph of R(x), G(x) with 2 equilibriums\n\n",
     AxesLabel -> {"x", "R(x),G(x)"},
     PlotRange -> {0, G[a] + 0.05},
     AxesStyle -> {GrayLevel[0.5], Thickness[0.007]},
```

```
    PlotStyle→ {{RGBColor[1, 0, 0], Thickness[0.005]},
                    {RGBColor[0, 0, 1], Thickness[0.005]}},
      TextStyle→ {FontSize→14, FontColor→ GrayLevel[0.2]},
      DisplayFunction→ Identity];

Show[rg,
  Graphics[{PointSize[0.02],
    Point[{p1, R[p1]}], Point[{p2, R[p2]}], Point[{p3, R[p3]}]}],
  Graphics[{Dashing[{0.015}], Line[{{p1, R[p1]}, {p1, 0}}],
    Line[{{p2, R[p2]}, {p2, 0}}], Line[{{p3, R[p3]}, {p3, 0}}]}],
  Ticks→ {{{K, "K"}, {p3, "x1"}, {p2, "x2"}, {p1, "x3"}}, None},
  DisplayFunction→ $DisplayFunction];

Do[ode[i] = {x[i]'[t] == R[x[i][t]] - G[x[i][t]], x[i][0] == i},
                  {i, imin, imax, istep}];
eqns = Table[ode[i], {i, imin, imax, istep}];
xf = Table[x[i][t], {i, imin, imax, istep}];

f = NDSolve[eqns, xf, {t, tmin, tmax}];
sol = Evaluate[Table[x[i][t] /. f, {i, imin, imax, istep}]];

rx = Plot[Evaluate[{q1, q2, q3, sol}], {t, tmin, tmax},
       PlotRange→ {0, imax + istep},
       AxesLabel→ {"t", "x(t)"},
       PlotLabel→ "The ODE's solutions for 2 equilibriums\n\n",
       AxesStyle→ {GrayLevel[0.5], Thickness[0.007]},
       PlotStyle→ {{GrayLevel[0.5], Thickness[0.003]}},
       TextStyle→ {FontSize→ 14, FontColor→ GrayLevel[0.2]},
       DisplayFunction→ Identity];

Show[rx,
  Graphics[{Dashing[{0.015}], Thickness[0.01], Line[{{0, p1}, {tmax, p1}}],
    Line[{{0, p3}, {tmax, p3}}], Line[{{0, p2}, {tmax, p2}}]}],
  Ticks→ {None, {{p2, "x1"}, {p3, "x2"}}},
  DisplayFunction→ $DisplayFunction];

Print["\nThe Given Constants are:"];
Print["K=", K]; Print["a=", a]; Print["b=", b];
Print["p=", p];
```

Σχήματα 12, 13

```
(* Fig.12,13 The Modified Gompertz Model - 2 Equilibriums x1 > xmax *)

Clear[R, ode, eqns, xf, f, sol, G];

R[u_] := r*Log[K/u];
G[u_] := (b*p*u)/(u^2 + a^2);

r = .28; K = 16; b = 1.2; p = 1.2; a = 1.; (*b=1.6988376144929*)
imin = 0.01; imax = 16; istep = .4;
tmin = 0.; tmax = 300;

(* Equilibrium Point *)
Clear[p1, p2, p3];
p1 = FindRoot[R[u] - G[u] == 0., {u, 9K/10., K/3., K}];
p1 = p1[[1]][[2]];
p2 = FindRoot[R[u] - G[u] == 0., {u, (2.*a+K-10)/4., a, K/2.}];
p2 = p2[[1]][[2]];
p3 = FindRoot[R[u] - G[u] == 0., {u, a/2., 0.0001, a}];
p3 = p3[[1]][[2]];

Print["\n\nThe Equilibrium point is :"];
If[R[p1] == G[p1] && p1 > 0., {Print["x3 = ", p1]; q1 = p1;}, q1 = 0;];
If[R[p2] == G[p2] && p2 > 0., {Print["x2 = ", p2]; q2 = p2;}, q2 = 0;];
If[R[p3] == G[p3] && p3 > 0., {Print["x1 = ", p3]; q3 = p3;}, q3 = 0;];

Print["x3 = ", p1];
Print["x2 = ", p2];
Print["x1 = ", p3];

rg = Plot[{R[u], G[u]}, {u, 0, K},
      PlotLabel -> "The graph of R(x), G(x) with 2 equilibriums\n\n",
      AxesLabel -> {"x", "R(x),G(x)"},
      PlotRange -> {0, G[a] + 0.05},
      AxesStyle -> {GrayLevel[0.5], Thickness[0.007]},
```

```
    PlotStyle→ {{RGBColor[1, 0, 0], Thickness[0.005]},
                    {RGBColor[0, 0, 1], Thickness[0.005]}},
      TextStyle→ {FontSize→14, FontColor→ GrayLevel[0.2]},
      DisplayFunction→ Identity];

Show[rg,
  Graphics[{PointSize[0.02], Point[{p1, R[p1]}], Point[{p2, R[p2]}]}],
  Graphics[{Dashing[{0.015}], Line[{{p1, R[p1]}, {p1, 0}}],
    Line[{{p2, R[p2]}, {p2, 0}}]}],
  Ticks→ {{{K, "K"}, {p2, "x1"}, {p1, "x2"}}, None},
  DisplayFunction→ $DisplayFunction];

Do[ode[i] = {x[i]'[t] == R[x[i][t]] - G[x[i][t]], x[i][0] == i},
                  {i, imin, imax, istep}];
eqns = Table[ode[i], {i, imin, imax, istep}];
xf = Table[x[i][t], {i, imin, imax, istep}];

f = NDSolve[eqns, xf, {t, tmin, tmax}];
sol = Evaluate[Table[x[i][t] /. f, {i, imin, imax, istep}]];

rx = Plot[Evaluate[{q1, q2, q3, sol}], {t, tmin, tmax},
       PlotRange→ {0, imax + istep},
       AxesLabel→ {"t", "x(t)"},
       PlotLabel→ "The ODE's solutions for 2 equilibriums\n\n",
       AxesStyle→ {GrayLevel[0.5], Thickness[0.007]},
       PlotStyle→ {{GrayLevel[0.5], Thickness[0.003]}},
       TextStyle→ {FontSize→14, FontColor→ GrayLevel[0.2]},
       DisplayFunction→ Identity];

