Εφαρμογή των Αλγοριθμικών Διαδικασιών στην Εφαρμοσμένη Θεωρία Μητρών

Δωροθέα Α. Πετράκη

Διδακτορική Διατριβή

Επιβλέπων Καθηγητής : Νικόλαος Σαμαράς

Τμήμα Εφαρμοσμένης Πληροφορικης
Πανεπιστήμιο Μακεδονίας

ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ
2020

Τριμελής Επιστημονική Επιτροπή

Σαμαράς Νικόλαος, Καθηγητής του Τμήματος Εφαρμοσμένης Πληροφορικής του Πανεπιστημίου Μακεδονίας.
Χρήστου – Βαρσακέλης Δημήτριος, Καθηγητής του Τμήματος Εφαρμοσμένης Πληροφορικής του Πανεπιστημίου Μακεδονίας.
Σιφαλέρας Άγγελος, Αναπληρωτής Καθηγητής του Τμήματος Εφαρμοσμένης Πληροφορικής του Πανεπιστημίου Μακεδονίας.

ABSTRACT

In this thesis the ring of the matrix functions is being established and studied. Besides the theoretical study and research of the subject, special algorithms are being developed for the calculation of quantities that have to do with the matrix functions.

It is obvious that the study and research of this thesis has to do with the square matrices, so both the transposition in matrix multiplication and the inverse matrix exist.

In the introduction the group of inversible square matrices are presented with their properties. The general and specific properties of the eigenvalues and eigenvectors are presented, as well as of the norm matrix which is defined using its spectrum. Using all these, we define the Jordan form of any square matrix, since using the Jordan form we can easily calculate matrix powers. After studying all these basic meanings, the general case is presented of the n-th degree polynomial equation, for every square matrix A. Besides the theoretical study of all the possible cases, special algorithms for solving these equations are also developed. In this thesis, an algorithm for solving polynomial matrix equations was created, which does not require to find the inverse function, which was the case until today. In this algorithm, only the initial n-th degree polynomial function and its derivatives were used. Therefore, this algorithm is practically applicable in any polynomial function of a square matrix.

All the probable and possible cases were implemented using the Jordan normal form of the matrix and using the algorithm, the number of the different roots of the equation, as well as their algebraic multiplicities are calculated.

Then we studied the components of a matrix, in order to be able to calculate any function and any power of any square matrix. The basic properties of the components of square matrices are presented and proved. These properties were essential for this thesis. Using all these, basic subjects of Function Analysis in Matrix Functions were proved and implemented.

The concept of matrix sequences is created and presented, and their properties and convergence are examined. In addition, special matrix sequences are being examined, like the arithmetic, geometric and mixed matrix sequences. Finally, recursive matrix functions of first order are created and analyzed.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στη διατριβής αυτή θεμελιώνεται και μελετάται ο δακτύλιος των συναρτήσεων μητρών. Εκτός από την θεωρητική μελέτη και έρευνα πάνω στο παραπάνω θέμα αναπτύσσονται ειδικοί αλγόριθμοι για τον υπολογισμό διαφόρων ποσοτήτων, που σχετίζονται και αφορούν τις συναρτήσεις μητρών.
Είναι προφανές ότι η μελέτη και η έρευνα της διατριβής αυτής αφορά τις τετραγωνικές μήτρες, ώστε να μπορούμε να μιλάμε για αντιμετάθεση στον πολλαπλασιασμό μητρών καθώς και για αντίστροφη μήτρα.
Εισαγωγικά, παρουσιάζεται η ομάδα των αντιστρέψιμων τετραγωνικών μητρών με τις ιδιότητες τους. Δίνονται οι γενικές αλλά και οι ειδικές ιδιότητες των ιδιοτιμών, των ιδιοδιανυσμάτων και της νόρμας μήτρας, που ορίζεται με τη βοήθεια του φάσματος της.
Με τη βοήθεια αυτών, ορίζεται η Jordan κανονική μορφή μίας οποιασδήποτε τετραγωνικής μήτρας, καθότι με τη βοήθεια της Jordan μορφής μπορούν να υπολογιστούν εύκολα δυνάμεις μητρών.
Έπειτα από την μελέτη όλων των παραπάνω βασικών εννοιών παρουσιάζεται η γενική περίπτωση λύσης της n-οστού βαθμού πολυωνυμικής εξίσωσης για οποιοδήποτε τετραγωνική μήτρα A.
Εκτός της θεωρητικής μελέτης όλων των δυνατών περιπτώσεων αναπτύσσονται ειδικοί αλγόριθμοι επίλυσης των εξισώσεων αυτών.
Στη διατριβή αυτή σχεδιάστηκε ένας αλγόριθμος επίλυσης πολυωνυμικών εξισώσεων μητρών, ο οποίος δεν απαιτεί την εύρεση της αντίστροφης συνάρτησης, όπως γινόταν μέχρι σήμερα.
Σε αυτόν τον αλγόριθμο χρησιμοποιήθηκε μόνο η αρχική ν-οστού βαθμού πολυωνυμική συνάρτηση και οι παράγωγοί της. Συνεπώς, ο αλγόριθμος αυτός είναι πρακτικά εφαρμόσιμος σε οποιαδήποτε πολυωνυμική συνάρτηση τετραγωνικής μήτρας.
Όλες οι πιθανές και δυνατές περιπτώσεις υλοποιήθηκαν με τη βοήθεια της Jordan κανονικής μορφής της μήτρας και τέλος, υπολογίζονται, μέσω του αλγορίθμου, το πλήθος των διαφορετικών ριζών της εξίσωσης και οι αλγεβρικές τους πολλαπλότητες.
Στη συνέχεια, θέλοντας να καταστεί εφικτός ο υπολογισμός οποιασδήποτε συνάρτησης και δύναμης οποιασδήποτε τετραγωνικής μήτρας, μελετήσαμε τις συνιστώσες μήτρας.
Παρουσιάζονται και αποδεικνύονται όλες τις βασικές ιδιότητες των συνιστωσών τετραγωνικών μητρών (ιδιότητες, λήμματα, προτάσεις), που μας ήταν απαραίτητες για την ολοκλήρωση της έρευνάς μας.
Με τη βοήθεια όλων των παραπάνω, συνεχίζεται η έρευνα, αποδείχθηκαν και εφαρμόστηκαν τα βασικά θέματα της Ανάλυσης Συναρτήσεων στις Συναρτήσεις Μητρών. Ορίζεται η έννοια της ακολουθίας μητρών και μελετώνται οι ιδιοτητές τους καθώς και η σύγκλισή τους.
Μελετώνται ειδικές ακολουθίες μητρών, όπως οι αριθμητικές, γεωμετρικές και μικτές ακολουθίες μητρών. Επίσης μελετώνται οι αναδρομικές ακολουθίες μητρών πρώτης τάξης.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Αρχικά θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον επιβλέπων καθηγητή μου Νικόλαο Σαμαρά. Είναι ο άνθρωπος ο οποίος με στήριξε, πνευματικά, ακαδημαϊκά και ψυχολογικά όλα αυτά τα χρόνια, της συνεργασίας μας. Με εισήγαγε στα δύσβατα μονοπάτια της έρευνας. Όταν χρειάστηκε με καθοδήγησε μεθοδικά και με επανέφερε στον «σωστό δρόμο» που οδηγούσε προς την επίτευξη του «στόχου» μας. Πιστεύω ότι σφυρηλατίσαμε ισχυρές ανθρώπινες σχέσεις και πιστέυω ότι θα συνεχίσουμε την συνεργασία μας και από άλλες θέσεις (για μένα).

Εδώ οφείλω να αναφέρω και τον αείμνηστο Καθηγητή μου Κωνσταντίνο Παπαρίζο ο οποίος ήταν αυτός που με πήρε πρώτος δίπλα του και με ενέπνευσε να εισέλθω στον θαυμαστό κόσμο της έρευνας. Θα τον θυμάμαι για πάντα με σεβασμό, αγάπη και θαυμασμό.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω και την οικογένειά μου η οποία με στήριξε, ανέχθηκε την πολύωρη απομονωσή μου για μελέτη και μου συμπαραστάθηκε στις «δύσκολες» στιγμές της πορείας μου προς τον «στόχο» μου.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω και τους γονείς μου οι οποίοι με βοήθησαν φροντίζοντας εμένα και τα παιδιά μου ώστε να έχω περισσότερο χρόνο για μελέτη.

Θέλω επίσης να ευχαριστήσω τον φίλο και συνάδελφο Νικόλαο Πλόσκα ο οποίος μου συμπαραστάθηκε και με βοήθησε να ξεπεράσω διαφορα προβλήματα που προέκυψαν από την χρήση ειδικού software στο οποίο μου απέδειξε ότι είναι ειδήμων.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ

R	Το σώμα των πραγματικών αριθμών
C	Το σώμα των μιγαδικών αριθμών
$M_n(K)$	Ο δακτύλιος των τετραγωνικών μητρών $n\times n$ με στοιχεία από το σώμα K
I_n	Η μοναδιαία $n\times n$ μήτρα
$Det(A)$	Η ορίζουσα της τετραγωνικής μήτρας A
$diag\left[a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n\right]$	Η διαγώνιος μήτρα με στοιχεία της κύριας διαγωνίου τα $a_1, a_2, \dots, a_n$
$Adj(A)$	Η προσαρτημένη μήτρα της μήτρας A
A^T	Η ανάστροφη μήτρα της μήτρας A
A^{-1}	Η αντίστροφη μήτρα της τετραγωνικής μήτρας A
A^H	Η αναστοφο-συζυγής μήτρα της μήτρας A
$\lVert A\rVert$	Η φυσική νόρμα της τετραγωνικής μήτρας A
$\sup A$	Το άνω πέρας του συνόλου A
$\inf A$	Το κάτω πέρας του συνόλου A
$\sigma(A)$	Το φάσμα της τετραγωνικής μήτρας A
$\rho(A)$	$\max\{\lvert\lambda_i\rvert, i=1,2,\dots,n\}$, όπου $\lambda_i, i=1,2,\dots,n$ οι ιδιοτιμές της μήτρας A
J_A	Η Jordan μορφή της μήτρας A
$\mathrm{Re}(z)$	Το πραγματικό μέρος του μιγαδικού αριθμού z
$\mathrm{Im}(z)$	Το φανταστικό μέρος του μιγαδικού αριθμού z
$\lvert z\rvert$	Το μέτρο του μιγαδικού αριθμού z
$f^{(n)}$	Η n-οστή παράγωγος της συνάρτησης f
fog	Η σύνθεση της συνάρτησης g με την συνάρτηση f
a_i	Η αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ_i της μήτρας A
γ_i	Η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ_i της μήτρας A
d_i	Ο δείκτης της ιδιοτιμής λ_i της μήτρας A
$Kern(A)$	Ο πυρήνας της μήτρας A
$Range(A)$	Το εύρος της μήτρας A

$\mathrm{Im}(A)$	Η εικόνα της μήτρας A
$W_1 \oplus W_2$	Το ευθύ άθροισμα των διανυσματικών χώρων W_1 και W_2
$\dim W$	Η διάσταση του διανυσματικού χώρου W

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

1. Εισαγωγή

1.1 Η ΑΝΤΙΜΕΤΑΘΕΤΙΚΗ ΠΡΟΣΘΕΤΙΚΗ ΟΜΑΔΑ ΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΩΝ ΜΗΤΡΩΝ

Συμβολίζουμε με $M_n(K)$ το σύνολο των $n \times n$ μητρών με στοιχεία από το σώμα K ($K = R$ ή $K = C$).

Ορίζουμε στο σύνολο $M_n(K)$ μια πράξη πρόσθεσης ως εξής $f : M_n(K) \times M_n(K) \to M_n(K)$,

τέτοια ώστε, σε κάθε ζεύγος μητρών $A, B \in M_n(K)$ με $A = \left[a_{ij}\right]$ και $B = \left[b_{ij}\right]$ απεικονίζεται η μήτρα

$C = \left[c_{ij}\right] \in M_n$ με $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, για κάθε $i, j = 1, 2, ..., n$.

Η μήτρα C λέγεται άθροισμα των μητρών A και B και γράφουμε $C = A + B$.

Ισχύουν οι ιδιότητες

i) Για κάθε $A, B, C \in M_n$ είναι $(A + B) + C = A + (B + C)$. (Προσεταιριστική ιδιότητα)

ii) Συμβολίζουμε με O_n την $n \times n$ μήτρα της οποίας όλα τα στοιχεία είναι μηδέν. Προφανώς για κάθε μήτρα $A \in M_n(K)$ ισχύει $A + O_n = O_n + A = A$. Η μήτρα O_n λέγεται ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης μητρών.

iii) Για κάθε μήτρα $A \in M_n(K)$ υπάρχει μοναδική μήτρα $B \in M_n(K)$ τέτοια ώστε

$A + B = B + A = O_n$.

Η μήτρα B συμβολίζεται με $-A$ και αν $A = \left[a_{ij}\right]$ τότε $-A = \left[-a_{ij}\right]$.

Η μήτρα $-A$ λέγεται αντίθετη της μήτρας A.

iv) Για κάθε $A, B \in M_n(K)$ είναι $A + B = B + A$. (Αντιμεταθετική ιδιότητα)

Επειδή η δομή $\left(M_n(K), +\right)$ έχει τις τέσσερεις παραπάνω ιδιότητες, αποτελεί προσθετική αντιμεταθετική ομάδα.

1.2 Η ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΤΙΚΗ ΗΜΙΟΜΑΔΑ ΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΩΝ ΜΗΤΡΩΝ

Ορίζουμε στο σύνολο $M_n(K)$ μια πράξη πολλαπλασιασμού ως εξής $g : M_n(K) \times M_n(K) \to M_n(K)$, τέτοια ώστε, σε κάθε ζεύγος μητρών $A,B \in M_n(K)$ με $A=\left[a_{ij}\right]$ και $B=\left[b_{ij}\right]$ απεικονίζεται η μήτρα

$C=\left[c_{ij}\right] \in M_n(K)$ με $c_{ij}=\sum_{m=1}^{n}\left(a_{im}b_{mj}\right)$, για κάθε $i,j=1,2,...,n$.

Η μήτρα C λέγεται γινόμενο της μήτρας A με την μήτρα B και γράφουμε $C=A\cdot B$.

Ισχύουν οι ιδιότητες

i) Για κάθε $A,B,C \in M_n(K)$ είναι $(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$. (Προσεταιριστική ιδιότητα)

ii) Συμβολίζουμε με $I_n=\left[\delta_{ij}\right]$ την $n\times n$ μήτρα της οποίας τα στοιχεία είναι

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}.$$

Το σύμβολο δ_{ij} είναι γνωστό στη βιβλιογραφία ως «δέλτα του Kronecker».

Προφανώς για κάθε μήτρα $A\in M_n(K)$ ισχύει $A\cdot I_n=I_n\cdot A=A$.

Η μήτρα I_n λέγεται ουδέτερο στοιχείο της πράξης του πολλαπλασιασμού μητρών.

Επειδή η δομή $\left(M_n(K),\cdot\right)$ έχει τις παραπάνω ιδιότητες, αποτελεί πολλαπλασιαστική ημιομάδα.

Ιδιότητες

i) Η ημιομάδα $\left(M_n,\cdot\right)$ δεν είναι αντιμεταθετική, δηλαδή υπάρχουν μήτρς $A,B\in M_n(K)$ τέτοιες ώστε $A\cdot B\neq B\cdot A$.

ii)) Η ημιομάδα $\left(M_n(K),\cdot\right)$ έχει διαιρέτες του μηδενός, δηλαδή υπάρχουν μήτρες $A,B\in M_n$ με $A\neq O_n$ και $B\neq O_n$ και $A\cdot B=O_n$.

1.3 Ο ΔΑΚΤΥΛΙΟΣ ΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΩΝ ΜΗΤΡΩΝ

Η πράξη του πολλαπλασιασμού μητρών στο σύνολο $M_n(K)$ είναι επιμεριστική ως προς την πράξη της πρόσθεσης. Δηλαδή για κάθε $A,B,C\in M_n(K)$ ισχύουν οι ιδιότητες

$A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$ και $(B+C)\cdot A=B\cdot A+C\cdot A$.

Από τα παραπώνω προκύπτει ότι

i) Η δομή $\left(M_n(K),+\right)$ είναι προσθετική αντιμεταθετική ομάδα.

ii) Η δομή $\left(M_n(K),\cdot\right)$ είναι ημιομάδα.

iii) Η πράξη του πολλαπλασιασμού είναι επιμεριστική ως προς την πράξη της πρόσθεσης.

Συνεπώς η δομή $\left(M_n(K),+,\cdot\right)$ είναι δακτύλιος.

Ο δακτύλιος $\left(M_n(K),+,\cdot\right)$ δεν είναι αντιμεταθετικός και έχει και διαιρέτες του μηδενός.

1.4 Η ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΤΙΚΗ ΟΜΑΔΑ ΤΩΝ ΑΝΤΙΣΤΡΕΨΙΜΩΝ ΜΗΤΡΩΝ

Θα λέμε ότι η μήτρα $A \in M_n(K)$ είναι αντιστρέψιμη, αν και μόνο αν, υπάρχει μήτρα $B \in M_n(K)$ τέτοια ώστε $A \cdot B = B \cdot A = I_n$. Η μήτρα B λέγεται αντίστροφη της μήτρας A, συμβολίζεται με $A^{-1} \in M_n(K)$ και είναι $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$.

Συμβολίζουμε με G_n το σύνολο των αντιστρέψιμων μητρών του συνόλου $M_n(K)$. Αν $A \in G_n$ τότε και $A^{-1} \in G_n$ γιατί και η μήτρα A^{-1} είναι αντιστρέψιμη με αντίστροφη την μήτρα A.

Πρόταση

Το σύνολο G_n εφοδιασμένο με την πράξη του πολλαπλασιασμού μητρών αποτελεί ομάδα, δηλαδή η αλγεβρική δομή $(G_n, \cdot)$ είναι ομάδα.

Απόδειξη

Έστω $A, B \in G_n$, τότε υπάρχουν οι αντίστροφες τους μήτρες $A^{-1}, B^{-1} \in G_n$ και ισχύει

$(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = A \cdot (B \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1} = A \cdot I_n \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I_n$.

Δηλαδή και η μήτρα $A \cdot B$ είναι αντιστρέψιμη και ισχύει $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$, άρα και $A \cdot B \in G_n$.

Συνεπώς το σύνολο G_n είναι κλειστό ως προς την πράξη του πολλαπλασιασμού μητρών, συνεπώς η αλγεβρική δομή $(G_n, \cdot)$ είναι ημιομάδα.

Επιπλέον για κάθε μήτρα $A \in G_n$ υπάρχει μοναδική μήτρα η $A^{-1} \in G_n$ για την οποία ισχύει $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$. Δηλαδή όλα τα στοιχεία του συνόλου G_n έχουν αντίστροφο στο σύνολο αυτό.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η αλγεβρική δομή $(G_n, \cdot)$ είναι ομάδα.

Η ομάδα $(G_n, \cdot)$ δεν είναι αντιμεταθετική.

Επειδή, η πράξη του πολλαπλασιασμού είναι επιμεριστική ως προς την πράξη της πρόσθεσης στο σύνολο $M_n(K)$ και το σύνολο G_n είναι κλειστό ως προς την πράξη της πρόσθεσης, το ίδιο θα ισχύει και στο σύνολο G_n.

Πρόταση

Έστω $A \in G_n$ συμβολίζουμε με $Det(A)$ την ορίζουσα της μήτρας $A = \left[a_{ij} \right]$ και με $Adj(A)$ την προσαρτημένη μήτρα της A.

Είναι γνωστό ότι είναι $Det(A) \neq 0$ και $Adj(A) = \left[A_{ji} \right]$, όπου $A_{ji} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ το αλγεβρικό συμπλήρωμα του στοιχείου a_{ij}. (Με M_{ij} συμβολίζουμε την ορίζουσα της μήτρας που προκύπτει από την μήτρα A αν διαγράψουμε την i γραμμή του και την j στήλη της). Είναι $A^{-1} = \frac{1}{Det(A)} Adj(A)$.

Ιδιότητες

i) Για κάθε $A \in G_n$ ισχύει $A^m \in G_n$ και είναι $\left(A^m\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^m$. ($m \in N^*$)

ii) Για κάθε $A_1, A_2, ..., A_m \in G_n$ τότε και $A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_m \in G_n$ και είναι $\left(A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_m\right)^{-1} = A_m^{-1} \cdot ... \cdot A_2^{-1} \cdot A_1^{-1}$.

iii) Για κάθε $A \in G_n$ ισχύει $Det(A^{-1}) = Det(A)^{-1}$.

iv) Για κάθε $A \in G_n$ και για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}^*$ ισχύει $\lambda A \in G_n$ και $\left(\lambda A\right)^{-1} = \lambda^{-1} A^{-1}$.

v) Για κάθε $A \in G_n$, η ανάστροφή της A^T ανήκει στο σύνολο G_n και είναι $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$.

vi) Για κάθε $A, B \in G_n$, η μήτρα $C = A^{-1} \cdot B \cdot A$ ανήκει στο σύνολο G_n και είναι

α) $C^{-1} = A^{-1} \cdot B^{-1} \cdot A$ β) $C^m = A^{-1} \cdot B^m \cdot A$, όπου $m \in N^*$

vii) Για κάθε $A, B \in G_n$, η μήτρα $C = A \cdot B \cdot A^{-1}$ ανήκει στο σύνολο G_n και είναι

α) $C^{-1} = A \cdot B^{-1} \cdot A^{-1}$ β) $C^m = A \cdot B^m \cdot A^{-1}$, όπου $m \in N^*$

viii) Για κάθε $A, B_1, B_2 \in G_n$, οι μήτρες $C_1 = A^{-1} \cdot B_1 \cdot A$ και $C_2 = A^{-1} \cdot B_2 \cdot A$ ανήκουν στο σύνολο G_n και είναι

α) $C_1 \cdot C_2 = A^{-1} \cdot \left(B_1 \cdot B_2\right) \cdot A$

β) $\left(C_1 \cdot C_2\right)^{-1} = A^{-1} \cdot \left(B_1 \cdot B_2\right)^{-1} \cdot A = A^{-1} \cdot \left(B_2^{-1} \cdot B_1^{-1}\right) \cdot A$

γ) Η μήτρα $C_1 + C_2 = A^{-1} \cdot \left(B_1 + B_2\right) \cdot A$ είναι αντιστρέψιμη, αν και μόνο αν, η μήτρα $B_1 + B_2$ είναι αντιστρέψιμη και στην περίπτωση αυτή είναι $\left(C_1 + C_2\right)^{-1} = A^{-1} \cdot \left(B_1 + B_2\right)^{-1} \cdot A$

ix) Για κάθε $A, B_1, B_2 \in G_n$, οι μήτρες $C_1 = A \cdot B_1 \cdot A^{-1}$ και $C_2 = A \cdot B_2 \cdot A^{-1}$ ανήκουν στο σύνολο G_n και είναι

α) $C_1 \cdot C_2 = A \cdot \left(B_1 \cdot B_2\right) \cdot A^{-1}$

β) $\left(C_1 \cdot C_2\right)^{-1} = A \cdot \left(B_1 \cdot B_2\right)^{-1} \cdot A^{-1} = A \cdot \left(B_2^{-1} \cdot B_1^{-1}\right) \cdot A^{-1}$

γ) Οι μήτρες $C_1 + C_2 = A \cdot \left(B_1 + B_2\right) \cdot A^{-1}$ είναι αντιστρέψιμες, αν και μόνο αν, η μήτρα $B_1 + B_2$ είναι αντιστρέψιμη και στην περίπτωση αυτή είναι $\left(C_1 + C_2\right)^{-1} = A \cdot \left(B_1 + B_2\right)^{-1} \cdot A^{-1}$

1.5 ΙΔΙΟΣΥΣΤΗΜΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΜΗΤΡΑΣ

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΟ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ ΜΗΤΡΑΣ

Έστω η μήτρα $A=[a_{ij}]\in M_n(K)$. Ονομάζεται χαρακτηριστικό πολυώνυμο της μήτρας A το n-οστού βαθμού πολυώνυμο $p(x)=D(A-xI_n)$ ή $p(x)=\begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-x & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-x \end{vmatrix}$.

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχει την μορφή $p(x)=(-1)^n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_2x^2+a_1x+a_0$ δηλαδή έχει n ρίζες στο σύνολο C.

ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ ΜΗΤΡΑΣ

Έστω η μήτρα $A=[a_{ij}]\in M_n(K)$. Ονομάζονται ιδιοτιμές της μήτρας A οι ρίζες του χαρακτηριστικού της πολυώνυμου $p(x)=D(A-xI_n)$. Οι διαφορετικές μεταξύ τους ιδιοτιμές συμβολίζονται με $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_s$.

ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΠΟΛΛΑΠΛΟΤΗΤΑ ΙΔΙΟΤΙΜΗΣ

Αν ο αριθμός λ είναι ιδιοτιμή της μήτρας A και ως ρίζα του χαρακτηριστικού πολυώνυμου έχει βαθμό πολλαπλότητας k τότε λέμε ότι η ιδιοτιμή λ λέμε ότι έχει αλγεβρική πολλαπλότητα k.

ΙΔΙΟΔΙΑΝΥΣΜΑ ΠΙΝΑΚΑ - ΙΔΙΟΧΩΡΟΣ ΠΙΝΑΚΑ

Έστω η μήτρα $A=[a_{ij}]\in M_n(K)$. Ονομάζεται ιδιοδιάνυσμα της μήτρας Aπου αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή της λ_i με $i=1,2,\dots,s$, κάθε μη μηδενικό διάνυσμα $v_i\in C^n$ για το οποίο ισχύει $(A-\lambda_i I_n)v_i=O$

Πόρισμα

Το σύνολο των ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν σε μία ιδιοτιμή λ_i μιας τετραγωνικής μήτρας A, μαζί με το μηδενικό διάνυσμα, αποτελούν διανυσματικό υπόχωρο V_i του K^n και ονομάζεται ιδιόχωρος της ιδιοτιμής λ_i, για κάθε $i=1,2,\dots,s$.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΟΛΛΑΠΛΟΤΗΤΑ ΙΔΙΟΤΙΜΗΣ

Ορισμός 1.

Αν ο αριθμός λ είναι ιδιοτιμή της μήτρας A και ο ιδιόχωρος της V έχει διάσταση r τότε λέμε ότι ότι η ιδιοτιμή λ έχει γεωμετρική πολλαπλότητα r.

Ορισμός 2.

Έστω η μήτρα $A=[a_{ij}]\in M_n(K)$. Ονομάζεται ιδιοσύστημα της μήτρας A το σύνολο των ζευγών (λ_i, V_i), με $i=1,2,...,s$.

Παράδειγμα 1.

Να βρεθεί το ιδιοσύστημα της μήτρας $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της μήτρας είναι

$$p(x)=\begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1-x & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1-x \end{vmatrix} \Leftrightarrow$$

$p(x)=x^4-4x^3+16x-16 \Leftrightarrow p(x)=(x-2)^3(x+2)$.

Συνεπώς οι ιδιοτιμές της μήτρας A είναι

- $\lambda_1=-2$ με αλγεβρικό βαθμό πολλαπλότητας $a_1=1$.
- $\lambda_2=2$ με αλγεβρικό βαθμό πολλαπλότητας $a_2=3$.

Ο ιδιοχώρος V_1 που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1=-2$ βρίσκεται λύνοντας το ομογενές γραμμικό σύστημα

$(A-\lambda_1 I_4)v=O \Leftrightarrow$

$(A+2I_4)v=O \Leftrightarrow$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x & 0 & 0 & w \\ 0 & y & 0 & -w \\ 0 & 0 & z & -w \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -w \\ w \\ w \end{bmatrix}$$

συνεπώς είναι

$V_1=\left\{k\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T / k\in\mathbb{R}\right\}=\left\langle\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T\right\rangle$.

Η ιδιοτιμή $\lambda_1=-2$ έχει αλγεβρική πολλαπλότητα $a_1=1$ και γεωμετρική πολλαπλότητα $c_1=1$.

Ο ιδιοχώρος V_2 που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_2=2$ βρίσκεται λύνοντας το ομογενές γραμμικό σύστημα

$(A-\lambda_2 I_4)v=O \Leftrightarrow (A-2I_4)v=O \Leftrightarrow$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x & -y & -z & -w \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x = y + z + w$$

συνεπώς είναι $V_2 = \left\{ k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} / k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$.

Η ιδιοτιμή $\lambda_2 = 2$ έχει αλγεβρική πολλαπλότητα $a_2 = 3$ και γεωμετρική πολλαπλότητα $c_2 = 3$.

Παράδειγμα 2.

Να βρεθεί το ιδιοσύστημα της μήτρας $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix}$.

Λύση

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της μήτρας είναι

$$p(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i-x & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1-x & -1 \\ 1 & -i & -1 & i-x \end{vmatrix} \Leftrightarrow$$

$$p(x) = x^4 - (2+2i)x^3 - (4-4i)x^2 + (8+8i)x - 16i$$

$$\Leftrightarrow \; p(x) = (x-2)^2 (x+2)(x-2i) .$$

Συνεπώς οι ιδιοτιμές της μήτρας A είναι

- $\lambda_1 = -2$ με αλγεβρικό βαθμό πολλαπλότητας $a_1 = 2$
- $\lambda_2 = 2$ με αλγεβρικό βαθμό πολλαπλότητας $a_2 = 1$
- $\lambda_3 = 2i$ με αλγεβρικό βαθμό πολλαπλότητας $a_3 = 1$

Ο ιδιοχώρος V_1 που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = -2$ βρίσκεται λύνοντας το ομογενές γραμμικό σύστημα

$$(A - \lambda_1 I_4)v = O \Leftrightarrow (A + 2I_4)v = O \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2+i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -i & -1 & 2+i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x & 0 & 0 & w \\ 0 & y & 0 & -w \\ 0 & 0 & z & -w \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -w \\ w \\ w \end{bmatrix}$$

συνεπώς είναι $V_1 = \left\{ k \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T / k \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T \right\rangle$.

Η ιδιοτιμή $\lambda_1 = -2$ έχει αλγεβρική πολλαπλότητα $a_1 = 1$ και γεωμετρική πολλαπλότητα $c_1 = 1$.

Ο ιδιοχώρος V_2 που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = 2$ βρίσκεται λύνοντας το ομογενές γραμμικό σύστημα $(A-\lambda_2 I_4)v = O \Leftrightarrow (A-2I_4)v = O \Leftrightarrow$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2+i & -1 & -i \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & -2+i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x & 0 & -z & -2w \\ 0 & y & 0 & -w \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z + 2w \\ y = w \end{cases}$$

συνεπώς είναι $V_2 = \left\{ k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} / k_1, k_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$.

Η ιδιοτιμή $\lambda_2 = 2$ έχει αλγεβρική πολλαπλότητα $a_2 = 2$ και γεωμετρική πολλαπλότητα $c_2 = 2$.

Ο ιδιοχώρος V_3 που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_3 = 2i$ βρίσκεται λύνοντας το ομογενές γραμμικό σύστημα $(A-\lambda_3 I_4)v = O \Leftrightarrow (A-2iI_4)v = O \Leftrightarrow$

$$\begin{bmatrix} 1-2i & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & -i \\ 1 & -1 & -1-2i & -1 \\ 1 & -i & -1 & -i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 & w \\ 0 & 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -w \\ z = 0 \end{cases}$$

συνεπώς είναι $V_3 = \left\{ k_1 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} / k_1 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$.

Η ιδιοτιμή $\lambda_3 = 2i$ έχει αλγεβρική πολλαπλότητα $a_3 = 1$ και γεωμετρική πολλαπλότητα $c_3 = 1$.

Παράδειγμα 3.

Να βρεθεί το ιδιοσύστημα της μήτρας $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 6 & 1 & -1 & 1 \\ -6 & -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$.

Λύση

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της μήτρας είναι $p(x) = \begin{vmatrix} 4-x & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2-x & -1 & -1 \\ 6 & 1 & -1-x & 1 \\ -6 & -1 & 4 & 2-x \end{vmatrix} \Leftrightarrow$

$p(x) = x^4 - 7x^3 + 9x^2 + 27x - 54 \Leftrightarrow p(x) = (x-3)^3(x+2)$.

Συνεπώς οι ιδιοτιμές της μήτρας A είναι

- $\lambda_1 = -2$ με αλγεβρικό βαθμό πολλαπλότητας $a_1 = 1$.
- $\lambda_2 = 3$ με αλγεβρικό βαθμό πολλαπλότητας $a_2 = 3$.

Ο ιδιοχώρος V_1 που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = -2$ βρίσκεται λύνοντας το ομογενές γραμμικό σύστημα

$(A - \lambda_1 I_4)v = O \Leftrightarrow$

$(A + 2I_4)v = O \Leftrightarrow$

$$\begin{bmatrix} 6 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ 6 & 1 & 1 & 1 \\ -6 & -1 & 4 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z & w \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -w \end{bmatrix}$$

συνεπώς είναι

$$V_1 = \left\{ k \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T / \, k \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T \right\rangle.$$

Η ιδιοτιμή $\lambda_1 = -2$ έχει αλγεβρική πολλαπλότητα $a_1 = 1$ και γεωμετρική πολλαπλότητα $c_1 = 1$.

Ο ιδιοχώρος V_2 που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = 3$ βρίσκεται λύνοντας το ομογενές γραμμικό σύστημα

$(A - \lambda_2 I_4)v = O \Leftrightarrow (A - 3I_4)v = O \Leftrightarrow$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ - & -1 & -1 & -1 \\ 6 & 1 & -4 & 1 \\ -6 & -1 & 4 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x & 0 & -z & 0 \\ 0 & y & 2z & w \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = -2z - w \end{cases}$$

συνεπώς είναι

$$V_2 = \left\{ k_1 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} / \, k_1, k_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Η ιδιοτιμή $\lambda_2 = 3$ έχει αλγεβρική πολλαπλότητα $a_2 = 3$ και γεωμετρική πολλαπλότητα $c_2 = 2$.

Παράδειγμα 4.

Να βρεθεί το ιδιοσύστημα της μήτρας $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix}$.

Λύση

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της μήτρας είναι $p(x)=\begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i-x & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1-x & -1 \\ 1 & -i & -1 & i-x \end{vmatrix} \Leftrightarrow$

$p(x)=x^4-(2+2i)x^3-(4-4i)x^2+(8+8i)x-16i \Leftrightarrow p(x)=(x-2)^2(x+2)(x-2i)$.

Συνεπώς οι ιδιοτιμές της μήτρας A είναι

- $\lambda_1=-2$ με αλγεβρικό βαθμό πολλαπλότητας $a_1=2$
- $\lambda_2=2$ με αλγεβρικό βαθμό πολλαπλότητας $a_2=1$
- $\lambda_3=2i$ με αλγεβρικό βαθμό πολλαπλότητας $a_3=1$

Ο ιδιοχώρος V_1 που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1=-2$ βρίσκεται λύνοντας το ομογενές γραμμικό σύστημα

$(A-\lambda_1 I_4)v=O \Leftrightarrow (A+2I_4)v=O \Leftrightarrow$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2+i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -i & -1 & 2+i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x & 0 & 0 & w \\ 0 & y & 0 & -w \\ 0 & 0 & z & -w \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -w \\ w \\ w \end{bmatrix}$$

συνεπώς είναι

$V_1=\left\{k\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T / k\in\mathbb{R}\right\}=\left\langle\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T\right\rangle$.

Η ιδιοτιμή $\lambda_1=-2$ έχει αλγεβρική πολλαπλότητα $a_1=1$ και γεωμετρική πολλαπλότητα $c_1=1$.

Ο ιδιοχώρος V_2 που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_2=2$ βρίσκεται λύνοντας το ομογενές γραμμικό σύστημα

$(A-\lambda_2 I_4)v=O \Leftrightarrow (A-2I_4)v=O \Leftrightarrow$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2+i & -1 & -i \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & -2+i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x & 0 & -z & -2w \\ 0 & y & 0 & -w \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$\begin{cases} x=z+2w \\ y=w \end{cases}$, συνεπώς είναι

$$V_2=\left\{k_1\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}2\\1\\0\\1\end{bmatrix} / k_1,k_2\in\mathbb{R}\right\}=\left\langle\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\1\\0\\1\end{bmatrix}\right\rangle.$$

Η ιδιοτιμή $\lambda_2=2$ έχει αλγεβρική πολλαπλότητα $a_2=2$ και γεωμετρική πολλαπλότητα $c_2=2$.

Ο ιδιοχώρος V_3 που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_3=2i$ βρίσκεται λύνοντας το ομογενές γραμμικό σύστημα

$(A-\lambda_3 I_4)v=O \Leftrightarrow (A-2iI_4)v=O \Leftrightarrow$

$$\begin{bmatrix} 1-2i & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & -i \\ 1 & -1 & -1-2i & -1 \\ 1 & -i & -1 & -i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 & w \\ 0 & 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$\begin{cases} x = 0 \\ y = -w \\ z = 0 \end{cases}$, συνεπώς είναι

$$V_3 = \left\{ k_1 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} / \, k_1 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Η ιδιοτιμή $\lambda_3 = 2i$ έχει αλγεβρική πολλαπλότητα $a_3 = 1$ και γεωμετρική πολλαπλότητα $c_3 = 1$.

1.6 ΔΕΙΚΤΗΣ ΙΔΙΟΤΙΜΗΣ – ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ

Ορισμός 1.

Έστω $A \in M_n(K)$ και $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s$ είναι οι διαφορετικές μεταξύ τους ιδιοτιμές του πίνακα A με αλγεβρικές πολλαπλότητες $a_1, a_2, ..., a_s$ και γεωμετρικές πολλαπλότητες $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s$ αντίστοιχα.

Ονομάζεται δείκτης της ιδιοτιμής λ_i και συμβολίζεται με d_i ο αριθμός $a_i - \gamma_i + 1$, δηλαδή είναι

$d_i = a_i - \gamma_i + 1$, για κάθε $i = 1, 2, ..., s$.

Ορισμός 2.

Έστω $A \in M_n(K)$ και $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s$ είναι οι διαφορετικές μεταξύ τους ιδιοτιμές του πίνακα A με αλγεβρικές πολλαπλότητες $a_1, a_2, ..., a_s$ και γεωμετρικές πολλαπλότητες $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s$ αντίστοιχα.

Ο πίνακας A λέγεται απλός πίνακας, αν και μόνο αν, $d_i = 1$, για κάθε $i = 1, 2, ..., s$.

Ο πίνακας A λέγεται μη απλός ή μειούμενος πίνακας, αν και μόνο αν, υπάρχει $i \in \{1, 2, ..., s)$ τέτοιο ώστε $d_i > 1$.

Ορισμός 3.

Έστω $A \in M_n(K)$ και $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s$ είναι οι διαφορετικές μεταξύ τους ιδιοτιμές του πίνακα A με δείκτες $d_1, d_2, ..., d_s$ αντίστοιχα. Ονομάζεται ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα A συμβολίζεται με $p_{\min A}(x)$ το πολυώνυμο $p_{\min A}(x) = (x-\lambda_1)^{d_1} \cdot (x-\lambda_2)^{d_2} \cdot \ldots \cdot (x-\lambda_s)^{d_s}$.

1.7 ΕΙΔΗ ΜΗΤΡΩΝ

ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΕΣ ΜΗΤΡΕΣ (Symmetric Matrices)

Ορισμός

Μια τετραγωνική μήτρα $A = \left[a_{ij} \right] \in M_n(K)$ λέγεται συμμετρική μήτρα, αν και μόνο αν, ισχύει $A = A^T$ ή ισοδύναμα, αν και μόνο αν, ισχύει $a_{ij} = a_{ji}$, για κάθε i, j.

ΟΡΘΟΓΩΝΙΕΣ ΜΗΤΡΕΣ (Orthogonal Matrices)

Ορισμός

Μια τετραγωνική μήτρα $A \in M_n(K)$ λέγεται ορθογώνια μήτρα, αν και μόνο αν, ισχύει $A \cdot A^T = I_n$ ή ισοδύναμα, αν και μόνο αν ισχύει $A^{-1} = A^T$.

Πόρισμα 1.

Μια τετραγωνική μήτρα $A = \left[a_{ij} \right] \in M_n(K)$ είναι ορθογώνια μήτρα, αν και μόνο αν, ισχύει

$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{jk} = \delta_{ij}$, για κάθε i, j.

Πόρισμα 2.

Αν η μήτρα $A \in M_n(K)$ είναι συμμετρική, τότε είναι ορθογώνια, αν και μόνο αν, ισχύει $A \cdot A = I_n$ ή ισοδύναμα, αν και μόνο αν, ισχύει $A^{-1} = A$.

Ιδιότητες

1) Αν η τετραγωνική μήτρα $A \in M_n(K)$ είναι ορθογώνια, τότε $D(A) = 1$ ή $D(A) = -1$.