Show[rx,
  Graphics[{Dashing[{0.015}], Thickness[0.01],
    Line[{{0, p1}, {tmax, p1}}], Line[{{0, p2}, {tmax, p2}}]}],
  Ticks→ {None, {{p1, "x1"}, {p2, "x2"}}},
  DisplayFunction→ $DisplayFunction];

Print["\nThe Given Constants are:"];
Print["K=", K]; Print["a=", a]; Print["b=", b];
Print["p=", p];
```

Σχήματα 14, 15

```
(* Fig.14,15 The Modified Gompertz Model - 3 Equilibriums *)

Clear[R, ode, eqns, xf, f, sol, G];

R[u_] := r*Log[K/u];
G[u_] := (b*p*u)/(u^2 + a^2);

DR[u_] = D[R[u], u];
DG[u_] = D[G[u], u];

r = .28; K = 16; b = 1.6; p = 1.; a = 1.;
imin = 0.01; imax = 9; istep = .4;
tmin = 0.; tmax = 300;

(* Equilibrium Point *)
Clear[p1, p2, p3];
p1 = FindRoot[R[u] - G[u] == 0., {u, 9K/10., K/3., K}];
p1 = p1[[1]][[2]];
p2 = FindRoot[R[u] - G[u] == 0., {u, (2.*a+K-10)/4., a, K/2.}];
p2 = p2[[1]][[2]];
p3 = FindRoot[R[u] - G[u] == 0., {u, a/2., 0.0001, a}];
p3 = p3[[1]][[2]];

Print["\n\nThe Equilibrium point is :"];
If[R[p1] == G[p1] && p1 > 0., {Print["x3 = ", p1]; q1 = p1;}, q1 = 0;];
If[R[p2] == G[p2] && p2 > 0., {Print["x2 = ", p2]; q2 = p2;}, q2 = 0;];
If[R[p3] == G[p3] && p3 > 0., {Print["x1 = ", p3]; q3 = p3;}, q3 = 0;];

rg = Plot[{R[u], G[u]}, {u, 0, K},
      PlotLabel -> "The graph of R(x), G(x) with 3 equilibriums\n\n",
      AxesLabel -> {"x", "R(x),G(x)"},
      PlotRange -> {0, G[a] + 0.05},
      AxesStyle -> {GrayLevel[0.5], Thickness[0.007]},
```

```
    PlotStyle→ {{RGBColor[1, 0, 0], Thickness[0.005]},
                    {RGBColor[0, 0, 1], Thickness[0.005]}},
      TextStyle→ {FontSize→14, FontColor→ GrayLevel[0.2]},
      DisplayFunction→ Identity];

Show[rg,
  Graphics[{PointSize[0.02],
    Point[{p1, R[p1]}],
    Point[{p2, R[p2]}],
    Point[{p3, R[p3]}]}],
  Graphics[{Dashing[{0.015}],
    Line[{{p1, R[p1]}, {p1, 0}}],
    Line[{{p2, R[p2]}, {p2, 0}}],
    Line[{{p3, R[p3]}, {p3, 0}}]}],
  Ticks→ {{{K, "K"}, {p3, "x1"}, {p2, "x2"}, {p1, "x3"}}, None},
  DisplayFunction→ $DisplayFunction];

Do[ode[i] = {x[i]'[t] == R[x[i][t]] - G[x[i][t]], x[i][0] == i},
                 {i, imin, imax, istep}];
eqns = Table[ode[i], {i, imin, imax, istep}];
xf = Table[x[i][t], {i, imin, imax, istep}];

f = NDSolve[eqns, xf, {t, tmin, tmax}];
sol = Evaluate[Table[x[i][t] /. f, {i, imin, imax, istep}]];

rx = Plot[Evaluate[{q1, q2, q3, sol}], {t, tmin, tmax},
       PlotRange→ {0, imax + istep},
       AxesLabel→ {"t", "x(t)"},
       PlotLabel→ "The ODE's solutions for 3 equilibriums\n\n",
       AxesStyle→ {GrayLevel[0.5], Thickness[0.007]},
       PlotStyle→ {{GrayLevel[0.5], Thickness[0.003]}},
       TextStyle→ {FontSize→ 14, FontColor→ GrayLevel[0.2]},
       DisplayFunction→ Identity];

Show[rx,
 Graphics[{Dashing[{0.015}], Thickness[0.01],
   Line[{{0, p1}, {tmax, p1}}],
   Line[{{0, p3}, {tmax, p3}}],
```

```
Line[{{0, p2}, {tmax, p2}}]}],
  Ticks→ {None, {{p1, "x1"}, {p2, "x2"}, {p3, "x3"}}},
  DisplayFunction→ $DisplayFunction];

Print["\nThe Given Constants are:"];
Print["K=", K];
Print["a=", a];
Print["b=", b];
Print["p=", p];
```

Σχήμα 16

```
(* Fig.16 The Steady State Domain of the Modified Gompertz Model *)

Clear[F, R, H, G, DR, DG, lines];
Clear[rmin, rmax, fmin, fmax, RSOL];
r=.; x=.; K=.; u=.;

bb=.; bb=1.;

R[u_] := r*Log[K/u];
F[u_] := u*R[u];

G[u_] := (b*p*u)/(u^2 + a^2);
H[u_] := u*G[u];

DR[u_] = D[R[u], u];
DG[u_] = D[G[u], u];

b=.; b=1.7;
p=.; p=1.3;
a=.; a=1.;
Kmin=10.; Kmax=30; Kstep=0.5;

Do[
  RSOL[K, 1] = FindRoot[{R[x] == G[x], DR[x] == DG[x]}, {x, 0.1}, {r, 0.1}];
  RSOL[K, 2] = FindRoot[{R[x] == G[x], DR[x] == DG[x]}, {x, K/2}, {r, 1}];
  Print["\nRSOL[", K, ",1]=", RSOL[K, 1]];
  Print["RSOL[", K, ",2]=", RSOL[K, 2]];
  Clear[rr, ra]; ii = 0;
  rr[1] = RSOL[K, 1][[2]][[2]];
  rr[2] = RSOL[K, 2][[2]][[2]];
  rmin[K] = Min[rr[1], rr[2]];
  rmax[K] = Max[rr[1], rr[2]];
  Print["with rmin = ", rmin[K], " and rmax = ", rmax[K]],
  {K, Kmin, Kmax, Kstep}];
```