Απόδειξη

Είναι $A \cdot A^T = I_n \Rightarrow D(A \cdot A^T) = D(I_n) \Rightarrow D(A) \cdot D(A^T) = 1 \Rightarrow D(A) \cdot D(A) = 1 \Rightarrow D(A) = 1$ ή $D(A) = -1$.

2) Αν η τετραγωνική μήτρα $A \in M_n(K)$ είναι ορθογώνια, λ_i είναι μια ιδιοτιμή της και v_i ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή αυτή τότε είναι $v_i^T \cdot v_i = 0$ ή $\lambda_i = \pm 1$.

(είναι $v_i^T \cdot v_i = < v_i, v_i >$ εσωτερικό γινόμενο).

Απόδειξη

Είναι $(A - \lambda_i I_n) v_i = O \Rightarrow A v_i = \lambda_i v_i \Rightarrow \left(A v_i \right)^T = \left(\lambda_i v_i \right)^T \Rightarrow v_i^T A^T = \lambda_i v_i^T$

Από τις σχέσεις $A v_i = \lambda_i v_i$ και $v_i^T A^T = \lambda_i v_i^T$ παίρνουμε $v_i^T A^T A v_i = \lambda_i v_i^T \lambda_i v_i \Rightarrow v_i^T I_n v_i = \lambda_i^2 v_i^T v_i \Rightarrow$ $(\lambda_i^2 - 1) v_i^T v_i = O$, οπότε $v_i^T \cdot v_i = 0$ ή $\lambda_i = \pm 1$.

Πόρισμα 1.

Αν το ιδιοδιάνυσμα v_i της ορθογώνιας μήτρας $A \in M_n(K)$ είναι πραγματικό τότε, $v_i^T \cdot v_i = |v_i|^2 > 0$ άρα $\lambda_i = \pm 1$.

Πόρισμα 2.

Αν όλα τα ιδιοδιανύσματα μιας ορθογώνιας μήτρας $A \in M_n(K)$ είναι πραγματικά, τότε όλες οι ιδιοτιμές της είναι 1 ή -1.

3) Αν λ_i, λ_j είναι δύο διαφορετικές ιδιοτιμές της ορθογώνιας μήτρας $A \in M_n(K)$ και v_i, v_j είναι αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα τότε $< v_i, v_j >= 0$ ή $\lambda_i \cdot \lambda_j = 1$.

Απόδειξη

Είναι $Av_i = \lambda_i v_i$ και $Av_j = \lambda_j v_j$ άρα $v_j^T A^T = \lambda_j v_j^T$, οπότε $v_j^T A^T A v_i = \lambda_j v_j^T \lambda_i v_i \Rightarrow v_j^T I_n v_i = \lambda_i \lambda_j v_j^T v_i$

$\Rightarrow (\lambda_i \lambda_j - 1) v_j^T v_i = 0 \Rightarrow (\lambda_i \lambda_j - 1) < v_i, v_j >= 0$ άρα $< v_i, v_j >= 0$ ή $\lambda_i, \lambda_j = 1$.

Πόρισμα

Αν τα ιδιοδιανύσματα v_i, v_j μιας ορθογώνιας μήτρας $A \in M_n(K)$ αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές τότε είναι $< v_i, v_j >= 0$.

4) Η μήτρα $A = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$ είναι ορθογώνια, για κάθε $t \in R$.

5) Η μήτρα $A = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{bmatrix}$ είναι ορθογώνια, για κάθε $t \in R$.

6) Η μήτρα $A = \dfrac{1}{1+t+t^2} \begin{bmatrix} -t & t+t^2 & 1+t \\ 1+t & -t & t+t^2 \\ t+t^2 & 1+t & -t \end{bmatrix}$ είναι ορθογώνια, για κάθε $t \in R$

Παράδειγμα

Να δειχθεί ότι η μήτρα $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ είναι ορθογώνια και να βρεθεί η αντίστροφή της.

Είναι $A \cdot A^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$, οπότε η μήτρα είναι ορθογώνια και είναι $A^{-1} = A^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

ΕΡΜΗΤΙΑΝΕΣ ΜΗΤΡΕΣ (Hermitian Matices)

Ορισμός

Μια τετραγωνική μήτρα $A \in M_n(K)$ λέγεται Ερμητιανή, αν-ν ισχύει, $A = \overline{A}^T$ ή ισοδύναμα, αν και μόνο αν, ισχύει $a_{ij} = \overline{a}_{ji}$, για κάθε i, j, όπου $\overline{a}_{ji}$ είναι ο συζυγής του a_{ji}. Η μήτρα $\overline{A}^T$ συμβολίζεται με A^H, δηλαδή είναι $A^H = \overline{A}^T$.

ΜΟΝΑΔΙΑΙΕΣ ΜΗΤΡΕΣ (Unitary Matrices)

Ορισμός

Μια τετραγωνική μήτρα $A \in M_n(K)$ λέγεται μοναδιαία (unitary matrix), αν και μόνο αν, ισχύει $A \cdot A^H = I_n$ ή ισοδύναμα $A^{-1} = A^H$.

Πόρισμα 1.

Μια τετραγωνική μήτρα $A \in M_n(K)$ είναι μοναδιαία (unitary matrix), αν και μόνο αν, ισχύει $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\overline{a}_{jk} = \delta_{ij}$, για κάθε i, j.

Πόρισμα 2.

Αν η μήτρα $A \in M_n(K)$ είναι Ερμητιανή τότε είναι μοναδιαία, αν και μόνο αν, ισχύει $A \cdot A = I_n$ ή ισοδύναμα $A^{-1} = A$

Ιδιότητες

1) Αν μια τετραγωνική μήτρα $A \in M_n(K)$ είναι Ερμητιανή, τότε ισχύει $|D(A)| = 1$.

Απόδειξη

Είναι $A \cdot A^H = I_n \Rightarrow D(A \cdot A^H) = D(I_n) \Rightarrow D(A) \cdot D(A^H) = 1 \Rightarrow D(A) \cdot \overline{D(A)} = 1 \Rightarrow |D(A)|^2 = 1 \Rightarrow$
$|D(A)| = 1$.

2) Αν μια τετραγωνική μήτρα $A \in M_n(K)$ είναι Ερμητιανή, λ_i είναι μια ιδιοτιμή της και v_i ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή αυτή τότε είναι $|\lambda_i| = 1$.

Απόδειξη

Είναι $(A - \lambda_i I_n)v_i = O \Rightarrow Av_i = \lambda_i v_i \Rightarrow (Av_i)^H = (\lambda_i v_i)^H \Rightarrow v_i^H A^H = \overline{\lambda}_i v_i^H$

Από τις σχέσεις $Av_i = \lambda_i v_i$ και $v_i^H A^H = \overline{\lambda}_i v_i^H$ παίρνουμε

$v_i^H A^H A v_i = \overline{\lambda}_i v_i^H \lambda_i v_i \Rightarrow v_i^H I_n v_i = \overline{\lambda}_i \lambda_i v_i^H v_i \Rightarrow$

$\left(|\lambda_i|^2 - 1\right) v_i^H v_i = O$. Επειδή $v_i^H \cdot v_i = |v_i|^2 \neq 0$, είναι $|\lambda_i| = 1$.

1.8 ΝΟΡΜΕΣ ΜΗΤΡΩΝ

Ορισμός 1.

Μια απεικόνιση $\|\bullet\| : M_n(K) \to [0, +\infty)$ ορίζει μια νόρμα μητρών, αν και μόνο αν, ισχύουν οι ιδιότητες

i) $\|A\| \geq 0$, για κάθε $A \in M_n(K)$ και $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$

ii) $\|aA\| = |a| \|A\|$, για κάθε $a \in K$ και για κάθε $A \in M_n(K)$

iii) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$, για κάθε $A, B \in M_n(K)$

iv) $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$, για κάθε $A, B \in M_n(K)$

Πρόταση 1.

Αν $\|\cdot\|$ είναι μια Νόρμα διανυσμάτων και $A \in M_n(K)$ τότε υπάρχει $b_1 \geq 0$ τέτοιο ώστε $\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq b_1$, για κάθε $x \in K^n - \{O\}$

Απόδειξη

Γνωρίζουμε ότι δύο φυσικές Νόρμες διανυσμάτων είναι πάντα ισοδύναμες, άρα και $\|\bullet\| \sim \|\bullet\|_\infty$,

συνεπώς θα υπάρχουν $\rho_1, \rho_2 > 0$ τέτοια ώστε

$\rho_2 \|x\|_\infty \leq \|x\| \leq \rho_1 \|x\|_\infty$, για κάθε $x \in C^n$. Αν $x \neq O$ τότε

$$\frac{1}{\rho_1 \|x\|_\infty} \leq \frac{1}{\|x\|} \leq \frac{1}{\rho_2 \|x\|_\infty}.$$

Επίσης είναι $\rho_2 \|Ax\|_\infty \leq \|Ax\| \leq \rho_1 \|Ax\|_\infty$, οπότε

$$\frac{\rho_2 \|Ax\|_\infty}{\rho_1 \|x\|_\infty} \leq \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \frac{\rho_1 \|Ax\|_\infty}{\rho_2 \|x\|_\infty}$$

αλλά γνωρίζουμε ότι για την φυσική Νόρμα $\|\bullet\|_\infty$ υπάρχει $b \geq 0$ τέτοιο ώστε

$\frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq b$, για κάθε $x \in K^n - \{O\}$, οπότε $\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \frac{\rho_1 \|Ax\|_\infty}{\rho_2 \|x\|_\infty} \leq \frac{\rho_1}{\rho_2} b = b_1$

Πόρισμα

Αν $\|\cdot\|$ είναι μια φυσική Νόρμα διανυσμάτων και $A \in M_n(K)$, τότε το σύνολο $N_A = \left\{ \frac{\|Ax\|}{\|x\|} / x \in K^n - \{O\} \right\}$ είναι φραγμένο με ένα κάτω φράγμα το 0 και ένα άνω φράγμα το b_1.

Πρόταση 2.

Αν $A \in M_n(K)$ και $\|\cdot\|$ είναι μια φυσική Νόρμα διανυσμάτων τότε η απεικόνιση $\|\bullet\| : M_n(K) \to [0,+\infty)$ με $\|A\| = \sup N_A$ ορίζει Νόρμα μητρών.

Απόδειξη

i) Για κάθε $A \in M_n(K)$ είναι $\|A\| = \sup N_A$ άρα $\|A\| \geq 0$.

Αν $\|A\| = 0 \Leftrightarrow \sup N_A = 0 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq 0$, για κάθε $x \in K^n - \{O\}$

$\Leftrightarrow \|Ax\| = 0$, για κάθε $x \in K^n - \{0\} \Leftrightarrow Ax = 0$, για κάθε $x \in K^n - \{O\} \Leftrightarrow A = O$.

ii) Για κάθε $a \in C$ και $A \in M_n(K)$ είναι $\|aA\| = \sup \left\{ \frac{\|aAx\|}{\|x\|} / x \in K^n - \{O\} \right\} \Rightarrow$

$\|aA\| = \sup \left\{ \frac{|a| \|Ax\|}{\|x\|} / x \in K^n - \{O\} \right\} \Rightarrow \|aA\| = |a| \sup \left\{ \frac{|\|Ax\|}{\|x\|} / x \in K^n - \{O\} \right\} \Rightarrow \|aA\| = |a| \|A\|$.

iii) Για κάθε $A, B \in M_n(K)$ είναι $\|A+B\| = \sup \left\{ \frac{\|(A+B)x\|}{\|x\|} / x \in K^n - \{O\} \right\} \Rightarrow$

$\|A+B\| = \sup \left\{ \frac{\|Ax+Bx\|}{\|x\|} / x \in K^n - \{O\} \right\} \Rightarrow \|A+B\| \leq \sup \left\{ \frac{\|Ax\| + \|Bx\|}{\|x\|} / x \in K^n - \{O\} \right\} \Rightarrow$

$\|A+B\| \leq \sup \left\{ \frac{\|Ax\|}{\|x\|} + \frac{\|Bx\|}{\|x\|} / x \in K^n - \{O\} \right\} \Rightarrow$

$\|A+B\| \leq \sup \left\{ \frac{\|Ax\|}{\|x\|} / x \in K^n - \{O\} \right\} + \sup \left\{ \frac{\|Bx\|}{\|x\|} / x \in K^n - \{O\} \right\} \Rightarrow \|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

iv) Για κάθε $A, B \in M_n(K)$ είναι $\|A\| = \sup N_A$ άρα η $\|A\|$ είναι άνω φράγμα του συνόλου $N_A = \left\{ \frac{\|Ax\|}{\|x\|} / x \in K^n - \{O\} \right\}$ συνεπώς θα είναι $\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \|A\|$, για κάθε $x \in K^n - \{O\} \Rightarrow$

$\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$, για κάθε $x \in K^n$.

Από την σχέση αυτή προκύπτει ότι $\|(AB)x\| = \|A(Bx)\| \leq \|A\| \|Bx\| \leq \|A\| \|B\| \|x\|$

$\Rightarrow \frac{\|ABx\|}{\|x\|} \leq \|A\| \|B\|$ που σημαίνει ότι ο αριθμός $\|A\| \|B\|$ είναι άνω φράγμα του συνόλου

$N_{AB} = \left\{ \frac{\|ABx\|}{\|x\|} / x \in K^n - \{O\} \right\}$ άρα $\sup N_{AB} \leq \|A\| \|B\| \Rightarrow \|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.

Συνεπώς η παραπάνω συνάρτηση είναι μία νόρμα μητρών.

Πρόταση 3.

Αν $M_A = \left\{ \|Ax\| \,/\, x \in K^n, \|x\| = 1 \right\}$ τότε $\|A\| = \sup M_A$

Απόδειξη

Θα δείξουμε ότι $N_A = M_A$. Έστω $\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \in N_A$ τότε $\frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \frac{1}{\|x\|}\|Ax\| = \left\| \frac{1}{\|x\|} Ax \right\| = \left\| A\left(\frac{x}{\|x\|} \right) \right\| = \|Ay\| \in M_A$,

γιατί $\|y\| = \left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = 1$, άρα $N_A \subseteq M_A$. Έστω $\|Ax\| \in M_A$, είναι $\|x\| = 1$ άρα $\|Ax\| = \frac{\|Ax\|}{1} = \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \in N_A$, άρα και $M_A \subseteq N_A$ και τελικά $M_A = N_A$, οπότε $\|A\| = \sup M_A$.

Πρόταση 4.

Δύο οποιεσδήποτε φυσικές νόρμες μητρών είναι ισοδύναμες.

Απόδειξη

Έστω $\|\bullet\|_a^M$ και $\|\bullet\|_b^M$ δύο φυσικές νόρμες μητρών, τότε είναι

$\|A\|_a^M = \sup\left\{ \|Ax\|_a^V \,/\, x \in K^n, \|x\| = 1 \right\}$ και $\|A\|_b^M = \sup\left\{ \|Ax\|_b^M \,/\, x \in K^n, \|x\| = 1 \right\}$.

Αλλά οι δύο φυσικές νόρμες $\|\bullet\|_a^V$ και $\|\bullet\|_b^V$ των διανυσμάτων είναι ισοδύναμες, άρα υπάρχουν $\rho_1, \rho_2 > 0$ τέτοια ώστε $\rho_2 \|x\|_b^V \le \|x\|_a^V \le \rho_1 \|x\|_b^V$, για κάθε $x \in K^n$. Άρα $\rho_2 \|Ax\|_b^V \le \|Ax\|_a^V \le \rho_1 \|Ax\|_b^V \Rightarrow$

$$\sup\left\{ \rho_1 \|Ax\|_b^V \,/\, x \in K^n, \|x\| = 1 \right\} \le \sup\left\{ \|Ax\|_\alpha^V \,/\, x \in K^n, \|x\| = 1 \right\} \le \sup\left\{ \rho_2 \|Ax\|_b^V \,/\, x \in K^n, \|x\| = 1 \right\}$$

$\Rightarrow \rho_1 \|A\|_b^M \le \|A\|_a^M \le \rho_2 \|A\|_b^M$ που σημαίνει ότι οι δύο νόρμες μητρών είναι ισοδύναμες.

Ιδιότητα 1.

Για κάθε φυσική νόρμα $\|\bullet\|$ μητρών ισχύει $\|I_n\| = 1$

Απόδειξη

Είναι $\|I_n\| = \sup\left\{ \|I_n x\| \,/\, x \in C^n, \|x\| = 1 \right\} \Rightarrow \|I_n\| = \sup\left\{ \|x\| \,/\, x \in C^n, \|x\| = 1 \right\} \Rightarrow \|I_n\| = \sup\{1\} = 1$

Ιδιότητα 2.

Για κάθε φυσική νόρμα $\|\bullet\|$ μητρών ισχύει $\rho(A) \le \|A\|$.

Απόδειξη

Έστω λ μια τυχαία ιδιοτιμή της μήτρας A και u το αντίστοιχο μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή αυτή, τότε είναι $Au = \lambda u \Rightarrow \|\lambda u\| = \|Au\| \Rightarrow |\lambda|\|u\| = \|Au\| \le \|A\|\|u\| \Rightarrow |\lambda| \cdot 1 \le \|A\| \cdot 1 \Rightarrow$ $|\lambda| \le \|A\|$. Επειδή το λ είναι τυχαία ιδιοτιμή της μήτρας A θα είναι $\rho(A) \le \|A\|$.

Ιδιότητα 3.

Αν $A \in C^{n,n}$ και $\|\bullet\|$ είναι μια φυσική νόρμα μητρών με $\|A\| < a$ ($a > 0$) τότε

α) Οι μήτρες $A - aI_n$ και $A + aI_n$ είναι αντιστρέψιμες και

β) Είναι $\dfrac{1}{a + \|A\|} \le \|(A \pm aI_n)^{-1}\| \le \dfrac{1}{a - \|A\|}$.

Απόδειξη

α) Υποθέτω ότι η μήτρα $A - aI_n$ δεν είναι αντιστρέψιμη τότε $\det(A - aI_n) = 0$, άρα το a είναι ιδιοτιμή της μήτρας A, τότε $a = |a| \le \rho(A) \le \|A\| < a$ που είναι άτοπο, συνεπώς η μήτρα $A - aI_n$ είναι αντιστρέψιμη. Όμοια και η μήτρα $A + aI_n$ είναι αντιστρέψιμη.

β) Είναι $I_n = (A - aI_n)^{-1}(A - aI_n) \Rightarrow I_n = (A - aI_n)^{-1} A - a(A - aI_n)^{-1} \Rightarrow$

$$\|I_n\| = \left\|(A - aI_n)^{-1} A - a(A - aI_n)^{-1}\right\| \Rightarrow 1 \le \left\|(A - aI_n)^{-1} A\right\| + \left\|a(A - aI_n)^{-1}\right\| \Rightarrow$$

$$1 \le \left\|(A - aI_n)^{-1}\right\|\|A\| + a\left\|(A - aI_n)^{-1}\right\| \Rightarrow 1 \le \left\|(A - aI_n)^{-1}\right\|(a + \|A\|) \Rightarrow \frac{1}{a + \|A\|} \le \|(A \pm aI_n)^{-1}\|$$

Επίσης είναι $\|I_n\| = \left\|(A - aI_n)^{-1} A - a(A - aI_n)^{-1}\right\| \Rightarrow 1 \ge \left\|a(A - aI_n)^{-1}\right\| - \left\|(A - aI_n)^{-1} A\right\| \Rightarrow$

$$1 \ge a\left\|(A - aI_n)^{-1}\right\| - \left\|(A - aI_n)^{-1}\right\|\|A\| \Rightarrow 1 \ge (a - \|A\|)\left\|(A - aI_n)^{-1}\right\| \Rightarrow \|(A \pm aI_n)^{-1}\| \le \frac{1}{a - \|A\|}.$$

Ιδιότητα 4.

Για κάθε αντιστρέψιμη μήτρα $A \in M_n(K)$ και για κάθε φυσική νόρμα ισχύει $\|A\|\|A^{-1}\| \ge 1$.

Απόδειξη

Είναι $AA^{-1} = I_n \Rightarrow \|AA^{-1}\| = \|I_n\| \Rightarrow 1 = \|AA^{-1}\| \le \|A\|\|A^{-1}\|$.

Ορισμός 2.

Αν $\|\bullet\|_1$ είναι η 1-norm διανυσμάτων ορίζω την 1-norm μητρών από την σχέση

$\|A\|_1 = \sup\{\|Ax\|_1 \,/\, x \in K^n, \|x\|_1 = 1\}$, για κάθε $A \in M_n(K)$.

Ιδιότητα 5.

Για κάθε $A \in M_n(K)$ είναι $\|A\|_1 = \max\left\{\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \,/\, j = 1, 2, ..., n\right\}$.

Απόδειξη

Έστω $\sum_{i=1}^{n}|a_{ik}| = \max\left\{\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}| / j = 1,2,...,n\right\}$.

Για κάθε $x \in K^n$ με $\|x\|_1 = 1$ είναι $\|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right| \Rightarrow \|Ax\|_1 \le \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}||x_j|\right) \Rightarrow$

$\|Ax\|_1 \le |x_1|\sum_{i=1}^{n}|a_{i1}| + |x_2|\sum_{i=1}^{n}|a_{i2}| + \cdots + |x_n|\sum_{i=1}^{n}|a_{in}| \Rightarrow$

$\|Ax\|_1 \le |x_1|\sum_{i=1}^{n}|a_{ik}| + |x_2|\sum_{i=1}^{n}|a_{ik}| + \cdots + |x_n|\sum_{i=1}^{n}|a_{ik}| \Rightarrow$

$\|Ax\|_1 \le \sum_{j=1}^{n}|a_{kj}| \cdot \sum_{j=1}^{n}|x_j| \Rightarrow \|Ax\|_1 \le \sum_{i=1}^{n}|a_{ik}| \cdot \|x\|_1 \Rightarrow \|Ax\|_1 \le \sum_{i=1}^{n}|a_{ik}|$

Δηλαδή ο αριθμός $\sum_{i=1}^{n}|a_{ik}|$ είναι άνω φράγμα του συνόλου $M_A = \left\{\|Ax\|_1 / x \in K^n, \|x\|_1 = 1\right\}$, συνεπώς

$\|A\|_1 = \sup M_A \le \sum_{i=1}^{n}|a_{ik}| \Rightarrow \|A\|_1 \le \max\left\{\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}| / j = 1,2,...,n\right\}$

Θεωρούμε το διάνυσμα $y \in K^n$ με $y_k = 1$, και $y_i = 0$ για κάθε $i \ne k$. Προφανώς είναι $\|y\|_1 = 1$.

Είναι $\|Ay\|_1 = \sum_{i=1}^{n}|a_{ik}|$, αλλά $\|A\|_1 \ge \|Ay\|_1$ άρα $\|A\|_1 \ge \sum_{i=1}^{n}|a_{ik}|$, οπότε

$\|A\|_1 \ge \max\left\{\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}| / j = 1,2,...,n\right\}$. Τελικά $\|A\|_1 = \max\left\{\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}| / j = 1,2,...,n\right\}$.

Ορισμός 3.

Αν $\|\bullet\|_\infty$ είναι η ∞-norm διανυσμάτων ορίζω την ∞-norm μητρών από την σχέση

$\|A\|_\infty = \sup\left\{\|Ax\|_\infty / x \in K^n, \|x\|_\infty = 1\right\}$, για κάθε $A \in M_n(K)$.

Ιδιότητα 6.

Για κάθε $A \in M_n(K)$, είναι $\|A\|_\infty = \max\left\{\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}| / i = 1,2,...,n\right\}$.

Απόδειξη

Έστω $\sum_{j=1}^{n}|a_{kj}| = \max\left\{\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}| / i = 1,2,...,n\right\}$.

Για κάθε $x \in K^n$ με $\|x\|_\infty = 1$, είναι $\|Ax\|_\infty = \max\left\{\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right| / i = 1,2,...,n\right\} \Rightarrow$

$\|Ax\|_\infty \le \max\left\{\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}||x_j| / i = 1,2,...,n\right\} \Rightarrow \|Ax\|_\infty \le \max\left\{\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}| \|x\|_\infty / i = 1,2,...,n\right\} \Rightarrow$

$\|Ax\|_\infty \le \max\left\{\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\cdot 1 / i=1,2,...,n\right\} \Rightarrow \|Ax\|_\infty \le \max\left\{\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| / i=1,2,...,n\right\}$.

Δηλαδή ο αριθμός $\max\left\{\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| / i=1,2,...,n\right\}$ είναι άνω φράγμα του συνόλου

$M_A = \left\{\|Ax\|_\infty / x \in C^n, \|x\|_\infty = 1\right\}$, συνεπώς

$\|A\|_\infty = \sup M_A \le \max\left\{\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| / i=1,2,...,n\right\} \Rightarrow \|A\|_\infty \le \max\left\{\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| / i=1,2,...,n\right\}$.

Θεωρούμε το διάνυσμα $y \in K^n$ με $y_j = \dfrac{\overline{a}_{kj}}{|a_{kj}|}$, αν $a_{kj} \ne 0$ και $y_i = 1$ αν $a_{kj} = 0$. Προφανώς είναι $\|y\|_1 = 1$.

Αν $a_{kj} \ne 0$ είναι $a_{kj} y_j = a_{kj} \dfrac{\overline{a}_{kj}}{|a_{kj}|} = \dfrac{|a_{kj}|^2}{|a_{kj}|} = |a_{kj}|$ και αν $a_{kj} = 0$ είναι $a_{kj} y_j = 0$, συνεπώς είναι

$\sum_{j=1}^{n} |a_{kj} y_j| = \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}|$.

Είναι $\|Ay\|_\infty = \max\left\{\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j\right| / i=1,2,...,n\right\} \Rightarrow \|Ay\|_\infty \ge \sum_{j=1}^{n} |a_{kj} y_j| \Rightarrow \|Ay\|_\infty \ge \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}| \Rightarrow$

$\|Ay\|_\infty \ge \max\left\{\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| / i=1,2,...,n\right\}$.

Αλλά $\|A\|_\infty \ge \|Ay\|_\infty$ άρα $\|A\|_\infty \ge \max\left\{\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| / i=1,2,...,n\right\}$ και τελικά $\|A\|_\infty = \max\left\{\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| / i=1,2,...,n\right\}$.

Ορισμός 4.

Αν $\|\bullet\|_2$ είναι η 2-norm διανυσμάτων ορίζουμε την 2-norm μητρών από την σχέση

$\|A\|_2 = \sup\left\{\|Ax\|_2 / x \in C^n, \|x\|_2 = 1\right\}$, για κάθε $A \in M_n(K)$.

Ιδιότητα 7.

Αν η μήτρα $A \in M_n(K)$ είναι Ερμητιανή τότε όλες της οι ιδιοτιμές είναι πραγματικοί αριθμοί.

Απόδειξη

Έστω λ τυχαία ιδιοτιμή της μήτρας A και u το αντίστοιχο μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμα.

Είναι $Au = \lambda u \Rightarrow u^H Au = \lambda u^H u \Rightarrow u^H Au = \lambda \|u\|_2^2 = \lambda$.

Αλλά $u^H Au = [\alpha]$, $a \in C$ και $A^H = A$, τότε $\left(u^H Au\right)^H = [\alpha]^H \Rightarrow u^H Au = [\overline{\alpha}] \Rightarrow [a] = [\overline{\alpha}] \Rightarrow a \in R$,

οπότε και $\lambda \in R$.

Ιδιότητα 8.

Αν η μήτρα $A \in M_n(K)$ είναι συμμετρική τότε όλες της οι ιδιοτιμές είναι πραγματικοί αριθμοί.

Ιδιότητα 9.

Αν $A \in M_n(K)$ και $B = A^H A$, τότε

α) Η μήτρα B είναι Ερμητιανή και έχει όλες της τις ιδιοτιμές μη αρνητικούς πραγματικούς αριθμούς

β) Αν $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ είναι οι ιδιοτιμές της μήτρας $B = A^H A$ με $0 \le \lambda_1 \le \lambda_2 \le ... \le \lambda_n$ τότε $\rho(A^H A) = \lambda_n$.

γ) Για κάθε $x \in C^n$ με $\|x\|_2 = 1$ είναι $\|Ax\|_2^{\,2} \le \rho(A^H A)$.

Απόδειξη

α) Είναι $B^H = \left(A^H A\right)^H = A^H \left(A^H\right)^H = A^H A = B$, άρα η μήτρα B είναι Ερμητιανή και όπως αποδείξαμε

έχει όλες τις ιδιοτιμές της πραγματικούς αριθμούς. Έστω λ τυχαία ιδιοτιμή της μήτρας B και u το αντίστοιχο μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμα. Είναι $Bu = \lambda u \Rightarrow u^H Bu = \lambda u^H u \Rightarrow u^H A^H Au = \lambda u^H u \Rightarrow$

$(Au)^H Au = \lambda \|u\|_2^{\,2} \Rightarrow \|Au\|_2^{\,2} = \lambda \Rightarrow \lambda \ge 0$.

β) Άμεση συνέπεια του ορισμού της φασματικής ακτίνας μήτρας.

γ) Έστω $u_1, u_2, ..., u_n$ τα μοναδιαία ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές $0 \le \lambda_1 \le \lambda_2 \le ... \le \lambda_n$

αντίστοιχα. Είναι γνωστό ότι τα ιδιοδιανύσματα αυτά αποτελούν μια ορθοκανονική βάση του K^n. Έστω $x_1, x_2, ..., x_n$ οι συντεταγμένες του x ως προς την ορθοκανονική βάση $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$, τότε είναι

$\|Ax\|_2^{\,2} = < Ax, Ax >_2 = (Ax)^H (Ax) = x^H A^H Ax$ άρα

$\|Ax\|_2^{\,2} = < A^H Ax, x >_2 = < A^H A\sum_{i=1}^{n} x_i u_i, \sum_{i=1}^{n} x_i u_i >_2 \Rightarrow \|Ax\|_2^{\,2} = < \sum_{i=1}^{n} x_i (A^H A) u_i, \sum_{i=1}^{n} x_i u_i >_2 \Rightarrow$

$\|Ax\|_2^{\,2} = < \sum_{i=1}^{n} x_i \lambda_i u_i, \sum_{i=1}^{n} x_i u_i >_2 \Rightarrow \|Ax\|_2^{\,2} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \overline{x}_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \|x_i\|_2^{\,2} \Rightarrow \|Ax\|_2^{\,2} \le \lambda_n \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_2^{\,2} \Rightarrow$

$\|Ax\|_2^{\,2} \le \lambda_n \|x\|_2^{\,2} = \lambda_n$, άρα $\|Ax\|_2^{\,2} \le \rho(A^H A)$.

Πρόταση 5.

Για κάθε $A \in M_n(K)$ είναι $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^H A)}$.

Απόδειξη

Για κάθε $x \in K^n$ με $\|x\|_2 = 1$ δείχθηκε ότι είναι $\|Ax\|_2 \le \sqrt{\rho(A^H A)}$,

άρα ο αριθμός $\sqrt{\rho(A^H A)}$ είναι άνω φράγμα του συνόλου $M_A = \left\{\|Ax\|_2 \,/\, x \in C^n, \|x\|_2 = 1\right\}$, συνεπώς

$\|A\|_2 = \sup M_A \le \sqrt{\rho(A^H A)} \Rightarrow \|A\|_2 \le \sqrt{\rho(A^H A)}$.

Για το ιδιοδιάνυσμα u_n που αντιστοιχεί στη μεγαλύτερη ιδιοτιμή είναι

$\|Au_n\|_2^{\,2} = < Au_n, Au_n >_2 = (Au_n)^H (Au_n) = u_n^{\,H} A^H Au_n$ άρα

$\|Au_n\|_2^{\,2} = < A^H Au_n, u_n >_2 = < \lambda_n u_n, u_n >_2 = \lambda_n \Rightarrow \|Au_n\|_2^{\,2} = \lambda_n \Rightarrow \|Au_n\|_2^{\,2} = \rho(A^H A) \Rightarrow$

$\|A\|_2 \ge \|Au_n\|_2 = \sqrt{\rho(A^H A)} \Rightarrow \|A\|_2 \ge \sqrt{\rho(A^H A)}$

Τελικά είναι $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^H A)}$.

Ιδιότητες

i) Αν η μήτρα $A \in M_n(K)$ είναι μοναδιαία (Unitary) τότε $\|A\|_2 = \|A^{-1}\|_2 = 1$.

Απόδειξη

Είναι $A^H A = I_n$ άρα $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^H A)} \Rightarrow \|A\|_2 = \sqrt{\rho(I_n)} \Rightarrow \|A\|_2 = \sqrt{1} = 1$.

Είναι γνωστό ότι και η μήτρα A^{-1} είναι μοναδιαία (Unitary), συνεπώς θα είναι και $\|A^{-1}\|_2 = 1$.

ii) Αν η μήτρα $A \in M_n(K)$ είναι Ερμητιανή (Hermitian), τότε $\|A\|_2 = \rho(A)$.

Απόδειξη

Είναι $A^H = A$ και η μήτρα A έχει πραγματικές ιδιοτιμές, άρα $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^H A)} \Rightarrow \|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^2)} \Rightarrow$

$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A)^2} \Rightarrow \|A\|_2 = \rho(A)$.

iii) Αν η μήτρα $A \in M_n(K)$ είναι Ερμητιανή και αντιστρέψιμη τότε $\|A^{-1}\|_2 = \dfrac{1}{\rho(A)}$.

Απόδειξη

Η μήτρα A^{-1} είναι και αυτή Ερμητιανή με ιδιοτιμές πραγματικούς αριθμούς και μάλιστα είναι οι αντίστροφοι αριθμοί των ιδιοτιμών της μήτρας A, άρα $\|A^{-1}\|_2 = \rho(A^{-1}) = \dfrac{1}{\rho(A)}$.

iv) Αν η μήτρα $A \in M_n(K)$ είναι ορθογώνια, τότε $\|A\|_2 = \|A^{-1}\|_2 = 1$.

Απόδειξη

Άμεση συνέπεια της σχέσης $A^{-1} = A^T$.

v) Αν η μήτρα $A \in M_n(K)$ είναι συμμετρική, τότε $\|A\|_2 = \rho(A)$.

vi) Αν η μήτρα $A \in M_n(K)$ είναι συμμετρική και αντιστρέψιμη τότε $\|A^{-1}\|_2 = \dfrac{1}{\rho(A)}$.

vii) Αν $A, Q \in M_n(K)$ και η μήτρα Q είναι Ερμητιανή τότε $\|QA\|_2 = \|A\|_2$.

Απόδειξη

Είναι $\|QA\|_2 = \sqrt{\rho\left((QA)^H (QA)\right)} \Rightarrow \|QA\|_2 = \sqrt{\rho\left((A^H Q^H)(QA)\right)} \Rightarrow \|QA\|_2 = \sqrt{\rho\left(A^H (Q^H Q) A\right)} \Rightarrow$

$\|QA\|_2 = \sqrt{\rho\left(A^H I_n A\right)} \Rightarrow \|QA\|_2 = \sqrt{\rho\left(A^H A\right)} = \|A\|_2$.

viii) Αν $A, Q \in M_n(K)$ και η μήτρα Q είναι ορθογώνια, τότε είναι $\|QA\|_2 = \|A\|_2$.

Απόδειξη

Άμεση συνέπεια της προηγούμενης ιδιότητας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΗΤΡΩΝ

Η θεωρία μητρών αναπτύχθηκε από τους Augustin Cauchy (1789-1857), Arthur Cayley (1821-1895), James Sylvester (1814-1897), Ferdinard Frobenius (1849-1917), Loepold Kronecker (1823-1891), Karl Theodor Weirstrass (1815-1897) και άλλους. Το 1858 ο Arthur Cayley σε ένα σεμινάριο του με τίτλο «A Memoir on the Theory of Matrices», εισήγαγε την έννοια της τετραγωνικής ρίζας μιας τετραγωνικής μήτρας. Στη συνέχεια ο James Sylvester πρότεινε τον ορισμό της συνάρτησης $f(A)$, όπου A τετραγωνική μήτρα. Υπάρχουν τέσσερεις ισοδύναμοι ορισμοί για το $f(A)$, που βασίζονται στην κανονική μορφή του Jordan, στην πολυωνυμική παρεμβολή, στις συνιστώσες μιας μήτρας και στον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy.

Μια από τις πιο πρώιμες χρήσεις της θεωρίας των μητρών σε πρακτικές εφαρμογές έγινε το 1938 από τους Robert Frazer, William Duncan και Arthur Collar του Τμήματος Αεροδυναμικής του Εθνικού Εργαστηρίου Φυσικής της Αγγλίας. Αναπτύχθηκαν μέθοδοι με την χρήση μητρών με τις οποίες μελετούσαν τους ανεπιθύμητους κραδασμούς σε αεροσκάφη.

Σχετικά με το θέμα που μελετάμε στην ενότητα αυτή αναφέρουμε ότι μέχρι σήμερα έχει μελετηθεί και λυθεί η διωνυμική εξίσωση μητρών $X^n = A$, όπου A είναι μια $\nu\times\nu$ γνωστή μήτρα και X είναι η άγνωστη μήτρα. Προφανώς και η μήτρα X είναι μια $\nu\times\nu$ μήτρα.

Με το πρόβλημα αυτό έχουν ασχοληθεί πολλοί μαθηματικοί και έχουν προκύψει αρκετά σημαντικά αποτελέσματα [1], [2], [3].

Ο D. Sullivan [11] παρουσίασε το 2003 αλγεβρικούς τύπους οι οποίοι μας δίνουν τις τετραγωνικές ρίζες μιας 2×2 μήτρας.

Ο T. Arponen [5], [7] ανέπτυξε περαιτέρω την μαθηματική θεωρία των πολυωνυμικών συναρτήσεων μητρών.

Ο A. Choudhry [6] δημοσίευσε το 2004 την εργασία του «Extraction of the *n*-th roots of 2×2 matrices» η

οποία αποτελεί εξέλιξη της εργασίας του P. Psarakos [8] «On the n-th roots of a complex matrix».
Στην εργασία αυτή ορίστηκαν αλγεβρικοί τύποι οι οποίοι μας δίνουν όλες τις λύσεις της εξίσωσης $X^n = A$, όπου $n \geq 2$ και A είναι μια 2×2 μήτρα με πραγματικά ή μιγαδικά στοιχεία.
Οι D. Bini και N. J. Higham [3] παρουσίασαν το 2005 κάποιους συμπληρωματικούς αλγόριθμους για την εύρεση των *n*-οστών ριζών μιας μήτρας.
Οι Bjorck και Hammarling [4] έδειξαν το 2005 πώς να υπολογίζουμε μια κυβική ρίζα μιας μήτρας χρησιμοποιώντας την ανάλυση μιας μήτρας με την μέθοδο Schur.
Εμείς με την σειρά μας αποφασίσαμε να μελετήσουμε και να λύσουμε την πολυωνυμική εξίσωση μητρών $a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1 X + a_0 I_\nu = A$, όπου $A, X \in M_\nu(K)$, $K = \mathbb{R}$ ή $K = \mathbb{C}$.

Είναι προφανές ότι λύνοντας την εξίσωση αυτή, η διωνυμική εξίσωση $X^n = A$ αποτελεί μια ειδική περίπτωση η οποία προκύπτει από την γενική περίπτωση όταν $a_n = 1$ και $a_{n-1} = a_{n-2} = ... = a_1 = a_0 = 0$.
Η κύρια δυσκολία την οποία αντιμετωπίζει κάποιος που θέλει να εφαρμόσει ανάλογες τεχνικές που εφαρμόστηκαν στη λύση της εξίσωσης $X^n = A$ είναι ότι η συνάρτηση $h(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ δεν είναι πάντα αντιστρέψιμη, συνεπώς δεν υπάρχει πάντα η αντίστροφή της. Αλλά ακόμη και στην περίπτωση που είναι αντιστρέψιμη είναι σχεδόν πάντα αδύνατο να βρούμε τον τύπο την αντίστροφή της.
Σκεφτήκαμε και αναπτύξαμε μια νέα μέθοδο-αλγόριθμο, παρακάμπτοντας τις τεχνικές που έχουν μέχρι σήμερα αναπτυχθεί, για να ξεπεράσουμε τα προβλήματα που προκύπτουν από τη μη δυνατότητα αντιστροφής της συνάρτησης h, όταν είναι αντιστρέψιμη αλλά και να καλύψουμε και την περίπτωση που η συνάρτηση αυτή δεν είναι αντιστρέψιμη.
Στο αλγόριθμό μας χρησιμοποιούμε μόνο την πολυωνυμική συνάρτηση $h(x)$ και τις παραγώγους της, οι οποίες μπορούν να υπολογιστούν πολύ εύκολα. Έτσι γίνεται άμεσα αντιληπτό ότι ο αλγόριθμός μας μπορεί να εφαρμοστεί σε όλες τις περιπτώσεις, χωρίς να μας ενδιαφέρει αν η μορφή και οι ιδιότητες της συνάρτησης $h(x)$.