```
datamin = Table[{K , rmin[K]} , {K , Kmin, Kmax, Kstep}] ;
datamax = Table[{K , rmax[K]} , {K , Kmin, Kmax, Kstep}] ;
fmin = Interpolation[datamin] ;
fmax = Interpolation[datamax] ;

cf = Plot[{fmin[u] , fmax[u]} , {u, Kmin, Kmax} ,
       PlotRange→ {{0, Kmax + 1} , {0, rmax[Kmin] + 0.04}} ,
       PlotLabel→ "\nThe graph of the functions rmin(K) ,rmax(K)\n
                  The steady states domain\n",
       AxesLabel→ {"K", "r"} ,
       AxesStyle→ {GrayLevel[0.5] , Thickness[0.007]} ,
       PlotStyle→ {{RGBColor[1, 0, 0] , Thickness[0.005]} ,
                   {RGBColor[0, 0, 1] , Thickness[0.005]}} ,
       TextStyle→ {FontSize→ 14, FontColor→ GrayLevel[0.2]} ,
       DisplayFunction→ Identity] ;

lines = Table[Line[{{K , rmin[K]} , {K , rmax[K]}}] , {K , 10, 30, 0.5}] ;

Show[cf, Graphics[lines] ,
  Graphics[Point[{Kmin, rmax[Kmin]}]] ,
  Graphics[Point[{Kmin + 5, rmax[Kmin + 5]}]] ,
  Graphics[Point[{Kmin + 5, rmin[Kmin + 5]}]] ,
  Graphics[Text["Cusp Point", {Kmin, rmax[Kmin]} , {0, -1}]] ,
  Graphics[Text["c_rmax", {Kmin + 14, rmax[Kmin] * 0.80} , {1, 0}]] ,
  Graphics[Text["c_rmin", {Kmin + 14, rmax[Kmin] * 0.4} , {1, 0}]] ,
  Graphics[Text["D:Steady State Domain",
    {Kmin + 9, rmax[Kmin] * 0.57} , {-1, 0}]] ,
  Graphics[{Dashing[{0.015}] ,
    Line[{{Kmin, 0} , {Kmin, rmax[Kmin]} , {0, rmax[Kmin]}}] ,
    Line[{{Kmin + 5, 0} , {Kmin + 5, rmax[Kmin + 5]} , {0, rmax[Kmin + 5]}}] ,
    Line[{{Kmin + 5, rmin[Kmin + 5]} , {0, rmin[Kmin + 5]}}]}] ,
  Ticks→ {{{Kmin, Kmin} , {Kmin + 5, "K"}} ,
    {{rmax[Kmin] , rmax[Kmin]} ,
     {rmax[Kmin + 5] , "r_max"} ,
     {rmin[Kmin + 5] , "r_min"}}} ,
  DisplayFunction→ $DisplayFunction,
  Prolog→ AbsolutePointSize[5]] ;
```

Σχήμα 17

```
(* Fig.17 The Steady State Domain of the Modified Gompertz Model*)
(* b = 0.7 *)

Clear[F, R, H, G, DR, DG, lines];
Clear[rmin, rmax, fmin, fmax, RSOL];
r=.; x=.; K=.; u=.;
bb=.; bb=1.;

R[u_] := r*Log[K/u];
F[u_] := u*R[u];
G[u_] := (b*p*u)/(u^2 + a^2);
H[u_] := u*G[u];
DR[u_] = D[R[u], u];
DG[u_] = D[G[u], u];

b=.; b=0.7; p=.; p=1.3; a=.; a=1.;
Kmin=10; Kmax=50; Kstep=0.05;

Do[
  RSOL[K, 1] = FindRoot[{R[x] == G[x], DR[x] == DG[x]}, {x, 0.1}, {r, 0.1}];
  RSOL[K, 2] = FindRoot[{R[x] == G[x], DR[x] == DG[x]}, {x, K/2}, {r, 1}];
  Clear[rr, ra]; ii = 0;
  rr[1] = RSOL[K, 1][[2]][[2]];
  rr[2] = RSOL[K, 2][[2]][[2]];
  rmin[K] = Min[rr[1], rr[2]];
  rmax[K] = Max[rr[1], rr[2]],
  {K, Kmin, Kmax, Kstep}];

datamin = Table[{K, rmin[K]}, {K, Kmin, Kmax, Kstep}];
datamax = Table[{K, rmax[K]}, {K, Kmin, Kmax, Kstep}];
fmin = Interpolation[datamin];
fmax = Interpolation[datamax];
```

```
cf = Plot[{fmin[u], fmax[u]}, {u, Kmin, Kmax},
       PlotRange → {{0, Kmax + 5}, {0, rmax[Kmin] + 0.04}},
       PlotLabel → "The steady states domain (b = 0.7)\n",
       AxesLabel → {"K", "r"},
       AxesStyle → {GrayLevel[0.5], Thickness[0.007]},
       PlotStyle → {{RGBColor[1, 0, 0], Thickness[0.01]},
                    {RGBColor[0, 0, 1], Thickness[0.01]}},
       TextStyle → {FontSize → 14, FontColor → GrayLevel[0.2]},
       DisplayFunction → Identity];

Show[cf,
  Graphics
   [{
    Dashing[{0.015}],
    Line[{{Kmax, 0}, {Kmax, fmax[Kmax]}}],
    Line[{{0, fmin[Kmax]}, {Kmax, fmin[Kmax]}}],
    Line[{{0, fmax[Kmax]}, {Kmax, fmax[Kmax]}}]
   }],
  Ticks → {{{Kmax, "Kmax"}},
    {{fmin[Kmax], fmin[Kmax]}, {fmax[Kmax], fmax[Kmax]}}},
  DisplayFunction → $DisplayFunction,
  Prolog → AbsolutePointSize[5]];
```

Σχήμα 18

```
(* Fig.18 The Steady State Domain of the Modified Gompertz Model *)
(* b = 1.4 *)

Clear[F, R, H, G, DR, DG, lines];
Clear[rmin, rmax, fmin, fmax, RSOL];
r=.; x=.; K=.; u=.;

bb=.; bb=1.;

R[u_] := r*Log[K/u];
F[u_] := u*R[u];
G[u_] := (b*p*u)/(u^2 + a^2);
H[u_] := u*G[u];
DR[u_] = D[R[u], u];
DG[u_] = D[G[u], u];

b=.; b=1.4;
p=.; p=1.3;
a=.; a=1.;
Kmin = 10; Kmax = 50; Kstep = 0.05;