Επίσης δίνουμε τύπους, με τους οποίους μπορούμε να βρούμε το πλήθος των ριζών μιας τέτοιας εξίσωσης. Φυσικά δίνουμε και χαρακτηριστικά παραδείγματα εφαρμογής της μεθόδου, που αναπτύξαμε καλύπτοντας όλες τις δυνατές περιπτώσεις.

2.1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

Πρόταση 1.
Αν M είναι μια τυχαία $\nu\times\nu$ μήτρα, J_M είναι η κανονική μορφή του Jordan της μήτρας αυτής, S_M είναι η μήτρα μετάβασης, δηλαδή είναι $M = S_M \cdot J_M \cdot S_M^{-1}$, και $f(x)$ είναι ένα πολυώνυμο, τότε είναι

i) $M^n = S_M \cdot {J_M}^n \cdot S_M^{-1}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ ii) $f(M) = S_M \cdot f(J_M) \cdot S_M^{-1}$

Απόδειξη

Η σχέση $M^n = S_M \cdot J_M{}^n \cdot S_M{}^{-1}$ αποδεικνύεται εύκολα με την μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής.

Αν τώρα είναι $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, τότε είναι

$$f(M) = a_n M^n + a_{n-1} M^{n-1} + ... + a_1 M + a_0 I_\nu$$

$$\Rightarrow f(M) = a_n S_M \cdot J_M{}^n \cdot S_M{}^{-1} + a_{n-1} S_M \cdot J_M{}^{n-1} \cdot S_M{}^{-1} + ... + a_1 S_M \cdot J_M \cdot S_M{}^{-1} + a_0 S_M \cdot I_\nu \cdot S_M{}^{-1}.$$

$$\Rightarrow f(M) = S_M \cdot \left(a_n J_M{}^n + a_{n-1} J_M{}^{n-1} + ... + a_1 J_M + a_0 I_\nu \right) \cdot S_M{}^{-1} \Rightarrow f(M) = S_M \cdot f(J_M) \cdot S_M{}^{-1}$$

Πρόταση 2.

Αν $\lambda \in \mathbb{C}$ και $M = \begin{bmatrix} \mathrm{Re}[\lambda] & \mathrm{Im}[\lambda] \\ -\mathrm{Im}[\lambda] & \mathrm{Re}[\lambda] \end{bmatrix}$, όπου $\mathrm{Re}[\lambda]$ και $\mathrm{Im}[\lambda]$ είναι το πραγματικό και φανταστικό μέρος του αριθμού λ αντίστοιχα, τότε είναι $M^k = \begin{bmatrix} \mathrm{Re}[\lambda^k] & \mathrm{Im}[\lambda^k] \\ -\mathrm{Im}[\lambda^k] & \mathrm{Re}[\lambda^k] \end{bmatrix}$, για κάθε $k \in \mathbb{N}^*$.

Απόδειξη

Η σχέση αποδεικνύεται με την μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής.

Πρόταση 3.

Αν $\lambda \in \mathbb{C}$ και $M = \begin{bmatrix} \mathrm{Re}[\lambda] & \mathrm{Im}[\lambda] \\ -\mathrm{Im}[\lambda] & \mathrm{Re}[\lambda] \end{bmatrix}$, όπου $\mathrm{Re}[\lambda]$ και $\mathrm{Im}[\lambda]$ είναι το πραγματικό και φανταστικό μέρος του αριθμού λ αντίστοιχα και $f(x)$ είναι ένα πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές, τότε είναι

$$f(M) = \begin{bmatrix} \mathrm{Re}[f(\lambda)] & \mathrm{Im}[f(\lambda)] \\ -\mathrm{Im}[f(\lambda)] & \mathrm{Re}[f(\lambda)] \end{bmatrix}.$$

Απόδειξη

Άμεση συνέπεια των προηγούμενων προτάσεων.

Πρόταση 4.

Αν

α) Το $q(x)$ είναι ένα πολυώνυμο $\nu - 1$ βαθμού.

β) Το $h(x)$ είναι ένα πολυώνυμο n βαθμού.

γ) Ισχύουν οι σχέσεις $q^{(k)}(x) = \left(\dfrac{1}{h^{(1)}(q(x))} \right)^{(k-1)}$, για κάθε $k = 1, 2, ..., \nu - 1$,

όπου με $q^{(k)}(x)$ συμβολίζουμε την k παράγωγο της συνάρτησης $q(x)$ ως προς x,

τότε είναι

i) $(hoq)^{(1)}(x) = 1$ και

ii) $(hoq)^{(k)}(x) = 0$, για κάθε $k = 2, 3, ..., \nu - 1$.

Απόδειξη

i) Από τον κανόνα παραγώγισης της σύνθεσης συναρτήσεων έχουμε

$\left(hoq\right)^{(1)}(x) = \left(h(q(x))\right)^{(1)} = h^{(1)}(q(x))q^{(1)}(x)$, αλλά είναι

$$q^{(1)}(x) = \left(\frac{1}{h^{(1)}(q(x))}\right)^{(0)} = \frac{1}{h^{(1)}(q(x))}, \text{ άρα}$$

$$\left(hoq\right)^{(1)}(x) = h^{(1)}(q(x))\frac{1}{h^{(1)}(q(x))} \Rightarrow \left(hoq\right)^{(1)}(x) = 1.$$

ii) Όμοια έχουμε

$$\left(hoq\right)^{(2)}(x) = \left(h(q(x))\right)^{(2)} = \left(\left(h(q(x))\right)^{(1)}\right)^{(1)}$$

$$\Rightarrow \left(hoq\right)^{(2)}(x) = \left(h^{(1)}(q(x)) \cdot q^{(1)}(x)\right)^{(1)}$$

$$\Rightarrow \left(hoq\right)^{(2)}(x) = h^{(2)}(q(x)) \cdot q^{(1)}(x)^2 + h^{(1)}(q(x)) \cdot q^{(2)}(x),$$

αλλά είναι

$$q^{(1)}(x) = \frac{1}{h^{(1)}(q(x))} \text{ και } q^{(2)}(x) = \left(\frac{1}{h^{(1)}(q(x))}\right)^{(1)} = -\frac{h^{(2)}(q(x))q^{(1)}(x)}{\left(h^{(1)}(q(x))\right)^2},$$

συνεπώς

$$\left(hoq\right)^{(2)}(x) = \frac{h^{(2)}(q(x))}{\left(h^{(1)}(q(x))\right)^2} - h^{(1)}(q(x)) \cdot \frac{h^{(2)}(q(x))q^{(1)}(x)}{\left(h^{(1)}(q(x))\right)^2}$$

$$\Rightarrow \left(hoq\right)^{(2)}(x) = \frac{h^{(2)}(q(x))}{\left(h^{(1)}(q(x))\right)^2} - \frac{h^{(2)}(q(x))}{\left(h^{(1)}(q(x))\right)^2}$$

$$\Rightarrow \left(hoq\right)^{(2)}(x) = 0.$$

Επειδή $\left(hoq\right)^{(2)}(x) = 0$ προκύπτει ότι θα είναι και $\left(hoq\right)^{(k)}(x) = 0$, για κάθε $k = 3, 4, ..., \nu - 1$.

Πρόταση 5.

Αν

α) Το $q(x)$ είναι ένα πολυώνυμο $\nu - 1$ βαθμού.

β) Το $h(x)$ είναι ένα πολυώνυμο n βαθμού.

γ) Ισχύουν οι σχέσεις

$$h(\rho) = \lambda,\ q(\lambda) = \rho,\ q^{(k)}(\lambda) = \left(\frac{1}{h^{(1)}(q(x))}\right)_{x=\lambda}^{(k-1)}, \text{ για κάθε } k = 1, 2, ..., \nu - 1,$$

τότε είναι,

i) $(hoq)(\lambda)=\lambda$,

ii) $(hoq)^{(1)}(\lambda)=1$ και

iii) $(hoq)^{(k)}(\lambda)=0$, $k=2,3,...,\nu-1$.

Απόδειξη

i) Είναι $(hoq)(\lambda)=h(q(\lambda))=h(\rho)=\lambda$.

ii) Είδαμε στην προηγούμενη πρόταση ότι ισχύει $(hoq)^{(1)}(x)=1$, συνεπώς είναι $(hoq)^{(1)}(\lambda)=1$.

iii) Είδαμε στην προηγούμενη προηγούμενη πρόταση ότι ισχύει $(hoq)^{(k)}(x)=0$, για κάθε $k=2,...,\nu-1$ συνεπώς θα είναι $(hoq)^{(k)}(\lambda)=0$, για κάθε $k=2,3,...,\nu-1$.

Πόρισμα

Η συνάρτηση hoq είναι η ταυτοτική συνάρτηση στο σύνολο $F=\{x\in\mathbb{C} / (q(x)=\rho)\wedge(h(\rho)=x)\}$, δηλαδή ισχύει $(hoq)(x)=x$, για κάθε $x\in F$.

2.2 ΜΕΛΕΤΗ ΚΑΙ ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΜΗΤΡΩΝ *n*-ΒΑΘΜΟΥ

1. Υπολογισμός των ριζών

Θεωρούμε την πολυωνυμική εξίσωση μητρών *n*-βαθμού $a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+...+a_1X+a_0I_\nu=A$, με $A,X\in M_\nu(K)$, $K=\mathbb{R}$ ή $K=\mathbb{C}$. Θεωρούμε το πολυώνυμο $h(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$. Συμβολίζουμε με $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\nu$ όλες τις ιδιοτιμές της μήτρας A.

Πρόταση

Αν $\rho_1,\rho_2,...,\rho_\nu$ πραγματικοί ή μιγαδικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις $h(\rho_i)=\lambda_i$, για κάθε $i=1,2,3,...,\nu$ και $q(x)$ είναι το πολυώνυμο που παρεμβάλεται στα δεδομένα (λ_i,ρ_i), για κάθε $i=1,2,3,...,\nu$ δηλαδή ισχύει $q(\lambda_i)=\rho_i$, τότε είναι $(hoq)(A)=A$.

Απόδειξη

Αν J_A είναι η κανονική μορφή του Jordan της μήτρας A, S_A είναι η μήτρα μετάβασης, δηλαδή είναι $A=S_A\cdot J_A\cdot S_A^{-1}$, τότε σύμφωνα με γνωστή πρόταση είναι

$$(hoq)(A)=(hoq)\left(S_A\cdot J_A\cdot S_A^{-1}\right)\Rightarrow(hoq)(A)=S_A\cdot(hoq)\left(J_A\right)\cdot S_A^{-1}\Rightarrow$$

$$(hoq)(A)=S_A\cdot diag[(hoq)(\lambda_1),(hoq)(\lambda_2),...,(hoq)(\lambda_\nu)]\cdot S_A^{-1}\Rightarrow$$

$$(hoq)(A)=S_A\cdot diag[h(q(\lambda_1)),h(q(\lambda_2)),...,h(q(\lambda_\nu))]\cdot S_A^{-1},$$

αλλά είναι $q(\lambda_i)=\rho_i$, για κάθε $i=1,2,3,...,\nu$ συνεπώς είναι

$(hoq)(A) = S_A \cdot diag[h(\rho_1), h(\rho_2), ..., h(\rho_\nu)] \cdot S_A^{-1}$,

επίσης είναι $h(\rho_i) = \lambda_i$, για κάθε $i = 1,2,3,...,\nu$ οπότε είναι

$(hoq)(A) = S_A \cdot diag[\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\nu] \cdot S_A^{-1} \Rightarrow$

$(hoq)(A) = S_A \cdot J_A \cdot S_A^{-1} \Rightarrow (hoq)(A) = A$.

Πόρισμα

Αν $q(x)$ είναι το πολυώνυμο παρεμβολής που ορίστηκε στη προηγούμενη πρόταση, τότε η μήτρα $B = q(A)$ είναι μια ρίζα της εξίσωσης $a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + ... + a_1 X + a_0 I_\nu = A$.

Απόδειξη

Είδαμε ότι ισχύει

$(hoq)(A) = A \Rightarrow h(q(A)) = A \Rightarrow h(B) = A \Rightarrow$

$a_n B^n + a_{n-1} B^{n-1} + ... + a_1 B + a_0 I_\nu = A$,

που σημαίνει ότι η μήτρα B είναι μια ρίζα της εξίσωσης

$a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + ... + a_1 X + a_0 I_\nu = A$.

Περίπτωση 1.

Πρόταση 1.

Αν

- όλες οι ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\nu$ της μήτρας A έχουν αλγεβρική πολλαπλότητα 1 και
- όλες οι εξισώσεις $h(x) = \lambda_i$, $i = 1,2,3,...,\nu$ έχουν n διαφορετικές ρίζες

τότε η εξίσωση $a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + ... + a_1 X + a_0 I_\nu = A$ έχει n^ν διαφορετικές ρίζες.

Απόδειξη

Υπάρχουν ν διαφορετικές εξισώσεις $h(x) = \lambda_i$, $i = 1,2,3,...,\nu$ με n διαφορετικές ρίζες η κάθε μια,συνεπώς σύμφωνα με την βασική αρχή απαρίθμισης θα υπάρχουν $m = n \cdot n \cdot ... \cdot n = n^\nu$ διαφορετικές ρίζες για την εξίσωση $a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + ... + a_1 X + a_0 I_\nu = A$.

Παράδειγμα.

Να λυθεί η εξίσωση $X^2 - 2X + 5I_3 = A$, όπου $X \in M_3(\mathbb{C})$ είναι η άγνωστη μήτρα και

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -3 & -1 \\ -5 & 8 & 5 \\ 3 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Λύση

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της μήτρας A είναι

$$p(x) = \begin{vmatrix} 6-x & -3 & -1 \\ -5 & 8-x & 5 \\ 3 & -3 & 2-x \end{vmatrix} \Rightarrow p(x) = -(x-3)(x-5)(x-8) .$$

Συνεπώς οι ιδιοτιμές της μήτρας A είναι οι πραγματικοί αριθμοί $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 5$, $\lambda_3 = 8$.

Και οι τρεις ιδιοτιμές έχουν αλγεβρική πολλαπλότητα 1, συνεπώς η μήτρα A είναι απλή.

Επίσης η μήτρα A είναι μήτρα 3×3, άρα είναι $\nu = 3$.

Θέτουμε $h(x) = x^2 - 2x + 5$, το πολυώνυμο αυτό είναι δευτέρου βαθμού συνεπώς είναι $\nu = 2$.

Θεωρούμε τις εξισώσεις $h(x) = \lambda_1$, $h(x) = \lambda_2$ και $h(x) = \lambda_3$.

Είναι

$h(x) = \lambda_1 \Leftrightarrow h(x) = 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 5 = 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 - i$ ή $x = 1 + i$ (απλές).

Είναι

$h(x) = \lambda_2 \Leftrightarrow h(x) = 5 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 5 = 5 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 2$ (απλές).

Είναι

$h(x) = \lambda_3 \Leftrightarrow h(x) = 8 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 5 = 8 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ή $x = 3$ (απλές).

Συνεπώς προκύπτουν τα επόμενα δεδομένα $\begin{bmatrix} \lambda_1 = 3, & \rho_{11} = 1-i, & \rho_{12} = 1+i \\ \lambda_2 = 5, & \rho_{21} = 0, & \rho_{22} = 2 \\ \lambda_3 = 8 & \rho_{31} = -1, & \rho_{32} = 3 \end{bmatrix}$.

Από τα παραπάνω στοιχεία προκύπτουν οι επόμενες οκτώ περιπτώσεις δεδομένων παρεμβολής

$d_1 = \{(3,1-i),(5,0),(8,-1)\}$	$d_2 = \{(3,1-i),(5,0),(8,3)\}$
$d_3 = \{(3,1-i),(5,2),(8,-1)\}$	$d_4 = \{(3,1-i),(5,2),(8,3)\}$
$d_5 = \{(3,1+i),(5,0),(8,-1)\}$	$d_6 = \{(3,1+i),(5,0),(8,3)\}$
$d_7 = \{(3,1+i),(5,2),(8,-1)\}$	$d_8 = \{(3,1+i),(5,2),(8,3)\}$

i) Για τα δεδομένα $d_1 = \{(3,1-i),(5,0),(8,-1)\}$, προκύπτει ο πίνακας

x_i	$q(x_i)$
3	$1-i$
5	0
8	-1

Θα αναζητήσουμε το απλούστερο πολυώνυμο $q(x)$ που παρεμβάλεται στα στοιχεία αυτά.

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο των διαιρεμένων διαφορών προκύπτει ότι

$$q(x) = \frac{1}{30}\left[(1-3i)x^2 + (23-39i)x + (90-120i) \right].$$

Συνεπώς η μήτρα $B_1 = q(A)$

$$\Rightarrow B_1 = \frac{1}{30}\left[(1-3i)A^2 + (23-39i)A + (90-120i)I_3\right]$$

$$\Rightarrow B_1 = \begin{bmatrix} -i & 1 & i \\ 2-i & -1 & -2+i \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

είναι μια λύση της δοθείσας εξίσωσης.

ii) Για τα δεδομένα $d_2 = \{(3,1-i),(5,0),(8,3)\}$, προκύπτει ο πίνακας

x_i	$q(x_i)$
3	$1-i$
5	0
8	3

Θα αναζητήσουμε το απλούστερο πολυώνυμο $q(x)$ που παρεμβάλεται στα στοιχεία αυτά.

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο των διαιρεμένων διαφορών προκύπτει ότι

$$q(x) = \frac{1}{10}\left[(3-i)x^2 + (29-13i)x + (70-40i)\right].$$

Συνεπώς η μήτρα $B_2 = q(A) \Rightarrow$

$$B_2 = \frac{1}{10}\left[(3-i)A^2 + (29-13i)A + (70-40i)I_3\right] \Rightarrow B_2 = \begin{bmatrix} 4-i & -3 & -4+i \\ -2-i & 3 & 2+i \\ 3 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

είναι μια λύση της δοθείσας εξίσωσης.

iii) Για τα δεδομένα $d_3 = \{(3,1-i),(5,2),(8,-1)\}$, $d_2 = \{(3,1-i),(5,0),(8,3)\}$, προκύπτει ο πίνακας

x_i	$q(x_i)$
3	$1-i$
5	2
8	-1

Θα αναζητήσουμε το απλούστερο πολυώνυμο $q(x)$ που παρεμβάλεται στα στοιχεία αυτά.

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο των διαιρεμένων διαφορών προκύπτει ότι

$$q(x) = \frac{1}{10}\left[-(3+i)x^2 + (29+13i)x + (-50-40i)\right].$$

Συνεπώς η μήτρα $B_3 = q(A) \Rightarrow$

$$B_3 = \frac{1}{10}\left[-(3+i)A^2 + (29+13i)A + (-50-40i)I_3\right] \Rightarrow$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} -2-i & 3 & 4+i \\ 2-i & -1 & -2+i \\ -3 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$ είναι μια λύση της δοθείσας εξίσωσης.

iv) Για τα δεδομένα $d_4 = \{(3,1-i),(5,2),(8,3)\}$, προκύπτει ο πίνακας

x_i	$q(x_i)$
3	$1-i$
5	2
8	3

Θα αναζητήσουμε το απλούστερο πολυώνυμο $q(x)$ που παρεμβάλεται στα στοιχεία αυτά.

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο των διαιρεμένων διαφορών προκύπτει ότι

$$q(x) = \frac{1}{30}\left[-(1+i)x^2 + (23+13i)x + (-10-40i)\right].$$

Συνεπώς η μήτρα $B_4 = q(A) \Rightarrow$

$$B_4 = \frac{1}{30}\left[-(1+i)A^2 + (23+13i)A + (-10-40i)I_3\right] \Rightarrow$$

$$B_4 = \begin{bmatrix} 2-i & -1 & i \\ -2-i & 3 & 2+i \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$ είναι μια λύση της δοθείσας εξίσωσης.

v) Για τα δεδομένα $d_5 = \{(3,1+i),(5,0),(8,-1)\}$, προκύπτει ο πίνακας

x_i	$q(x_i)$
3	$1+i$
5	0
8	-1

Θα αναζητήσουμε το απλούστερο πολυώνυμο $q(x)$ που παρεμβάλεται στα στοιχεία αυτά.

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο των διαιρεμένων διαφορών προκύπτει ότι

$$q(x) = \frac{1}{30}\left[(1+3i)x^2 + (-23-39i)x + (90+120i)\right].$$

Συνεπώς η μήτρα $B_5 = q(A) \Rightarrow$

$$B_5 = \frac{1}{30}\left[(1+3i)A^2 + (-23-39i)A + (90+120i)I_3\right] \Rightarrow$$

$$B_5 = \begin{bmatrix} i & 1 & -i \\ 2+i & -1 & -2-i \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$ είναι μια λύση της δοθείσας εξίσωσης.

vi) Για τα δεδομένα $d_6 = \{(3,1+i),(5,0),(8,3)\}$, προκύπτει ο πίνακας

x_i	$q(x_i)$
3	$1+i$
5	0
8	3

Θα αναζητήσουμε το απλούστερο πολυώνυμο $q(x)$ που παρεμβάλεται στα στοιχεία αυτά.

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο των διαιρεμένων διαφορών προκύπτει ότι

$$q(x) = \frac{1}{10}\left[(3+i)x^2 + (-29-13i)x + (70+40i)\right].$$

Συνεπώς η μήτρα $B_6 = q(A) \Rightarrow$

$$B_6 = \frac{1}{10}\left[(3+i)A^2 + (-29-13i)A + (70+40i)I_3\right] \Rightarrow$$

$$B_6 = \begin{bmatrix} 4+i & -3 & -4-i \\ -2+i & 3 & 2-i \\ 3 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$ είναι μια λύση της δοθείσας εξίσωσης.

vii) Για τα δεδομένα $d_7 = \{(3,1+i),(5,2),(8,-1)\}$, προκύπτει ο πίνακας

x_i	$q(x_i)$
3	$1+i$
5	2
8	-1

Θα αναζητήσουμε το απλούστερο πολυώνυμο $q(x)$ που παρεμβάλεται στα στοιχεία αυτά.

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο των διαιρεμένων διαφορών προκύπτει ότι

$$q(x) = \frac{1}{10}\left[(3-i)x^2 + (29-13i)x + (-50+40i)\right].$$

Συνεπώς η μήτρα $B_7 = q(A) \Rightarrow$

$$B_7 = \frac{1}{10}\left[(3-i)A^2 + (29-13i)A + (-50+40i)I_3\right] \Rightarrow$$

$$B_7 = \begin{bmatrix} -2+i & 3 & 4-i \\ 2+i & -1 & -2-i \\ -3 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$ είναι μια λύση της δοθείσας εξίσωσης.

viii) Για τα δεδομένα $d_8 = \{(3,1+i),(5,2),(8,3)\}$, προκύπτει ο πίνακας

x_i	$q(x_i)$
3	$1+i$

5	2
8	3

Θα αναζητήσουμε το απλούστερο πολυώνυμο $q(x)$ που παρεμβάλεται στα στοιχεία αυτά.

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο των διαιρεμένων διαφορών προκύπτει ότι

$$q(x)=\frac{1}{30}\left[(-1-3i)x^2+(23-39i)x+(-30+120i)\right].$$

Συνεπώς η μήτρα $B_8=q(A)\Rightarrow$

$$B_8=\frac{1}{30}\left[(-1-3i)A^2+(23-39i)A+(-30+120i)I_3\right]\Rightarrow$$

$B_8=\begin{bmatrix} 2+i & -1 & -i \\ -2+i & 3 & 2-i \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ είναι μια λύση της δοθείσας εξίσωσης.

Περίπτωση 2.

Πρόταση 2.

Αν

- όλες οι ιδιοτιμές $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\nu$ της μήτρας A έχουν αλγεβρική πολλαπλότητα 1 και
- οι εξισώσεις $h(x)=\lambda_i$, $i=1,2,3,...,\nu$ έχουν m_i διαφορετικές ρίζες $\rho_{i1},\rho_{i2},...,\rho_{im_i}$ και κάθε μια από αυτές έχει αλγεβρική πολλαπλότητα $a_{i1},a_{i2},...,a_{im_i}$

τότε

α) Η εξίσωση $a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+...+a_1X+a_0I_\nu=A$ έχει $m=m_1\cdot m_2\cdot ...\cdot m_\nu$ διαφορετικές ρίζες.

β) Κάθε μια από τις m διαφορετικές ρίζες έχει αλγεβρική πολλαπλότητα ίση με το γινόμενο των αλγεβρικών πολλαπλοτήτων των ριζών των εξισώσεων $h(x)=\lambda_i$, $i=1,2,3,...,\nu$ που περιέχονται στα δεδομένα της αριθμητικής παρεμβολής.

Κάθε μια από τις m διαφορετικές ρίζες έχει αλγεβρική πολλαπλότητα ίση με το γινόμενο των αλγεβρικών πολλαπλοτήτων των δεδομένων που χρησιμοποιήθηκαν στη διαδικασία της αριθμητικής παρεμβολής.

Παράδειγμα

Να λυθεί η εξίσωση $X^2-4X+3I_3=A$, όπου $X\in M_3(\mathbb{C})$ είναι η άγνωστη μήτρα και

$$A=\begin{bmatrix} 12 & -4 & -13 \\ 5 & 3 & -5 \\ 4 & -4 & -5 \end{bmatrix}.$$

Λύση

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της μήτρας A είναι $p(x)=\begin{vmatrix} 12-x & -4 & -13 \\ 5 & 3-x & -5 \\ 4 & -4 & -5-x \end{vmatrix} \Rightarrow$

$p(x)=-(x+1)(x-3)(x-8)$.

Συνεπώς οι ιδιοτιμές της μήτρας A είναι οι πραγματικοί αριθμοί $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=3$, $\lambda_3=8$.

Και οι τρεις ιδιοτιμές έχουν αλγεβρική πολλαπλότητα 1, συνεπώς η μήτρα A είναι απλή.

Επίσης η μήτρα A είναι μήτρα 3×3, άρα είναι $\nu=3$.

Θέτουμε $h(x)=x^2-4x+3$, το πολυώνυμο αυτό είναι δευτέρου βαθμού συνεπώς είναι $\nu=2$.

Θεωρούμε τις εξισώσεις $h(x)=\lambda_1$, $h(x)=\lambda_2$ και $h(x)=\lambda_3$.

Είναι $h(x)=\lambda_1 \Leftrightarrow h(x)=-1 \Leftrightarrow x^2-4x+3=-1 \Leftrightarrow x^2-4x+4=0 \Leftrightarrow x=2=\rho_{11}$ (διπλή $a_{11}=2$).

Είναι $h(x)=\lambda_2 \Leftrightarrow h(x)=3 \Leftrightarrow x^2-4x+3=3 \Leftrightarrow x^2-4x=0 \Leftrightarrow x=0=\rho_{21}$ (απλή $a_{21}=1$) ή

$x=4=\rho_{22}$ (απλή $a_{22}=1$).

Είναι $h(x)=\lambda_3 \Leftrightarrow h(x)=8 \Leftrightarrow x^2-4x+3=8 \Leftrightarrow x^2-4x-5=0 \Leftrightarrow x=-1=\rho_{31}$ (απλή $a_{31}=1$) ή

$x=5=\rho_{32}$ (απλή $a_{32}=1$).

Συνεπώς προκύπτουν τα επόμενα δεδομένα $\begin{bmatrix} \lambda_1=-1, & \rho_{11}=2, & \rho_{12}=2 \\ \lambda_2=3, & \rho_{21}=0, & \rho_{22}=4 \\ \lambda_3=8 & \rho_{31}=-1, & \rho_{32}=5 \end{bmatrix}$.

Από τα παραπάνω στοιχεία προκύπτουν οι επόμενες οκτώ περιπτώσεις δεδομένων παρεμβολής

$d_1=\{(-1,2),(3,0),(8,-1)\}$	$d_2=\{(-1,2),(3,0),(8,5)\}$
$d_3=\{(-1,2),(3,4),(8,-1)\}$	$d_4=\{(-1,2),(3,4),(8,5)\}$
$d_5=\{(-1,2),(3,0),(8,-1)\}$	$d_6=\{(-1,2),(3,0),(8,5)\}$
$d_7=\{(-1,2),(3,4),(8,-1)\}$	$d_8=\{(-1,2),(3,4),(8,5)\}$

Επειδή είναι $\rho_{11}=\rho_{12}=2$ προκύπτει ότι υπάρχουν μόνο τέσσερεις περιπτώσεις με διαφορετικά δεδομένα παρεμβολής και αυτές είναι

$d_1=\{(-1,2),(3,0),(8,-1)\}$	$d_2=\{(-1,2),(3,0),(8,5)\}$
$d_3=\{(-1,2),(3,4),(8,-1)\}$	$d_4=\{(-1,2),(3,4),(8,5)\}$

i) Για τα δεδομένα $d_1=\{(-1,2),(3,0),(8,-1)\}$, θα αναζητήσουμε το απλούστερο πολυώνυμο $q(x)$ που παρεμβάλεται στα στοιχεία αυτά, δηλαδή ισχύει $q(-1)=2$, $q(3)=0$, $q(8)=-1$.

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο των διαιρεμένων διαφορών προκύπτει ότι $q(x)=\frac{1}{30}\left(x^2-17x+42\right)$.

Συνεπώς η μήτρα $B_1 = q(A) \Rightarrow B_1 = \frac{1}{30}\left(A^2 - 17A + 42I_3\right) \Rightarrow B_1 = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ είναι μια λύση της

δοθείσας εξίσωσης. Ο βαθμός πολλαπλότητας της λύσης αυτής φαίνεται στον επόμενο πίνακα

$\lambda_1 = -1$ με $a_1 = 1$	$\lambda_2 = 3$ με $a_2 = 1$	$\lambda_3 = 3$ με $a_3 = 1$
$\rho_{11} = 2$ με $a_{11} = 2$	$\rho_{21} = 0$ με $a_{21} = 1$	$\rho_{31} = -1$ με $a_{31} = 1$
$a_1 \cdot a_{11} = 2$	$a_2 \cdot a_{21} = 1$	$a_3 \cdot a_{31} = 1$
Ο βαθμός πολλαπλότητας της λύσης B_1 είναι $2 \cdot 1 \cdot 1 = 2$		

ii) Για τα δεδομένα $d_2 = \{(-1,2),(3,0),(8,5)\}$, θα αναζητήσουμε το απλούστερο πολυώνυμο $q(x)$ που παρεμβάλεται στα στοιχεία αυτά, δηλαδή ισχύει $q(-1) = 2$, $q(3) = 0$, $q(8) = 5$.

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο των διαιρεμένων διαφορών προκύπτει ότι $q(x) = \frac{1}{6}\left(x^2 - 5x + 6\right)$.

Συνεπώς η μήτρα $B_2 = q(A) \Rightarrow B_2 = \frac{1}{6}\left(A^2 - 5A + 6I_3\right) \Rightarrow B_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 5 & 0 & -5 \\ -2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ είναι μια λύση της

δοθείσας εξίσωσης. . Ο βαθμός πολλαπλότητας της λύσης αυτής φαίνεται στον επόμενο πίνακα

$\lambda_1 = -1$ με $a_1 = 1$	$\lambda_2 = 3$ με $a_2 = 1$	$\lambda_3 = 3$ με $a_3 = 1$
$\rho_{11} = 2$ με $a_{11} = 2$	$\rho_{21} = 0$ με $a_{21} = 1$	$\rho_{32} = 5$ με $a_{32} = 1$
$a_1 \cdot a_{11} = 2$	$a_2 \cdot a_{21} = 1$	$a_3 \cdot a_{32} = 1$
Ο βαθμός πολλαπλότητας της λύσης B_2 είναι $2 \cdot 1 \cdot 1 = 2$		

iii) Για τα δεδομένα $d_3 = \{(-1,2),(3,4),(8,-1)\}$, θα αναζητήσουμε το απλούστερο πολυώνυμο $q(x)$ που παρεμβάλεται στα στοιχεία αυτά, δηλαδή ισχύει $q(-1) = 2$, $q(3) = 4$, $q(8) = -1$.

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο των διαιρεμένων διαφορών προκύπτει ότι $q(x) = \frac{1}{6}\left(-x^2 + 5x + 18\right)$.

Συνεπώς η μήτρα $B_3 = q(A) \Rightarrow B_3 = \frac{1}{6}\left(-A^2 + 5A + 18I_3\right) \Rightarrow B_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -5 & 4 & 5 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ είναι μια λύση της

δοθείσας εξίσωσης. . Ο βαθμός πολλαπλότητας της λύσης αυτής φαίνεται στον επόμενο πίνακα

$\lambda_1 = -1$ με $a_1 = 1$	$\lambda_2 = 3$ με $a_2 = 1$	$\lambda_3 = 3$ με $a_3 = 1$
$\rho_{11} = 2$ με $a_{11} = 2$	$\rho_{22} = 4$ με $a_{22} = 1$	$\rho_{31} = -1$ με $a_{31} = 1$
$a_1 \cdot a_{11} = 2$	$a_2 \cdot a_{22} = 1$	$a_3 \cdot a_{31} = 1$
Ο βαθμός πολλαπλότητας της λύσης B_3 είναι $2 \cdot 1 \cdot 1 = 2$		

iv) Για τα δεδομένα $d_4 = \{(-1,2),(3,4),(8,5)\}$, θα αναζητήσουμε το απλούστερο πολυώνυμο $q(x)$ που παρεμβάλεται στα στοιχεία αυτά, δηλαδή ισχύει $q(-1)=2$, $q(3)=4$, $q(8)=5$.

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο των διαιρεμένων διαφορών προκύπτει ότι $q(x) = \frac{1}{30}\left(-x^2+17x+78\right)$.

Συνεπώς η μήτρα $B_4 = q(A) \Rightarrow B_4 = \frac{1}{30}\left(-A^2+17A+78I_3\right) \Rightarrow B_4 = \begin{bmatrix} 7 & -2 & -5 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ είναι μια λύση της δοθείσας εξίσωσης. . Ο βαθμός πολλαπλότητας της λύσης αυτής φαίνεται στον επόμενο πίνακα

$\lambda_1 = -1$ με $a_1 = 1$	$\lambda_2 = 3$ με $a_2 = 1$	$\lambda_3 = 3$ με $a_3 = 1$
$\rho_{11} = 2$ με $a_{11} = 2$	$\rho_{22} = 0$ με $a_{22} = 1$	$\rho_{32} = -1$ με $a_{32} = 1$
$a_1 \cdot a_{11} = 2$	$a_2 \cdot a_{22} = 1$	$a_3 \cdot a_{32} = 1$
Ο βαθμός πολλαπλότητας της λύσης B_2 είναι $2\cdot 1\cdot 1 = 2$		

Όλες οι παραπάνω λύσεις είναι διπλές. Συνεπώς η δοθείσα εξίσωση έχει τέσσερεις διπλές λύσεις τις

$$B_1 = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 4 \end{bmatrix},\ B_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 5 & 0 & -5 \\ -2 & 2 & 4 \end{bmatrix},\ B_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -5 & 4 & 5 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix},\ B_4 = \begin{bmatrix} 7 & -2 & -5 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Περίπτωση 3.

Πρόταση 3α.

Αν

- η μήτρα A δεν είναι απλή
- $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s$ είναι οι διαφορετικές μεταξύ τους ανά δύο ιδιοτιμές της μήτρας με αλγεβρικές πολλαπλότητες $a_1, a_2, ..., a_s$, αντίστοιχα.
- ρ_i αριθμοί τέτοιοι ώστε $h(\rho_i) = \lambda_i$, $i = 1,2,3,...,s$
- $q(x)$ είναι το πολυώνυμο παρεμβολής στα δεδομένα

$$\left(\lambda_i, \left(\rho_i, \left(\frac{1}{h^{(1)}(x)}\right)_{x=q(\lambda_i)}, \left(\frac{1}{h^{(1)}(x)}\right)^{(1)}_{x=q(\lambda_i)}, \left(\frac{1}{h^{(1)}(x)}\right)^{(2)}_{x=q(\lambda_i)}, ..., \left(\frac{1}{h^{(1)}(x)}\right)^{(a_i-2)}_{x=q(\lambda_i)}\right)\right),\ i = 1,2,3,...,s$$

τότε είναι $(hoq)(A) = A$.

Απόδειξη

Η Jordan κανονική μορφή της μήτρας A είναι $J_A = diag\left[\lambda_1 I_{\gamma_1 - 1}, J_{d_1}, ..., \lambda_i I_{\gamma_i - 1}, J_{d_i}, ..., \lambda_s I_{\gamma_s - 1}, J_{d_s}\right]$, όπου

Οι μήτρες J_{d_i} είναι $d_i \times d_i$ μήτρες της μορφής $J_{d_i} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & ... & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & ... & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & ... & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & ... & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$

Είναι $A = S_A \cdot J_A \cdot S_A^{-1}$ άρα είναι

$$(hoq)(A) = (hoq)\left(S_A \cdot J_A \cdot S_A^{-1}\right) \Rightarrow \ (hoq)(A) = S_A \cdot (hoq)\left(J_A\right) \cdot S_A^{-1} \Rightarrow$$

$$(hoq)(A) = S_A \cdot diag\left[(hoq)(\lambda_1 I_{\gamma_1 - 1}),(hoq)(J_{d_1}),...,(hoq)(\lambda_i I_{\gamma_i - 1}),(hoq)(J_{d_i}),...,(hoq)(\lambda_s I_{\gamma_s - 1}),(hoq)(J_{d_s})\right] \cdot S_A^{-1}$$

Αλλά είναι $(hoq)(\lambda_s I_{\gamma_s - 1}) = (hoq)(\lambda_s) \cdot I_{\gamma_s - 1}$, άρα

$$(hoq)(A) = S_A diag\left[(hoq)(\lambda_1) I_{\gamma_1 - 1},(hoq)(J_{d_1}),...,(hoq)(\lambda_i) I_{\gamma_i - 1},(hoq)(J_{d_i}),...,(hoq)(\lambda_s) I_{\gamma_s - 1},(hoq)(J_{d_s})\right] S_A^{-1}$$

Επίσης είδαμε ότι είναι $(hoq)(\lambda_i) = \lambda_i$, συνεπώς

$$(hoq)(A) = S_A \cdot diag\left[\lambda_1 I_{\gamma_1 - 1},(hoq)(J_{d_1}),...,\lambda_i I_{\gamma_i - 1},(hoq)(J_{d_i}),...,\lambda_s I_{\gamma_s - 1},(hoq)(J_{d_s})\right] \cdot S_A^{-1}$$

Αλλά είναι $(hoq)(J_{d_i}) = J_{d_i}$, $i = 1,2,...,s$ οπότε

$$(hoq)(A) = S_A \cdot diag\left[\lambda_1 I_{\gamma_1 - 1}, J_{d_1},...,\lambda_i I_{\gamma_i - 1}, J_{d_i},...,\lambda_s I_{\gamma_s - 1}, J_{d_s}\right] \cdot S_A^{-1} \Rightarrow (hoq)(A) = A.$$

Πόρισμα

Αν $q(x)$ είναι το πολυώνυμο παρεμβολής που ορίστηκε στη προηγούμενη πρόταση, τότε η μήτρα $B = q(A)$ είναι μια ρίζα της εξίσωσης $a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + ... + a_1 X + a_0 I_\nu = A$.

Απόδειξη

Είδαμε ότι ισχύει $(hoq)(A) = A \Rightarrow h(q(A)) = A \Rightarrow h(B) = A \Rightarrow a_n B^n + a_{n-1} B^{n-1} + ... + a_1 B + a_0 I_\nu = A$,

που σημαίνει ότι η μήτρα B είναι μια ρίζα της εξίσωσης $a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + ... + a_1 X + a_0 I_\nu = A$.

Πρόταση 3β.

Αν

- υπάρχει τουλάχιστον μια ιδιοτιμή λ_i της μήτρας A η οποία έχει αλγεβρική πολλαπλότητα μεγαλύτερη του 1.
- οι εξισώσεις $h(x) = \lambda_i$, $i = 1,2,3,...,s$ έχουν m_i διαφορετικές ρίζες $\rho_{i1}, \rho_{i2}, ..., \rho_{im_i}$ και κάθε μια από αυτές έχει αλγεβρική πολλαπλότητα $a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{im_i}$

τότε

α) Η εξίσωση $a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + ... + a_1 X + a_0 I_\nu = A$ έχει τουλάχιστον $m = m_1 \cdot m_2 \cdot ... \cdot m_\nu$ διαφορετικές ρίζες.

β) Κάθε μια από τις m διαφορετικές ρίζες έχει αλγεβρική πολλαπλότητα ίση με το γινόμενο των αλγεβρικών πολλαπλοτήτων των δεδομένων που χρησιμοποιήθηκαν στη διαδικασία της αριθμητικής παρεμβολής.

Παράδειγμα 1.

Να λυθεί η εξίσωση $X^2 = A$, όπου $X \in M_2(\mathbb{C})$ είναι η άγνωστη μήτρα και $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$.

Λύση

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της μήτρας A είναι $p(x) = (x-4)^2$.

Συνεπώς η μήτρα A έχει μια ιδιοτιμή $\lambda_1 = 4$ (διπλή $a_1 = 2$).

Θέτουμε $h(x) = x^2$ και θεωρούμε την εξίσωση $h(x) = \lambda_1 \Leftrightarrow \rho_1 = 2$ (απλή $a_{11} = 1$) ή $\rho_2 = -2$ (απλή $a_{12} = 1$)

Είναι $h^{(1)}(x) = 2x$.

Συνεπώς προκύπτουν τα επόμενα δεδομένα παρεμβολής

i) $\left\{4, \left(2, \dfrac{1}{h^{(1)}(q(4))}\right)\right\}$ που σημαίνει ότι $q(4) = 2$ και $q^{(1)}(4) = \dfrac{1}{h^{(1)}(q(4))} = \dfrac{1}{h^{(1)}(2)} = \dfrac{1}{4}$, άρα έχουμε τα δεδομένα παρεμβολής $q(4) = 2$ και $q^{(1)}(4) = \dfrac{1}{4}$. Εφαρμόζοντας την μέθοδο των διαιρεμένων διαφορών του Hermite προκύπτει ότι το πολυώνυμο παρεμβολής είναι το $q(x) = \dfrac{1}{4}x + 1$, οπότε η μήτρα

$B_1 = \dfrac{1}{4}A + I_2 \Rightarrow B_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ είναι μια λύση της δοθείσας εξίσωσης.

Ο βαθμός πολλαπλότητας της λύσης αυτής φαίνεται στον επόμενο πίνακα

$\lambda_1 = 4$ με $a_1 = 2$
$\rho_{11} = 2$ με $a_{11} = 1$
$a_1 \cdot a_{11} = 2$
Ο βαθμός πολλαπλότητας της λύσης B_1 είναι $2 \cdot 1 = 2$

ii) $\left\{4, \left(-2, \dfrac{1}{h^{(1)}(q(4))}\right)\right\}$, που σημαίνει ότι $q(4) = -2$ και $q^{(1)}(4) = \dfrac{1}{h^{(1)}(q(4))} = \dfrac{1}{h^{(1)}(-2)} = -\dfrac{1}{4}$, άρα έχουμε τα δεδομένα παρεμβολής $q(4) = -2$ και $q^{(1)}(4) = -\dfrac{1}{4}$.

Εφαρμόζοντας την μέθοδο των διαιρεμένων διαφορών του Hermite προκύπτει ότι το πολυώνυμο παρεμβολής είναι το $q(x) = -\dfrac{1}{4}x - 1$, οπότε η μήτρα

$B_2 = -\dfrac{1}{4}A - I_2 \Rightarrow B_2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ είναι μια λύση της δοθείσας εξίσωσης.

Ο βαθμός πολλαπλότητας της λύσης αυτής φαίνεται στον επόμενο πίνακα

$\lambda_1 = 4$ με $a_1 = 2$
$\rho_{12} = -2$ με $a_{12} = 1$
$a_1 \cdot a_{12} = 2$
Ο βαθμός πολλαπλότητας της λύσης B_2 είναι $2 \cdot 1 = 2$

Όπως είδαμε η εξίσωση ενδεχομένως έχει και άλλες λύσεις. Πράγματι στην περίπτωση αυτή και όλοι οι πίνακες $\begin{bmatrix} 2 & a \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} -2 & a \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $a \in \mathbb{C}$ είναι λύσεις της δοθείσας εξίσωσης.

Παράδειγμα 2.

Να λυθεί η εξίσωση $X^2 - 2X - I_4 = A$, όπου $X \in M_4(\mathbb{C})$ είναι η άγνωστη μήτρα και

$$A = \begin{bmatrix} -10 & -3 & 9 & -3 \\ -27 & -4 & 21 & -9 \\ -27 & -6 & 23 & -9 \\ -18 & -3 & 15 & -7 \end{bmatrix}.$$

Λύση

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της μήτρας A είναι $p(x) = \begin{vmatrix} -10-x & -3 & 9 & -3 \\ -27 & -4-x & 21 & -9 \\ -27 & -6 & 23-x & -9 \\ -18 & -3 & 15 & -7-x \end{vmatrix} \Rightarrow$

$p(x) = (x+1)^2(x-2)^2$.

Συνεπώς η μήτρα A έχει δύο ιδιοτιμές $\lambda_1 = -1$ (διπλή $a_1 = 2$), $\lambda_2 = 2$ (διπλή $a_2 = 2$).

Θέτουμε $h(x) = x^2 - 2x - 1$ και θεωρούμε τις εξισώσεις

α) $h(x) = \lambda_1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = -1 \Leftrightarrow \rho_{11} = 0$ (απλή $a_{11} = 1$) ή $\rho_{12} = 2$ (απλή $a_{12} = 1$)

β) $h(x) = \lambda_2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 2 \Leftrightarrow \rho_{21} = -1$ (απλή $a_{21} = 1$) ή $\rho_{22} = 3$ (απλή $a_{22} = 1$)

Είναι $h^{(1)}(x) = 2x - 2$.

Συνεπώς προκύπτουν τα επόμενα δεδομένα παρεμβολής

i) $\left\{ \left(\lambda_1, \left(\rho_{11}, \left(\frac{1}{h^{(1)}(x)} \right)_{x=q(\lambda_1)} \right) \right), \left(\lambda_2, \left(\rho_{21}, \left(\frac{1}{h^{(1)}(x)} \right)_{x=q(\lambda_2)} \right) \right) \right\}$.

Είναι $\lambda_1 = -1$, $\rho_{11} = 0 = q(-1)$,

$$\left(\frac{1}{h^{(1)}(x)} \right)_{x=q(\lambda_1)} = \frac{1}{h^{(1)}(q(\lambda_1))} = \frac{1}{h^{(1)}(0)} = \frac{1}{2 \cdot 0 - 2} = -\frac{1}{2} = q^{(1)}(-1).$$

Επίσης είναι $\lambda_2 = 2$, $\rho_{21} = -1 = q(2)$,

$$\left(\frac{1}{h^{(1)}(x)}\right)_{x=q(\lambda_2)} = \frac{1}{h^{(1)}(q(\lambda_2))} = \frac{1}{h^{(1)}(-1)} = \frac{1}{2\cdot(-1)-2} = -\frac{1}{4} = q^{(1)}(2).$$

Συνεπώς έχουμε τα δεδομένα παρεμβολής

x_i	$q(x_i)$	$q^{(1)}(x_i)$
-1	0	$-\frac{1}{2}$
2	-1	$-\frac{1}{4}$

Εφαρμόζοντας την μέθοδο των διαιρεμένων διαφορών του Hermite προκύπτει ότι το πολυώνυμο

παρεμβολής είναι το $q(x) = \frac{1}{108}\left(-x^3 + 6x^2 - 39x - 46\right)$, οπότε η μήτρα

$$B_1 = \frac{1}{108}\left(-A^3 + 6A^2 - 39A - 46I_4\right) \Rightarrow$$

$B_1 = \begin{bmatrix} 11 & 3 & -9 & 3 \\ 27 & 5 & -21 & 9 \\ 27 & 6 & -22 & 9 \\ 18 & 3 & -15 & 8 \end{bmatrix}$ είναι μια λύση της δοθείσας εξίσωσης.

Ο βαθμός πολλαπλότητας της λύσης αυτής φαίνεται στον επόμενο πίνακα

$\lambda_1 = -1$ με $a_1 = 2$	$\lambda_2 = 2$ με $a_2 = 2$
$\rho_{11} = 0$ με $a_{11} = 1$	$\rho_{21} = 2$ με $a_{21} = 1$
$a_1 \cdot a_{11} = 2$	$a_2 \cdot a_{21} = 2$
Ο βαθμός πολλαπλότητας της λύσης B_1 είναι $2\cdot 2 = 4$	

ii) $\left\{\left(\lambda_1, \left(\rho_{11}, \left(\frac{1}{h^{(1)}(x)}\right)_{x=q(\lambda_1)}\right)\right), \left(\lambda_2, \left(\rho_{22}, \left(\frac{1}{h^{(1)}(x)}\right)_{x=q(\lambda_2)}\right)\right)\right\}$.

Είναι $\lambda_1 = -1$, $\rho_{11} = 0 = q(-1)$,

$$\left(\frac{1}{h^{(1)}(x)}\right)_{x=q(\lambda_1)} = \frac{1}{h^{(1)}(q(\lambda_1))} = \frac{1}{h^{(1)}(0)} = \frac{1}{2\cdot 0-2} = -\frac{1}{2} = q^{(1)}(-1).$$

Επίσης είναι $\lambda_2 = 2$, $\rho_{22} = 3 = q(2)$,

$$\left(\frac{1}{h^{(1)}(x)}\right)_{x=q(\lambda_2)} = \frac{1}{h^{(1)}(q(\lambda_2))} = \frac{1}{h^{(1)}(3)} = \frac{1}{2\cdot 3-2} = \frac{1}{4} = q^{(1)}(2).$$

Συνεπώς έχουμε τα δεδομένα παρεμβολής

x_i	$q(x_i)$	$q^{(1)}(x_i)$
-1	0	$-\frac{1}{2}$
2	3	$\frac{1}{4}$

Εφαρμόζοντας την μέθοδο των διαιρεμένων διαφορών του Hermite προκύπτει ότι το πολυώνυμο παρεμβολής είναι το $q(x)=\frac{1}{4}\left(-x^3+2x^2+5x+2\right)$, οπότε η μήτρα

$$B_2=\frac{1}{4}\left(-A^3+2A^2+5A+2I_4\right)\Rightarrow B_2=\begin{bmatrix}-9 & -3 & 9 & -3\\ -27 & -3 & 21 & -9\\ -27 & -6 & 24 & -9\\ -18 & -3 & 15 & -6\end{bmatrix}$$ είναι μια λύση της δοθείσας εξίσωσης

Ο βαθμός πολλαπλότητας της λύσης αυτής φαίνεται στον επόμενο πίνακα

$\lambda_1=-1$ με $a_1=2$	$\lambda_2=2$ με $a_2=2$
$\rho_{11}=0$ με $a_{11}=1$	$\rho_{22}=3$ με $a_{22}=1$
$a_1\cdot a_{11}=2$	$a_2\cdot a_{21}=2$
Ο βαθμός πολλαπλότητας της λύσης B_2 είναι $2\cdot 2=4$	

iii) $\left\{\left(\lambda_1,\left(\rho_{12},\left(\frac{1}{h^{(1)}(x)}\right)_{x=q(\lambda_1)}\right)\right),\left(\lambda_2,\left(\rho_{21},\left(\frac{1}{h^{(1)}(x)}\right)_{x=q(\lambda_2)}\right)\right)\right\}$.

Είναι $\lambda_1=-1$, $\rho_{12}=2=q(-1)$,

$$\left(\frac{1}{h^{(1)}(x)}\right)_{x=q(\lambda_1)}=\frac{1}{h^{(1)}(q(\lambda_1))}=\frac{1}{h^{(1)}(-1)}=\frac{1}{2\cdot 2-2}=\frac{1}{2}=q^{(1)}(-1).$$

Επίσης είναι $\lambda_2=2$, $\rho_{21}=-1=q(2)$,

$$\left(\frac{1}{h^{(1)}(x)}\right)_{x=q(\lambda_2)}=\frac{1}{h^{(1)}(q(\lambda_2))}=\frac{1}{h^{(1)}(2)}=\frac{1}{2\cdot(-1)-2}=-\frac{1}{4}=q^{(1)}(2).$$

Συνεπώς έχουμε τα δεδομένα παρεμβολής

x_i	$q(x_i)$	$q^{(1)}(x_i)$
-1	2	$\frac{1}{2}$
2	-1	$-\frac{1}{4}$

Εφαρμόζοντας την μέθοδο των διαιρεμένων διαφορών του Hermite προκύπτει ότι το πολυώνυμο παρεμβολής είναι το $q(x)=\frac{1}{4}\left(x^3-2x^2-5x+6\right)$, οπότε η μήτρα

$$B_3 = \frac{1}{4}\left(A^3 - 2A^2 - 5A + 6I_4\right) \Rightarrow B_3 = \begin{bmatrix} 11 & 3 & -9 & 3 \\ 27 & 5 & -21 & 9 \\ 27 & 6 & -22 & 9 \\ 18 & 3 & -15 & 8 \end{bmatrix}$$ είναι μια λύση της δοθείσας εξίσωσης.

Ο βαθμός πολλαπλότητας της λύσης αυτής φαίνεται στον επόμενο πίνακα

$\lambda_1 = -1$ με $a_1 = 2$	$\lambda_2 = 2$ με $a_2 = 2$
$\rho_{12} = 2$ με $a_{12} = 1$	$\rho_{21} = -$ με $a_{21} = 1$
$a_1 \cdot a_{12} = 2$	$a_2 \cdot a_{21} = 2$
Ο βαθμός πολλαπλότητας της λύσης B_3 είναι $2 \cdot 2 = 4$	

iv) $\left\{\left(\lambda_1, \left(\rho_{12}, \left(\frac{1}{h^{(1)}(x)}\right)_{x=q(\lambda_1)}\right)\right), \left(\lambda_2, \left(\rho_{22}, \left(\frac{1}{h^{(1)}(x)}\right)_{x=q(\lambda_2)}\right)\right)\right\}$.

Είναι $\lambda_1 = -1$, $\rho_{12} = 2 = q(-1)$,

$$\left(\frac{1}{h^{(1)}(x)}\right)_{x=q(\lambda_1)} = \frac{1}{h^{(1)}(q(\lambda_1))} = \frac{1}{h^{(1)}(-1)} = \frac{1}{2 \cdot 2 - 2} = \frac{1}{2} = q^{(1)}(-1).$$

Επίσης είναι $\lambda_2 = 2$, $\rho_{22} = 3 = q(2)$,

$$\left(\frac{1}{h^{(1)}(x)}\right)_{x=q(\lambda_2)} = \frac{1}{h^{(1)}(q(\lambda_2))} = \frac{1}{h^{(1)}(3)} = \frac{1}{2 \cdot 3 - 2} = \frac{1}{4} = q^{(1)}(2).$$

Συνεπώς έχουμε τα δεδομένα παρεμβολής

x_i	$q(x_i)$	$q^{(1)}(x_i)$
-1	2	$\frac{1}{2}$
2	3	$\frac{1}{4}$

Εφαρμόζοντας την μέθοδο των διαιρεμένων διαφορών του Hermite προκύπτει ότι το πολυώνυμο παρεμβολής είναι το

$q(x) = \frac{1}{108}\left(x^3 - 6x^2 + 39x + 262\right)$, οπότε η μήτρα

$$B_4 = \frac{1}{108}\left(A^3 - 6A^2 + 39A + 262I_4\right) \Rightarrow B_4 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 & -1 \\ -9 & 1 & 7 & -3 \\ -9 & -2 & 10 & -3 \\ -6 & -1 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

είναι μια λύση της δοθείσας εξίσωσης.

Ο βαθμός πολλαπλότητας της λύσης αυτής φαίνεται στον επόμενο πίνακα

$\lambda_1 = -1$ με $a_1 = 2$	$\lambda_2 = 2$ με $a_2 = 2$
$\rho_{12} = 2$ με $a_{12} = 1$	$\rho_{22} = 3$ με $a_{22} = 1$
$a_1 \cdot a_{12} = 2$	$a_2 \cdot a_{22} = 2$
Ο βαθμός πολλαπλότητας της λύσης B_4 είναι $2 \cdot 2 = 4$	

Παράδειγμα 3.

Να λυθεί η εξίσωση $X^2 + 2X + 3I_4 = A$, όπου $X \in M_4(\mathbb{C})$ είναι η άγνωστη μήτρα και

$$A = \begin{bmatrix} 20 & -17 & 3 & -24 \\ -5 & 8 & -1 & 7 \\ -8 & 8 & 1 & 11 \\ 15 & -15 & 3 & -18 \end{bmatrix}.$$

Λύση

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της μήτρας A είναι $p(x) = \begin{vmatrix} 20-x & -17 & 3 & -24 \\ -5 & 8-x & -1 & 7 \\ -8 & 8 & 1-x & 11 \\ 15 & -15 & 3 & -18-x \end{vmatrix} \Rightarrow$

$p(x) = (x-3)^3(x-2)$.

Συνεπώς η μήτρα A έχει δύο ιδιοτιμές $\lambda_1 = 3$ (τριπλή $a_1 = 3$), $\lambda_2 = 2$ (απλή $a_2 = 1$).

Θέτουμε $h(x) = x^2 + 2x + 3$ και θεωρούμε τις εξισώσεις

α) $h(x) = \lambda_1 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 3 = 3 \Leftrightarrow \rho_{11} = 0$ (απλή $a_{11} = 1$) ή $\rho_{12} = -2$ (απλή $a_{12} = 1$)

β) $h(x) = \lambda_2 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 3 = 2 \Leftrightarrow \rho_{21} = -1$ (διπλή $a_{21} = 2$)

Είναι $h^{(1)}(x) = 2x + 2$. Συνεπώς προκύπτουν τα επόμενα δεδομένα παρεμβολής

i) $\left\{ \left(\lambda_1, \left(\rho_{11}, \left(\dfrac{1}{h^{(1)}(x)} \right)_{x=q(\lambda_1)}, \left(\dfrac{1}{h^{(1)}(x)} \right)^{(1)}_{x=q(\lambda_1)} \right) \right), (\lambda_2, \rho_{21}) \right\}$.

Είναι $\lambda_1 = 3$, $\rho_{11} = 0 = q(3)$,

$$\left(\frac{1}{h^{(1)}(x)} \right)_{x=q(\lambda_1)} = \frac{1}{h^{(1)}(q(\lambda_1))} = \frac{1}{h^{(1)}(0)} = \frac{1}{2 \cdot 0 + 2} = \frac{1}{2} = q^{(1)}(3),$$

$$\left(\frac{1}{h^{(1)}(x)} \right)^{(1)}_{x=q(\lambda_1)} = \left(\frac{1}{2x+2} \right)^{(1)}_{x=q(3)} = \left(-\frac{2}{(2x+2)^2} \right)_{x=q(3)} = -\frac{2}{[2 \cdot q(3) + 2]^2} = -\frac{1}{2} = q^{(2)}(3)$$

Επίσης είναι $\lambda_2 = 2$, $\rho_{21} = -1 = q(2)$.

Συνεπώς έχουμε τα δεδομένα παρεμβολής

x_i	$q(x_i)$	$q^{(1)}(x_i)$	$q^{(2)}(x_i)$
3	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
2	-1		

Εφαρμόζοντας την μέθοδο των διαιρεμένων διαφορών του Hermite προκύπτει ότι το πολυώνυμο παρεμβολής είναι το $q(x)=\frac{1}{4}\left(x^3-10x^2+35x-42\right)$, οπότε η μήτρα

$$B_1=\frac{1}{4}\left(A^3-10A^2+35A-42I_4\right)\Rightarrow B_1=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}54&-54&26&-64\\-16&16&-8&20\\-26&26&-14&32\\48&-48&24&-60\end{bmatrix}$$ είναι μια λύση της δοθείσας εξίσωσης.

Ο βαθμός πολλαπλότητας της λύσης αυτής φαίνεται στον επόμενο πίνακα

$\lambda_1=3$ με $a_1=3$	$\lambda_2=2$ με $a_2=1$
$\rho_{11}=0$ με $a_{11}=1$	$\rho_{21}=-1$ με $a_{21}=2$
$a_1\cdot a_{11}=3$	$a_2\cdot a_{22}=2$
Ο βαθμός πολλαπλότητας της λύσης B_1 είναι $3\cdot 2=6$	

ii) $\left\{\left(\lambda_1,\left(\rho_{12},\left(\frac{1}{h^{(1)}(x)}\right)_{x=q(\lambda_1)},\left(\frac{1}{h^{(1)}(x)}\right)^{(1)}_{x=q(\lambda_1)}\right)\right),\left(\lambda_2,\rho_{21}\right)\right\}$.

Είναι $\lambda_1=3$, $\rho_{12}=-2=q(3)$,

$$\left(\frac{1}{h^{(1)}(x)}\right)_{x=q(\lambda_1)}=\frac{1}{h^{(1)}(q(\lambda_1))}=\frac{1}{h^{(1)}(-2)}=\frac{1}{2\cdot(-2)+2}=-\frac{1}{2}=q^{(1)}(3),$$

$$\left(\frac{1}{h^{(1)}(x)}\right)^{(1)}_{x=q(\lambda_1)}=\left(\frac{1}{2x+2}\right)^{(1)}_{x=q(3)}=\left(-\frac{2}{\left(2x+2\right)^2}\right)_{x=q(3)}=-\frac{2}{\left[2\cdot q(3)+2\right]^2}=-\frac{1}{2}=q^{(2)}(3)$$

Επίσης είναι $\lambda_2=2$, $\rho_{21}=-1=q(2)$.

Συνεπώς έχουμε τα δεδομένα παρεμβολής

x_i	$q(x_i)$	$q^{(1)}(x_i)$	$q^{(2)}(x_i)$
3	-2	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
2	-1		

Εφαρμόζοντας την μέθοδο των διαιρεμένων διαφορών του Hermite προκύπτει ότι το πολυώνυμο παρεμβολής είναι το $q(x)=\frac{1}{4}\left(-3x^3+26x^2-77x+70\right)$, οπότε η μήτρα

$$B_2 = \frac{1}{4}\left(-3A^3 + 26A^2 - 77A + 70I_4\right) \Rightarrow B_2 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -62 & 54 & -26 & 64 \\ 16 & -16 & 8 & -20 \\ 26 & -26 & 6 & -32 \\ -48 & 48 & -24 & 52 \end{bmatrix}$$ είναι μια λύση της δοθείσας

εξίσωσης.

Ο βαθμός πολλαπλότητας της λύσης αυτής φαίνεται στον επόμενο πίνακα

$\lambda_1 = 3$ με $a_1 = 3$	$\lambda_2 = 2$ με $a_2 = 1$
$\rho_{12} = -2$ με $a_{12} = 1$	$\rho_{21} = -1$ με $a_{21} = 2$
$a_1 \cdot a_{12} = 3$	$a_2 \cdot a_{22} = 2$
Ο βαθμός πολλαπλότητας της λύσης B_1 είναι $3 \cdot 2 = 6$	

Όπως είδαμε η εξίσωση ενδεχομένως έχει και άλλες λύσεις.

Παράδειγμα 4.

Να λυθεί η εξίσωση $X^4 - 4X^3 + 6X^2 - 4X + 3I_4 = A$, όπου $X \in M_4(\mathbb{C})$ είναι η άγνωστη μήτρα και

$$A = \begin{bmatrix} -42 & -15 & 45 & -15 \\ -45 & -12 & 45 & -15 \\ -90 & -30 & 93 & -30 \\ -45 & -15 & 45 & -12 \end{bmatrix}.$$

Λύση

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της μήτρας A είναι $p(x) = \begin{vmatrix} -42-x & -15 & 45 & -15 \\ -45 & -12-x & 45 & -15 \\ -90 & -30 & 93-x & -30 \\ -45 & -15 & 45 & -12-x \end{vmatrix} \Rightarrow$

$p(x) = (x-3)^3(x-18)$.

Συνεπώς η μήτρα A έχει δύο ιδιοτιμές $\lambda_1 = 3$ (τριπλή $a_1 = 3$), $\lambda_2 = 18$ (απλή $a_2 = 1$).

Θέτουμε $h(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 3$ και θεωρούμε τις εξισώσεις

α) $h(x) = \lambda_1 \Leftrightarrow x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 3 = 3 \Leftrightarrow \rho_{11} = 0$ (απλή $a_{11} = 1$) ή $\rho_{12} = 2$ (απλή $a_{12} = 1$) ή $\rho_{13} = 1 - i$ (απλή $a_{13} = 1$) ή $\rho_{14} = 1 + i$ (απλή $a_{14} = 1$)

β) $h(x) = \lambda_2 \Leftrightarrow x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 3 = 18 \Leftrightarrow \rho_{21} = 1 - 2i$ (απλή $a_{21} = 1$) ή $\rho_{22} = 1 + 2i$ (απλή $a_{22} = 1$) ή $\rho_{23} = -1$ (απλή $a_{23} = 1$) ή $\rho_{24} = 3$ (απλή $a_{24} = 1$)

Είναι $h^{(1)}(x) = 4x^3 - 12x^2 + 12x - 4$. Συνεπώς προκύπτουν τα επόμενα δεδομένα παρεμβολής

i) $\left\{\left(3, \left(0, -\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}\right)\right), (18, 1-2i)\right\}$, συνεπώς έχουμε τα δεδομένα παρεμβολής

x_i	$q(x_i)$	$q^{(1)}(x_i)$	$q^{(2)}(x_i)$
3	0	$-\dfrac{1}{4}$	$-\dfrac{3}{4}$
18	$1-2i$		

Εφαρμόζοντας την μέθοδο των διαιρεμένων διαφορών του Hermite προκύπτει ότι το πολυώνυμο παρεμβολής είναι το

$q(x)=\left(\dfrac{713}{27000}-\dfrac{2}{3375}i\right)x^3-\left(\dfrac{919}{1500}-\dfrac{2}{375}i\right)x^2+\left(\dfrac{2713}{1000}-\dfrac{2}{125}i\right)x+\left(-\dfrac{1669}{500}+\dfrac{2}{125}i\right)$, οπότε η μήτρα

$$B_1=\left(\frac{713}{27000}-\frac{2}{3375}i\right)A^3-\left(\frac{919}{1500}-\frac{2}{375}i\right)A^2+\left(\frac{2713}{1000}-\frac{2}{125}i\right)A+\left(-\frac{1669}{500}+\frac{2}{125}i\right)I_4 \Rightarrow$$

$B_1=\begin{bmatrix} -3+6i & -1+2i & 3-6i & -1+2i \\ -3+6i & -1+2i & 3-6i & -1+2i \\ -6+12i & -2+4i & 6-12i & -2+4i \\ -3+6i & -1+2i & 3-6i & -1+2i \end{bmatrix}$ είναι μια λύση της δοθείσας εξίσωσης.

Ο βαθμός πολλαπλότητας της λύσης αυτής φαίνεται στον επόμενο πίνακα

$\lambda_1=3$ με $a_1=3$	$\lambda_2=18$ με $a_2=1$
$\rho_{12}=0$ με $a_{12}=1$	$\rho_{21}=1-2i$ με $a_{21}=1$
$a_1\cdot a_{12}=3$	$a_2\cdot a_{21}=1$
Ο βαθμός πολλαπλότητας της λύσης B_1 είναι $3\cdot 1=3$	

ii) $\left\{\left(3,\left(1-i,-\dfrac{i}{4},-\dfrac{3}{4}\right)\right),(18,1-2i)\right\}$, συνεπώς έχουμε τα δεδομένα παρεμβολής

x_i	$q(x_i)$	$q^{(1)}(x_i)$	$q^{(2)}(x_i)$
3	$1-i$	$-\dfrac{i}{4}$	$-\dfrac{3}{4}$
18	$1-2i$		

Εφαρμόζοντας την μέθοδο των διαιρεμένων διαφορών του Hermite προκύπτει ότι το πολυώνυμο παρεμβολής είναι το

$$q(x)=\left(\frac{1}{40}+\frac{11}{13500}i\right)x^3-\left(\frac{3}{5}+\frac{11}{1500}i\right)x^2+\left(\frac{117}{40}-\frac{57}{250}i\right)x+\left(-\frac{61}{20}-\frac{34}{125}i\right),$$

οπότε η μήτρα

$$B_2=\left(\frac{1}{40}+\frac{11}{13500}i\right)A^3-\left(\frac{3}{5}+\frac{11}{1500}i\right)A^2+\left(\frac{117}{40}-\frac{57}{250}i\right)A+\left(-\frac{61}{20}-\frac{34}{125}i\right)I_4 \Rightarrow$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 1+2i & i & -3i & i \\ 3i & 1 & -3i & i \\ 6i & 2i & 1-7i & 2i \\ 3i & i & -3i & i \end{bmatrix}$$ είναι μια λύση της δοθείσας εξίσωσης.

iii) $\left\{\left(3,\left(1+i,\frac{i}{4},-\frac{3}{4}\right)\right),(18,1-2i)\right\}$,

συνεπώς έχουμε τα δεδομένα παρεμβολής

x_i	$q(x_i)$	$q^{(1)}(x_i)$	$q^{(2)}(x_i)$
3	$1+i$	$\frac{i}{4}$	$-\frac{3}{4}$
18	$1-2i$		

Εφαρμόζοντας την μέθοδο των διαιρεμένων διαφορών του Hermite προκύπτει ότι το πολυώνυμο παρεμβολής είναι το

$q(x)=\left(\frac{1}{40}-\frac{1}{500}i\right)x^3-\left(\frac{3}{5}-\frac{91}{500}i\right)x^2+\left(\frac{117}{40}+\frac{49}{250}i\right)x+\left(-\frac{61}{20}+\frac{38}{125}i\right)$, οπότε η μήτρα

$$B_3=\left(\frac{1}{40}-\frac{1}{500}i\right)A^3-\left(\frac{3}{5}-\frac{91}{500}i\right)A^2+\left(\frac{117}{40}+\frac{49}{250}i\right)A+\left(-\frac{61}{20}+\frac{38}{125}i\right)I_4 \Rightarrow$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 1+10i & 3i & -9i & 3i \\ 9i & 1+4i & -9i & 3i \\ 18i & 6i & 1-17i & 6i \\ 9i & 3i & -9i & 1+4i \end{bmatrix}$$ είναι μια λύση της δοθείσας εξίσωσης.

Ο βαθμός πολλαπλότητας της λύσης αυτής φαίνεται στον επόμενο πίνακα

$\lambda_1=3$ με $a_1=3$	$\lambda_2=18$ με $a_2=1$
$\rho_{13}=1-i$ με $a_{13}=1$	$\rho_{21}=1-2i$ με $a_{21}=1$
$a_1\cdot a_{13}=3$	$a_2\cdot a_{21}=1$
Ο βαθμός πολλαπλότητας της λύσης B_2 είναι $3\cdot 1=3$	

iv) $\left\{\left(3,\left(2,\frac{1}{4},-\frac{3}{4}\right)\right),(18,1-2i)\right\}$, συνεπώς έχουμε τα δεδομένα παρεμβολής

x_i	$q(x_i)$	$q^{(1)}(x_i)$	$q^{(2)}(x_i)$
3	2	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$
18	$1-2i$		

Εφαρμόζοντας την μέθοδο των διαιρεμένων διαφορών του Hermite προκύπτει ότι το πολυώνυμο παρεμβολής είναι το

$q(x)=\left(\frac{637}{27000}-\frac{2}{3375}i\right)x^3-\left(\frac{881}{1500}-\frac{2}{375}i\right)x^2+\left(\frac{3137}{1000}-\frac{2}{125}i\right)x+\left(-\frac{1381}{500}+\frac{2}{125}i\right)$, οπότε η μήτρα

$$B_4=\left(\frac{637}{27000}-\frac{2}{3375}i\right)A^3-\left(\frac{881}{1500}-\frac{2}{375}i\right)A^2+\left(\frac{3137}{1000}-\frac{2}{125}i\right)A+\left(-\frac{1381}{500}+\frac{2}{125}i\right)I_4 \Rightarrow$$

$B_4=\begin{bmatrix} 5+6i & 1+2i & -3-6i & 1+2i \\ 3+6i & 3+2i & -3-6i & 1+2i \\ 6+12i & 2+4i & -4-12i & 2+4i \\ 3+6i & 1+2i & -3-6i & 3+2i \end{bmatrix}$ είναι μια λύση της δοθείσας εξίσωσης.

Ο βαθμός πολλαπλότητας της λύσης αυτής φαίνεται στον επόμενο πίνακα

$\lambda_1=3$ με $a_1=3$	$\lambda_2=18$ με $a_2=1$
$\rho_{12}=2$ με $a_{12}=1$	$\rho_{21}=1-2i$ με $a_{21}=1$
$a_1\cdot a_{12}=3$	$a_2\cdot a_{21}=1$
Ο βαθμός πολλαπλότητας της λύσης B_3 είναι $3\cdot1=3$	

Συνεχίζοντας όμοια έχουμε τα επόμενα αποτελέσματα

v)

x_i	$q(x_i)$	$q^{(1)}(x_i)$	$q^{(2)}(x_i)$
3	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$
18	$1+2i$		
$q(x)=\left(\frac{713}{27000}+\frac{2}{3375}i\right)x^3-\left(\frac{919}{1500}+\frac{2}{375}i\right)x^2+\left(\frac{2713}{1000}+\frac{2}{125}i\right)x+\left(-\frac{1669}{500}-\frac{2}{125}i\right)$			

$$B_5=\begin{bmatrix} -3-6i & -1-2i & 3+6i & -1-2i \\ -3-6i & -1-2i & 3+6i & -1-2i \\ -6-12i & -2-4i & 6+12i & -2-4i \\ -3-6i & -1-2i & 3+6i & -1-2i \end{bmatrix}$$

vi)

x_i	$q(x_i)$	$q^{(1)}(x_i)$	$q^{(2)}(x_i)$
3	$1-i$	$-\frac{i}{4}$	$-\frac{3}{4}$
18	$1+2i$		
$q(x)=\left(\frac{1}{40}+\frac{1}{500}i\right)x^3-\left(\frac{3}{5}+\frac{9}{500}i\right)x^2+\left(\frac{117}{40}-\frac{49}{250}i\right)x+\left(-\frac{61}{20}-\frac{38}{125}i\right)$			

$$B_6=\begin{bmatrix}1-10i & -3i & 9i & -3i\\ -9i & 1-4i & 9i & -3i\\ -18i & -6i & 1+17i & -6i\\ -9i & -3i & 9i & 1-4i\end{bmatrix}$$

vii)

x_i	$q(x_i)$	$q^{(1)}(x_i)$	$q^{(2)}(x_i)$
3	$1+i$	$\frac{i}{4}$	$-\frac{3}{4}$
18	$1+2i$		
$q(x)=\left(\frac{1}{40}-\frac{11}{13500}i\right)x^3-\left(\frac{3}{5}-\frac{11}{1500}i\right)x^2+\left(\frac{117}{40}+\frac{57}{250}i\right)x+\left(-\frac{61}{20}+\frac{34}{125}i\right)$			

$$B_7=\begin{bmatrix}1-2i & -i & 3i & -i\\ -3i & 1 & 3i & -i\\ -6i & -2i & 1+7i & -2i\\ -3i & -i & 3i & 1\end{bmatrix}$$

viii)

x_i	$q(x_i)$	$q^{(1)}(x_i)$	$q^{(2)}(x_i)$
3	2	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$
18	$1+2i$		
$q(x)=\left(\frac{637}{27000}+\frac{2}{3375}i\right)x^3-\left(\frac{881}{1500}+\frac{2}{375}i\right)x^2+\left(\frac{3137}{1000}+\frac{2}{125}i\right)x+\left(-\frac{1381}{500}-\frac{2}{125}i\right)$			

$$B_8=\begin{bmatrix}5-6i & 1-2i & -3+6i & 1-2i\\ 3-6i & 3-2i & -3+6i & 1-2i\\ 6-12i & 2-4i & -4+12i & 2-4i\\ 3-6i & 1-2i & -3+6i & 3-2i\end{bmatrix}$$

ix)

x_i	$q(x_i)$	$q^{(1)}(x_i)$	$q^{(2)}(x_i)$
3	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$
18	-1		
$q(x)=\frac{697}{27000}x^3-\frac{911}{1500}x^2+\frac{2697}{1000}x-\frac{1661}{500}$			

$$B_9 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -3 & 1 \\ 6 & 2 & -6 & 2 \\ 3 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

x)

x_i	$q(x_i)$	$q^{(1)}(x_i)$	$q^{(2)}(x_i)$
3	$1-i$	$-\frac{i}{4}$	$-\frac{3}{4}$
18	-1		
$q(x)=\left(\frac{659}{27000}+\frac{19}{13500}i\right)x^3-\left(\frac{223}{375}+\frac{19}{1500}i\right)x^2+\left(\frac{2909}{1000}-\frac{53}{250}i\right)x+\left(-\frac{1517}{500}-\frac{36}{125}i\right)$			

$$B_{10} = \begin{bmatrix} 7-4i & 2-i & -6+3i & 2-i \\ 6-3i & 3-2i & -6+3i & 2-i \\ 12-6i & 4-2i & -11+5i & 4-2i \\ 6-3i & 2-i & -6+3i & 3-2i \end{bmatrix}$$

xi)

x_i	$q(x_i)$	$q^{(1)}(x_i)$	$q^{(2)}(x_i)$
3	$1+i$	$\frac{i}{4}$	$-\frac{3}{4}$
18	-1		
$q(x)=\left(\frac{659}{27000}-\frac{19}{13500}i\right)x^3-\left(\frac{223}{375}-\frac{19}{1500}i\right)x^2+\left(\frac{2909}{1000}+\frac{53}{250}i\right)x+\left(-\frac{1517}{500}+\frac{36}{125}i\right)$			

$$B_{11} = \begin{bmatrix} 7+4i & 2+i & -6-3i & 2+i \\ 6+3i & 3+2i & -6-3i & 2+i \\ 12+6i & 4+2i & -11-5i & 4+2i \\ 6+3i & 2+i & -6-3i & 3+2i \end{bmatrix}$$

xii)

x_i	$q(x_i)$	$q^{(1)}(x_i)$	$q^{(2)}(x_i)$
3	2	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$
18	-1		
$q(x)=\frac{23}{1000}x^3-\frac{291}{500}x^2+\frac{3121}{1000}x-\frac{1373}{500}$			

$$B_{12} = \begin{bmatrix} 11 & 3 & -9 & 3 \\ 9 & 5 & -9 & 3 \\ 18 & 6 & -16 & 6 \\ 9 & 3 & -9 & 5 \end{bmatrix}$$

xiii)

x_i	$q(x_i)$	$q^{(1)}(x_i)$	$q^{(2)}(x_i)$
3	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$
18	-1		
$q(x)=\frac{27}{1000}x^3-\frac{309}{500}x^2+\frac{2729}{1000}x-\frac{1677}{500}$			

$$B_{13} = \begin{bmatrix} -9 & -3 & 9 & -3 \\ -9 & -3 & 9 & -3 \\ -18 & -6 & 18 & -6 \\ -9 & -3 & 9 & -3 \end{bmatrix}$$

xiv)

x_i	$q(x_i)$	$q^{(1)}(x_i)$	$q^{(2)}(x_i)$
3	$1-i$	$-\frac{i}{4}$	$-\frac{3}{4}$
18	3		
$q(x)=\left(\frac{691}{27000}+\frac{19}{13500}i\right)x^3-\left(\frac{227}{375}+\frac{19}{1500}i\right)x^2+\left(\frac{2941}{1000}-\frac{53}{250}i\right)x+\left(-\frac{1533}{500}-\frac{36}{125}i\right)$			

$$B_{14} = \begin{bmatrix} -5-4i & -2-i & 6+3i & -2-i \\ -6-3i & -1-2i & 6+3i & -2-i \\ -12-6i & -4-2i & 13+5i & -4-2i \\ -6-3i & -2-i & 6+3i & -1-2i \end{bmatrix}$$

xv)

x_i	$q(x_i)$	$q^{(1)}(x_i)$	$q^{(2)}(x_i)$
3	$1+i$	$\frac{i}{4}$	$-\frac{3}{4}$
18	3		
$q(x)=\left(\frac{691}{27000}-\frac{19}{13500}i\right)x^3-\left(\frac{227}{375}-\frac{19}{1500}i\right)x^2+\left(\frac{2941}{1000}+\frac{53}{250}i\right)x+\left(-\frac{1533}{500}+\frac{36}{125}i\right)$			

$$B_{15}=\begin{bmatrix} -5+4i & -2+i & 6-3i & -2+i \\ -6+3i & -1+2i & 6-3i & -2+i \\ -12+6i & -4+2i & 13+5i & -4+2i \\ -6+3i & -2+i & 6-3i & -1+2i \end{bmatrix}$$

xvi)

x_i	$q(x_i)$	$q^{(1)}(x_i)$	$q^{(2)}(x_i)$
3	2	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$
18	3		
$q(x)=\frac{653}{27000}x^3-\frac{889}{1500}x^2+\frac{3153}{1000}x-\frac{1389}{500}$			

$$B_{16}=\begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 3 & -1 \\ -6 & -2 & 8 & -2 \\ -3 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Όλες οι λύσεις έχουν βαθμό πολλαπλότητας 3.

Περίπτωση 4.

Αν

i) Υπάρχει μια τουλάχιστον ιδιοτιμή λ της μήτρας A με αλγεβρική πολλαπλότητα $k \geq 2$.

ii) Η ιδιοτιμή λ είναι ρίζα του πολυώνυμου $h^{(1)}(x)$ τότε ο αλγόριθμος δεν μπορεί να εφαρμοστεί και η δοθείσα πολυωνυμική εξίσωση ή είναι αδύνατη ή έχει απροσδιόριστο αριθμό λύσεων.