Do[
  RSOL[K, 1] = FindRoot[{R[x] == G[x], DR[x] == DG[x]}, {x, 0.1}, {r, 0.1}];
  RSOL[K, 2] = FindRoot[{R[x] == G[x], DR[x] == DG[x]}, {x, K / 2}, {r, 1}];
  Clear[rr, ra]; ii = 0;
  rr[1] = RSOL[K, 1][[2]][[2]];
  rr[2] = RSOL[K, 2][[2]][[2]];
  rmin[K] = Min[rr[1], rr[2]];
  rmax[K] = Max[rr[1], rr[2]],
  {K, Kmin, Kmax, Kstep}];

datamin = Table[{K, rmin[K]}, {K, Kmin, Kmax, Kstep}];
datamax = Table[{K, rmax[K]}, {K, Kmin, Kmax, Kstep}];
fmin = Interpolation[datamin];
fmax = Interpolation[datamax];
```

```
cf = Plot[{fmin[u], fmax[u]}, {u, Kmin, Kmax},
       PlotRange → {{0, Kmax + 5}, {0, rmax[Kmin] + 0.04}},
       PlotLabel → "The steady states domain (b = 1.4)\n",
       AxesLabel → {"K", "r"},
       AxesStyle → {GrayLevel[0.5], Thickness[0.007]},
       PlotStyle → {{RGBColor[1, 0, 0], Thickness[0.01]},
                    {RGBColor[0, 0, 1], Thickness[0.01]}},
       TextStyle → {FontSize → 14, FontColor → GrayLevel[0.2]},
       DisplayFunction → Identity];

Show[cf,
  Graphics
   [{
    Dashing[{0.015}],
    Line[{{Kmax, 0}, {Kmax, fmax[Kmax]}}],
    Line[{{0, fmin[Kmax]}, {Kmax, fmin[Kmax]}}],
    Line[{{0, fmax[Kmax]}, {Kmax, fmax[Kmax]}}]
   }],
  Ticks → {{{Kmax, "Kmax"}},
    {{fmin[Kmax], fmin[Kmax]}, {fmax[Kmax], fmax[Kmax]}}},
  DisplayFunction → $DisplayFunction,
  Prolog → AbsolutePointSize[5]];
```

Σχήμα 19

```
(* Fig.19 The Steady State Domain of the Modified Gompertz Model *)
(* b = 2.8 *)

Clear[F, R, H, G, DR, DG, lines];
Clear[rmin, rmax, fmin, fmax, RSOL];
r=.; x=.; K=.; u=.;

bb=.; bb=1.;

R[u_] := r*Log[K/u];
F[u_] := u*R[u];
G[u_] := (b*p*u)/(u^2 + a^2);
H[u_] := u*G[u];
DR[u_] = D[R[u], u];
DG[u_] = D[G[u], u];

b=.; b=2.8;
p=.; p=1.3;
a=.; a=1.;
Kmin = 10; Kmax = 50; Kstep = 0.05;

Do[
  RSOL[K, 1] = FindRoot[{R[x] == G[x], DR[x] == DG[x]}, {x, 0.1}, {r, 0.1}];
  RSOL[K, 2] = FindRoot[{R[x] == G[x], DR[x] == DG[x]}, {x, K/2}, {r, 1}];
  Clear[rr, ra]; ii = 0;
  rr[1] = RSOL[K, 1][[2]][[2]];
  rr[2] = RSOL[K, 2][[2]][[2]];
  rmin[K] = Min[rr[1], rr[2]];
  rmax[K] = Max[rr[1], rr[2]],
  {K, Kmin, Kmax, Kstep}];

datamin = Table[{K, rmin[K]}, {K, Kmin, Kmax, Kstep}];
datamax = Table[{K, rmax[K]}, {K, Kmin, Kmax, Kstep}];
fmin = Interpolation[datamin];
fmax = Interpolation[datamax];
```

```
cf = Plot[{fmin[u], fmax[u]}, {u, Kmin, Kmax},
       PlotRange→ {{0, Kmax + 5}, {0, rmax[Kmin] + 0.04}},
       PlotLabel→ "The steady states domain (b = 2.8)\n",
       AxesLabel→ {"K", "r"},
       AxesStyle→ {GrayLevel[0.5], Thickness[0.007]},
       PlotStyle→ {{RGBColor[1, 0, 0], Thickness[0.01]},
                   {RGBColor[0, 0, 1], Thickness[0.01]}},
       TextStyle→ {FontSize→ 14, FontColor→ GrayLevel[0.2]},
       DisplayFunction→ Identity];

Show[cf,
  Graphics
   [{
    Dashing[{0.015}],
    Line[{{Kmax, 0}, {Kmax, fmax[Kmax]}}],
    Line[{{0, fmin[Kmax]}, {Kmax, fmin[Kmax]}}],
    Line[{{0, fmax[Kmax]}, {Kmax, fmax[Kmax]}}]
   }],
  Ticks→ {{{Kmax, "Kmax"}},
    {{fmin[Kmax], fmin[Kmax]}, {fmax[Kmax], fmax[Kmax]}}},
  DisplayFunction→ $DisplayFunction,
  Prolog→ AbsolutePointSize[5]];
```

Σχήμα 20

```
(* Fig.20 The Steady State Domain of the Modified Gompertz Model *)
(* p = 0.6 *)

Clear[F, R, H, G, DR, DG, lines];
Clear[rmin, rmax, fmin, fmax, RSOL];
r=.; x=.; K=.; u=.;

bb=.; bb=1.;

R[u_] := r*Log[K/u];
F[u_] := u*R[u];
G[u_] := (b*p*u)/(u^2 + a^2);
H[u_] := u*G[u];
DR[u_] = D[R[u], u];
DG[u_] = D[G[u], u];

b=.; b=1.4;
p=.; p=0.6;
a=.; a=1.;
Kmin = 10; Kmax = 50; Kstep = 0.05;

Do[
  RSOL[K, 1] = FindRoot[{R[x] == G[x], DR[x] == DG[x]}, {x, 0.1}, {r, 0.1}];
  RSOL[K, 2] = FindRoot[{R[x] == G[x], DR[x] == DG[x]}, {x, K/2}, {r, 1}];
  Clear[rr, ra]; ii = 0;
  rr[1] = RSOL[K, 1][[2]][[2]];
  rr[2] = RSOL[K, 2][[2]][[2]];
  rmin[K] = Min[rr[1], rr[2]];
  rmax[K] = Max[rr[1], rr[2]],
  {K, Kmin, Kmax, Kstep}];

datamin = Table[{K, rmin[K]}, {K, Kmin, Kmax, Kstep}];
datamax = Table[{K, rmax[K]}, {K, Kmin, Kmax, Kstep}];
fmin = Interpolation[datamin];
fmax = Interpolation[datamax];
```

```
cf = Plot[{fmin[u], fmax[u]}, {u, Kmin, Kmax},
       PlotRange→ {{0, Kmax + 5}, {0, rmax[Kmin] + 0.04}},
       PlotLabel→ "The steady states domain (p = 0.6)\n",
       AxesLabel→ {"K", "r"},
       AxesStyle→ {GrayLevel[0.5], Thickness[0.007]},
       PlotStyle→ {{RGBColor[1, 0, 0], Thickness[0.01]},
                   {RGBColor[0, 0, 1], Thickness[0.01]}},
       TextStyle→ {FontSize→ 14, FontColor→ GrayLevel[0.2]},
       DisplayFunction→ Identity];

Show[cf,
  Graphics
   [{
    Dashing[{0.015}],
    Line[{{Kmax, 0}, {Kmax, fmax[Kmax]}}],
    Line[{{0, fmin[Kmax]}, {Kmax, fmin[Kmax]}}],
    Line[{{0, fmax[Kmax]}, {Kmax, fmax[Kmax]}}]
   }],
  Ticks→ {{{Kmax, "Kmax"}},
    {{fmin[Kmax], fmin[Kmax]}, {fmax[Kmax], fmax[Kmax]}}},
  DisplayFunction→ $DisplayFunction,
  Prolog→ AbsolutePointSize[5]];
```

Σχήμα 21

```
(* Fig.21 The Steady State Domain of the Modified Gompertz Model *)
(* p = 1.2 *)

Clear[F, R, H, G, DR, DG, lines];
Clear[rmin, rmax, fmin, fmax, RSOL];
r=.; x=.; K=.; u=.;

bb=.; bb=1.;

R[u_] := r*Log[K/u];
F[u_] := u*R[u];
G[u_] := (b*p*u)/(u^2 + a^2);
H[u_] := u*G[u];
DR[u_] = D[R[u], u];
DG[u_] = D[G[u], u];

b=.; b=1.4;
p=.; p=1.2;
a=.; a=1.;
Kmin = 10; Kmax = 50; Kstep = 0.05;

Do[
  RSOL[K, 1] = FindRoot[{R[x] == G[x], DR[x] == DG[x]}, {x, 0.1}, {r, 0.1}];
  RSOL[K, 2] = FindRoot[{R[x] == G[x], DR[x] == DG[x]}, {x, K/2}, {r, 1}];
  Clear[rr, ra]; ii = 0;
  rr[1] = RSOL[K, 1][[2]][[2]];
  rr[2] = RSOL[K, 2][[2]][[2]];
  rmin[K] = Min[rr[1], rr[2]];
  rmax[K] = Max[rr[1], rr[2]],
  {K, Kmin, Kmax, Kstep}];

datamin = Table[{K, rmin[K]}, {K, Kmin, Kmax, Kstep}];
datamax = Table[{K, rmax[K]}, {K, Kmin, Kmax, Kstep}];
fmin = Interpolation[datamin];
fmax = Interpolation[datamax];
```

```
cf = Plot[{fmin[u], fmax[u]}, {u, Kmin, Kmax},
       PlotRange → {{0, Kmax + 5}, {0, rmax[Kmin] + 0.04}},
       PlotLabel → "The steady states domain (p = 1.2)\n",
       AxesLabel → {"K", "r"},
       AxesStyle → {GrayLevel[0.5], Thickness[0.007]},
       PlotStyle → {{RGBColor[1, 0, 0], Thickness[0.01]},
                    {RGBColor[0, 0, 1], Thickness[0.01]}},
       TextStyle → {FontSize → 14, FontColor → GrayLevel[0.2]},
       DisplayFunction → Identity];

Show[cf,
  Graphics
   [{
    Dashing[{0.015}],
    Line[{{Kmax, 0}, {Kmax, fmax[Kmax]}}],
    Line[{{0, fmin[Kmax]}, {Kmax, fmin[Kmax]}}],
    Line[{{0, fmax[Kmax]}, {Kmax, fmax[Kmax]}}]
   }],
  Ticks → {{{Kmax, "Kmax"}},
    {{fmin[Kmax], fmin[Kmax]}, {fmax[Kmax], fmax[Kmax]}}},
  DisplayFunction → $DisplayFunction,
  Prolog → AbsolutePointSize[5]];
```

Σχήμα 22

```
(* Fig.22 The Steady State Domain of the Modified Gompertz Model *)
(* p = 2.4 *)

Clear[F, R, H, G, DR, DG, lines];
Clear[rmin, rmax, fmin, fmax, RSOL];
r=.; x=.; K=.; u=.;

bb=.; bb=1.;

R[u_] := r*Log[K/u];
F[u_] := u*R[u];
G[u_] := b*p*u/(u^2 + a^2);
H[u_] := u*G[u];
DR[u_] = D[R[u], u];
DG[u_] = D[G[u], u];

b=.; b=1.4;
p=.; p=2.4;
a=.; a=1.;
Kmin = 10; Kmax = 50; Kstep = 0.05;

Do[
  RSOL[K, 1] = FindRoot[{R[x] == G[x], DR[x] == DG[x]}, {x, 0.1}, {r, 0.1}];
  RSOL[K, 2] = FindRoot[{R[x] == G[x], DR[x] == DG[x]}, {x, K/2}, {r, 1}];
  Clear[rr, ra]; ii = 0;
  rr[1] = RSOL[K, 1][[2]][[2]];
  rr[2] = RSOL[K, 2][[2]][[2]];
  rmin[K] = Min[rr[1], rr[2]];
  rmax[K] = Max[rr[1], rr[2]],
  {K, Kmin, Kmax, Kstep}];

datamin = Table[{K, rmin[K]}, {K, Kmin, Kmax, Kstep}];
datamax = Table[{K, rmax[K]}, {K, Kmin, Kmax, Kstep}];
fmin = Interpolation[datamin];
fmax = Interpolation[datamax];
```