Παράδειγμα 1.

Να λυθεί η εξίσωση $X^2=A$, όπου $X\in M_2(\mathbb{C})$ είναι η άγνωστη μήτρα και $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Λύση

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της μήτρας A είναι $p(x)=\begin{vmatrix} -x & 1 \\ 0 & -x \end{vmatrix} \Rightarrow p(x)=x^2$.

Συνεπώς η μήτρα A έχει μια ιδιοτιμή $\lambda=0$ (διπλή).

Θέτουμε $h(x)=x^2$, τότε είναι $h^{(1)}(x)=2x$, άρα $h^{(1)}(\lambda)=h^{(1)}(0)=0$,

συνεπώς ο αλγόριθμος δεν μπορεί να εφαρμοστεί και η δοθείσα εξίσωση ή είναι αδύνατη ή έχει απροσδιόριστο αριθμό ριζών.

Έστω $X=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ τότε είναι $X^2=\begin{bmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ 2ac & c(b+d) \end{bmatrix}$.

Από την ισότητα $X^2=A$ προκύπτουν οι σχέσεις $\begin{cases} a^2+bc=0 \\ b(a+d)=1 \\ 2ac=0 \\ c(b+d)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+bc=0 \\ b(a+d)=1 \\ a=0 \text{ ή } c=0 \\ c(b+d)=0 \end{cases}$

οπότε προκύπτουν τα συστήματα

$(\Sigma_1):\begin{cases} a^2+bc=0 \\ b(a+d)=1 \\ a=0 \\ c(b+d)=0 \end{cases}$ και $(\Sigma_2):\begin{cases} a^2+bc=0 \\ b(a+d)=1 \\ c=0 \\ c(b+d)=0 \end{cases}$

Είναι

$(\Sigma_1):\begin{cases} a^2+bc=0 \\ b(a+d)=1 \\ a=0 \\ c(b+d)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} bc=0 \\ bd=1 \\ a=0 \\ c(b+d)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0,\ \textit{γιατί } b\neq 0 \\ bd=1 \\ a=0 \\ c(b+d)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ d=\dfrac{1}{b} \\ c=0 \end{cases}$, άρα είναι

$X=\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & \dfrac{1}{b} \end{bmatrix} \Rightarrow X^2=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \dfrac{1}{b^2} \end{bmatrix} \neq A$,

συνεπώς στην περίπτωση αυτή η δοθείσα εξίσωση είναι αδύνατη.

Είναι $(\Sigma_2):\begin{cases} a^2+bc=0 \\ b(a+d)=1 \\ c=0 \\ c(b+d)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ bd=1 \\ c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ d=\dfrac{1}{b} \\ c=0 \end{cases}$, άρα είναι $X=\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & \dfrac{1}{b} \end{bmatrix} \Rightarrow X^2=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \dfrac{1}{b^2} \end{bmatrix} \neq A$,

συνεπώς και στην περίπτωση αυτή η δοθείσα εξίσωση είναι αδύνατη.

Παράδειγμα 2.

Να λυθεί η εξίσωση $X^2=A$, όπου $X\in M_3(\mathbb{C})$ είναι η άγνωστη μήτρα και $A=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Λύση

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της μήτρας A είναι $p(x)=\begin{vmatrix} 4-x & 0 & 0 \\ 0 & -x & 0 \\ 0 & 0 & -x \end{vmatrix} \Rightarrow p(x)=x^2(4-x)$.

Συνεπώς η μήτρα A έχει δύο ιδιοτιμές $\lambda_1=0$ (διπλή) και $\lambda_2=4$.

Θέτουμε $h(x)=x^2$ τότε είναι $h^{(1)}(x)=2x$, άρα $h^{(1)}(\lambda_1)=h^{(1)}(0)=0$, συνεπώς ο αλγόριθμος δεν μπορεί να εφαρμοστεί και η δοθείσα εξίσωση ή είναι αδύνατη ή έχει απροσδιόριστο αριθμό ριζών.

Είναι προφανές ότι οι πίνακες $X_1=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ και $X_2=\begin{bmatrix}-2&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ είναι λύσεις της εξίσωσης, συνεπώς η εξίσωση δεν είναι αδύνατη. Μπορεί να δειχθεί ότι η εξίσωση έχει μόνο αυτές τις δύο λύσεις.

Παράδειγμα 3.

Να λυθεί η εξίσωση $X^2-2X+2I_3=A$, όπου $X\in M_3(\mathbb{C})$ είναι η άγνωστη μήτρα και $A=\begin{bmatrix}2&-1&-1\\-1&2&1\\1&-1&0\end{bmatrix}$.

Λύση

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της μήτρας A είναι $p(x)=\begin{vmatrix}2-x&-1&-1\\-1&2-x&1\\1&-1&-x\end{vmatrix}\Rightarrow p(x)=-(x-1)^2(x-2)$.

Συνεπώς η μήτρα A έχει δύο ιδιοτιμές $\lambda_1=1$ (διπλή) και $\lambda_2=2$ (απλή).

Θέτουμε

$h(x)=x^2-2x+2$ τότε είναι $h^{(1)}(x)=2x-2$, άρα $h^{(1)}(\lambda_1)=h^{(1)}(1)=0$,

συνεπώς ο αλγόριθμος δεν

μπορεί να εφαρμοστεί και η δοθείσα εξίσωση ή είναι αδύνατη ή έχει απροσδιόριστο αριθμό ριζών.

Παράδειγμα 4.

Να λυθεί η εξίσωση $X^2=A$, όπου $X\in M_3(\mathbb{C})$ είναι η άγνωστη μήτρα και $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&0\end{bmatrix}$.

Λύση

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της μήτρας A είναι

$$p(x)=\begin{vmatrix}1-x&0&0\\0&4-x&0\\0&0&-x\end{vmatrix}\Rightarrow p(x)=-x(x-1)(x-4).$$

Συνεπώς η μήτρα A έχει τρεις ιδιοτιμές $\lambda_1=0$, $\lambda_2=1$ και $\lambda_3=4$, όλες έχουν αλγεβρική πολλαπλότητα Ένα ($a_1=a_2=a_3=1$).

Θέτουμε $h(x)=x^2$ και θεωρούμε τις εξισώσεις

i) $h(x)=\lambda_1 \Leftrightarrow x^2=0 \Leftrightarrow \rho_{11}=0$ (διπλή $a_{11}=2$).

ii) $h(x)=\lambda_2 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow \rho_{21}=1$ ($a_{21}=1$) ή $\rho_{22}=-1$ ($a_{22}=1$)

iii) $h(x)=\lambda_3 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow \rho_{31}=2$ ($a_{31}=1$) ή $\rho_{32}=-2$ ($a_{32}=1$)

Θέτουμε

$h(x)=x^2$ τότε είναι $h^{(1)}(x)=2x$, άρα $h^{(1)}(\lambda_1)=h^{(1)}(0)=0$.

Στην περίπτωση αυτή, επειδή η ισιοτιμή $\lambda_1=0$ έχει αλγεβρικό βαθμό πολλαπλότητας 1, δεν θα μας χρειαστεί ο αριθμός $\dfrac{1}{h^{(1)}(\lambda_1)}$, συνεπώς ο αλγόριθμος μπορεί να εφαρμοστεί.

Εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο προκύπτυον οι λύσεις

i)

x_i	$q(x_i)$	$q(x)=-\frac{1}{6}x^2+\frac{7}{6}x$
0	0	$X_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&0\end{bmatrix}$
1	1	
4	2	

ii)

x_i	$q(x_i)$	$q(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x$
0	0	$X_2=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&0\end{bmatrix}$
1	–1	
4	2	

iii)

x_i	$q(x_i)$	$q(x)=-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x$
0	0	$X_3=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&0\end{bmatrix}$
1	1	
4	–2	

iv)

x_i	$q(x_i)$	$q(x)=\frac{1}{6}x^2-\frac{7}{6}x$
0	0	$X_4=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-2&0\\0&0&0\end{bmatrix}$
1	–1	
4	–2	

Προφανώς οι λύσεις αυτές είναι όλες διπλές και είναι και οι μοναδικές.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΟΙ ΜΗΤΡΕΣ ΣΥΝΙΣΤΩΣΕΣ ΜΙΑΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΜΗΤΡΑΣ

Ακολουθεί μια σύντομη ιστορία για τις συναρτήσεις μητρών, όπως παρουσιάστηκε από τον Nicholas J. Higham.

Ο Βρετανός μαθηματικός Arthur Cayley (1821-1895) είναι ο πρώτος ο οποίος ξεκίνησε την μελέτη των συναρτήσεων μητρών.

Ο Γάλλος μαθηματικός Edmond Laguerre (1834-1886) όρισε την εκθετική μήτρα e^A με την βοήθεια των δυναμοσειρών.

Ο ορισμός μιας συνάρτησης μητρών $f(A)$ μέσω της αριθμητικής παρεμβολής ξεκίνησε από τον Βρετανό Μαθηματικό James Joseph Sylvester (1814-1897) αλλά μόνο για μήτρες με απλές ιδιοτιμές (αλγεβρική πολλαπλότητα ένα).

Το 1884 ο Βρετανός μαθηματικός Arthur Buchheim (1859-1888) έδωσε τον μαθηματικό ορισμό της συνάρτησης μητρών $f(A)$ στη γενική περίπτωση, δηλαδή ανεξάρτητα από τι ιδιοτιμές έχει η μήτρα A και τι αλγεβρικές πολλαπλότητες έχουν αυτές χρησιμοποιώντας την μέθοδο της αριθμητικής παρεμβολής του Hermite.

Ο Αυστριακός μαθηματικός Emil Weyr (1848-1894) όρισε την συνάρτηση μητρών $f(A)$ χρησιμοποιώντας τη δυναμοσειρά της συνάρτησης f και μελέτησε τη σύγκλιση της σειράς που προκύπτει.

Ο Γάλλος μαθηματικός Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) όρισε την συνάρτηση $f(A)$ ως το άθροισμα καταλοίπων $(\lambda I - A)^{-1} f(\lambda)$ στις ιδιοτιμές της μήτρας A.

Είναι γνωστό ότι ένας μεγάλος αριθμός διάσημων μαθηματικών όπως οι Henri Poincare (1854-1912), Ennio Di Giorgi (1928-1996), Michele Cipolla (1880-1947) και πολλοί άλλοι εργάστηκαν επίσης πάνω στη περιοχή των συναρτήσεων μητρών.

Ο Αμερικανός μαθηματικός Robert F. Rinehart (1926-2016) το 1955 στην εργασία του «The Equivalence of Definitions of a Matrix Function» έδωσε ένα άλλο όρισμο της συνάρτησης $f(A)$ με τον τύπο

$f(A) = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=0}^{d_i - 1} f^{(j)}(\lambda_i) Z_{ij}$, όπου $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s$ είναι οι διαφορετικές ιδιοτιμές της μήτρας A και Z_{ij} είναι οι μήτρες συνιστώσες της μήτρας A .

3.1 ΟΙ ΜΗΤΡΕΣ ΣΥΝΙΣΤΩΣΕΣ

Έστω η μήτρα $A \in M_n(K)$ και $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s$ είναι οι διαφορετικές ιδιοτιμές της μήτρας A . Έστω ότι $a_1, a_2, ..., a_s$ και $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s$ είναι οι αλγεβρικές και γεωμετρικές πολλαπλότητες αντίστοιχα των ιδιοτιμών. Γνωρίζουμε ότι το ελάχιστο πολυώνυμο της μήτρας A είναι το $q(x) = (x-\lambda_1)^{d_1}(x-\lambda_2)^{d_2} \cdot ... \cdot (x-\lambda_s)^{d_s}$, όπου $d_i = a_i - \gamma_i + 1$, $i = 1, 2, ..., s$ είναι οι δείκτες των ιδιοτιμών $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s$.

Πρόταση 1.

Αν $A \in M_n(K)$ και $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s$ είναι οι διαφορετικές μεταξύ τους ιδιοτιμές της μήτρας A η οποία είναι απλή, δηλαδή είναι $a_i = \gamma_i$, για κάθε $i = 1, 2, ..., s$, τότε

i) Ο δείκτης κάθε ιδιοτιμής είναι 1, δηλαδή ισχύει $d_i = 1$, για κάθε $i = 1, 2, ..., s$.

ii) Για κάθε ιδιοτιμή λ_i υπάρχει μοναδικό πολυώνυμο παρεμβολής φ_{i0} το οποίο ορίζεται ως εξής, $\varphi_{i0}^{(r)}(\lambda_k) = \delta_{ik} \cdot \delta_{0r}$, για κάθε $i, k = 1, 2, ..., s$ και για κάθε $r = 0, 1, ..., a_i - 1$, όπου $\varphi_{i0}^{(r)}(x)$ είναι η παράγωγος r τάξης του πολυώνυμου $\varphi_{i0}(x)$.

Απόδειξη

Είναι $d_i = a_i - \gamma_i + 1 = 0 + 1 = 1$, για κάθε $i = 1, 2, ..., s$.

Για την ιδιοτιμή λ_i ισχύουν οι σχέσεις

$\varphi_{i0}(\lambda_i) = 1$, $\varphi_{i0}^{(1)}(\lambda_i) = \varphi_{i0}^{(2)}(\lambda_i) = ... = \varphi_{i0}^{(a_i - 1)}(\lambda_i) = 0$ και

$\varphi_{i0}(\lambda_j) = \varphi_{i0}^{(1)}(\lambda_j) = \varphi_{i0}^{(2)}(\lambda_j) = ... = \varphi_{i0}^{(a_j - 1)}(\lambda_j) = 0$, για κάθε $j = 1, 2, ..., s$ με $j \neq i$.

Οι σχέσεις αυτές είναι σε πλήθος n , και διαφορετικες μεταξύ τους, συνεπώς υπάρχει μοναδικό πολυώνυμο βαθμού $n-1$ το οποίο ικανοποιεί τις σχέσεις αυτές. Το πολυώνυμο αυτό βρίσκεται με την μέθοδο του Hermite.

Ορισμός 1.

Αν η μήτρα $A \in M_n(K)$ είναι απλή και $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s$ είναι οι διαφορετικές μεταξύ τους ιδιοτιμές της, τότε για κάθε ιδιοτιμή λ_i ορίζουμε την μήτρα $Z_{i0} = \varphi_{i0}(A)$. Η μήτρα αυτή λέγεται συνιστώσα της μήτρας A η οποία αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_i .

Πόρισμα 1.

Αν η μήτρα $A \in M_n(K)$ είναι απλή, τότε η μήτρα αυτή έχει τόσες συνιστώσες όσες είναι οι διαφορετικές μεταξύ τους ιδιοτιμές.

Πρόταση 2.

Έστω $A \in M_n(K)$ και $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s$ είναι οι διαφορετικές μεταξύ τους ιδιοτιμές της μήτρας A. Αν

i) Η μήτρα A είναι απλή

ii) P είναι η μήτρα μετάβασης της μήτρας A, τότε

α) Η Jordan μορφή της μήτρας A είναι

$$J_A = diag\left[\lambda_1 I_{a_1}, ..., \lambda_{i-1} I_{a_{i-1}}, \lambda_i I_{a_i}, \lambda_{i+1} I_{a_{i+1}}, ..., \lambda_s I_{a_s}\right]$$

β) $Z_{i0} = P \cdot diag\left[O_{a_1}, ..., O_{a_{i-1}}, I_{a_i}, O_{a_{i+1}}, ..., O_{a_s}\right] \cdot P^{-1}$.

Απόδειξη

Έστω ότι φ_{i0}, $i = 1, 2, ..., s$, είναι τα πολυώνυμα παρεμβολής τα οποία αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s$ της μήτρας A.

Γνωρίζουμε ότι είναι

$$A = P \cdot J_A \cdot P^{-1} \Rightarrow$$

$$\varphi_{i0}(A) = P \cdot \varphi_{i0}(J_A) \cdot P^{-1} \Rightarrow$$

$$\varphi_{i0}(A) = P \cdot \varphi_{i0}\left(diag\left[\lambda_1 I_{a_1}, ..., \lambda_{i-1} I_{a_{i-1}}, \lambda_i I_{a_i}, \lambda_{i+1} I_{a_{i+1}}, ..., \lambda_s I_{a_s}\right]\right) \cdot P^{-1} \Rightarrow$$

$$\varphi_{i0}(A) = P \cdot diag\left[\varphi_{i0}(\lambda_1 I_{a_1}), ..., \varphi_{i0}(\lambda_{i-1} I_{a_{i-1}}), \varphi_{i0}(\lambda_i I_{a_i}), \varphi_{i0}(\lambda_{i+1} I_{a_{i+1}}), ..., \varphi_{i0}(\lambda_s I_{a_s})\right] \cdot P^{-1} \Rightarrow$$

$$\varphi_{i0}(A) = P \cdot diag\left[\varphi_{i0}(\lambda_1) I_{a_1}, ..., \varphi_{i0}(\lambda_{i-1}) I_{a_{i-1}}, \varphi_{i0}(\lambda_i) I_{a_i}, \varphi_{i0}(\lambda_{i+1}) I_{a_{i+1}}, ..., \varphi_{i0}(\lambda_s) I_{a_s}\right] \cdot P^{-1} \Rightarrow$$

$$\varphi_{i0}(A) = P \cdot diag\left[0 \cdot I_{a_1}, ..., 0 \cdot I_{a_{i-1}}, 1 \cdot I_{a_i}, 0 \cdot I_{a_{i+1}}, ..., 0 \cdot I_{a_s}\right] \cdot P^{-1} \Rightarrow (\text{διότι } \varphi_{i0}(\lambda_k) = \delta_{ik})$$

$$\varphi_{i0}(A) = P \cdot diag\left[O_{a_1}, ..., O_{a_i - 1}, I_{a_i}, O_{a_{i+1}}, ..., O_{a_s}\right] \cdot P^{-1}.$$

Αλλά $Z_{i0} = \varphi_{i0}(A)$, άρα είναι

$Z_{i0} = P \cdot diag\left[O_{a_1}, ..., O_{a_i - 1}, I_{a_i}, O_{a_{i+1}}, ..., O_{a_s}\right] \cdot P^{-1}$, για κάθε $i = 1, 2, ..., s$.

Παράδειγμα 1.

Να βρεθούν οι συνιστώσες της μήτρας $A = \begin{bmatrix} 6 & -4 & -9 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & -4 & -7 \end{bmatrix}$.

Λύση

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της μήτρας A είναι

$$p(x) = \begin{vmatrix} 6-x & -4 & -9 \\ 1 & 1-x & -1 \\ 4 & -4 & -7-x \end{vmatrix} = -x^3 + 7x - 6 = -(x+3)(x-1)(x-2).$$

Στον επόμενο πίνακα φαίνονται οι ιδιοτιμές της μήτρας με όλα τα στοιχεία τους.

Ιδιοτιμές	**Ιδιοδιανύσματα**	**Αλγεβρικές Πολλαπλότητες**	**Γεωμετρικές Πολλαπλότητες**	**Δείκτες**
$\lambda_1 = -3$	$v_1 = (1,0,1)$	$a_1 = 1$	$\gamma_1 = 1$	$d_1 = 1$
$\lambda_2 = 1$	$v_2 = (1,-1,1)$	$a_2 = 1$	$\gamma_2 = 1$	$d_2 = 1$
$\lambda_3 = 2$	$v_3 = (1,1,0)$	$a_3 = 1$	$\gamma_3 = 1$	$d_3 = 1$

Όλες οι ιδιοτιμές έχουν δείκτη 1, άρα η μήτρα είναι απλή και συνεπώς η Jordan μορφή της μήτρας είναι $J_A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Η μήτρα μετάβασης είναι $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, με αντίστροφη $P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

i) Υπολογισμός της συνιστώσας που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = -3$.

Είναι $Z_{10} = P \cdot diag[1,0,0] \cdot P^{-1} \Rightarrow Z_{10} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

ii) Υπολογισμός της συνιστώσας που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = 1$.

Είναι $Z_{20} = P \cdot diag[0,1,0] \cdot P^{-1} \Rightarrow Z_{20} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$.

iii) Υπολογισμός της συνιστώσας που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_3 = 2$.

Είναι $Z_{30} = P \cdot diag[0,0,1] \cdot P^{-1} \Rightarrow Z_{30} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Παράδειγμα 2.

Να βρεθούν οι συνιστώσες της μήτρας $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 6 & 4 & -3 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Λύση

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της μήτρας A είναι

$$p(x)=\begin{vmatrix} 2-x & 0 & 1 \\ 6 & 4-x & -3 \\ 2 & 0 & 3-x \end{vmatrix} = -x^3+9x^2-24x+16=-(x-1)(x-4)^2 .$$

Στον επόμενο πίνακα φαίνονται οι ιδιοτιμές της μήτρας με όλα τα στοιχεία τους.

Ιδιοτιμές	**Ιδιοδιανύσματα**	**Αλγεβρικές Πολλαπλότητες**	**Γεωμετρικές Πολλαπλότητες**	**Δείκτες**
$\lambda_1=1$	$v_1=(-1,3,1)$	$a_1=1$	$\gamma_1=1$	$d_1=1$
$\lambda_2=4$	$v_{21}=(1,0,2)$ $v_{22}=(0,1,0)$	$a_2=2$	$\gamma_2=2$	$d_2=1$

Όλες οι ιδιοτιμές έχουν δείκτη 1, άρα η μήτρα είναι απλή και συνεπώς η Jordan μορφή της είναι

$$J_A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Η μήτρα μετάβασης είναι $P=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, με αντίστροφη $P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 6 & 3 & -3 \end{bmatrix}$.

i) Υπολογισμός της συνιστώσας που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1=1$.

Είναι $Z_{10}=P\cdot diag\left[1,0,0\right]\cdot P^{-1} \Rightarrow Z_{10}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -6 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

ii) Υπολογισμός της συνιστώσας που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_2=4$.

Είναι $Z_{20}=P\cdot diag\left[0,1,1\right]\cdot P^{-1} \Rightarrow Z_{20}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 6 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Παράδειγμα 3.

Να βρεθούν οι συνιστώσες της μήτρας $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Λύση

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της μήτρας A είναι

$$p(x)=\begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1-x & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1-x \end{vmatrix} = x^4-4x^3+16x-16=(x+2)(x-2)^3 .$$

Στον επόμενο πίνακα φαίνονται οι ιδιοτιμές της μήτρας με όλα τα στοιχεία τους.

Ιδιοτιμές	**Ιδιοδιανύσματα**	**Αλγεβρικές Πολλαπλότητες**	**Γεωμετρικές Πολλαπλότητες**	**Δείκτες**
$\lambda_1 = -2$	$v_1 = (-1,1,1,1)$	$a_1 = 1$	$\gamma_1 = 1$	$d_1 = 1$
$\lambda_2 = 2$	$v_{21} = (1,0,0,1)$ $v_{22} = (1,0,1,0)$ $v_{23} = (1,1,0,0)$	$a_2 = 3$	$\gamma_2 = 3$	$d_2 = 1$

Όλες οι ιδιοτιμές έχουν δείκτη 1, άρα η μήτρα είναι απλή και συνεπώς η Jordan μορφή της είναι $J_A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Η μήτρα μετάβασης είναι $P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, με αντίστροφη $P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$.

i) Υπολογισμός της συνιστώσας που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = -2$.

Είναι $Z_{10} = P \cdot diag\left[1,0,0,0\right] \cdot P^{-1} \Rightarrow Z_{10} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

ii) Υπολογισμός της συνιστώσας που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = 2$.

Είναι $Z_{20} = P \cdot diag\left[0,1,1,1\right] \cdot P^{-1} \Rightarrow Z_{20} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.

Παράδειγμα 4.

Να βρεθούν οι συνιστώσες της μήτρας $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Λύση

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της μήτρας A είναι

$$p(x)=\begin{vmatrix} 1-x & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1-x & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3-x & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 3-x \end{vmatrix}=x^4-8x^3+22x^2-24x+9=(x-1)^2(x-3)^3 .$$

Στον επόμενο πίνακα φαίνονται οι ιδιοτιμές της μήτρας με όλα τα στοιχεία τους.

Ιδιοτιμές	**Ιδιοδιανύσματα**	**Αλγεβρικές Πολλαπλότητες**	**Γεωμετρικές Πολλαπλότητες**	**Δείκτες**
$\lambda_1=1$	$v_{11}=(1,0,0,1)$ $v_{12}=(0,1,0,0)$	$a_1=2$	$\gamma_1=2$	$d_1=1$
$\lambda_2=3$	$v_{21}=(0,1,0,1)$ $v_{22}=(1,-1,1,0)$	$a_2=2$	$\gamma_2=2$	$d_2=1$

Όλες οι ιδιοτιμές έχουν δείκτη 1, άρα η μήτρα είναι απλή και συνεπώς η Jordan μορφή της είναι

$$J_A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Η μήτρα μετάβασης είναι $P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, με αντίστροφη $P^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

i) Υπολογισμός της συνιστώσας που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1=1$.

Είναι $Z_{10}=P\cdot diag\left[1,1,0,0\right]\cdot P^{-1}\Rightarrow Z_{10}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

ii) Υπολογισμός της συνιστώσας που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_2=3$.

Είναι $Z_{20}=P\cdot diag\left[0,0,1,1\right]\cdot P^{-1}\Rightarrow Z_{20}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Πρόταση 3.

Έστω μήτρα $A\in M_n(K)$ και $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_s$ οι διαφορετικές μεταξύ τους ιδιοτιμές της. Αν η μήτρα A δεν είναι

απλή τότε για κάθε ιδιοτιμή λ_i υπάρχουν d_i πολυώνυμα παρεμβολής φ_{ij} , $j=0,1,...,d_i-1$.

Το πολυώνυμο $\varphi_{ij}(x)$ ορίζεται από τις σχέσεις

$\varphi_{ij}^{(r)}(\lambda_k)=\delta_{ik}\cdot\delta_{jr}$, με $i,k=1,2,...,s$ και $j,r=0,1,...,d_i-1$.

Απόδειξη

Για συγκεκριμένο i και συγκεκριμένο j για το πολυώνυμο $\varphi_{ij}(x)$ ισχύουν οι σχέσεις

$\varphi_{ij}(\lambda_i)=\delta_{j0}$,

$\varphi_{ij}^{(1)}(\lambda_i)=\delta_{j1}$,

$\varphi_{ij}^{(2)}(\lambda_i)=\delta_{j2}$,

…

$\varphi_{ij}^{(d_i-1)}(\lambda_i)=\delta_{j,d_i-1}$ και

$\varphi_{ij}(\lambda_k)=\varphi_{ij}^{(1)}(\lambda_k)=\varphi_{ij}^{(2)}(\lambda_k)=...=\varphi_{ij}^{(d_k-1)}(\lambda_k)=0$, για κάθε $k=1,2,...,s$ με $k\neq i$.

Οι σχέσεις αυτές είναι σε πλήθος n και διαφορετικές μεταξύ τους, συνεπώς υπάρχει μοναδικό πολυώνυμο βαθμού $n-1$, το οποίο ικανοποιεί τις σχέσεις αυτές. Το πολυώνυμο αυτό βρίσκεται με την μέθοδο των διαιρεμένων διαφορών του Hermite.

Ορισμός 2.

Αν η μήτρα $A\in M_n(K)$ δεν είναι απλή και $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_s$ οι διαφορετικές μεταξύ τους ιδιοτιμές της, τότε για κάθε ιδιοτιμή λ_i ορίζουμε τις μήτρες $Z_{ij}=\varphi_{ij}(A)$, $j=0,1,2,...,d_i-1$. Οι μήτρες αυτές λέγονται συνιστώσες της μήτρας A, οι οποίες αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ_i.

Πόρισμα 2.

Αν η μήτρα $A\in M_n(K)$ δεν είναι απλή, τότε η μήτρα αυτή έχει $d_1+d_2+...+d_s$ διαφορετικές μεταξύ τους συνιστώσες.

Λήμμα

Για κάθε πολυωνυμική συνάρτηση $f(x)$ και για κάθε τετραγωνική μήτρα $A\in M_\nu(K)$ της μορφής

$$A=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 1 & ... & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & ... & 0 & 0 & 0\\ . & . & . & . & . & . & .\\ 0 & 0 & 0 & ... & \lambda & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}$$ ισχύει

$$f(A)=\begin{bmatrix} f(\lambda) & \frac{f^{(1)}(\lambda)}{1!} & \frac{f^{(2)}(\lambda)}{2!} & ... & \frac{f^{(n-3)}(\lambda)}{(n-3)!} & \frac{f^{(n-2)}(\lambda)}{(n-2)!} & \frac{f^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!} \\ 0 & f(\lambda) & \frac{f^{(1)}(\lambda)}{1!} & ... & \frac{f^{(\nu-4)}(\lambda)}{(n-4)!} & \frac{f^{(n-3)}(\lambda)}{(n-3)!} & \frac{f^{(n-2)}(\lambda)}{(n-2)!} \\ 0 & 0 & f(\lambda) & ... & \frac{f^{(n-5)}(\lambda)}{(n-5)!} & \frac{f^{(n-4)}(\lambda)}{(n-4)!} & \frac{f^{(n-3)}(\lambda)}{(n-3)!} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & ... & f(\lambda) & \frac{f^{(1)}(\lambda)}{1!} & \frac{f^{(2)}(\lambda)}{2!} \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & f(\lambda) & \frac{f^{(1)}(\lambda)}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & f(\lambda) \end{bmatrix}.$$

Πρόταση 4.

Αν η μήτρα $A \in M_n(K)$ δεν είναι απλή και $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s$ οι διαφορετικές μεταξύ τους ιδιοτιμές της, τότε είναι $Z_{ij} = \frac{1}{j!} P \cdot diag\left[O_{a_1}, ..., O_{a_i - 1}, N_{d_i}^{j}, O_{\gamma_i - 1}, O_{a_i + 1}, ..., O_{a_s}\right] \cdot P^{-1}$.

Απόδειξη

Η Jordan Μορφή της μήτρας A είναι $J_A = diag\left[J_1, ..., J_{i-1}, J_i, J_{i+1}, ..., J_s\right]$, όπου

$J_i = diag\left[M_{d_i}, \lambda_i I_{\gamma_i - 1}\right]$ με

$$M_{d_i} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & ... & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & ... & \lambda_i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}.$$

Η μήτρα M_{d_i} είναι της μορφής $d_i \times d_i$, για κάθε $i = 1, 2, ..., s$.

Έστω φ_{ij}, $i = 1, 2, ..., s$ και $j = 0, 1, 2, ..., d_i - 1$ τα πολυώνυμα παρεμβολής για τα οποία ισχύουν $\varphi_{ij}^{(r)}(\lambda_k) = \delta_{ik} \cdot \delta_{jr}$, για κάθε $i, k = 1, 2, ..., s$ και για κάθε $j, r = 0, 1, 2, ..., d_i - 1$.

Προφανώς είναι $\varphi_{ij}^{(r)}(\lambda_k) = \begin{cases} 1, & \text{αν } i = k \text{ και } j = r \\ 0, & \text{αν } i \neq k \text{ ή } j \neq r \end{cases}$

Για κάθε $i \neq k$ είναι

$$\varphi_{ij}(M_{d_k})=\begin{bmatrix} \varphi_{ij}(\lambda_k) & \frac{\varphi_{ij}^{(1)}(\lambda_k)}{1!} & \frac{\varphi_{ij}^{(2)}(\lambda_k)}{2!} & \ldots & \frac{\varphi_{ij}^{(d_i-3)}(\lambda_k)}{(d_i-3)!} & \frac{\varphi_{ij}^{(d_i-2)}(\lambda_k)}{(d_i-2)!} & \frac{\varphi_{ij}^{(d_i-1)}(\lambda_k)}{(d_i-1)!} \\ 0 & \varphi_{ij}(\lambda_k) & \frac{\varphi_{ij}^{(1)}(\lambda_k)}{1!} & \ldots & \frac{\varphi_{ij}^{(d_i-4)}(\lambda_k)}{(d_i-4)!} & \frac{\varphi_{ij}^{(d_i-3)}(\lambda_k)}{(d_i-3)!} & \frac{\varphi_{ij}^{(d_i-2)}(\lambda_k)}{(d_i-2)!} \\ 0 & 0 & \varphi_{ij}(\lambda_k) & \ldots & \frac{\varphi_{ij}^{(d_i-5)}(\lambda_k)}{(d_i-5)!} & \frac{\varphi_{ij}^{(d_i-4)}(\lambda_k)}{(d_i-4)!} & \frac{\varphi_{ij}^{(d_i-3)}(\lambda_k)}{(d_i-3)!} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \varphi_{ij}(\lambda_k) & \frac{\varphi_{ij}^{(1)}(\lambda_k)}{1!} & \frac{\varphi_{ij}^{(2)}(\lambda_k)}{2!} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \varphi_{ij}(\lambda_k) & \frac{\varphi_{ij}^{(1)}(\lambda_k)}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \varphi_{ij}(\lambda_k) \end{bmatrix} \Rightarrow \varphi_{ij}(M_{d_k})=O_{d_k}$$

Επίσης για $i=k$ είναι

$$\varphi_{ij}(M_{d_i})=\begin{bmatrix} \varphi_{ij}(\lambda_i) & \frac{\varphi_{ij}^{(1)}(\lambda_i)}{1!} & \frac{\varphi_{ij}^{(2)}(\lambda_i)}{2!} & \ldots & \frac{\varphi_{ij}^{(d_i-3)}(\lambda_i)}{(d_i-3)!} & \frac{\varphi_{ij}^{(d_i-2)}(\lambda_i)}{(d_i-2)!} & \frac{\varphi_{ij}^{(d_i-1)}(\lambda_i)}{(d_i-1)!} \\ 0 & \varphi_{ij}(\lambda_i) & \frac{\varphi_{ij}^{(1)}(\lambda_i)}{1!} & \ldots & \frac{\varphi_{ij}^{(d_i-4)}(\lambda_i)}{(d_i-4)!} & \frac{\varphi_{ij}^{(d_i-3)}(\lambda_i)}{(d_i-3)!} & \frac{\varphi_{ij}^{(d_i-2)}(\lambda_i)}{(d_i-2)!} \\ 0 & 0 & \varphi_{ij}(\lambda_i) & \ldots & \frac{\varphi_{ij}^{(d_i-5)}(\lambda_i)}{(d_i-5)!} & \frac{\varphi_{ij}^{(d_i-4)}(\lambda_i)}{(d_i-4)!} & \frac{\varphi_{ij}^{(d_i-3)}(\lambda_i)}{(d_i-3)!} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \varphi_{ij}(\lambda_i) & \frac{\varphi_{ij}^{(1)}(\lambda_i)}{1!} & \frac{\varphi_{ij}^{(2)}(\lambda_i)}{2!} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \varphi_{ij}(\lambda_i) & \frac{\varphi_{ij}^{(1)}(\lambda_i)}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \varphi_{ij}(\lambda_i) \end{bmatrix}$$

Αλλά είναι

$\varphi_{ij}(\lambda_i)=\delta_{j0}$

$\varphi_{ij}^{(1)}(\lambda_i)=\delta_{j1}$

$\varphi_{ij}^{(2)}(\lambda_i)=\delta_{j2}$

………………..

$\varphi_{ij}^{(d_i-1)}(\lambda_i)=\delta_{j,d_i-1}$

οπότε είναι

$$\varphi_{ij}(M_{d_i}) = \begin{bmatrix} \delta_{j0} & \frac{\delta_{j1}}{1!} & \frac{\delta_{j2}}{2!} & \dots & \frac{\delta_{j,d_i-3}}{(d_i-3)!} & \frac{\delta_{j,d_i-2}}{(d_i-2)!} & \frac{\delta_{j,d_i-1}}{(d_i-1)!} \\ 0 & \delta_{j0} & \frac{\delta_{j1}}{1!} & \dots & \frac{\delta_{j,d_i-4}}{(d_i-4)!} & \frac{\delta_{j,d_i-3}}{(d_i-3)!} & \frac{\delta_{j,d_i-2}}{(d_i-2)!} \\ 0 & 0 & \delta_{j0} & \dots & \frac{\delta_{j,d_i-5}}{(d_i-5)!} & \frac{\delta_{j,d_i-4}}{(d_i-4)!} & \frac{\delta_{j,d_i-3}}{(d_i-3)!} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \delta_{j0} & \frac{\delta_{j1}}{1!} & \frac{\delta_{j2}}{2!} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \delta_{j0} & \frac{\delta_{j1}}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \delta_{j0} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\varphi_{ij}(M_{d_i}) = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \frac{1}{j!} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{1}{j!} & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{j!} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \varphi_{ij}(M_{d_i}) = \frac{1}{j!} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Θέτουμε $N_{d_i} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, τότε είναι $\varphi_{ij}(M_{d_i}) = \frac{1}{j!} \cdot N_{d_i}^j$, όπου $N_{d_i}^j$ είναι η j δύναμη της μήτρας N_{d_i} και με $\varphi_{i0}(M_{d_i}) = I_{d_i}$.

Επίσης για την μήτρα

$$\lambda_i \cdot I_{\gamma_i - 1} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \dots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda_i \end{bmatrix},$$

ισχύει

$$\varphi_{ij}(\lambda_i I_{\gamma_i-1}) = \begin{bmatrix} \varphi_{ij}(\lambda_i) & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_{ij}(\lambda_i) & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_{ij}(\lambda_i) & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \varphi_{ij}(\lambda_i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \varphi_{ij}(\lambda_i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \varphi_{ij}(\lambda_i) \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\varphi_{ij}(\lambda_i \cdot I_{\gamma_i-1}) = \begin{bmatrix} \delta_{j0} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{j0} & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{j0} & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \delta_{j0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \delta_{j0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \delta_{j0} \end{bmatrix} \Rightarrow \varphi_{ij}(\lambda_i \cdot I_{\gamma_i-1}) = \delta_{j0} \cdot I_{\gamma_i-1}.$$

Προφανώς είναι $\varphi_{i0}(\lambda_i \cdot I_{\gamma_i-1}) = I_{\gamma_i-1}$ και επειδή $\varphi_{i0}(M_{d_i}) = I_{d_i}$ είναι

$$\varphi_{i0}(J_i) = \varphi_{i0}\left(diag[M_{d_i}, \lambda_i I_{\gamma_i-1}]\right) \Rightarrow$$

$$\varphi_{i0}(J_i) = diag\left[\varphi_{i0}(M_{d_i}), \varphi_{i0}(\lambda_i I_{\gamma_i-1})\right] \Rightarrow$$

$$\varphi_{i0}(J_i) = diag\left[I_{d_i}, I_{\gamma_i-1}\right] \Rightarrow \varphi_{i0}(J_i) = I_{a_i}.$$

Για κάθε $k = 1,2,\ldots,s$ με $k \neq i$ είναι

$$\varphi_{i0}(J_k) = \varphi_{i0}\left(diag[M_{d_k}, \lambda_k I_{\gamma_k-1}]\right) \Rightarrow$$

$$\varphi_{i0}(J_k) = diag\left[\varphi_{i0}(M_{d_k}), \varphi_{i0}(\lambda_k I_{\gamma_k-1})\right] \Rightarrow$$

$$\varphi_{i0}(J_k) = diag\left[O_{d_i}, O_{\gamma_i-1}\right] \Rightarrow \varphi_{i0}(J_k) = O_{a_k}.$$

Είναι $A = P \cdot J_A \cdot P^{-1} \Rightarrow \varphi_{i0}(A) = P \cdot \varphi_{i0}(J_A) \cdot P^{-1} \Rightarrow$

$$\varphi_{i0}(A) = P \cdot diag\left[\varphi_{i0}(J_1), \ldots, \varphi_{i0}(J_{i-1}), \varphi_{i0}(J_i), \varphi_{i0}(J_{i+1}), \ldots, \varphi_{i0}(J_s)\right] \cdot P^{-1} \Rightarrow$$

$$\varphi_{i0}(A) = P \cdot diag\left[O_{a_1}, \ldots, O_{a_{i-1}}, I_{a_1}, O_{a_{i+1}}, \ldots, O_{a_s}\right] \cdot P^{-1}.$$

Αλλά $Z_{i0} = \varphi_{i0}(A)$, άρα είναι

$$Z_{i0} = P \cdot diag\left[O_{a_1}, \ldots, O_{a_i-1}, I_{a_i}, O_{a_{i+1}}, \ldots, O_{a_s}\right] \cdot P^{-1}$$, για κάθε $i = 1,2,\ldots,s$.

Η σχέση αυτή γράφεται και $Z_{i0} = P \cdot diag\left[O_{a_1}, \ldots, O_{a_i-1}, \frac{1}{0!} N_{d_i}^0, O_{a_{i+1}}, \ldots, O_{a_s}\right] \cdot P^{-1}$.