```
cf = Plot[{fmin[u], fmax[u]}, {u, Kmin, Kmax},
       PlotRange → {{0, Kmax + 5}, {0, rmax[Kmin] + 0.04}},
       PlotLabel → "The steady states domain (p = 2.4)\n",
       AxesLabel → {"K", "r"},
       AxesStyle → {GrayLevel[0.5], Thickness[0.007]},
       PlotStyle → {{RGBColor[1, 0, 0], Thickness[0.01]},
                   {RGBColor[0, 0, 1], Thickness[0.01]}},
       TextStyle → {FontSize → 14, FontColor → GrayLevel[0.2]},
       DisplayFunction → Identity];

Show[cf,
  Graphics
   [{
    Dashing[{0.015}],
    Line[{{Kmax, 0}, {Kmax, fmax[Kmax]}}],
    Line[{{0, fmin[Kmax]}, {Kmax, fmin[Kmax]}}],
    Line[{{0, fmax[Kmax]}, {Kmax, fmax[Kmax]}}]
   }],
  Ticks → {{{Kmax, "Kmax"}},
    {{fmin[Kmax], fmin[Kmax]}, {fmax[Kmax], fmax[Kmax]}}},
  DisplayFunction → $DisplayFunction,
  Prolog → AbsolutePointSize[5]];
```

Σχήμα 23

```
(* Fig.23 The Steady State Domain of the Modified Gompertz Model *)
(* a = 0.5 *)

Clear[F, R, H, G, DR, DG, lines];
Clear[rmin, rmax, fmin, fmax, RSOL];
r=.; x=.; K=.; u=.;
bb=.; bb=1.;

R[u_] := r*Log[K/u];
F[u_] := u*R[u];
G[u_] := (b*p*u)/(u^2 + a^2);
H[u_] := u*G[u];
DR[u_] = D[R[u], u];
DG[u_] = D[G[u], u];

b=.; b=1.4;
p=.; p=1.2;
a=.; a=0.5;
Kmin = 5; Kmax = 50; Kstep = 0.05;

Do[
  RSOL[K, 1] = FindRoot[{R[x] == G[x], DR[x] == DG[x]}, {x, 0.1}, {r, 0.1}];
  RSOL[K, 2] = FindRoot[{R[x] == G[x], DR[x] == DG[x]}, {x, K/2}, {r, 1}];
  Clear[rr, ra]; ii = 0;
  rr[1] = RSOL[K, 1][[2]][[2]];
  rr[2] = RSOL[K, 2][[2]][[2]];
  rmin[K] = Min[rr[1], rr[2]];
  rmax[K] = Max[rr[1], rr[2]],
  {K, Kmin, Kmax, Kstep}];

datamin = Table[{K, rmin[K]}, {K, Kmin, Kmax, Kstep}];
datamax = Table[{K, rmax[K]}, {K, Kmin, Kmax, Kstep}];
fmin = Interpolation[datamin];
fmax = Interpolation[datamax];
```

```
cf = Plot[{fmin[u], fmax[u]}, {u, Kmin, Kmax},
       PlotRange → {{0, Kmax + 5}, {0, rmax[Kmin] + 0.04}},
       PlotLabel → "The steady states domain (a = 0.5)\n",
       AxesLabel → {"K", "r"},
       AxesStyle → {GrayLevel[0.5], Thickness[0.007]},
       PlotStyle → {{RGBColor[1, 0, 0], Thickness[0.01]},
                    {RGBColor[0, 0, 1], Thickness[0.01]}},
       TextStyle → {FontSize → 14, FontColor → GrayLevel[0.2]},
       DisplayFunction → Identity];

Show[cf,
  Graphics
   [{
    Dashing[{0.015}],
    Line[{{Kmax, 0}, {Kmax, fmax[Kmax]}}],
    Line[{{0, fmin[Kmax]}, {Kmax, fmin[Kmax]}}],
    Line[{{0, fmax[Kmax]}, {Kmax, fmax[Kmax]}}]
   }],
  Ticks → {{{Kmax, "Kmax"}},
    {{fmin[Kmax], fmin[Kmax]}, {fmax[Kmax], fmax[Kmax]}}},
  DisplayFunction → $DisplayFunction,
  Prolog → AbsolutePointSize[5]];
```

Σχήμα 24

```
(* Fig.24 The Steady State Domain of the Modified Gompertz Model *)
(* a = 1 *)

Clear[F, R, H, G, DR, DG, lines];
Clear[rmin, rmax, fmin, fmax, RSOL];
r=.; x=.; K=.; u=.;
bb=.; bb=1.;

R[u_] := r*Log[K/u];
F[u_] := u*R[u];
G[u_] := (b*p*u)/(u^2 + a^2);
H[u_] := u*G[u];
DR[u_] = D[R[u], u];
DG[u_] = D[G[u], u];

b=.; b=1.4;
p=.; p=1.2;
a=.; a=1.;
Kmin = 10; Kmax = 50; Kstep = 0.05;

Do[
  RSOL[K, 1] = FindRoot[{R[x] == G[x], DR[x] == DG[x]}, {x, 0.1}, {r, 0.1}];
  RSOL[K, 2] = FindRoot[{R[x] == G[x], DR[x] == DG[x]}, {x, K/2}, {r, 1}];
  Clear[rr, ra]; ii = 0;
  rr[1] = RSOL[K, 1][[2]][[2]];
  rr[2] = RSOL[K, 2][[2]][[2]];
  rmin[K] = Min[rr[1], rr[2]];
  rmax[K] = Max[rr[1], rr[2]],
  {K, Kmin, Kmax, Kstep}];

datamin = Table[{K, rmin[K]}, {K, Kmin, Kmax, Kstep}];
datamax = Table[{K, rmax[K]}, {K, Kmin, Kmax, Kstep}];
fmin = Interpolation[datamin];
fmax = Interpolation[datamax];
```

```
cf = Plot[{fmin[u], fmax[u]}, {u, Kmin, Kmax},
       PlotRange → {{0, Kmax + 5}, {0, rmax[Kmin] + 0.04}},
       PlotLabel → "The steady states domain (a = 1)\n",
       AxesLabel → {"K", "r"},
       AxesStyle → {GrayLevel[0.5], Thickness[0.007]},
       PlotStyle → {{RGBColor[1, 0, 0], Thickness[0.01]},
                    {RGBColor[0, 0, 1], Thickness[0.01]}},
       TextStyle → {FontSize → 14, FontColor → GrayLevel[0.2]},
       DisplayFunction → Identity];

Show[cf,
  Graphics
   [{
    Dashing[{0.015}],
    Line[{{Kmax, 0}, {Kmax, fmax[Kmax]}}],
    Line[{{0, fmin[Kmax]}, {Kmax, fmin[Kmax]}}],
    Line[{{0, fmax[Kmax]}, {Kmax, fmax[Kmax]}}]
   }],
  Ticks → {{{Kmax, "Kmax"}},
    {{fmin[Kmax], fmin[Kmax]}, {fmax[Kmax], fmax[Kmax]}}},
  DisplayFunction → $DisplayFunction,
  Prolog → AbsolutePointSize[5]];
```

Σχήμα 25

```
(* Fig.25 The Steady State Domain of the Modified Gompertz Model *)
(* a = 2 *)

Clear[F, R, H, G, DR, DG, lines];
Clear[rmin, rmax, fmin, fmax, RSOL];
r=.; x=.; K =.; u=.;
bb=.; bb = 1.;

R[u_] := r*Log[K/u];
F[u_] := u*R[u];
G[u_] := (b*p*u)/(u^2 + a^2);
H[u_] := u*G[u];
DR[u_] = D[R[u], u];
DG[u_] = D[G[u], u];

b=.; b = 1.4;
p=.; p = 1.2;
a=.; a = 2.;
Kmin = 19.9; Kmax = 50; Kstep = 0.05;

Do[
  RSOL[K, 1] = FindRoot[{R[x] == G[x], DR[x] == DG[x]}, {x, 0.1}, {r, 0.1}];
  RSOL[K, 2] = FindRoot[{R[x] == G[x], DR[x] == DG[x]}, {x, K / 2}, {r, 1}];
  Clear[rr, ra]; ii = 0;
  rr[1] = RSOL[K, 1][[2]][[2]];
  rr[2] = RSOL[K, 2][[2]][[2]];
  rmin[K] = Min[rr[1], rr[2]];
  rmax[K] = Max[rr[1], rr[2]],
  {K, Kmin, Kmax, Kstep}];

datamin = Table[{K, rmin[K]}, {K, Kmin, Kmax, Kstep}];
datamax = Table[{K, rmax[K]}, {K, Kmin, Kmax, Kstep}];
fmin = Interpolation[datamin];
fmax = Interpolation[datamax];
```

```
cf = Plot[{fmin[u], fmax[u]}, {u, Kmin, Kmax},
       PlotRange → {{0, Kmax + 5}, {0, rmax[Kmin] + 0.04}},
       PlotLabel → "The steady states domain (a = 2)\n",
       AxesLabel → {"K", "r"},
       AxesStyle → {GrayLevel[0.5], Thickness[0.007]},
       PlotStyle → {{RGBColor[1, 0, 0], Thickness[0.01]},
                    {RGBColor[0, 0, 1], Thickness[0.01]}},
       TextStyle → {FontSize → 14, FontColor → GrayLevel[0.2]},
       DisplayFunction → Identity];

Show[cf,
  Graphics
   [{
    Dashing[{0.015}],
    Line[{{Kmax, 0}, {Kmax, fmax[Kmax]}}],
    Line[{{0, fmin[Kmax]}, {Kmax, fmin[Kmax]}}],
    Line[{{0, fmax[Kmax]}, {Kmax, fmax[Kmax]}}]
   }],
  Ticks → {{{Kmax, "Kmax"}},
    {{fmin[Kmax], fmin[Kmax]}, {fmax[Kmax], fmax[Kmax]}}},
  DisplayFunction → $DisplayFunction,
  Prolog → AbsolutePointSize[5]];
```

Σχήματα 26, 27

```
d=.;
d = {{0.125, 0.615236}, {0.25, 0.344901}, {0.375, 0.247536}, {0.5, 0.196343}, {0.625, 0.164436},
   {0.75, 0.142497}, {0.875, 0.126413}, {1., 0.114075}, {1.125, 0.104285}, {1.25, 0.0963129},
   {1.375, 0.0896839}, {1.5, 0.0840778}, {1.625, 0.0792697}, {1.75, 0.0750968}, {1.875, 0.0714382},
   {2., 0.0682023}, {2.125, 0.0653182}, {2.25, 0.0627304}, {2.375, 0.0603945}, {2.5, 0.0582747},
   {2.625, 0.0563418}, {2.75, 0.0545717}, {2.875, 0.0529443}, {3., 0.0514428}, {3.125, 0.050053},
   {3.25, 0.0487626}, {3.375, 0.0475613}, {3.5, 0.0464402}, {3.625, 0.0453913}, {3.75, 0.044408},
   {3.875, 0.0434843}, {4., 0.042615}, {4.125, 0.0417953}, {4.25, 0.0410213}, {4.375, 0.0402893},
   {4.5, 0.039596}, {4.625, 0.0389385}, {4.75, 0.0383142}, {4.875, 0.0377208}, {5., 0.037156},
   {5.125, 0.036618}, {5.25, 0.0361049}, {5.375, 0.0356153}, {5.5, 0.0351476}, {5.625, 0.0347006},
   {5.75, 0.034273}, {5.875, 0.0338636}, {6., 0.0334716}, {6.125, 0.0330959}, {6.25, 0.0327356},
   {6.375, 0.03239}, {6.5, 0.0320584}, {6.625, 0.0317401}, {6.75, 0.0314344}, {6.875, 0.0311407},
   {7., 0.0308586}, {7.125, 0.0305876}, {7.25, 0.0303272}, {7.375, 0.0300771}, {7.5, 0.0298367},
   {7.625, 0.0296059}, {7.75, 0.0293843}, {7.875, 0.0291716}, {8., 0.0289677}};
f1=.; f1 = FindFit[d, c1/(c2*x + c3), {c1, c2, c3}, x]
Plot[c1/(c2*x + c3) /. f1, {x, 0, 6}, Epilog → Prepend[Point /@ d, PointSize[0.012]],
    AxesStyle → {GrayLevel[0.5], Thickness[0.005]},
    AxesLabel → {"a", "yr_max"},
    TextStyle → {FontSize → 11, FontColor → GrayLevel[0.2]}];
```