Για κάθε $j \neq 0$ είναι

$$A = P \cdot J_A \cdot P^{-1} \Rightarrow \ \varphi_{ij}(A) = \varphi_{ij}(P \cdot J_A \cdot P^{-1}) \Rightarrow$$

$$\varphi_{ij}(A) = P \cdot \varphi_{ij}(J_A) \cdot P^{-1} \Rightarrow$$

$$\varphi_{ij}(A) = P \cdot diag\left[\varphi_{ij}(J_1),...,\varphi_{ij}(J_{i-1}),\varphi_{ij}(J_i),\varphi_{ij}(J_{i+1}),...,\varphi_{ij}(J_s)\right] \cdot P^{-1} \Rightarrow$$

$$\varphi_{ij}(A) = P \cdot diag\left[O_{a_1},...,O_{a_{i-1}},\frac{1}{j!}N_{d_i}^j,O_{\gamma_i-1},O_{a_{i+1}},...,O_{a_s}\right] \cdot P^{-1} \Rightarrow$$

$$Z_{ij} = \frac{1}{j!} P \cdot diag\left[O_{a_1},...,O_{a_{i-1}},N_{d_i}^j,O_{\gamma_i-1},O_{a_{i+1}},...,O_{a_s}\right] \cdot P^{-1}.$$

Παράδειγμα 1.

Να βρεθούν οι συνιστώσες της μήτρας $A = \begin{bmatrix} -3 & -11 & -1 \\ 6 & 14 & 5 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$.

Λύση

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της μήτρας A είναι

$$p(x) = \begin{vmatrix} -3-x & -11 & -1 \\ 6 & 14-x & 5 \\ -1 & -1 & -1-x \end{vmatrix} = -x^3 + 10x^2 - 17x + 8 = -(x-1)^2(x-8).$$

Στον επόμενο πίνακα φαίνονται οι ιδιοτιμές της μήτρας με όλα τα στοιχεία τους.

Ιδιοτιμές	Ιδιοδιανύσματα	Αλγεβρικές Πολλαπλότητες	Γεωμετρικές Πολλαπλότητες	Δείκτες
$\lambda_1 = 1$	$v_1 = (-3,1,1)$	$a_1 = 2$	$\gamma_1 = 1$	$d_1 = 2$
$\lambda_2 = 8$	$v_2 = (-1,1,0)$	$a_2 = 1$	$\gamma_2 = 1$	$d_2 = 1$

Υπάρχει ιδιοτιμή με δείκτη μεγαλύτερο του 1, άρα η μήτρα δεν είναι απλή και συνεπώς η Jordan μορφή της είναι $J_A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$.

Το ελάχιστο πολυώνυμο της μήτρας A είναι $p_m(x) = (x-8)(x-1)^2$. Ο μηδενικός χώρος της μήτρας $(A - \lambda_1 I_3)^2$ παράγεται από τα διανύσματα $(-2,1,0)$ και $(-1,0,1)$. Συνεπώς έχουμε

Ιδιοτιμές	Ιδιοδιανύσματα
$\lambda_1 = 1$	$v_{11} = (-3,1,1)$ $v_{12} = (-2,1,0)$ ή $v_{12} = (-1,0,1)$
$\lambda_2 = 8$	$v_2 = (-1,1,0)$

Η μήτρα μετάβασης είναι $P=\begin{bmatrix}-3 & -2 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$, με αντίστροφη $P^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ -1 & -1 & -2\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}$.

i) Υπολογισμός των συνιστωσών που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_1=1$.

A) Υπολογισμός της συνιστώσας Z_{10}.

Είναι $N_{d_1}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$, με $N_{d_1}^0=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, οπότε $Z_{10}=P\cdot diag\left[N_{d_1}^0,0\right]\cdot P^{-1}\Rightarrow Z_{10}=\begin{bmatrix}2 & 2 & 1\\ -1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

B) Υπολογισμός της συνιστώσας Z_{11}.

Είναι $Z_{11}=P\cdot diag\left[N_{d_1}^1,0\right]\cdot P^{-1}\Rightarrow Z_{11}=\begin{bmatrix}3 & 3 & 6\\ -1 & -1 & -2\\ -1 & -1 & -2\end{bmatrix}$.

ii) Υπολογισμός της συνιστώσας που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_2=8$.

Είναι $Z_{20}=P\cdot diag[0,0,1]\cdot P^{-1}\Rightarrow Z_{20}=\begin{bmatrix}-1 & -2 & -1\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$.

Παράδειγμα 2.

Να βρεθούν οι συνιστώσες της μήτρας $A=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0 & 2 & 1\\ -1 & 0 & 0 & 1 & 3\end{bmatrix}$.

Λύση

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της μήτρας A είναι

$$p(x)=\begin{vmatrix}-x & -1 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 2-x & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1-x & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0 & 2-x & 1\\ -1 & 0 & 0 & 1 & 3-x\end{vmatrix}=-x^5+8x^4-25x^3+38x^2-28x+8=-(x-1)^2(x-2)^3.$$

Στον επόμενο πίνακα φαίνονται οι ιδιοτιμές της μήτρας με όλα τα στοιχεία τους.

Ιδιοτιμές	**Ιδιοδιανύσματα**	**Αλγεβρικές Πολλαπλότητες**	**Γεωμετρικές Πολλαπλότητες**	**Δείκτες**
$\lambda_1=1$	$v_{11}=(1,0,0,1,0)$ $v_{12}=(0,0,1,0,0)$	$a_1=2$	$\gamma_1=2$	$d_1=1$
$\lambda_2=2$	$v_2=(1,0,1,0,1)$	$a_2=3$	$\gamma_2=1$	$d_2=3$

Υπάρχει ιδιοτιμή με δείκτη μεγαλύτερο του 1, άρα η μήτρα δεν είναι απλή.

Η Jordan μορφή της μήτρας A είναι $J_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Το ελάχιστο πολυώνυμο της μήτρας A είναι $p_m(x) = (x-1)(x-2)^3$.

Ο μηδενικός χώρος της μήτρας $(A-\lambda_2 I_5)^2$ παράγεται από τα διανύσματα $(0,0,-1,1,0)$ και $(1,0,1,0,1)$.

Ο μηδενικός χώρος της μήτρας $(A-\lambda_2 I_5)^3$ παράγεται από τα διανύσματα $(1,-1,0,1,0)$, $(1,-1,1,0,0)$ και $(0,1,0,0,1)$. Συνεπώς έχουμε

Ιδιοτιμές	**Ιδιοδιανύσματα**
$\lambda_1 = 1$	$v_{11} = (1,0,0,1,0)$ $v_{12} = (0,0,1,0,0)$
$\lambda_2 = 2$	$v_{21} = (1,0,1,0,1)$ $v_{22} = (0,0,-1,1,0)$ $v_{23} = (-1,1,0,-1,0)$

Η μήτρα μετάβασης είναι $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, με αντίστροφη $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

i) Υπολογισμός της συνιστώσας που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1$.

Είναι $Z_{10} = P \cdot diag[1,1,000] \cdot P^{-1} \Rightarrow Z_{10} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

ii) Υπολογισμός των συνιστωσών που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = 2$.

A) Υπολογισμός της συνιστώσας Z_{20}.

Είναι $N_{d_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, με $N_{d_2}^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

οπότε $Z_{20} = P \cdot diag\left[0,0,N_{d_2}^0\right] \cdot P^{-1} \Rightarrow Z_{20} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Β) Υπολογισμός της συνιστώσας Z_{21}.

Είναι $Z_{21} = \dfrac{1}{1!} P \cdot diag\left[0,0,N_{d_1}^1\right] \cdot P^{-1} \Rightarrow Z_{21} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Γ) Υπολογισμός της συνιστώσας Z_{22}.

Είναι $Z_{22} = \dfrac{1}{2!} P \cdot diag\left[0,0,N_{d_1}^2\right] \cdot P^{-1} \Rightarrow Z_{22} = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Παράδειγμα 3.

Να βρεθούν οι συνιστώσες της μήτρας $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$.

Λύση

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της μήτρας A είναι

$$p(x) = \begin{vmatrix} -x & -2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3-x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2-x & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 4-x & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 4-x \end{vmatrix} = -x^5 + 13x^4 - 67x^3 + 171x^2 - 216x + 108 = -(x-2)^2(x-3)^3 .$$

Στον επόμενο πίνακα φαίνονται οι ιδιοτιμές της μήτρας με όλα τα στοιχεία τους.

Ιδιοτιμές	Ιδιοδιανύσματα	Αλγεβρικές Πολλαπλότητες	Γεωμετρικές Πολλαπλότητες	Δείκτες
$\lambda_1 = 2$	$v_1 = (1,0,0,1,0)$	$a_1 = 2$	$\gamma_1 = 1$	$d_1 = 2$
$\lambda_2 = 3$	$v_{21} = (0,1,0,0,1)$ $v_{22} = (1,-1,1,0,1)$	$a_2 = 3$	$\gamma_2 = 2$	$d_2 = 2$

Υπάρχει ιδιοτιμή με δείκτη μεγαλύτερο του 1, άρα η μήτρα δεν είναι απλή.

Η Jordan μορφή της μήτρας A είναι $J_A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Το ελάχιστο πολυώνυμο της μήτρας A είναι $p_m(x) = (x-2)^2(x-3)^2$.

Ο μηδενικός χώρος της μήτρας $(A-\lambda_1 I_5)^2$ παράγεται από τα διανύσματα $(0,0,1,0,0)$ και $(1,0,0,1,0)$.

Ο μηδενικός χώρος της μήτρας $(A-\lambda_2 I_5)^2$ παράγεται από τα διανύσματα $(1,-1,0,1,0)$, $(1,-1,1,0,0)$ και $(0,1,0,0,1)$. Συνεπώς έχουμε

Ιδιοτιμές	**Ιδιοδιανύσματα**
$\lambda_1 = 2$	$v_{11} = (1,0,0,1,0)$ $v_{12} = (0,0,1,0,0)$
$\lambda_2 = 2$	$v_{21} = (1,-1,1,0,1)$ $v_{21} = (0,1,0,0,1)$ $v_{23} = (-1,1,0,-1,0)$

Μια μήτρα μετάβασης είναι $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, με αντίστροφη $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

i) Υπολογισμός των συνιστωσών που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = 2$.

A) Υπολογισμός της συνιστώσας Z_{10}.

Είναι $N_{d_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, με $N_{d_1}^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

οπότε $Z_{10} = P \cdot diag\left[N_{d_1}^0, 0,0,0\right] \cdot P^{-1} \Rightarrow$

$$Z_{10} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

B) Υπολογισμός της συνιστώσας Z_{11}.

Είναι $Z_{11} = \frac{1}{1!} P \cdot diag\left[N_{d_1}^1, 0,0,0\right] \cdot P^{-1} \Rightarrow$

$$Z_{11}=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

ii) Υπολογισμός των συνιστωσών που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = 3$.

A) Υπολογισμός της συνιστώσας Z_{20}.

Είναι $N_{d_2}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, με $N_{d_2}^0=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

οπότε $Z_{20} = P \cdot diag\left[0,0,N_{d_2}^0\right] \cdot P^{-1} \Rightarrow$

$$Z_{20}=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

B) Υπολογισμός της συνιστώσας Z_{21}.

Είναι $Z_{21} = \dfrac{1}{1!} P \cdot diag\left[0,0,N_{d_1}^1\right] \cdot P^{-1} \Rightarrow$

$$Z_{21}=\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

3.2 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΣΥΝΙΣΤΩΣΩΝ

Έστω μια μήτρα $A \in M_n(K)$ και Z_{ij}, με $i = 1,2,...,s$ και $j = 0,1,...,d_i - 1$ είναι οι συνιστώσες του, τότε ισχύουν οι ιδιότητες

Ιδιότητα 1.

Είναι $Z_{i0} \cdot Z_{ij} = Z_{ij}$, για κάθε $i = 1,2,...,s$ και $j = 0,1,...,d_i - 1$.

Απόδειξη

Είναι

$Z_{i0} = P \cdot diag\left[O_{a_1},...,O_{a_{i-1}},I_{a_i},O_{a_{i+1}},...,O_{a_s}\right] \cdot P^{-1} \Rightarrow$

$$Z_{i0}=P\cdot diag\left[O_{a_1},...,O_{a_{i-1}},I_{d_i},I_{\gamma_i-1},O_{a_{i+1}},...,O_{a_s}\right]\cdot P^{-1}$$

και

$$Z_{ij}=\frac{1}{j!}P\cdot diag\left[O_{a_1},...,O_{a_i-1},N_{d_i}^{j},O_{\gamma_i-1},O_{a_i+1},...,O_{a_s}\right]\cdot P^{-1}$$

συνεπώς είναι

$$Z_{i0}\cdot Z_{ij}=\left(P\cdot diag\left[O_{a_1},...,O_{a_{i-1}},I_{d_i},I_{\gamma_i-1},O_{a_{i+1}},...,O_{a_s}\right]\cdot P^{-1}\right)\cdot\left(\frac{1}{j!}P\cdot diag\left[O_{a_1},...,O_{a_i-1},N_{d_i}^{j},O_{\gamma_i-1},O_{a_i+1},...,O_{a_s}\right]\cdot P^{-1}\right)$$

άρα

$$Z_{i0}\cdot Z_{ij}=\frac{1}{j!}P\cdot\left(diag\left[O_{a_1},...,O_{a_{i-1}},I_{d_i},I_{\gamma_i-1},O_{a_{i+1}},...,O_{a_s}\right]\cdot diag\left[O_{a_1},...,O_{a_i-1},N_{d_i}^{j},O_{\gamma_i-1},O_{a_i+1},...,O_{a_s}\right]\right)\cdot P^{-1}\Rightarrow$$

$$Z_{i0}\cdot Z_{ij}=\frac{1}{j!}P\cdot diag\left[O_{a_1},...,O_{a_i-1},\left(I_{d_i}\cdot N_{d_i}^{j}\right),\left(I_{\gamma_i-1}\cdot O_{\gamma_i-1}\right),O_{a_i+1},...,O_{a_s}\right]\cdot P^{-1}\Rightarrow$$

$$Z_{i0}\cdot Z_{ij}=\frac{1}{j!}P\cdot diag\left[O_{a_1},...,O_{a_i-1},N_{d_i}^{j},O_{\gamma_i-1},O_{a_i+1},...,O_{a_s}\right]\cdot P^{-1}\Rightarrow Z_{i0}\cdot Z_{ij}=Z_{ij}\,.$$

Ιδιότητα 2.

Είναι $Z_{i0}\cdot Z_{jk}=O_n$, για κάθε $i\neq j$.

Απόδειξη

Έστω $i<j$, τότε είναι

$$Z_{i0}=P\cdot diag\left[O_{a_1},...,O_{a_{i-1}},I_{a_i},O_{a_{i+1}},...,O_{a_s}\right]\cdot P^{-1}\Rightarrow$$

και

$$Z_{jk}=\frac{1}{k!}P\cdot diag\left[O_{a_1},...,O_{a_j-1},N_{d_j}^{k},O_{\gamma_j-1},O_{a_j+1},...,O_{a_s}\right]\cdot P^{-1}$$

συνεπώς είναι

$$Z_{i0}\cdot Z_{jk}=\left(P\cdot diag\left[O_{a_1},...,O_{a_{i-1}},I_{d_i},I_{\gamma_i-1},O_{a_{i+1}},...,O_{a_s}\right]\cdot P^{-1}\right)\cdot\left(\frac{1}{k!}P\cdot diag\left[O_{a_1},...,O_{a_j-1},N_{d_j}^{k},O_{\gamma_j-1},O_{a_j+1},...,O_{a_s}\right]\cdot P^{-1}\right)$$

άρα

$$Z_{i0}\cdot Z_{jk}=\frac{1}{k!}P\cdot\left(diag\left[O_{a_1},...,O_{a_{i-1}},I_{d_i},I_{\gamma_i-1},O_{a_{i+1}},...,O_{a_s}\right]\cdot diag\left[O_{a_1},...,O_{a_j-1},N_{d_j}^{k},O_{\gamma_j-1},O_{a_j+1},...,O_{a_s}\right]\right)\cdot P^{-1}\Rightarrow$$

$$Z_{i0}\cdot Z_{jk}=\frac{1}{k!}P\cdot diag\left[O_{a_1},...,O_{a_{i-1}},I_{d_i}\cdot O_{d_i},I_{\gamma_i-1}\cdot O_{\gamma_i-1},O_{a_{i+1}},...,O_{a_j-1},O_{d_j}\cdot N_{d_j}^{k},O_{\gamma_j-1},O_{a_j+1},...,O_{a_s}\right]\cdot P^{-1}\Rightarrow$$

$$Z_{i0}\cdot Z_{jk}=\frac{1}{k!}P\cdot diag\left[O_{a_1},...,O_{a_{i-1}},O_{d_i},O_{\gamma_i-1},O_{a_{i+1}},...,O_{a_j-1},O_{d_j}\cdot N_{d_j}^{k},O_{\gamma_j-1},O_{a_j+1},...,O_{a_s}\right]\cdot P^{-1}\Rightarrow$$

$$Z_{i0}\cdot Z_{jk}=\frac{1}{k!}P\cdot diag\left[O_{a_1},...,O_{a_{i-1}},O_{a_i}O_{a_{i+1}},...,O_{a_j-1},O_{a_j},O_{a_j+1},...,O_{a_s}\right]\cdot P^{-1}\Rightarrow$$

$$Z_{i0} \cdot Z_{jk} = \frac{1}{k!} P \cdot O_n \cdot P^{-1} \Rightarrow Z_{i0} \cdot Z_{jk} = O_n$$

Ιδιότητα 3.

Είναι $Z_{10} + Z_{20} + ... + Z_{s0} = I_n$.

Απόδειξη

Είναι

$$Z_{10} + Z_{20} + ... + Z_{s0} =$$

$$P \cdot diag\left[I_{a_1}, O_{a_2}, ..., O_{a_i}, ..., O_{a_s}\right] \cdot P^{-1} +$$

$$P \cdot diag\left[O_{a_1}, I_{a_2}, ..., O_{a_i}, ..., O_{a_s}\right] \cdot P^{-1} + ... +$$

$$P \cdot diag\left[O_{a_1}, O_{a_2}, ..., O_{a_i}, ..., I_{a_s}\right] \cdot P^{-1} \Rightarrow$$

$$Z_{10} + Z_{20} + ... + Z_{s0} = P \cdot diag\left[I_{a_1}, I_{a_2}, ..., I_{a_s}\right] \cdot P^{-1} \Rightarrow$$

$$Z_{10} + Z_{20} + ... + Z_{s0} = P \cdot I_n \cdot P^{-1} \Rightarrow$$

$$Z_{10} + Z_{20} + ... + Z_{s0} = P \cdot P^{-1} \Rightarrow$$

$$Z_{10} + Z_{20} + ... + Z_{s0} = I_n$$

Ιδιότητα 4.

Είναι $Z_{i0} \cdot Z_{j0} = \delta_{ij} Z_{i0}$, για κάθε $i, j = 1, 2, ..., s$

Απόδειξη

Είναι

$$Z_{i0} = P \cdot diag\left[O_{a_1}, ..., O_{a_{i-1}}, I_{a_i}, O_{a_{i+1}}, ..., O_{a_s}\right] \cdot P^{-1}$$

και

$$Z_{j0} = P \cdot diag\left[O_{a_1}, ..., O_{a_{j-1}}, I_{a_j}, O_{a_{j+1}}, ..., O_{a_s}\right] \cdot P^{-1}$$

Αν $i = j$ τότε είναι

$$Z_{i0} \cdot Z_{j0} = Z_{i0} \cdot Z_{i0} \Rightarrow$$

$$Z_{i0} \cdot Z_{i0} = \left(P \cdot diag\left[O_{a_1}, ..., O_{a_{i-1}}, I_{a_i}, O_{a_{i+1}}, ..., O_{a_s}\right] \cdot P^{-1}\right) \cdot \left(P \cdot diag\left[O_{a_1}, ..., O_{a_{i-1}}, I_{a_i}, O_{a_{i+1}}, ..., O_{a_s}\right] \cdot P^{-1}\right) \Rightarrow$$

$$Z_{i0} \cdot Z_{i0} = P \cdot \left(diag\left[O_{a_1}, ..., O_{a_{i-1}}, I_{a_i}, O_{a_{i+1}}, ..., O_{a_s}\right] \cdot diag\left[O_{a_1}, ..., O_{a_{i-1}}, I_{a_i}, O_{a_{i+1}}, ..., O_{a_s}\right]\right) \cdot P^{-1} \Rightarrow$$

$$Z_{i0} \cdot Z_{i0} = P \cdot diag\left[O_{a_1}, ..., O_{a_{i-1}}, I_{a_i}, O_{a_{i+1}}, ..., O_{a_s}\right] \cdot P^{-1} \Rightarrow Z_{i0} \cdot Z_{i0} = Z_{i0}$$

Αν είναι $i \neq j$ τότε για $i < j$ είναι

$$Z_{i0} \cdot Z_{j0} = \left(P \cdot diag\left[O_{a_1}, ..., O_{a_{i-1}}, I_{a_i}, O_{a_{i+1}}, ..., O_{a_s}\right] \cdot P^{-1}\right) \cdot \left(P \cdot diag\left[O_{a_1}, ..., O_{a_{j-1}}, I_{a_j}, O_{a_{j+1}}, ..., O_{a_s}\right] \cdot P^{-1}\right) \Rightarrow$$

$$Z_{i0}\cdot Z_{j0}=P\cdot\left(diag\left[O_{a_1},...,O_{a_{i-1}},I_{a_i},O_{a_{i+1}},...,O_{a_s}\right]\cdot diag\left[O_{a_1},...,O_{a_{j-1}},I_{a_j},O_{a_{j+1}},...,O_{a_s}\right]\right)\cdot P^{-1}\Rightarrow$$

$$Z_{i0}\cdot Z_{j0}=P\cdot diag\left[O_{a_1},...,O_{a_{i-1}},I_{a_i}\cdot O_{a_i},O_{a_{i+1}},...,O_{a_{j-1}},O_{a_j}\cdot I_{a_j},O_{a_{j+1}},...,O_{a_s}\right]\cdot P^{-1}\Rightarrow$$

$$Z_{i0}\cdot Z_{j0}=P\cdot diag\left[O_{a_1},...,O_{a_{i-1}},O_{a_i},O_{a_{i+1}},...,O_{a_{j-1}},O_{a_j},O_{a_{j+1}},...,O_{a_s}\right]\cdot P^{-1}\Rightarrow$$

$$Z_{i0}\cdot Z_{j0}=P\cdot O_n\cdot P^{-1}\Rightarrow Z_{i0}\cdot Z_{j0}=O_n .$$

Όμοια δουλεύουμε αν είναι $i>j$.

Ιδιότητα 5.

Είναι $Z_{i0}^r=Z_{i0}$, για κάθε $r=1,2,3,...,s$.

Απόδειξη

Είναι

$$Z_{i0}=P\cdot diag\left[O_{a_1},...,O_{a_{i-1}},I_{a_i},O_{a_{i+1}},...,O_{a_s}\right]\cdot P^{-1}\Rightarrow$$

$$Z_{i0}^r=\left(P\cdot diag\left[O_{a_1},...,O_{a_{i-1}},I_{a_i},O_{a_{i+1}},...,O_{a_s}\right]\cdot P^{-1}\right)^r\Rightarrow$$

$$Z_{i0}^r=P\cdot\left(diag\left[O_{a_1},...,O_{a_{i-1}},I_{a_i},O_{a_{i+1}},...,O_{a_s}\right]\right)^r\cdot P^{-1}\Rightarrow$$

$$Z_{i0}^r=P\cdot diag\left[O_{a_1},...,O_{a_{i-1}},I_{a_i}^r,O_{a_{i+1}},...,O_{a_s}\right]\cdot P^{-1}\Rightarrow$$

$$Z_{i0}^r=P\cdot diag\left[O_{a_1},...,O_{a_{i-1}},I_{a_i},O_{a_{i+1}},...,O_{a_s}\right]\cdot P^{-1}\Rightarrow Z_{i0}^r=Z_{i0} .$$

Ιδιότητα 6.

Οι μήτρες Z_{i0} , $i=1,2,...,s$ είναι προβολικές μήτρες.

Απόδειξη

Μια μήτρα $B\in M_n(K)$ λέγεται προβολική μήτρα, αν και μόνο αν, ισχύει $B^2=B$.

Από την προηγούμενη ιδιότητα προκύπτει ότι $Z_{i0}^2=Z_{i0}$, άρα οι μήτρες Z_{i0} , $i=1,2,...,s$ είναι προβολικές μήτρες.

Ιδιότητα 7.

Είναι $Range(Z_{i0})=Kernel(I_n-Z_{i0})$ και $Range(I_n-Z_{i0})=Kernel(Z_{i0})$.

Απόδειξη

Είναι $Range(Z_{i0})=\left\{x\in K^n : Z_{i0}\cdot x=x\right\}\Rightarrow$

$$Range(Z_{i0})=\left\{x\in K^n : Z_{i0}\cdot x-x=O_{n\times 1}\right\}\Rightarrow$$

$$Range(Z_{i0})=\left\{x\in K^n : -Z_{i0}\cdot x+x=O_{n\times 1}\right\}\Rightarrow$$

$Range(Z_{i0}) = \{x \in K^n : (I_n - Z_{i0}) \cdot x = O_{n\times 1}\} \Rightarrow$

$Range(Z_{i0}) = Kernel(I_n - Z_{i0})$.

Επίσης είναι

$Range(I_n - Z_{i0}) = \{x \in K^n : (I_n - Z_{i0}) \cdot x = x\} \Rightarrow$

$Range(I_n - Z_{i0}) = \{x \in K^n : I_n \cdot x - Z_{i0} \cdot x = x\} \Rightarrow$

$Range(I_n - Z_{i0}) = \{x \in K^n : I_n \cdot Z_{i0} \cdot x = O_{n\times 1}\} \Rightarrow$

$Range(I_n - Z_{i0}) = Kernel(Z_{i0})$.

Ιδιότητα 8.

Είναι $Range(Z_{i0}) = \mathrm{Im}(Z_{i0})$.

Απόδειξη

Προφανώς είναι $Range(Z_{i0}) \subseteq \mathrm{Im}(Z_{i0})$. (1)

Έστω $y \in \mathrm{Im}(Z_{i0})$, τότε υπάρχει $x \in K^n$ τέτοιο ώστε

$y = Z_{i0} \cdot x \Rightarrow Z_{i0} \cdot y = Z_{i0} \cdot (Z_{i0} \cdot x) \Rightarrow$

$Z_{i0} \cdot y = Z_{i0}^2 \cdot x \Rightarrow Z_{i0} \cdot y = Z_{i0} \cdot x \Rightarrow$

$Z_{i0} \cdot y = y \Rightarrow y \in Range(Z_{i0}) \Rightarrow$

$\mathrm{Im}(Z_{i0}) \subseteq Range(Z_{i0})$. (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $Range(Z_{i0}) = \mathrm{Im}(Z_{i0})$.

Ιδιότητα 9.

Η μήτρα $I_n - Z_{i0}$ είναι προβολική μήτρα και ισχύει $Range(I_n - Z_{i0}) = \mathrm{Im}(I_n - Z_{i0})$.

Απόδειξη

Είναι

$(I_n - Z_{i0})^2 = I_n^2 - 2I_n \cdot Z_{i0} + Z_{i0}^2 \Rightarrow$

$(I_n - Z_{i0})^2 = I_n - 2Z_{i0} + Z_{i0} \Rightarrow (I_n - Z_{i0})^2 = I_n - Z_{i0}$, άρα ο $I_n - Z_{i0}$ είναι προβολική μήτρα.

Προφανώς είναι $Range(I_n - Z_{i0}) \subseteq \mathrm{Im}(I_n - Z_{i0})$. (1)

Έστω $y \in \mathrm{Im}(I_n - Z_{i0})$, τότε υπάρχει $x \in K^n$ τέτοιο ώστε

$y = (I_n - Z_{i0}) \cdot x \Rightarrow (I_n - Z_{i0}) \cdot y = (I_n - Z_{i0})^2 \cdot x \Rightarrow$

$(I_n - Z_{i0}) \cdot y = (I_n - Z_{i0}) \cdot x \Rightarrow (I_n - Z_{i0}) \cdot y = y \Rightarrow$

$y \in Range(I_n - Z_{i0}) \Rightarrow \mathrm{Im}(I_n - Z_{i0}) \subseteq Range(I_n - Z_{i0})$. (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $Range(I_n - Z_{i0}) = \mathrm{Im}(I_n - Z_{i0})$.

Ιδιότητα 10.

Είναι $K^n = Range(Z_{i0}) \oplus Kernel(Z_{i0})$.

Απόδειξη

Έστω $x \in Range(Z_{i0}) \cap Kernel(Z_{i0}) \Rightarrow$

$x \in Range(Z_{i0})$ και $x \in Kernel(Z_{i0}) \Rightarrow$

$Z_{i0} \cdot x = x$ και $Z_{i0} \cdot x = 0 \Rightarrow x = 0$,

Άρα είναι $Range(Z_{i0}) \cap Kernel(Z_{i0}) = \{O_n\}$.

Προφανώς είναι $Range(Z_{i0}) \oplus Kernel(Z_{i0}) \subseteq K^n$. (1)

Έστω $x \in K^n$ τυχαίο, τότε είναι $x = I_n \cdot x \Rightarrow \; x = (I_n - Z_{i0}) \cdot x + Z_{i0} \cdot x$.

Είναι

$(I_n - Z_{i0}) \cdot x \in Kernel(Z_{i0})$, γιατί $Z_{i0} \cdot ((I_n - Z_{i0}) \cdot x) = (Z_{i0} - Z_{i0}^2) \cdot x = (Z_{i0} - Z_{i0}) \cdot x = 0$

και $Z_{i0} \cdot x \in Range(Z_{i0})$, γιατί $Z_{i0} \cdot (Z_{i0} \cdot x) = Z_{i0}^2 \cdot x = (Z_{i0} \cdot x)$.

Συνεπώς είναι

$x \in Range(Z_{i0}) \oplus Kernel(Z_{i0}) \Rightarrow \; K^n \subseteq Range(Z_{i0}) \oplus Kernel(Z_{i0})$. (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι

$K^n = Range(Z_{i0}) \oplus Kernel(Z_{i0})$.

Ιδιότητα 11.

Είναι $Z_{i,j+1} = \dfrac{1}{j+1}(A - \lambda_i I_n) \cdot Z_{ij}$, για κάθε $i = 1,2,...,s$ και $j = 0,1,2,...,d_i - 1$.

Απόδειξη

Η Jordan μορφή της μήτρας A είναι

$J_A = diag\left[J_{a_1},...,J_{a_{i-1}},J_{a_i},J_{a_{i+1}},...,J_{a_s}\right]$, επίσης είναι

$I_n = diag\left[I_{a_1},...,I_{a_{i-1}},I_{a_i},I_{a_{i+1}},...,I_{a_s}\right]$

Συνεπώς είναι

$$J_A - \lambda_i I_n = diag\left[J_{a_1} - \lambda_i I_{a_1},...,J_{a_{i-1}} - \lambda_i I_{a_{i-1}},J_{a_i} - \lambda_i I_{a_i},J_{a_{i+1}} - \lambda_i I_{a_{i+1}},...,J_{a_s} - \lambda_i I_{a_s}\right] \Rightarrow$$

$$J_A - \lambda_i I_n = diag\left[J_{a_1} - \lambda_i I_{a_1},...,J_{a_{i-1}} - \lambda_i I_{a_{i-1}},N_{d_i},O_{\gamma_i - 1},J_{a_{i+1}} - \lambda_i I_{a_{i+1}},...,J_{a_s} - \lambda_i I_{a_s}\right]$$

Αλλά είναι $A = P \cdot J_A \cdot P^{-1} \Rightarrow J_A = P^{-1} \cdot A \cdot P$, άρα

$$P^{-1} \cdot A \cdot P - P^{-1} \cdot (\lambda_i I_n) \cdot P = diag\left[J_{a_1} - \lambda_i I_{a_1},...,J_{a_{i-1}} - \lambda_i I_{a_{i-1}},N_{d_i},O_{\gamma_i - 1},J_{a_{i+1}} - \lambda_i I_{a_{i+1}},...,J_{a_s} - \lambda_i I_{a_s}\right] \Rightarrow$$

$$P^{-1}\cdot\left(A-\lambda_i I_n\right)\cdot P=diag\left[J_{a_1}-\lambda_i I_{a_1},...,J_{a_{i-1}}-\lambda_i I_{a_{i-1}},N_{d_i},O_{\gamma_i-1},J_{a_{i+1}}-\lambda_i I_{a_{i+1}},...,J_{a_s}-\lambda_i I_{a_s}\right]\Rightarrow$$

$$P^{-1}\cdot\left(A-\lambda_i I_n\right)\cdot P\cdot P^{-1}=diag\left[J_{a_1}-\lambda_i I_{a_1},...,J_{a_{i-1}}-\lambda_i I_{a_{i-1}},N_{d_i},O_{\gamma_i-1},J_{a_{i+1}}-\lambda_i I_{a_{i+1}},...,J_{a_s}-\lambda_i I_{a_s}\right]\cdot P^{-1}\Rightarrow$$

$$P^{-1}\cdot\left(A-\lambda_i I_n\right)=diag\left[J_{a_1}-\lambda_i I_{a_1},...,J_{a_{i-1}}-\lambda_i I_{a_{i-1}},N_{d_i},O_{\gamma_i-1},J_{a_{i+1}}-\lambda_i I_{a_{i+1}},...,J_{a_s}-\lambda_i I_{a_s}\right]\cdot P^{-1}\Rightarrow$$

$$P^{-1}\cdot\left(A-\lambda_i I_n\right)\cdot Z_{ij}=diag\left[J_{a_1}-\lambda_i I_{a_1},...,J_{a_{i-1}}-\lambda_i I_{a_{i-1}},N_{d_i},O_{\gamma_i-1},J_{a_{i+1}}-\lambda_i I_{a_{i+1}},...,J_{a_s}-\lambda_i I_{a_s}\right]\cdot P^{-1}\cdot Z_{ij}\Rightarrow$$

$$P^{-1}\cdot\left(A-\lambda_i I_n\right)\cdot Z_{ij}\cdot P=diag\left[J_{a_1}-\lambda_i I_{a_1},...,J_{a_{i-1}}-\lambda_i I_{a_{i-1}},N_{d_i},O_{\gamma_i-1},J_{a_{i+1}}-\lambda_i I_{a_{i+1}},...,J_{a_s}-\lambda_i I_{a_s}\right]\cdot P^{-1}\cdot Z_{ij}\cdot P$$

Αλλά είναι

$$Z_{ij}=\frac{1}{j!}P\cdot diag\left[O_{a_1},...,O_{a_i-1},N_{d_i}^{j},O_{\gamma_i-1},O_{a_i+1},...,O_{a_s}\right]\cdot P^{-1}\Rightarrow$$

$$P^{-1}\cdot Z_{ij}\cdot P=\frac{1}{j!}diag\left[O_{a_1},...,O_{a_i-1},N_{d_i}^{j},O_{\gamma_i-1},O_{a_i+1},...,O_{a_s}\right]$$

Συνεπώς παίρνουμε

$$P^{-1}\cdot\left(A-\lambda_i I_n\right)\cdot Z_{ij}\cdot P=\frac{1}{j!}diag\left[O_{a_1},...,O_{a_{i-1}},N_{d_i}^{j+1},O_{\gamma_i-1},O_{a_{i+1}},...,O_{a_s}\right]\Rightarrow$$

$$P^{-1}\cdot\left(A-\lambda_i I_n\right)\cdot Z_{ij}\cdot P=(j+1)\frac{1}{(j+1)!}diag\left[O_{a_1},...,O_{a_{i-1}},N_{d_i}^{j+1},O_{\gamma_i-1},O_{a_{i+1}},...,O_{a_s}\right]\Rightarrow$$

$$\left(A-\lambda_i I_n\right)\cdot Z_{ij}=(j+1)\frac{1}{(j+1)!}P\cdot diag\left[O_{a_1},...,O_{a_{i-1}},N_{d_i}^{j+1},O_{\gamma_i-1},O_{a_{i+1}},...,O_{a_s}\right]\cdot P^{-1}\Rightarrow$$

$$\left(A-\lambda_i I_n\right)\cdot Z_{ij}=(j+1)Z_{i,j+1}\Rightarrow Z_{i,j+1}=\frac{1}{j+1}\left(A-\lambda_i I_n\right)\cdot Z_{ij}$$

Ιδιότητα 12.

Είναι $Z_{ij}=\frac{1}{j!}\left(A-\lambda_i I_n\right)^j\cdot Z_{i0}$, για κάθε $i=1,2,...,s$ και $j=0,1,2,...,d_i-1$.

Απόδειξη

Από την προηγούμενη ιδιότητα προκύπτει ότι

$$Z_{i1}=\frac{1}{1}\left(A-\lambda_i I_n\right)Z_{i0}\ ,$$

$$Z_{i2}=\frac{1}{2}\left(A-\lambda_i I_n\right)Z_{i1},\ldots,\ Z_{i,j-1}=\frac{1}{j-1}\left(A-\lambda_i I_n\right)Z_{i,j-2}\ \text{και}$$

$$Z_{ij}=\frac{1}{j}\left(A-\lambda_i I_n\right)Z_{i,j-1}$$

Πολλαπλασιάζοντας τις σχέσεις αυτές κατά μέλη προκύπτει ότι $Z_{ij}=\frac{1}{j!}\left(A-\lambda_i I_n\right)^j\cdot Z_{i0}$.

Παράδειγμα

Να βρεθούν οι συνιστώσες της μήτρας $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

Λύση

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της μήτρας A είναι

$$p(x)=\begin{vmatrix} 2-x & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4-x & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3-x & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3-x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3-x \end{vmatrix}=-(x-3)^5 .$$

Στον επόμενο πίνακα φαίνονται οι ιδιοτιμές της μήτρας με όλα τα στοιχεία τους.

Ιδιοτιμές	**Ιδιοδιανύσματα**	**Αλγεβρικές Πολλαπλότητες**	**Γεωμετρικές Πολλαπλότητες**	**Δείκτες**
$\lambda_1=3$	$v_{11}=(-1,0,0,0,-1)$ $v_{12}=(-1,0,-1,0,-1)$ $v_{13}=(-1,0,0,-1,-1)$ $v_{14}=(1,-1,1,0,0)$ $v_{15}=(0,0,0,0,1)$	$a_1=5$	$\gamma_1=2$	$d_1=4$

Υπάρχει ιδιοτιμή με δείκτη μεγαλύτερο του 1, άρα η μήτρα δεν είναι απλή.

Η Jordan μορφή της μήτρας A είναι $J_A=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Η μήτρα μετάβασης είναι

$$P=\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ με } P^{-1}=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Το ελάχιστο πολυώνυμο της μήτρας A είναι $p_m(x)=(x-3)^4$.

Υπολογισμός των $d_1=4$ συνιστωσών που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_1=3$.

$Z_{10}=P\cdot diag[1,1,1,1,1]\cdot P^{-1}\Rightarrow$

$$Z_{10}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}.$$

Είναι $Z_{11}=\frac{1}{1!}\left(A-3I_5\right)^1\cdot Z_{10}\Rightarrow\ Z_{11}=A-3I_5\Rightarrow$

$$Z_{11}=\begin{bmatrix}-1&0&0&1&1\\1&1&0&0&-1\\-1&-1&0&1&1\\0&1&0&0&0\\0&1&0&1&0\end{bmatrix}$$

$$Z_{12}=\frac{1}{2!}\left(A-3I_5\right)^2\cdot Z_{10}\Rightarrow\ Z_{12}=\frac{1}{2}\left(A-3I_5\right)^2\Rightarrow Z_{12}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&2&0&0&-1\\0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\1&1&0&0&-1\\1&2&0&0&-1\end{bmatrix}$$

$$Z_{13}=\frac{1}{3!}\left(A-3I_5\right)^3\cdot Z_{10}\Rightarrow\ Z_{13}=\frac{1}{6}\left(A-3I_5\right)^6\Rightarrow Z_{13}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}1&1&0&0&-1\\0&0&0&0&0\\1&1&0&0&-1\\0&0&0&0&0\\1&1&0&0&-1\end{bmatrix}.$$

Ιδιότητα 13.

Είναι $Z_{ij}\cdot Z_{ik}=\binom{j+k}{j}Z_{i,j+k}$

Απόδειξη

Είναι $Z_{ij}\cdot Z_{ik}=\frac{1}{j!}\left(A-\lambda_i I_n\right)^j Z_{i0}\cdot\frac{1}{k!}\left(A-\lambda_i I_n\right)^k Z_{i0}\Rightarrow$

$$Z_{ij}\cdot Z_{ik}=\frac{1}{j!k!}\left(A-\lambda_i I_n\right)^{j+k}Z_{i0}\Rightarrow$$

$$Z_{ij}\cdot Z_{ik}=\frac{(j+k)!}{j!k!}\cdot\frac{1}{(j+k)!}\left(A-\lambda_i I_n\right)^{j+k}Z_{i0}\Rightarrow$$

$$Z_{ij}\cdot Z_{ik}=\binom{j+k}{j}\cdot\frac{1}{(j+k)!}\left(A-\lambda_i I_n\right)^{j+k}Z_{i0}\Rightarrow Z_{ij}\cdot Z_{ik}=\binom{j+k}{j}Z_{i,j+k}$$

Πόρισμα

Είναι $Z_{ij_1} \cdot Z_{ij_2} \cdot \ldots \cdot Z_{ij_k} = \binom{j_1 + j_2 + \ldots + j_k}{j_1, j_2, \ldots, j_k} Z_{i, j_1 + j_2 + \ldots + j_k}$

Ιδιότητα 14.