```
d=.;
d = {{0.125, 0.615236}, {0.25, 0.344901}, {0.375, 0.247536}, {0.5, 0.196343}, {0.625, 0.164436},
   {0.75, 0.142497}, {0.875, 0.126413}, {1., 0.114075}, {1.125, 0.104285}, {1.25, 0.0963129},
   {1.375, 0.0896839}, {1.5, 0.0840778}, {1.625, 0.0792697}, {1.75, 0.0750968}, {1.875, 0.0714382},
   {2., 0.0682023}, {2.125, 0.0653182}, {2.25, 0.0627304}, {2.375, 0.0603945}, {2.5, 0.0582747},
   {2.625, 0.0563418}, {2.75, 0.0545717}, {2.875, 0.0529443}, {3., 0.0514428}, {3.125, 0.050053},
   {3.25, 0.0487626}, {3.375, 0.0475613}, {3.5, 0.0464402}, {3.625, 0.0453913}, {3.75, 0.044408},
   {3.875, 0.0434843}, {4., 0.042615}, {4.125, 0.0417953}, {4.25, 0.0410213}, {4.375, 0.0402893},
   {4.5, 0.039596}, {4.625, 0.0389385}, {4.75, 0.0383142}, {4.875, 0.0377208}, {5., 0.037156},
   {5.125, 0.036618}, {5.25, 0.0361049}, {5.375, 0.0356153}, {5.5, 0.0351476}, {5.625, 0.0347006},
   {5.75, 0.034273}, {5.875, 0.0338636}, {6., 0.0334716}, {6.125, 0.0330959}, {6.25, 0.0327356},
   {6.375, 0.03239}, {6.5, 0.0320584}, {6.625, 0.0317401}, {6.75, 0.0314344}, {6.875, 0.0311407},
   {7., 0.0308586}, {7.125, 0.0305876}, {7.25, 0.0303272}, {7.375, 0.0300771}, {7.5, 0.0298367},
   {7.625, 0.0296059}, {7.75, 0.0293843}, {7.875, 0.0291716}, {8., 0.0289677}};
f2=.; f2 = FindFit[d, c1/(x + c3), {c1, c3}, x]
Plot[c1/(x + c3) /. f2, {x, 0, 6}, Epilog → Prepend[Point /@ d, PointSize[0.012]],
    AxesStyle → {GrayLevel[0.5], Thickness[0.005]},
    AxesLabel → {"a", "yr_max"},
    TextStyle → {FontSize → 11, FontColor → GrayLevel[0.2]}];
```

Υπολογισμός ζευγαριών τιμών $\left(a, r_{\max}\left(K_{\max}\right)\right)$

```
(* Various a *)

Clear[F, R, H, G, DR, DG];
Clear[rmin, rmax, fmin, fmax, RSOL];
r=.; x=.; K=.; u=.;
bb=.; bb=1.;

R[u_] := r*Log[K/u];
F[u_] := u*R[u];
G[u_] := (b*p*u)/(u^2 + a^2);
H[u_] := u*G[u];
DR[u_] = D[R[u], u];
DG[u_] = D[G[u], u];

b=.; b=1.; p=.; p=1.;
a=.; amin=0.125; amax=8; astep=0.125;
Kmin=5.; Kmax=90; Kstep=0.05;

Do[
  Clear[rmin, rmax, fmin, fmax, RSOL];
  Do[
   RSOL[K, 1] = FindRoot[{R[x] == G[x], DR[x] == DG[x]}, {x, 0.1}, {r, 0.1}];
   RSOL[K, 2] = FindRoot[{R[x] == G[x], DR[x] == DG[x]}, {x, K/2}, {r, 1}];
   Clear[rr, ra]; ii = 0;
   rr[1] = RSOL[K, 1][[2]][[2]];
   rr[2] = RSOL[K, 2][[2]][[2]];
   rmin[K] = Min[rr[1], rr[2]];
   rmax[K] = Max[rr[1], rr[2]],
   {K, Kmin, Kmax, Kstep}];

  datamin = Table[{K, rmin[K]}, {K, Kmin, Kmax, Kstep}];
  datamax = Table[{K, rmax[K]}, {K, Kmin, Kmax, Kstep}];
  fmin = Interpolation[datamin];
  fmax = Interpolation[datamax];
  Print["(", a, ",", fmax[Kmax], ")"],
  {a, amin, amax, astep}];
```

Πίνακας Επαλήθευσης Ασύμπτωτης

```
(* Various a *)

Clear[F, R, H, G, DR, DG];
Clear[rmin, rmax, fmin, fmax, RSOL];
r=.; x=.; K=.; u=.;

bb=.; bb=1.;

R[u_] := r*Log[K/u];
F[u_] := u*R[u];

G[u_] := (b*p*u)/(u^2 + a^2);
H[u_] := u*G[u];
yrmax[u_] := (0.128987*b*p)/(u + 0.0925347);

DR[u_] = D[R[u], u];
DG[u_] = D[G[u], u];

b=.; b=1.;
p=.; p=1.;
a=.; amin = 0.125; amax = 8; astep = 0.125;
Kmin = 5.; Kmax = 90; Kstep = 0.05;

Do[
  Print[yrmax[a]],
  {a, amin, amax, astep}];
```

Ευρετήριο

Αγγλικό

Ελληνικό

Βιβλιογραφία

1. Πετράκης, Α.Λ., (2004), *Διερεύνηση & Λύση της Πλήρους Τριτοβάθμιας Εξίσωσης*, Θεσσαλονίκη.
2. Πετράκης, Α.Λ., (2004), *Μη Στοχαστικά Μαθηματικά Υποδείγματα – Θεωρία και Εφαρμογές*, Κοζάνη.
3. Πετράκης, Α.Λ., (2005), *Η Πλήρης Τριτοβάθμια Εξίσωση*, Θεσσαλονίκη.
4. Canadian Forest Service, Forest Pests - Eastern spruce budworm', http://www.nrcan-rncan.gc.ca/cfs-scf/science/prodserv/pests/budwrm_e.html.
5. Gompertz, B., (1825), *On the Nature of the Function Expressive of the Law of Human Mortality, and on a New Mode of Determining the Value of Life Contingencies*. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, Vol. 115 (1825), pp. 513-585
6. Kucera, D.R., Orr, P.W., "Forest insect & Disease Leaflet 160, Spruce Budworm in the Eastern United States", http://www.na.fs.fed.us/spfo/pubs/fidls/sbw/budworm.htm.
7. Ludwig, D., Jones, D. D. and Holling, C. S., (1978), "Qualitative Analysis of Insect Outbreak Systems: The Spruce Budworm and Forest", *Journal of Animal Ecology*, 47(1), 315-332.
8. McKelvey, S., (1996), "Spruce Budworm Model Handout", http://www.stolaf.edu/people/mckelvey/envision.dir/spruce.html.
9. Newman, K., (2006), "Modelling Ecological Dynamics", *Lecture Notes*, Scotland.