Είναι $Z_{ij}^r = \dfrac{(j \cdot r)!}{(j!)^r} Z_{i, j \cdot r}$, αν $j \cdot r = 1, 2, \ldots, d_i - 1$ και $Z_{ij}^r = O_n$, αν $j \cdot r = d_i, d_i + 1, d_i + 2, \ldots$

Απόδειξη

Για κάθε $j \cdot r = 1, 2, \ldots, d_i - 1$ είναι $Z_{ij} = \dfrac{1}{j!}(A - \lambda_i I_n)^j Z_{i0}$ οπότε

$$Z_{ij}^r = \frac{1}{(j!)^r}(A - \lambda_i I_n)^{j \cdot r} Z_{i0}^r \Rightarrow Z_{ij}^r = \frac{1}{(j!)^r}(A - \lambda_i I_n)^{j \cdot r} Z_{i0} \Rightarrow$$

$$Z_{ij}^r = \frac{(j \cdot r)!}{(j!)^r} \cdot \frac{1}{(j \cdot r)!}(A - \lambda_i I_n)^{j \cdot r} Z_{i0} \Rightarrow Z_{ij}^r = \frac{(j \cdot r)!}{(j!)^r} \cdot Z_{i, j \cdot r}$$

Για κάθε $j \cdot r = d_i, d_i + 1, d_i + 2, \ldots$ είναι $Z_{i, j \cdot r}^r = O_n$ άρα $Z_{ij}^r = O_n$

Ιδιότητα 15.

Είναι $Z_{ij}^r \neq Z_{ij}$, για κάθε $r = 2, 3, \ldots, d_i - 1$.

Απόδειξη

$$Z_{ij} = \frac{1}{j!} P \cdot diag\left[O_{a_1}, \ldots, O_{a_i - 1}, N_{d_i}^j, O_{\gamma_i - 1}, O_{a_i + 1}, \ldots, O_{a_s}\right] \cdot P^{-1} \Rightarrow$$

$$Z_{ij}^r = \left(\frac{1}{j!}\right)^r P \cdot diag\left[O_{a_1}, \ldots, O_{a_i - 1}, \left(N_{d_i}^j\right)^r, O_{\gamma_i - 1}, O_{a_i + 1}, \ldots, O_{a_s}\right] \cdot P^{-1} \Rightarrow Z_{ij}^r \neq Z_{ij}$$

Ιδιότητα 16.

Οι συνιστώσες Z_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, s$, $j = 0, 1, \ldots, d_i - 1$ μιας μήτρας A είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Απόδειξη

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις

Β) Η μήτρα A δεν είναι απλή. Τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $d_i > 1$.

Τότε είναι $Z_{ij} = \dfrac{1}{j!} P \cdot diag\left[O_{a_1}, \ldots, O_{a_i - 1}, N_{d_i}^j, O_{\gamma_i - 1}, O_{a_i + 1}, \ldots, O_{a_s}\right] \cdot P^{-1}$, για κάθε $i = 1, 2, \ldots, s$, $j = 0, 1, \ldots, d_i - 1$

Έστω ότι

$$\sum_{i=1}^{s} \left(\sum_{j=0}^{d_i - 1} \lambda_{ij} Z_{ij} \right) = O_n \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{j=0}^{d_i-1}\lambda_{ij}\frac{1}{j!}P\cdot diag\left[O_{a_1},...,O_{a_i-1},N_{d_i}^{j},O_{\gamma_i-1},O_{a_i+1},...,O_{a_s}\right]\cdot P^{-1}\right)=O_n \Rightarrow$$

$$P\cdot\sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{j=0}^{d_i-1}\lambda_{ij}\frac{1}{j!}diag\left[O_{a_1},...,O_{a_i-1},N_{d_i}^{j},O_{\gamma_i-1},O_{a_i+1},...,O_{a_s}\right]\right)\cdot P^{-1}=O_n \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{j=0}^{d_i-1}diag\left[O_{a_1},...,O_{a_i-1},\frac{\lambda_{ij}}{j!}N_{d_i}^{j},O_{\gamma_i-1},O_{a_i+1},...,O_{a_s}\right]\right)\cdot=O_n \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{s}\left(diag\left[O_{a_1},...,O_{a_i-1},\lambda_{i0}I_{a_i}+\frac{\lambda_{i1}}{1!}N_{d_i}^{1}+...+\frac{\lambda_{i,d_i-1}}{(d_i-1)!}N_{d_i}^{d_i-1},O_{\gamma_i-1},O_{a_i+1},...,O_{a_s}\right]\right)=O_n \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{s}\left(diag\left[O_{a_1},...,O_{a_i-1},\sum_{j=1}^{d_i-1}\left(\frac{\lambda_{ij}}{j!}N_{d_i}^{j}\right),O_{\gamma_i-1},O_{a_i+1},...,O_{a_s}\right]\right)=O_n \Rightarrow$$

$$diag\left[\sum_{j=1}^{d_1-1}\left(\frac{\lambda_{1j}}{j!}N_{d_1}^{j}\right),O_{\gamma_1-1},...,\sum_{j=1}^{d_i-1}\left(\frac{\lambda_{ij}}{j!}N_{d_i}^{j}\right),O_{\gamma_i-1},...,\sum_{j=1}^{d_s-1}\left(\frac{\lambda_{sj}}{j!}N_{d_s}^{j}\right),O_{\gamma_s-1}\right]=O_n \Rightarrow$$

$\sum_{j=1}^{d_i-1}\left(\frac{\lambda_{ij}}{j!}N_{d_i}^{j}\right)=O_n$, για κάθε $i=1,2,...,s$.

Επειδή οι μήτρες $N_{d_i}^{j}$, για κάθε $j=0,1,...,d_i-1$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες, θα είναι $\lambda_{ij}=0$ για κάθε $j=0,1,...,d_i-1$.

Τελικά είναι $\lambda_{ij}=0$ για κάθε $j=0,1,...,d_i-1$ και για κάθε $i=1,2,...,s$, που αυτό σημαίνει ότι οι μήτρες Z_{ij} , $i=1,2,...,s$, $j=0,1,...,d_i-1$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Ιδιότητα 17.

Αν η μήτρα A είναι απλή τότε ισχύουν οι σχέσεις

α) Οι συνιστώσες Z_{i0} , $i=1,2,...,s$, της μήτρας A είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

β) $A=\sum_{i=1}^{s}\lambda_i Z_{i0}$, οπότε $A^k=\sum_{i=1}^{s}\lambda_i^k Z_{i0}$, $k\in N^*$.

γ) $\lambda I_n - A=\sum_{i=1}^{s}(\lambda-\lambda_i)Z_{i0}$.

δ) $\left(A-\lambda_i I_n\right)\cdot Z_{i0}=O_n$, για κάθε $i=1,2,...,s$.

ε) Αν $\sigma(A)=\{\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_s\}$ είναι το φάσμα της μήτρας A , τότε για κάθε $\lambda\in\mathbb{C}-\sigma(A)$ η μήτρα $\lambda I_n - A$ είναι αντιστρέψιμη και ισχύει $\left(\lambda I_n - A\right)^{-1}=\sum_{i=1}^{s}\frac{1}{\lambda-\lambda_i}Z_{i0}$

Απόδειξη

α) Επειδή η μήτρα A είναι απλή θα είναι $d_i=1$, για κάθε $i=1,2,...,s$.

Επίσης είναι $Z_{i0} = P \cdot diag\left[O_{a_1},...,O_{a_{i-1}},I_{a_i},O_{a_{i+1}},...,O_{a_s}\right] \cdot P^{-1}$.

Έστω ότι $\sum_{i=1}^{s} \lambda_i Z_{i0} = O_n \Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{s} \lambda_i P \cdot diag\left[O_{a_1},...,O_{a_{i-1}},I_{a_i},O_{a_{i+1}},...,O_{a_s}\right] \cdot P^{-1} = O_n \Rightarrow$$

$$P \cdot \left(\sum_{i=1}^{s} \lambda_i diag\left[O_{a_1},...,O_{a_{i-1}},I_{a_i},O_{a_{i+1}},...,O_{a_s}\right] \right) \cdot P^{-1} = O_n \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{s} \lambda_i diag\left[O_{a_1},...,O_{a_{i-1}},I_{a_i},O_{a_{i+1}},...,O_{a_s}\right] = O_n \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{s} diag\left[O_{a_1},...,O_{a_{i-1}},\lambda_i I_{a_i},O_{a_{i+1}},...,O_{a_s}\right] = O_n \Rightarrow$$

$$diag\left[\lambda_1 I_{a_1},...,\lambda_{i-1} I_{a_{i-1}},\lambda_i I_{a_i},\lambda_{i+1} I_{a_{i+1}},...,\lambda_s I_{a_s}\right] = O_n \Rightarrow$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_s = 0,$$

που σημαίνει ότι οι συνιστώσες Z_{i0}, $i = 1,2,...,s$ της μήτρας A είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

β) Είναι

$$\sum_{i=1}^{s} \lambda_i Z_{i0} = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \left(P \cdot diag\left[O_{a_1},...,I_{a_i},...,O_{a_s}\right] \cdot P^{-1} \right) \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{s} \lambda_i Z_{i0} = P \cdot \left(\sum_{i=1}^{s} \lambda_i diag\left[O_{a_1},...,I_{a_i},...,O_{a_s}\right] \right) \cdot P^{-1} \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{s} \lambda_i Z_{i0} = P \cdot \left(\sum_{i=1}^{s} diag\left[O_{a_1},...,\lambda_i I_{a_i},...,O_{a_s}\right] \right) \cdot P^{-1} \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{s} \lambda_i Z_{i0} = P \cdot diag\left[\lambda_1 I_{a_1},...,\lambda_i I_{a_i},...,\lambda_s I_{a_s}\right] \cdot P^{-1} \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{s} \lambda_i Z_{i0} = P \cdot J_A \cdot P^{-1} \Rightarrow \sum_{i=1}^{s} \lambda_i Z_{i0} = A$$

γ) Είναι

$$\lambda I_n - A = \lambda \sum_{i=1}^{s} Z_{i0} - A \Rightarrow \lambda I_n - A = \lambda \sum_{i=1}^{s} Z_{i0} - \sum_{i=1}^{s} \lambda_i Z_{i0} \Rightarrow$$

$$\lambda I_n - A = \sum_{i=1}^{s} \left(\lambda Z_{i0} - \lambda_i Z_{i0} \right) \Rightarrow \lambda I_n - A = \sum_{i=1}^{s} \left(\lambda - \lambda_i \right) Z_{i0}$$

δ) Είναι $(A - \lambda_i I_n) \cdot Z_{i0} = \left(P \cdot J_A \cdot P^{-1} - \lambda_i I_n \right) \cdot Z_{i0} \Rightarrow$

$$(A - \lambda_i I_n) \cdot Z_{i0} = P \cdot \left(J_A - \lambda_i I_n \right) \cdot P^{-1} \cdot Z_{i0} \Rightarrow$$

$$(A - \lambda_i I_n) \cdot Z_{i0} = P \cdot \left(J_A - \lambda_i I_n \right) \cdot P^{-1} \cdot P \cdot diag\left[O_{a_1},...,O_{a_{i-1}},I_{a_i},O_{a_{i+1}},...,O_{a_s}\right] \cdot P^{-1} \Rightarrow$$

$$(A-\lambda_i I_n)\cdot Z_{i0} = P\cdot\left(J_A-\lambda_i I_n\right)\cdot diag\left[O_{a_1},...,O_{a_{i-1}},I_{a_i},O_{a_{i+1}},...,O_{a_s}\right]\cdot P^{-1}\Rightarrow$$

$$(A-\lambda_i I_n)\cdot Z_{i0} = P\cdot diag\left[\left(\lambda_1-\lambda_i\right)I_{a_1},...,\left(\lambda_{i-1}-\lambda_i\right)I_{a_{i-1}},O_{a_i},\left(\lambda_{i+1}-\lambda_i\right)I_{a_{i+1}},...,\left(\lambda_1-\lambda_i\right)I_{a_s}\right]\cdot$$
$$diag\left[O_{a_1},...,O_{a_{i-1}},I_{a_i},O_{a_{i+1}},...,O_{a_s}\right]\cdot P^{-1}\Rightarrow$$

$$(A-\lambda_i I_n)\cdot Z_{i0} = P\cdot diag\left[O_{a_1},...,O_{a_{i-1}},O_{a_i},O_{a_{i+1}},...,O_{a_s}\right]\cdot P^{-1}\Rightarrow$$

$$(A-\lambda_i I_n)\cdot Z_{i0} = P\cdot O_n\cdot P^{-1}\Rightarrow (A-\lambda_i I_n)\cdot Z_{i0}=O_n$$

ε) Επειδή

$\lambda\in\mathbb{C}-\sigma(A)\Rightarrow\ \lambda\neq\lambda_i$, για κάθε $i=1,2,...,s$.

Είναι

$$\left(\lambda I_n - A\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{s}\frac{1}{\lambda-\lambda_i}Z_{i0}\right)=\left(\sum_{i=1}^{s}\left(\lambda I_{a_i}-\lambda_i Z_{i0}\right)\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{s}\frac{1}{\lambda-\lambda_i}Z_{i0}\right)\Rightarrow$$

$$\left(\lambda I_n - A\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{s}\frac{1}{\lambda-\lambda_i}Z_{i0}\right)=\sum_{i,j=1}^{s}\left(\lambda-\lambda_j\right)\frac{1}{\lambda-\lambda_i}Z_{j0}\cdot Z_{i0}\Rightarrow$$

$$\left(\lambda I_n - A\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{s}\frac{1}{\lambda-\lambda_i}Z_{i0}\right)=\sum_{i,j=1}^{s}\left(\lambda-\lambda_j\right)\frac{1}{\lambda-\lambda_i}\delta_{ij}\cdot Z_{i0}\Rightarrow$$

$$\left(\lambda I_n - A\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{s}\frac{1}{\lambda-\lambda_i}Z_{i0}\right)=\sum_{i=1}^{s}(\lambda-\lambda_i)\frac{1}{\lambda-\lambda_i}Z_{i0}\Rightarrow$$

$$\left(\lambda I_n - A\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{s}\frac{1}{\lambda-\lambda_i}Z_{i0}\right)=\sum_{i=1}^{s}Z_{i0}\Rightarrow\left(\lambda I_n - A\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{s}\frac{1}{\lambda-\lambda_i}Z_{i0}\right)=I_n\Rightarrow$$

$$\left(\lambda I_n - A\right)^{-1}=\sum_{i=1}^{s}\frac{1}{\lambda-\lambda_i}Z_{i0}\ .$$

Ιδιότητα 18.

Αν η μήτρα A δεν είναι απλή τότε ισχύουν οι σχέσεις

α) Οι συνιστώσες Z_{ij} , $i=1,2,...,s$, και $j=1,2,...,d_i-1$ της μήτρας A είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

β) $A=\sum_{i=1}^{s}\lambda_i Z_{i0}+\sum_{i=1}^{s}Z_{i1}$

γ) $\lambda I_n - A=\sum_{i=1}^{s}(\lambda-\lambda_i)Z_{i0}-\sum_{i=1}^{s}Z_{i1}$

δ) Αν $\sigma(A)=\left\{\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_s\right\}$ είναι το φάσμα της μήτρας A , τότε για κάθε $\lambda\in\mathbb{C}-\sigma(A)$ η μήτρα $\lambda I_n - A$ είναι αντιστρέψιμη και ισχύει

$$\left(\lambda I_n - A\right)^{-1}=\sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{j=0}^{d_i-1}\frac{j!}{\left(\lambda-\lambda_i\right)^{j+1}}Z_{ij}\right)$$

Απόδειξη

α) Είναι

$$\sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{j=1}^{d_i-1}\lambda_{ij}Z_{ij}\right)=O_n \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{s}\left(\lambda_{i0}Z_{i0}+\lambda_{i1}Z_{i1}+...+\lambda_{i,d_i-1}Z_{i,d_i-1}\right)=O_n \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{s}\left(\lambda_{i0}Z_{i0}+\lambda_{i1}Z_{i1}+...+\lambda_{i,d_i-1}Z_{i,d_i-1}\right)=O_n \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{s}diag\left[O_{a_1},...,O_{a_{i-1}},\lambda_{i0}I_{a_i}+\frac{\lambda_{i1}}{1!}N_{d_i}^{d_i-1}+...+\frac{\lambda_{i,d_i-1}}{(d_i-1)!}N_{d_i}^{d_i-1},O_{a_{i+1}},...,O_{a_s}\right]=O_n \Rightarrow$$

$\lambda_{i0}I_{a_i}+\frac{\lambda_{i1}}{1!}N_{d_i}^{d_i-1}+...+\frac{\lambda_{i,d_i-1}}{(d_i-1)!}N_{d_i}^{d_i-1}=O_n$, για κάθε $i=1,2,...,s \Rightarrow$

$\lambda_{i0}=\lambda_{i1}=...=\lambda_{i,d_i-1}=0 \Rightarrow \lambda_{ij}=0$, για κάθε $i=1,2,...,s$ και για κάθε $j=0,1,...,d_i-1$,

που σημαίνει ότι οι συνιστώσες Z_{ij} της μήτρας A είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

β) Είναι

$$\sum_{i=1}^{s}\lambda_i Z_{i0}+\sum_{i=1}^{s}Z_{i1}=\sum_{i=1}^{s}\lambda_i P\cdot diag\left[O_{a_1},...,I_{a_i},...,O_{a_s}\right]\cdot P^{-1}+\sum_{i=1}^{s}P\cdot diag\left[O_{a_1},...,O_{a_{i-1}},N_{d_i},O_{\gamma_i-1},O_{a_{i+1}},...,O_{a_s}\right]\cdot P^{-1}\Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{s}\lambda_i Z_{i0}+\sum_{i=1}^{s}Z_{i1}=P\cdot\left(\sum_{i=1}^{s}diag\left[O_{a_1},...,O_{a_{i-1}},\lambda_i I_{d_i}+N_{d_i},\lambda_i I_{\gamma_i-1},O_{a_{i+1}},...,O_{a_s}\right]\right)\cdot P^{-1}\Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{s}\lambda_i Z_{i0}+\sum_{i=1}^{s}Z_{i1}=P\cdot diag\left[\lambda_1 I_{d_1}+N_{d_1},\lambda_1 I_{\gamma_1-1},...,\lambda_i I_{d_i}+N_{d_i},\lambda_i I_{\gamma_i-1},...,\lambda_s I_{d_s}+N_{d_s},\lambda_s I_{\gamma_s-1}\right]\cdot P^{-1}\Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{s}\lambda_i Z_{i0}+\sum_{i=1}^{s}Z_{i1}=P\cdot J_A\cdot P^{-1}\Rightarrow \sum_{i=1}^{s}\lambda_i Z_{i0}+\sum_{i=1}^{s}Z_{i1}=A.$$

γ) Είναι

$$\lambda I_n-A=\lambda\sum_{i=1}^{s}Z_{i0}-\sum_{i=1}^{s}\lambda_i Z_{i0}-\sum_{i=1}^{s}Z_{i1}\Rightarrow$$

$$\lambda I_n-A=\sum_{i=1}^{s}(\lambda-\lambda_i)Z_{i0}-\sum_{i=1}^{s}Z_{i1}.$$

δ) Επειδή $\lambda\in\mathbb{C}-\sigma(A)\Rightarrow\lambda\neq\lambda_i$, για κάθε $i=1,2,...,s$.

Θέτουμε

$B=(\lambda I_n-A)\cdot\left(\sum_{j=1}^{s}\left(\sum_{k=0}^{d_j-1}\frac{k!}{(\lambda-\lambda_j)^{k+1}}Z_{jk}\right)\right)$, τότε είναι

$$B=\left(\sum_{i=1}^{s}(\lambda-\lambda_i)Z_{i0}-\sum_{i=1}^{s}Z_{i1}\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{s}\left(\sum_{k=0}^{d_j-1}\frac{k!}{\left(\lambda-\lambda_j\right)^{k+1}}Z_{jk}\right)\right)\Rightarrow$$

$$B=\left(\sum_{i=1}^{s}(\lambda-\lambda_i)Z_{i0}-\sum_{i=1}^{s}Z_{i1}\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{s}\left(\sum_{k=0}^{d_j-1}\frac{k!}{\left(\lambda-\lambda_j\right)^{k+1}}Z_{jk}\right)\right)\Rightarrow$$

$$B=\left(\sum_{i=1}^{s}(\lambda-\lambda_i)Z_{i0}\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{s}\left(\sum_{k=0}^{d_j-1}\frac{k!}{\left(\lambda-\lambda_j\right)^{k+1}}Z_{jk}\right)\right)-\left(\sum_{i=1}^{s}Z_{i1}\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{s}\left(\sum_{k=0}^{d_j-1}\frac{k!}{\left(\lambda-\lambda_j\right)^{k+1}}Z_{jk}\right)\right)\Rightarrow$$

$$B=\sum_{i,j=1}^{s}\left(\sum_{k=0}^{d_j-1}\frac{(\lambda-\lambda_i)k!}{\left(\lambda-\lambda_j\right)^{k+1}}Z_{i0}Z_{jk}\right)-\sum_{i,j=1}^{s}\left(\sum_{k=0}^{d_j-1}\frac{k!}{\left(\lambda-\lambda_j\right)^{k+1}}Z_{i1}Z_{jk}\right)\Rightarrow$$

$$B=\sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{j=0}^{d_i-1}\frac{j!}{\left(\lambda-\lambda_i\right)^{j}}Z_{ij}\right)-\sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{j=0}^{d_i-1}\frac{(j+1)!}{\left(\lambda-\lambda_j\right)^{j+1}}Z_{ij}\right)\Rightarrow$$

(Γιατί για $i\neq j$ είναι $Z_{i0}\cdot Z_{jk}=0$. Επίσης είναι $Z_{i0}\cdot Z_{ik}=Z_{ik}$. Τέλος είναι $Z_{i1}\cdot Z_{ij}=(j+1)Z_{i,j+1}$)

$$B=\sum_{i=1}^{s}Z_{i0}+\sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{j=1}^{d_i-1}\frac{j!}{\left(\lambda-\lambda_i\right)^{j}}Z_{ij}\right)-\sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{j=0}^{d_i-1}\frac{(j+1)!}{\left(\lambda-\lambda_j\right)^{j+1}}Z_{i,j+1}\right)\Rightarrow$$

$$B=\sum_{i=1}^{s}Z_{i0}+\sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{j=1}^{d_i-1}\frac{j!}{\left(\lambda-\lambda_i\right)^{j}}Z_{ij}\right)-\sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{j=1}^{d_i}\frac{j!}{\left(\lambda-\lambda_j\right)^{j}}Z_{ij}\right)\Rightarrow$$

$$B=\sum_{i=1}^{s}Z_{i0}+\sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{j=1}^{d_i-1}\frac{j!}{\left(\lambda-\lambda_i\right)^{j}}Z_{ij}\right)-\sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{j=1}^{d_i-1}\frac{j!}{\left(\lambda-\lambda_j\right)^{j}}Z_{ij}\right)\Rightarrow (\text{γιατί } Z_{i,d_i}=O_n)$$

$$B=\sum_{i=1}^{s}Z_{i0}\Rightarrow B=I_n\Rightarrow\left(\lambda I_n-A\right)^{-1}=\sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{j=0}^{d_i-1}\frac{j!}{\left(\lambda-\lambda_i\right)^{j+1}}Z_{ij}\right)$$

Ιδιότητα 19.

Αν η μήτρα A είναι αντιστρέψιμη με φάσμα $\sigma(A)=\{\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_s\}$, τότε είναι

$$A^{-1}=\sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{j=0}^{d_i-1}\frac{(-1)^j j!}{\lambda_i^{j+1}}Z_{ij}\right).$$

Απόδειξη

Επειδή η μήτρα A είναι αντιστρέψιμη θα είναι $0\notin\sigma(A)$.

Για $\lambda=0$, από την σχέση

$$\left(\lambda I_n - A\right)^{-1} = \sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{j=0}^{d_i-1}\frac{j!}{\left(\lambda-\lambda_i\right)^{j+1}}Z_{ij}\right)$$ προκύπτει ότι

$$\left(0\cdot I_n - A\right)^{-1} = \sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{j=0}^{d_i-1}\frac{j!}{\left(0-\lambda_i\right)^{j+1}}Z_{ij}\right)\Rightarrow$$

$$\left(-A\right)^{-1} = \sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{j=0}^{d_i-1}\frac{j!}{\left(-\lambda_i\right)^{j+1}}Z_{ij}\right)\Rightarrow$$

$$-A^{-1} = \sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{j=0}^{d_i-1}\frac{j!}{(-1)^{j+1}\lambda_i^{j+1}}Z_{ij}\right)\Rightarrow$$

$$A^{-1} = -\sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{j=0}^{d_i-1}\frac{(-1)^{j+1}j!}{\lambda_i^{j+1}}Z_{ij}\right)\Rightarrow$$

$$A^{-1} = \sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{j=0}^{d_i-1}\frac{(-1)^{j}j!}{\lambda_i^{j+1}}Z_{ij}\right).$$

Πόρισμα

Αν η μήτρα A είναι απλή και αντιστρέψιμη με φάσμα $\sigma(A)=\{\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_s\}$ τότε είναι $A^{-1}=\sum_{i=1}^{s}\left(\frac{1}{\lambda_i}Z_{i0}\right)$.

Παράδειγμα 1.

Να βρεθούν οι συνιστώσες της μήτρας $A=\begin{bmatrix}1&2&4&-2\\-1&1&0&1\\0&0&3&0\\-1&2&4&0\end{bmatrix}$. Στη συνέχεια να βρεθεί η αντίστροφη μήτρα.

Λύση

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της μήτρας A είναι

$$p(x)=\begin{vmatrix}1-x&2&4&-2\\-1&1-x&0&1\\0&0&3-x&0\\-1&2&4&-x\end{vmatrix}=x^4-5x^3+5x^2+5x-9=(x+1)(x-1)(x-2)(x-3).$$

Στον επόμενο πίνακα φαίνονται οι ιδιοτιμές της μήτρας με όλα τα στοιχεία τους.

Ιδιοτιμές	Ιδιοδιανύσματα	Αλγεβρικές Πολλαπλότητες	Γεωμετρικές Πολλαπλότητες	Δείκτες
$\lambda_1=-1$	$v_1=(1,0,0,1)$	$a_1=1$	$\gamma_1=1$	$d_1=1$
$\lambda_2=1$	$v_2=(-1,-1,0,-1)$	$a_2=1$	$\gamma_2=1$	$d_2=1$
$\lambda_3=2$	$v_3=(0,1,0,1)$	$a_3=1$	$\gamma_3=1$	$d_3=1$
$\lambda_4=3$	$v_4=(1,0,1,1)$	$a_4=1$	$\gamma_4=1$	$d_4=1$

Όλες οι ιδιοτιμές έχουν δείκτη 1, άρα η μήτρα είναι απλή και συνεπώς η Jordan μορφή της είναι

$$J_A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Η μήτρα μετάβασης είναι $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, με αντίστροφη $P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

i) Υπολογισμός της συνιστώσας που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = -1$.

Είναι $Z_{10} = P \cdot diag[1,0,0,0] \cdot P^{-1} \Rightarrow Z_{10} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

ii) Υπολογισμός της συνιστώσας που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = 1$.

άρα είναι $Z_{20} = P \cdot diag[0,1,0,0] \cdot P^{-1} \Rightarrow Z_{20} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

iii) Υπολογισμός της συνιστώσας που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_3 = 2$.

Είναι $Z_{30} = P \cdot diag[0,0,1,0] \cdot P^{-1} \Rightarrow Z_{30} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

iv) Υπολογισμός της συνιστώσας που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_4 = 3$.

Είναι $Z_{40} = P \cdot diag[0,0,0,1] \cdot P^{-1} \Rightarrow Z_{40} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Είναι $\sigma(A) = \{-1,1,2,3\}$, συνεπώς η μήτρα είναι αντιστρέψιμη και είναι

$$A^{-1} = \frac{1}{\lambda_1} Z_{10} + \frac{1}{\lambda_2} Z_{20} + \frac{1}{\lambda_3} Z_{30} + \frac{1}{\lambda_4} Z_{40} \Rightarrow$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & \frac{4}{3} & -2 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{4}{3} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 2.

Να βρεθούν οι συνιστώσες της μήτρας $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. Στη συνέχεια να βρεθεί η αντίστροφη μήτρα.

Λύση

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της μήτρας A είναι

$$p(x)=\begin{vmatrix} 1-x & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -x & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2-x & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 3-x \end{vmatrix}=x^4-6x^3+13x^2-12x+4=(x-1)^2(x-2)^2 .$$

Στον επόμενο πίνακα φαίνονται οι ιδιοτιμές της μήτρας με όλα τα στοιχεία τους.

Ιδιοτιμές	Ιδιοδιανύσματα	Αλγεβρικές Πολλαπλότητες	Γεωμετρικές Πολλαπλότητες	Δείκτες
$\lambda_1=1$	$v_{11}=(1,1,0,1)$ $v_{12}=(0,-1,0,0)$	$a_1=2$	$\gamma_1=1$	$d_1=2$
$\lambda_2=2$	$v_{21}=(0,1,0,1)$ $v_{22}=(1,-1,1,0)$	$a_2=2$	$\gamma_2=1$	$d_2=2$

Η Jordan μορφή της μήτρας A είναι $J_A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Η μήτρα μετάβασης είναι $P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, με αντίστροφη $P^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

i) Υπολογισμός των συνιστωσών που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_1=1$.

A) Υπολογισμός της συνιστώσας Z_{10}.

Είναι $Z_{10} = P \cdot diag[1,1,0,0] \cdot P^{-1} \Rightarrow Z_{10} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

B) Υπολογισμός της συνιστώσας Z_{11}

Είναι $N_{d_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ άρα είναι

$$Z_{11} = \frac{1}{1!} P \cdot diag[N_{d_1}, 0, 0] \cdot P^{-1} \Rightarrow Z_{11} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

ii) Υπολογισμός των συνιστωσών που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = 2$.

A) Υπολογισμός της συνιστώσας Z_{20}.

Είναι $Z_{20} = P \cdot diag[0,0,1,1] \cdot P^{-1} \Rightarrow Z_{20} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

B) Υπολογισμός της συνιστώσας Z_{21}

Είναι $N_{d_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ άρα είναι $Z_{21} = \frac{1}{1!} P \cdot diag[0, 0, N_{d_2}] \cdot P^{-1} \Rightarrow Z_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Είναι $\sigma(A) = \{1,2\}$, συνεπώς η μήτρα είναι αντιστρέψιμη και είναι

$$A^{-1} = \left(\frac{(-1)^0 \cdot 0!}{\lambda_1^{0+1}} Z_{10} + \frac{(-1)^1 \cdot 1!}{\lambda_1^{1+1}} Z_{11} \right) + \left(\frac{(-1)^0 \cdot 0!}{\lambda_2^{0+1}} Z_{20} + \frac{(-1)^1 \cdot 1!}{\lambda_2^{1+1}} Z_{21} \right) \Rightarrow$$

$$A^{-1} = \left(\frac{1}{\lambda_1^1} Z_{10} - \frac{1}{\lambda_1^2} Z_{11} \right) + \left(\frac{1}{\lambda_2^1} Z_{20} - \frac{1}{\lambda_2^2} Z_{21} \right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{3}{4} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Συμβολισμοί

Έστω $Y=\left[y_1,y_2,...,y_n\right]^T \in K^n$, και $a_1,a_2,...,a_s$ θετικοί ακέραιοι με $a_1+a_2+...+a_s=n$, τότε θέτουμε

$$Y_{a_1}=\left[y_1,y_2,...,y_{a_1}\right]^T,\ Y_{a_2}=\left[y_{a_1+1},y_{a_1+2},...,y_{a_1+a_2}\right]^T,\ldots,\ Y_{a_s}=\left[y_{a_1+a_2+...+a_{s-1}+1},y_{a_1+a_2+...+a_{s-1}+1},...,y_{a_1+a_2+...+a_{s-1}+a_s}\right]^T.$$

Προφανώς είναι $Y=\left[y_1,y_2,...,y_n\right]^T=\left[Y_{a_1},Y_{a_2},...,Y_{a_s}\right]^T$.

Ιδιότητα 20.

Αν $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_s$ είναι οι διαφορετικές μεταξύ τους ιδιοτιμές της μήτρας A, $a_1,a_2,...,a_s$ είναι οι αλγεβρικές τους πολλαπλότητες και P είναι η μήτρα μετάβασης και αν είναι

$$L_1=\mathrm{Im}\left(diag\left[O_{a_1},...,O_{a_{i-1}},I_{a_i},O_{a_{i+1}},...,O_{a_s}\right]\right)$$

$$L_2=Kernel\left[\left(J_A-\lambda_i I_n\right)^{d_i}\right].$$

τότε

i) $L_1=\left\{\left[O_{1\times a_1},...,O_{1\times a_{i-1}},Y_{a_i},O_{1\times a_{i+1}},...,O_{1\times a_s}\right]^T / Y_{a_i}\in K^{a_i}\right\}$

ii) $L_2=\left\{\left[O_{1\times a_1},...,O_{1\times a_{i-1}},Y_{a_i},O_{1\times a_{i+1}},...,O_{1\times a_s}\right]^T / Y_{a_i}\in K^{a_i}\right\}$

iii) $\mathrm{Im}\left[diag\left[O_{a_1},...,O_{a_{i-1}},I_{a_i},O_{a_{i+1}},...,O_{a_s}\right]\right]=Kernel\left[\left(J_A-\lambda_i I_n\right)^{d_i}\right]$

Απόδειξη

i) Είναι

$$L_1=\left\{diag\left[O_{a_1},...,O_{a_{i-1}},I_{a_i},O_{a_{i+1}},...,O_{a_s}\right]\cdot x / x\in K^n\right\}\Rightarrow$$

$$L_1=\left\{\left[O_{1\times a_1},...,O_{1\times a_{i-1}},X_{a_i},O_{1\times a_{i+1}},...,O_{1\times a_s}\right]^T / X_{a_i}\in K^{a_i}\right\}.$$

ii) Είναι

$$\left(J_A-\lambda_i I_n\right)^{d_i}=diag\left[(\lambda_1-\lambda_i)^{d_i}I_{a_1},...,(\lambda_{i-1}-\lambda_i)^{d_i}I_{a_{i-1}},O_{a_1},(\lambda_{i+1}-\lambda_i)^{d_i}I_{a_{i+1}},...,(\lambda_s-\lambda_i)^{d_i}I_{a_s}\right].$$

Άρα είναι

$$L_2=Kernel\left[\left(J_A-\lambda_i I_n\right)^{d_i}\right]\Rightarrow$$

$$L_2=\left\{x\in K^n / diag\left[(\lambda_1-\lambda_i)^{d_i}I_{a_1},...,(\lambda_{i-1}-\lambda_i)^{d_i}I_{a_{i-1}},O_{a_1},(\lambda_{i+1}-\lambda_i)^{d_i}I_{a_{i+1}},...,(\lambda_s-\lambda_i)^{d_i}I_{a_s}\right]\cdot x=O_{1\times n}\right\}\Rightarrow$$

$$L_2=\left\{x\in K^n / diag\left[(\lambda_1-\lambda_i)^{d_i}X_{a_1},...,(\lambda_{i-1}-\lambda_i)^{d_i}X_{a_{i-1}},O_{a_1},(\lambda_{i+1}-\lambda_i)^{d_i}X_{a_{i+1}},...,(\lambda_s-\lambda_i)^{d_i}X_{a_s}\right]=O_{1\times n}\right\}\Rightarrow$$

$Z_{a_j}=O_{1\times a_j}$, για κάθε $j=1,...,i-1,i+1,...,s$.

Συνεπώς είναι

$$L_2=\left\{x\in K^n / x=\left[O_{1\times a_1},...,O_{1\times a_{i-1}},X_{a_i},O_{1\times a_{i+1}},...,O_{1\times a_s}\right]^T\right\}\Rightarrow$$

$L_2 = \left\{ \left[O_{1\times a_1}, ..., O_{1\times a_{i-1}}, X_{a_i}, O_{1\times a_{i+1}}, ..., O_{1\times a_s} \right]^T \,/\, X_{a_i} \in K^{a_i} \right\}$.

iii) Από τα παραπάνω προκύπτει ότι $\mathrm{Im}\left(diag\left[O_{a_1}, ..., O_{a_{i-1}}, I_{a_i}, O_{a_{i+1}}, ..., O_{a_s} \right] \right) = Kernel\left[\left(J_A - \lambda_i I_n \right)^{d_i} \right]$

Ιδιότητα 21.

Είναι $Range\left(Z_{i0} \right) = \mathrm{Im}\left(Z_{i0} \right) = Kernel\left[\left(A - \lambda_i I_n \right)^{d_i} \right]$, για κάθε $i = 1, 2, ..., s$.

Απόδειξη

Είδαμε ότι $Range\left(Z_{i0} \right) = \mathrm{Im}\left(Z_{i0} \right)$. Θα δείξουμε ότι είναι $\mathrm{Im}\left(Z_{i0} \right) = Kernel\left[\left(A - \lambda_i I_n \right)^{d_i} \right]$.

Ισχύουν οι ισοδυναμίες

$$x \in \mathrm{Im}\left(Z_{i0} \right) \Leftrightarrow x = Z_{i0} \cdot x \Leftrightarrow x = \left(P \cdot diag\left[O_{a_1}, ..., O_{a_{i-1}}, I_{a_i}, O_{a_{i+1}}, ..., O_{a_s} \right] \cdot P^{-1} \right) \cdot x \Leftrightarrow$$

$$P^{-1} x = P^{-1} \left(P \cdot diag\left[O_{a_1}, ..., O_{a_{i-1}}, I_{a_i}, O_{a_{i+1}}, ..., O_{a_s} \right] \cdot P^{-1} \right) \cdot x \Leftrightarrow$$

$$P^{-1} x = \left(diag\left[O_{a_1}, ..., O_{a_{i-1}}, I_{a_i}, O_{a_{i+1}}, ..., O_{a_s} \right] \right) \cdot P^{-1} \cdot x \Leftrightarrow$$

$$P^{-1} x \in \mathrm{Im}\left(diag\left[O_{a_1}, ..., O_{a_{i-1}}, I_{a_i}, O_{a_{i+1}}, ..., O_{a_s} \right] \right) \Leftrightarrow$$

$$P^{-1} x \in Kernel\left[\left(J_A - \lambda_i I_n \right)^{d_i} \right] \Leftrightarrow \left(J_A - \lambda_i I_n \right)^{d_i} \cdot \left(P^{-1} x \right) = O_n \Leftrightarrow$$

$$\left(J_A - \lambda_i I_n \right)^{d_i} \cdot \left(P^{-1} x \right) = O_n \Leftrightarrow \left(P^{-1} A P - \lambda_i P^{-1} P \right)^{d_i} \cdot \left(P^{-1} x \right) = O_n \Leftrightarrow$$

$$\left(P^{-1} \left(A - \lambda_i I_n \right) P \right)^{d_i} \cdot \left(P^{-1} x \right) = O_n \Leftrightarrow \left(P^{-1} \left(A - \lambda_i I_n \right)^{d_i} P \right) \cdot \left(P^{-1} x \right) = O_n \Leftrightarrow$$

$$P^{-1} \left(A - \lambda_i I_n \right)^{d_i} \cdot x = O_n \Leftrightarrow \left(A - \lambda_i I_n \right)^{d_i} \cdot x = O_n \Leftrightarrow x \in Kernel\left[\left(A - \lambda_i I_n \right)^{d_i} \right] \Leftrightarrow$$

$$\mathrm{Im}\left(Z_{i0} \right) = Kernel\left[\left(A - \lambda_i I_n \right)^{d_i} \right].$$

Ιδιότητα 22.

Είναι $Kernel\left(Z_{i0} \right) = \mathrm{Im}\left(Z_{10} \right) \oplus ... \oplus \mathrm{Im}\left(Z_{i-1,0} \right) \oplus \mathrm{Im}\left(Z_{i+1,0} \right) \oplus ... \oplus \mathrm{Im}\left(Z_{s0} \right)$, για κάθε $i = 1, 2, ..., s$.

Απόδειξη

Είδαμε ότι $Kernel\left(Z_{i0} \right) = \mathrm{Im}\left(I_n - Z_{i0} \right) \Rightarrow$

$$Kernel\left(Z_{i0} \right) = \mathrm{Im}\left(Z_{10} + ... + Z_{i-1,0} + Z_{i+1,0} + ... + Z_{s0} \right) \Rightarrow$$

$$Kernel\left(Z_{i0} \right) = \mathrm{Im}\left(Z_{10} \right) \oplus ... \oplus \mathrm{Im}\left(Z_{i-1,0} \right) \oplus \mathrm{Im}\left(Z_{i+1,0} \right) \oplus ... \oplus \mathrm{Im}\left(Z_{s0} \right),$$

γιατί είναι

$\mathrm{Im}\left(Z_{j0} \right) \cap \mathrm{Im}\left(Z_{k0} \right) = \left\{ O_n \right\}$, για κάθε $i = 1, 2, ..., s$.

Ιδιότητα 23.

Είναι $\left(A-\lambda_i I_n\right)^{d_i} Z_{i0} = O_n$, για κάθε $i=1,2,...,s$.

Απόδειξη

Είναι $\left(A-\lambda_i I_n\right)^{d_i} Z_{i0} = \left(P\cdot J_A\cdot P^{-1}-\lambda_i I_n\right)^{d_i} Z_{i0} \Rightarrow$

$$\left(A-\lambda_i I_n\right)^{d_i} Z_{i0} = \left(P\cdot\left(J_A-\lambda_i I_n\right)\cdot P^{-1}\right)^{d_i} Z_{i0} \Rightarrow$$

$$\left(A-\lambda_i I_n\right)^{d_i} Z_{i0} = \left(P\cdot\left(J_A-\lambda_i I_n\right)^{d_i}\cdot P^{-1}\right)\cdot P\cdot diag\left[O_{a_1},...,O_{a_{i-1}},I_{a_i},O_{a_{i+1}},...,O_{a_s}\right]\cdot P^{-1} \Rightarrow$$

$$\left(A-\lambda_i I_n\right)^{d_i} Z_{i0} = P\cdot\left(J_A-\lambda_i I_n\right)^{d_i}\cdot diag\left[O_{a_1},...,O_{a_{i-1}},I_{a_i},O_{a_{i+1}},...,O_{a_s}\right]\cdot P^{-1} \Rightarrow$$

$$\left(A-\lambda_i I_n\right)^{d_i} Z_{i0} = P\cdot diag\left[O_{a_1},...,O_{a_{i-1}},I_{a_i},O_{a_{i+1}},...,O_{a_s}\right]\cdot diag\left[I_{a_1},...,I_{a_{i-1}},O_{a_i},I_{a_{i+1}},...,I_{a_s}\right]\cdot P^{-1} \Rightarrow$$

$$\left(A-\lambda_i I_n\right)^{d_i} Z_{i0} = P\cdot O_n\cdot P^{-1} \Rightarrow \left(A-\lambda_i I_n\right)^{d_i} Z_{i0} = O_n .$$

Ιδιότητα 24.

Είναι $\operatorname{Im}\left(Z_{i0}\right)\supset\operatorname{Im}\left(Z_{i1}\right)\supset...\supset Z_{i,d_i-1}$, για κάθε $i=1,2,...,s$.

Απόδειξη

Έστω τυχαίο $x\in\operatorname{Im}\left(Z_{ij}\right)\Leftrightarrow$ υπάρχει $y\in K^n$ τέτοιο ώστε $x=Z_{ij}y$.

Αλλά είναι $Z_{ij}=\dfrac{1}{j}\left(A-\lambda_i I_n\right)Z_{i,j-1}$ άρα

$$x\in\operatorname{Im}\left(Z_{ij}\right)\Leftrightarrow x=\frac{1}{j}\left(A-\lambda_i I_n\right)Z_{i,j-1}\cdot y\Leftrightarrow x=Z_{i,j-1}\cdot\left(\frac{1}{j}\left(A-\lambda_i I_n\right)y\right)$$

Θέτουμε $z=\dfrac{1}{j}\left(A-\lambda_i I_n\right)y$ τότε είναι $x=Z_{i,j-1}\cdot z\Rightarrow x\in\operatorname{Im}\left(Z_{i,j-1}\right)\Rightarrow\operatorname{Im}\left(Z_{ij}\right)\subset\operatorname{Im}\left(Z_{i,j-1}\right)\Rightarrow$

$\operatorname{Im}\left(Z_{i,j-1}\right)\supset\operatorname{Im}\left(Z_{ij}\right)$, για κάθε $i=1,2,...,s$ και για κάθε $j=0,1,...,d_i-1$.

Ιδιότητα 25.

Αν η μήτρα $A\in M_n\left(R\right)$ είναι συμμετρική τότε

i) η Jordan μορφή J_A της μήτρας A είναι συμμετρική

ii) η συνιστώσα Z_{i0} είναι μια ορθογώνια προβολική μήτρα στον ιδιόχωρο της ιδιοτιμής λ_i, για κάθε $i=1,2,...,s$.

Απόδειξη

Είναι $A=P\cdot J_A\cdot P^{-1}$. Επειδή η μήτρα A είναι συμμετρική θα ισχύει $A^T=A$. Επίσης γνωρίζουμε ότι η μήτρα μετάβασης P είναι ορθογώνια, συνεπώς θα ισχύει $P^T=P^{-1}$.

i) Είναι $J_A = P^{-1} \cdot A \cdot P \Rightarrow J_A^T = \left(P^{-1} \cdot A \cdot P\right)^T \Rightarrow J_A^T = P^T \cdot A^T \cdot \left(P^{-1}\right)^T \Rightarrow$

$J_A^T = P^T \cdot A \cdot \left(P^{-1}\right)^T \Rightarrow J_A^T = P^T \cdot A \cdot \left(P^T\right)^{-1} \Rightarrow J_A^T = P^{-1} \cdot A \cdot \left(P^{-1}\right)^{-1} \Rightarrow$

$J_A^T = P^{-1} \cdot A \cdot P \Rightarrow J_A^T = J_A$, συνεπώς και η μήτρα J_A είναι συμμετρική.

ii) Είναι $Z_{i0} = P \cdot diag\left[O_{a_1},...,O_{a_{i-1}}, I_{a_i}, O_{a_{i+1}},...,O_{a_s}\right] \cdot P^{-1}$, άρα

$Z_{i0}^T = \left(P \cdot diag\left[O_{a_1},...,O_{a_{i-1}}, I_{a_i}, O_{a_{i+1}},...,O_{a_s}\right] \cdot P^{-1}\right)^T \Rightarrow$

$Z_{i0}^T = \left(P^{-1}\right)^T \cdot \left(diag\left[O_{a_1},...,O_{a_{i-1}}, I_{a_i}, O_{a_{i+1}},...,O_{a_s}\right]\right)^T \cdot P^T \Rightarrow$

$Z_{i0}^T = \left(P^T\right)^{-1} \cdot \left(diag\left[O_{a_1},...,O_{a_{i-1}}, I_{a_i}, O_{a_{i+1}},...,O_{a_s}\right]\right)^T \cdot P^T \Rightarrow$

$Z_{i0}^T = \left(P^{-1}\right)^{-1} \cdot diag\left[O_{a_1},...,O_{a_{i-1}}, I_{a_i}^T, O_{a_{i+1}},...,O_{a_s}\right] \cdot P^T \Rightarrow$

$Z_{i0}^T = P \cdot diag\left[O_{a_1},...,O_{a_{i-1}}, I_{a_i}, O_{a_{i+1}},...,O_{a_s}\right] \cdot P^{-1} \Rightarrow$

$Z_{i0}^T = Z_{i0}$, συνεπώς και η μήτρα Z_{i0} είναι συμμετρική.

Επίσης ισχύει

$Z_{i0}^2 = \left(P \cdot diag\left[O_{a_1},...,O_{a_{i-1}}, I_{a_i}, O_{a_{i+1}},...,O_{a_s}\right] \cdot P^{-1}\right)^2 \Rightarrow$

$Z_{i0}^2 = P \cdot \left(diag\left[O_{a_1},...,O_{a_{i-1}}, I_{a_i}, O_{a_{i+1}},...,O_{a_s}\right]\right)^2 \cdot P^{-1} \Rightarrow$

$Z_{i0}^2 = P \cdot diag\left[O_{a_1},...,O_{a_{i-1}}, I_{a_i}^2, O_{a_{i+1}},...,O_{a_s}\right] \cdot P^{-1} \Rightarrow$

$Z_{i0}^2 = P \cdot diag\left[O_{a_1},...,O_{a_{i-1}}, I_{a_i}, O_{a_{i+1}},...,O_{a_s}\right] \cdot P^{-1} \Rightarrow$

$Z_{i0}^2 = Z_{i0}$, που σημαίνει ότι οι συνιστώσες Z_{i0}, $i = 1,2,...,s$ είναι ορθογώνιες μήτρες προβολής.

Τέλος ισχύει $\left(A - \lambda_i I_n\right) \cdot Z_{i0} = O_n$, συνεπώς οι συνιστώσες Z_{i0}, $i = 1,2,...,s$ είναι ορθογώνιες μήτρες προβολής στον ιδιοχώρο της ιδιοτιμής λ_i, $i = 1,2,...,s$.

Ιδιότητα 26.

Αν η μήτρα $A \in M_n\left(C\right)$ είναι Ερμητιανή τότε

i) η Jordan μορφή J_A της μήτρας A είναι Ερμητιανή

ii) η συνιστώσα Z_{i0} είναι μια Ερμητιανή προβολική μήτρα στον ιδιόχωρο της ιδιοτιμής λ_i, για κάθε $i = 1,2,...,s$.

Απόδειξη

i) Είναι $A = P \cdot J_A \cdot P^{-1}$. Επειδή η μήτρα A είναι Ερμητιανή θα ισχύει $A^H = A$, όπου $A^H = \left(\overline{A}\right)^T$. Επίσης

γνωρίζουμε ότι η μήτρα μετάβασης P είναι μοναδιαία (unitary), συνεπώς θα ισχύει $P^H = P^{-1}$.
Είναι

$$J_A = P^{-1} \cdot A \cdot P \Rightarrow J_A^H = \left(P^{-1} \cdot A \cdot P\right)^H \Rightarrow J_A^H = P^H \cdot A^H \cdot \left(P^{-1}\right)^H \Rightarrow$$

$$J_A^H = P^H \cdot A \cdot \left(P^{-1}\right)^H \Rightarrow J_A^H = P^H \cdot A \cdot \left(P^H\right)^{-1} \Rightarrow J_A^H = P^{-1} \cdot A \cdot \left(P^{-1}\right)^{-1} \Rightarrow$$

$J_A^H = P^{-1} \cdot A \cdot P \Rightarrow J_A^H = J_A$, συνεπώς και η μήτρα J_A είναι Ερμητιανή.

ii) Είναι

$Z_{i0} = P \cdot diag\left[O_{a_1},...,O_{a_{i-1}},I_{a_i},O_{a_{i+1}},...,O_{a_s}\right] \cdot P^{-1}$, άρα

$$Z_{i0}^H = \left(P \cdot diag\left[O_{a_1},...,O_{a_{i-1}},I_{a_i},O_{a_{i+1}},...,O_{a_s}\right] \cdot P^{-1}\right)^H \Rightarrow$$

$$Z_{i0}^H = \left(P^{-1}\right)^H \cdot \left(diag\left[O_{a_1},...,O_{a_{i-1}},I_{a_i},O_{a_{i+1}},...,O_{a_s}\right]\right)^H \cdot P^H \Rightarrow$$

$$Z_{i0}^H = \left(P^H\right)^{-1} \cdot \left(diag\left[O_{a_1},...,O_{a_{i-1}},I_{a_i},O_{a_{i+1}},...,O_{a_s}\right]\right)^H \cdot P^H \Rightarrow$$

$$Z_{i0}^H = \left(P^{-1}\right)^{-1} \cdot diag\left[O_{a_1},...,O_{a_{i-1}},I_{a_i}^H,O_{a_{i+1}},...,O_{a_s}\right] \cdot P^H \Rightarrow$$

$$Z_{i0}^H = P \cdot diag\left[O_{a_1},...,O_{a_{i-1}},I_{a_i},O_{a_{i+1}},...,O_{a_s}\right] \cdot P^{-1} \Rightarrow$$

$Z_{i0}^H = Z_{i0}$,

συνεπώς και η μήτρα Z_{i0} είναι Ερμητιανή.

Επίσης ισχύει

$$Z_{i0}^2 = \left(P \cdot diag\left[O_{a_1},...,O_{a_{i-1}},I_{a_i},O_{a_{i+1}},...,O_{a_s}\right] \cdot P^{-1}\right)^2 \Rightarrow$$

$$Z_{i0}^2 = P \cdot \left(diag\left[O_{a_1},...,O_{a_{i-1}},I_{a_i},O_{a_{i+1}},...,O_{a_s}\right]\right)^2 \cdot P^{-1} \Rightarrow$$

$$Z_{i0}^2 = P \cdot diag\left[O_{a_1},...,O_{a_{i-1}},I_{a_i}^2,O_{a_{i+1}},...,O_{a_s}\right] \cdot P^{-1} \Rightarrow$$

$$Z_{i0}^2 = P \cdot diag\left[O_{a_1},...,O_{a_{i-1}},I_{a_i},O_{a_{i+1}},...,O_{a_s}\right] \cdot P^{-1} \Rightarrow$$

$Z_{i0}^2 = Z_{i0}$, που σημαίνει ότι οι συνιστώσες Z_{i0}, $i = 1,2,...,s$ είναι μήτρες προβολής.

Τέλος ισχύει $\left(A - \lambda_i I_n\right) \cdot Z_{i0} = O_n$, συνεπώς οι συνιστώσες Z_{i0}, $i = 1,2,...,s$ είναι Ερμητιανές μήτρες προβολής στον ιδιοχώρο της ιδιοτιμής λ_i, $i \neq j$.

Ιδιότητα 27.

Αν $A \in M_n\left(K\right)$ τότε για τις συνιστώσες της Z_{i0}, για κάθε $i \neq j$ είναι

i) $Kernel\left(Z_{i0}\right) = \left\{\left[X_{a_1},...,X_{a_{i-1}},O_{a_i},X_{a_{i+1}},...,X_{a_s}\right] / X_{a_k} \in K^{a_k}\right\}$

ii) $Kernel\left(Z_{i0}\right) \cap Kernel\left(Z_{j0}\right) = \left\{\left[X_{a_1},...,X_{a_{i-1}},O_{a_i},X_{a_{i+1}},...,X_{a_{j-1}},O_{a_j},X_{a_{j+1}},...,X_{a_s}\right] / X_{a_k} \in K^{a_k}\right\}$,

για κάθε $i < j$.

iii) $Kernel\left(Z_{i0}\right) + Kernel\left(Z_{j0}\right) = K^n$, για κάθε $i \neq j$.

Απόδειξη

i) Έστω $y \in Kernel\left(Z_{i0}\right)$. Τότε είναι $Z_{i0} \cdot y = O_{a_i}$.

Είναι

$$Z_{10} + ... + Z_{i-1,0} + Z_{i0} + Z_{i+1,0} + ... + Z_{s0} = I_n \Rightarrow$$

$$\left(Z_{10} + ... + Z_{i-1,0} + Z_{i0} + Z_{i+1,0} + ... + Z_{s0}\right) \cdot y = I_n \cdot y \Rightarrow$$

$$Z_{10} \cdot y + ... + Z_{i-1,0} \cdot y + Z_{i0} \cdot y + Z_{i+1,0} \cdot y + ... + Z_{s0} \cdot y = y \Rightarrow$$

$$Z_{10} \cdot y + ... + Z_{i-1,0} \cdot y + O_{a_i} + Z_{i+1,0} \cdot y + ... + Z_{s0} \cdot y = y$$

Αλλά είναι

$$Z_{10} \cdot y = X_{a_1}, Z_{20} \cdot y = X_{a_2}, \ldots, Z_{i-1,0} \cdot y = X_{a_{i-1}}, Z_{i+1,0} \cdot y = X_{a_{i+1}}, \ldots, Z_{s0} \cdot y = X_{a_s},$$

οπότε $y = \left[X_{a_1},...,X_{a_{i-1}},O_{a_i},X_{a_{i+1}},...,X_{a_s}\right]$, άρα είναι

$$Kernel\left(Z_{i0}\right) = \left\{\left[X_{a_1},...,X_{a_{i-1}},O_{a_i},X_{a_{i+1}},...,X_{a_s}\right] / X_{a_k} \in K^{a_k}\right\}$$

ii) Είναι $Kernel\left(Z_{i0}\right) \cap Kernel\left(Z_{j0}\right) =$

$$\left\{\left[X_{a_1},...,X_{a_{i-1}},O_{a_i},X_{a_{i+1}},...,X_{a_s}\right] / X_{a_k} \in K^{a_k}\right\} \cap \left\{\left[X_{a_1},...,X_{a_{j-1}},O_{a_j},X_{a_{j+1}},...,X_{a_s}\right] / X_{a_k} \in K^{a_k}\right\} \Rightarrow$$

$$Kernel\left(Z_{i0}\right) \cap Kernel\left(Z_{j0}\right) = \left\{\left[X_{a_1},...,X_{a_{i-1}},O_{a_i},X_{a_{i+1}},...,X_{a_{j-1}},O_{a_j},X_{a_{j+1}},...,X_{a_s}\right] / X_{a_k} \in K^{a_k}\right\}$$

iii) Είναι $\dim\left(Kernel(Z_{i0})\right) = n - a_i$, $\dim\left(Kernel(Z_{j0})\right) = n - a_j$ και

$$\dim\left(Kernel(Z_{i0}) \cap Kernel(Z_{j0})\right) = n - a_i - a_j.$$

Γνωρίζουμε ότι ισχύει

$$\dim\left(Kernel(Z_{i0}) + Kernel(Z_{j0})\right) = \dim\left(Kernel(Z_{i0})\right) + \dim\left(Kernel(Z_{j0})\right) - \dim\left(Kernel(Z_{i0}) \cap Kernel(Z_{j0})\right)$$

Άρα είναι

$$\dim\left(Kernel(Z_{i0}) + Kernel(Z_{j0})\right) = (n - a_i) + (n - a_j) - (n - a_i - a_j) \Rightarrow$$

$$\dim\left(Kernel(Z_{i0}) + Kernel(Z_{j0})\right) = n \Rightarrow Kernel(Z_{i0}) + Kernel(Z_{j0}) = K^n$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ ΜΗΤΡΩΝ

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουμε όλες τις βασικές ιδιότητες των ακολουθιών μητρών. Συγκεκριμένα παρουσιάζουμε προτάσεις – κριτήρια που αφορούν τη σύγκλιση των ακολουθιών μητρών.

4.1 ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 1.

Ακολουθία μητρών είναι κάθε απεικόνιση $f:\mathbb{N}\to M_{n\times m}(K)$. Θα ασχοληθούμε με ακολουθίες της μορφής $f:\mathbb{N}\to M_n(K)$, δηλαδή με ακολουθίες τετραγωνικών μητρών. Συμβολίζουμε μια ακολουθία μητρών ως εξής $A_p=\left[a_{ij}^{(p)}\right],\ p\in\mathbb{N}$.

Ορισμός 2.

Έστω η ακολουθία μητρών $A_p=\left[a_{ij}^{(p)}\right],\ p\in\mathbb{N}$. Θα λέμε ότι η ακολουθία αυτή συγκλίνει στη μήτρα $A=\left[a_{ij}\right]\in M_n(K)$ και γράφουμε $\lim\limits_{p\to\infty}A_p=A$, αν και μόνο αν, ισχύει $\lim\limits_{p\to\infty}a_{ij}^{(p)}=a_{ij}$, για κάθε $i,j=1,2,...,n$.

Πόρισμα

Αν η ακολουθία $\left(A_p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στη μήτρα A, τότε το όριο A είναι μοναδικό.

Ορισμός 3.

Έστω η ακολουθία μητρών $A_p=\left[a_{ij}^{(p)}\right],\ p\in\mathbb{N}$. Θα λέμε ότι η ακολουθία αυτή αποκλίνει ή ότι είναι μια αποκλίνουσα ακολουθία μητρών, αν και μόνο αν, υπάρχει μια τουλάχιστον ακολουθία στοιχείο $a_{ij}^{(p)}$ η οποία έχει όριο $+\infty$ ή $-\infty$.

Ορισμός 4.

Έστω η ακολουθία μητρών $A_p = \left[a_{ij}^{(p)}\right],\ p \in \mathbb{N}$. Θα λέμε ότι η ακολουθία αυτή δεν έχει όριο, αν και μόνο αν, υπάρχει μια τουλάχιστον ακολουθία στοιχείο $a_{ij}^{(p)}$ η οποία ή δεν έχει όριο ή έχει όριο $+\infty$ ή $-\infty$.

Ορισμός 5.

Έστω η ακολουθία μητρών $A_p = \left[a_{ij}^{(p)}\right],\ p \in \mathbb{N}$. Θα λέμε ότι η $i-$γραμμή της ακολουθίας αυτής συγκλίνει, αν και μόνο αν, ισχύει $\lim\limits_{p\to\infty} a_{ij}^{(p)} = a_{ij} \in K$, για κάθε $j = 1,2,...,n$.

Ορισμός 6.

Έστω η ακολουθία μητρών $A_p = \left[a_{ij}^{(p)}\right],\ p \in \mathbb{N}$. Θα λέμε ότι η $j-$ στήλη της ακολουθίας αυτής συγκλίνει, αν και μόνο αν, ισχύει $\lim\limits_{p\to\infty} a_{ij}^{(p)} = a_{ij} \in K$, για κάθε $i = 1,2,...,n$.

4.2 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ

Ιδιότητες

1) Είναι $\lim\limits_{p\to\infty} A_p = A$, αν και μόνο αν, $\lim\limits_{p\to\infty}\left(A_p - A\right) = O$.

Απόδειξη

Είναι $\lim\limits_{p\to\infty} A_p = A \Leftrightarrow \lim\limits_{p\to\infty} a_{ij}^{(p)} = a_{ij}$, για κάθε $i, j = 1,2,...,n$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{p\to\infty}\left[a_{ij}^{(p)} - a_{ij}\right] = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{p\to\infty}\left(A_p - A\right) = O$.

2) Είναι $\lim\limits_{p\to\infty} A_p = A$, αν και μόνο αν, $\lim\limits_{p\to\infty}\left\|A_p - A\right\|_k = O$.

3) Είναι $\lim\limits_{p\to\infty} A_p = A$, αν και μόνο αν, $\lim\limits_{p\to\infty}\left(-A_p\right) = -A$.

4) Έστω οι ακολουθίες μητρών $\left(A_p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ και $\left(B_p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ συγκλίνουν και είναι $\lim\limits_{p\to\infty} A_p = A$ και $\lim\limits_{p\to\infty} B_p = B$ τότε και η ακολουθία $\left(A_p + B_p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει και είναι $\lim\limits_{p\to\infty}\left(A_p + B_p\right) = A + B$.

Απόδειξη

Έστω $A_p = \left[a_{ij}^{(p)}\right],\ B_p = \left[b_{ij}^{(p)}\right],\ A = \left[a_{ij}\right],\ B = \left[b_{ij}\right]$. Είναι $A_p + B_p = \left[a_{ij}^{(p)} + b_{ij}^{(p)}\right]$.

Από την υπόθεση προκύπτει ότι

$\lim\limits_{p\to\infty} a_{ij}^{(p)} = a_{ij}$ και $\lim\limits_{p\to\infty} b_{ij}^{(p)} = b_{ij}$, για κάθε $i, j = 1,2,...,n$.

Επίσης είναι $A + B = \left[a_{ij} + b_{ij} \right]$.

Συνεπώς είναι

$\lim\limits_{p\to\infty}\left(a_{ij}^{(p)} + b_{ij}^{(p)} \right) = a_{ij} + b_{ij} \Rightarrow \lim\limits_{p\to\infty}\left(A_p + B_p \right) = A + B$.

5) Έστω οι ακολουθίες μητρών $\left(A_p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ και $\left(B_p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ συγκλίνουν και είναι $\lim\limits_{p\to\infty} A_p = A$ και $\lim\limits_{p\to\infty} B_p = B$ τότε για κάθε $\lambda, \mu \in \mathrm{K}$ και η ακολουθία $\left(\lambda A_p + \mu B_p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει και είναι $\lim\limits_{p\to\infty}\left(\lambda A_p + \mu B_p\right) = \lambda A + \mu B$.

6) Έστω οι ακολουθίες μητρών $\left(A_p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ και $\left(B_p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ συγκλίνουν και είναι $\lim\limits_{p\to\infty} A_p = A$ και $\lim\limits_{p\to\infty} B_p = B$ τότε και η ακολουθία $\left(A_p \cdot B_p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει και είναι $\lim\limits_{p\to\infty}\left(A_p \cdot B_p\right) = A \cdot B$.

Απόδειξη

Έστω $A_p = \left[a_{ij}^{(p)} \right]$, $B_p = \left[b_{ij}^{(p)} \right]$, $A = \left[a_{ij} \right]$, $B = \left[b_{ij} \right]$. Είναι $A \cdot B = \left[\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right]$.

Από την υπόθεση προκύπτει ότι

$\lim\limits_{p\to\infty} a_{ij}^{(p)} = a_{ij}$ και $\lim\limits_{p\to\infty} b_{ij}^{(p)} = b_{ij}$, για κάθε $i, j = 1,2,...,n$.

Έστω $A_p \cdot B_p = \left[\gamma_{ij}^{(p)} \right]$. Τότε είναι $\gamma_{ij}^{(p)} = \sum\limits_{k=1}^{n}\left(a_{ik}^{(p)} \cdot b_{kj}^{(p)} \right)$, για κάθε $i, j = 1,2,...,n$.

Οι ακολουθίες $\left(\gamma_{ij}^{(p)}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ συγκλίνουν ως πεπερασμένο άθροισμα συγκλινουσών ακολουθιών και είναι

$\lim\limits_{p\to\infty} \gamma_{ij}^{(p)} = \sum\limits_{k=1}^{n}\left(\lim\limits_{p\to\infty} a_{ik}^{(p)} \cdot \lim\limits_{p\to\infty} b_{kj}^{(p)} \right) \Rightarrow \lim\limits_{p\to\infty} \gamma_{ij}^{(p)} = \sum\limits_{k=1}^{n}\left(a_{ik} \cdot b_{kj} \right) \Rightarrow \lim\limits_{p\to\infty}\left(A_p \cdot B_p \right) = A \cdot B$.

4.3 ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

1) Αν η ακολουθία μητρών $\left(A_p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει και είναι $\lim\limits_{p\to\infty} A_p = A$ και η αριθμητική ακολουθία $\left(x_p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει και είναι $\lim\limits_{p\to\infty} x_p = x \in K$, τότε και η ακολουθία μητρών $\left(x_p \cdot A_p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει και είναι $\lim\limits_{p\to\infty}\left(x_p \cdot A_p \right) = x \cdot A$.

Απόδειξη

Έστω $A_p = \left[a_{ij}^{(p)} \right]$, $A = \left[a_{ij} \right]$. Είναι $x_p \cdot A_p = \left[x_p \cdot a_{ij}^{(p)} \right]$.

Από την υπόθεση προκύπτει ότι

$\lim\limits_{p\to\infty} a_{ij}^{(p)} = a_{ij}$, για κάθε $i, j = 1,2,...,n$ και επειδή $\lim\limits_{p\to\infty} x_p = x$ προκύπτει ότι

$\lim\limits_{p\to\infty}\left(x_p \cdot a_{ij}^{(p)}\right) = x \cdot a_{ij} \Rightarrow \lim\limits_{p\to\infty}\left(x_p \cdot A_p\right) = x \cdot A$.

Πόρισμα

Αν οι ακολουθίες μητρών $\left(A_{k,p}\right)_{p\in\mathbb{N}}$, $k = 1,2,...,m$,συγκλίνουν και είναι $\lim\limits_{p\to\infty} A_{k,p} = A_k$ και οι αριθμητικές ακολουθίες $\left(x_{k,p}\right)_{p\in\mathbb{N}}$, $k = 1,2,...,m$, συγκλίνουν και είναι $\lim\limits_{p\to\infty} x_{k,p} = x_k \in K$, τότε και η ακολουθία μητρών $\left(\sum\limits_{k=1}^{m}\left(x_{k,p} \cdot A_{k,p}\right)\right)_{p\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει και είναι $\lim\limits_{p\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{m}\left(x_{k,p} \cdot A_{k,p}\right) = x_k \cdot A_k$.

4.4 ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΚΑΙ ΣΥΝΙΣΤΩΣΕΣ ΜΗΤΡΑΣ

1) Αν η ακολουθία μητρών $\left(A_p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει και είναι $\lim\limits_{p\to\infty} A_p = A$ και Q είναι μια αντιστρέψιμη μήτρα τότε και οι ακολουθίες μητρών $\left(Q^{-1} \cdot A_p \cdot Q\right)_{p\in\mathbb{N}}$ και $\left(Q \cdot A_p \cdot Q^{-1}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ συγκλίνουν και είναι $\lim\limits_{p\to\infty}\left(Q^{-1} \cdot A_p \cdot Q\right) = Q^{-1} \cdot A \cdot Q$ και $\lim\limits_{p\to\infty}\left(Q \cdot A_p \cdot Q^{-1}\right) = Q \cdot A \cdot Q^{-1}$.

Απόδειξη

Έστω ότι $Q = \left[q_{ij}\right]$, $Q^{-1} = \left[r_{ij}\right]$, $A_p = \left[a_{ij}^{(p)}\right]$ και $A = \left[a_{ij}\right]$.

Τότε είναι $A_p \cdot Q = \left[\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}^{(p)} \cdot q_{kj}\right]$ και $A \cdot Q = \left[\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot q_{kj}\right]$.

Οι ακολουθίες $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}^{(p)} \cdot q_{kj}$, $i, j = 1,2,...,n$ συγκλίνουν ως γραμμικοί συνδιασμοί συγκλινουσών ακολουθιών και είναι $\lim\limits_{p\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}^{(p)} \cdot q_{kj}\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot q_{kj} \Rightarrow \lim\limits_{p\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}^{(p)} \cdot q_{kj}\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot q_{kj} \Rightarrow \lim\limits_{p\to\infty}\left(A_p \cdot Q\right) = A \cdot Q$.

Θέτουμε $B_p = A_p \cdot Q$ και $B = A \cdot Q$ τότε είναι $Q^{-1} \cdot A_p \cdot Q = Q^{-1} \cdot B_p$.

Όμοια προκύπτει ότι $\lim\limits_{p\to\infty}\left(Q^{-1} \cdot B_p\right) = Q^{-1} \cdot B \Rightarrow \lim\limits_{p\to\infty}\left(Q^{-1} \cdot A_p \cdot Q\right) = Q^{-1} \cdot A \cdot Q$.

Ανάλογα προκύπτει ότι $\lim\limits_{p\to\infty}\left(Q \cdot A_p \cdot Q^{-1}\right) = Q \cdot A \cdot Q^{-1}$.

2) Αν

- $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s\}$ είναι το φάσμα της μήτρας $A \in M_n(K)$
- Z_{ij} είναι οι συνιστώσες της μήτρας A , $i = 1,2,...,s$ και $j = 0,1,...,d_i - 1$

- $\left(f_p(x)\right)_{p\in\mathbb{N}}$ είναι μια συγκλίνουσα ακολουθία παραγωγίσιμων συναρτήσεων οποιασδήποτε τάξης και είναι $\lim\limits_{p\to\infty} f_p(x) = f(x)$
- Οι συναρτήσεις $f_p(x)$ και $f(x)$ ορίζονται στο φάσμα $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s\}$.

τότε η ακολουθία μητρών $A_p = f_p(A)$, $p \in \mathbb{N}$ είναι συγκλίνουσα και ισχύει $\lim\limits_{p\to\infty} A_p = f(A)$.

Απόδειξη

Γνωρίζουμε ότι είναι

$$A_p = f_p(A) = \sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{j=0}^{d_i-1}\left(f_p^{(j)}(\lambda_i)\cdot Z_{ij}\right)\right) \Rightarrow$$

$$\lim_{p\to\infty} A_p = \lim_{p\to\infty}\sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{j=0}^{d_i-1}\left(f_p^{(j)}(\lambda_i)\cdot Z_{ij}\right)\right) \Rightarrow$$

$$\lim_{p\to\infty} A_p = \sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{j=0}^{d_i-1}\left(\left(\lim_{p\to\infty} f_p^{(j)}(\lambda_i)\right)\cdot Z_{ij}\right)\right) \Rightarrow$$

$$\lim_{p\to\infty} A_p = \sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{j=0}^{d_i-1}\left(f^{(j)}(\lambda_i)\cdot Z_{ij}\right)\right) \Rightarrow$$

$$\lim_{p\to\infty} A_p = f(A).$$

3) Αν

- $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s\}$ είναι το φάσμα της μήτρας $A \in M_n(K)$
- Z_{ij} είναι οι συνιστώσες της μήτρας A, $i = 1,2,...,s$ και $j = 0,1,...,d_i - 1$
- $\left(f_p(x)\right)_{p\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία παραγωγίσιμων συναρτήσεων οποιασδήποτε τάξης.
- Οι συναρτήσεις $f_p(x)$ ορίζονται στο φάσμα $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s\}$.
- Οι αριθμητικές ακολουθίες $\left(f_p^{(j)}(\lambda_i)\right)_{p\in\mathbb{N}}$ συγκλίνουν, για κάθε $i = 1,2,...,s$ και για κάθε $j = 0,1,...,d_i - 1$

τότε

i) Η ακολουθία μητρών $A_p = f_p(A)$, $p \in \mathbb{N}$ είναι συγκλίνουσα.

ii) Αν είναι $\lim\limits_{p\to\infty} A_p = B$, τότε υπάρχει πολυωνυμική συνάρτηση f, η οποία ορίζεται στο φάσμα $\sigma(A)$ και για την οποία ισχύει $f(A) = B$.

Απόδειξη

i) Έστω ότι $\lim\limits_{p\to\infty} f_p^{(j)}(\lambda_i) = F_i^j$ για κάθε $i = 1,2,...,s$ και για κάθε $j = 0,1,...,d_i - 1$.

Γνωρίζουμε ότι είναι

$$A_p = f_p(A) = \sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{j=0}^{d_i-1}\left(f_p^{(j)}(\lambda_i)\cdot Z_{ij}\right)\right) \Rightarrow$$

$$\lim_{p\to\infty} A_p = \lim_{p\to\infty}\sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{j=0}^{d_i-1}\left(f_p^{(j)}(\lambda_i)\cdot Z_{ij}\right)\right) \Rightarrow$$

$$\lim_{p\to\infty} A_p = \sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{j=0}^{d_i-1}\left(\left(\lim_{p\to\infty} f_p^{(j)}(\lambda_i)\right)\cdot Z_{ij}\right)\right) \Rightarrow$$

$$\lim_{p\to\infty} A_p = \sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{j=0}^{d_i-1}\left(F_i^j\cdot Z_{ij}\right)\right).$$

Συνεπώς η ακολουθία μητρών $A_p = f_p(A)$, $p\in\mathbb{N}$ είναι συγκλίνουσα.

ii) Έστω $f(x)$ το πολυώνυμο του Hermite που παρεμβάλεται στα δεδομένα $f^{(j)}(\lambda_i) = F_i^j$ για κάθε $i = 1,2,...,s$ και για κάθε $j = 1,2,...,d_i - 1$. Τότε είναι

$$B = \lim_{p\to\infty} A_p = \sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{j=0}^{d_i-1}\left(F_i^j\cdot Z_{ij}\right)\right) \Rightarrow$$

$$B = \sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{j=0}^{d_i-1}\left(f^{(j)}(\lambda_i)\cdot Z_{ij}\right)\right) \Rightarrow B = f(A).$$

Παράδειγμα

Δίνεται η μήτρα $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ και η ακολουθία των συναρτήσεων

$$f_p(x) = \frac{px^2 + (3p+2)x + 5}{p+1},\ p\in\mathbb{N}.$$

i) Να βρεθεί το φάσμα της μήτρας A.

ii) Να βρεθούν οι συνιστώσες της μήτρας A.

iii) Να βρεθεί η ακολουθία μητρών $A_p = f_p(A)$, $p\in\mathbb{N}$.

iv) Να βρεθεί, αν υπάρχει, το όριο $\lim_{p\to\infty} A_p$.

v) Να βρεθούν οι ακολουθίες $\left(f_p^{(j)}(\lambda_\iota)\right)_{p\in\mathbb{N}}$ και τα όρια τους, αν υπάρχουν.

vi) Να βρεθεί πολυωνυμική συνάρτηση $f(x)$ για την οποία ισχύει $f(A) = B$.

Λύση

i) Η μήτρα A έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο $q(x) = -(x-2)^2(x-1)$. Άρα το φάσμα της είναι $\sigma(A) = \{1,2\}$.

ii) Για τις ιδιοτιμές της μήτρας A ισχύουν

Ιδιοτιμές	Ιδιοδιανύσματα	Αλγεβρικές Πολλαπλότητες	Γεωμετρικές Πολλαπλότητες	Δείκτες
$\lambda_1 = 1$	$v_1 = (0, -1, 1)$	$a_1 = 1$	$\gamma_1 = 1$	$d_1 = 1$
$\lambda_2 = 2$	$v_2 = (-1, 2, 1)$	$a_2 = 2$	$\gamma_2 = 1$	$d_2 = 2$

A) Υπολογισμός της συνιστώσας που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1$.

Τα δεδομένα αριθμητικής παρεμβολής είναι

i	λ_i	$\varphi_{10}(\lambda_i)$	$\varphi_{10}^{(1)}(\lambda_i)$
1	1	1	
2	2	0	
3	2		0

Το πολυώνυμο παρεμβολής είναι $\varphi_{10}(x) = x^2 - 4x + 4$

άρα είναι $Z_{10} = \varphi_{10}(A) \Rightarrow Z_{10} = A^2 - 4A + 4I_3 \Rightarrow$

$$Z_{10} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

B) Υπολογισμός των συνιστωσών που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = 2$.

Τα δεδομένα αριθμητικής παρεμβολής για την συνιστώσα Z_{20} είναι

i	λ_i	$\varphi_{20}(\lambda_i)$	$\varphi_{20}^{(1)}(\lambda_i)$
1	1	0	
2	2	1	
3	2		0

Το πολυώνυμο παρεμβολής είναι $\varphi_{20}(x) = -x^2 + 4x - 3$, άρα είναι

$Z_{20} = \varphi_{20}(A) \Rightarrow Z_{20} = -A^2 + 4A - 3I_3 \Rightarrow$

$$Z_{20} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Τα δεδομένα αριθμητικής παρεμβολής για την συνιστώσα Z_{21} είναι

i	λ_i	$\varphi_{21}(\lambda_i)$	$\varphi_{21}^{(1)}(\lambda_i)$
1	1	0	
2	2	0	
3	2		1

Το πολυώνυμο παρεμβολής είναι $\varphi_{21}(x) = x^2 - 3x + 2$, άρα είναι

$$Z_{21} = \varphi_{21}(A) \Rightarrow Z_{21} = A^2 - 3A + 2I_3 \Rightarrow$$

$$Z_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

iii) Είναι $A_p = f_p(A) \Rightarrow$

$$A_p = \frac{p}{p+2}A^2 + \frac{3p+2}{p+1}A + \frac{5}{p+1}I_3 \Rightarrow$$

$$A_p = \begin{bmatrix} \frac{17p+11}{p+1} & -\frac{7p+2}{p+1} & -\frac{7p+2}{p+1} \\ \frac{14p+4}{p+1} & \frac{2p+7}{p+1} & -\frac{2p}{p+1} \\ -\frac{7p+2}{p+1} & \frac{p}{p+1} & \frac{5p+7}{p+1} \end{bmatrix}.$$

iv) Προφανώς υπάρχουν τα όρια των στοιχείων της μήτρας A_p και είναι πεπερασμένα, άρα υπάρχει το όριο $\lim_{p\to\infty} A_p$ και είναι

$$\lim_{p\to\infty} A_p = \begin{bmatrix} \lim_{p\to\infty}\frac{17p+11}{p+1} & -\lim_{p\to\infty}\frac{7p+2}{p+1} & -\lim_{p\to\infty}\frac{7p+2}{p+1} \\ \lim_{p\to\infty}\frac{14p+4}{p+1} & \lim_{p\to\infty}\frac{2p+7}{p+1} & -\lim_{p\to\infty}\frac{2p}{p+1} \\ -\lim_{p\to\infty}\frac{7p+2}{p+1} & \lim_{p\to\infty}\frac{p}{p+1} & \lim_{p\to\infty}\frac{5p+7}{p+1} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\lim_{p\to\infty} A_p = \begin{bmatrix} 17 & -7 & -7 \\ 14 & 2 & -2 \\ -7 & 1 & 5 \end{bmatrix} = B$$

v) Είναι $f_p(x) = f_p^{(0)}(x) = \frac{p}{p+1}x^2 + \frac{3p+2}{p+1}x + \frac{5}{p+1}$ και $f_p^{(1)}(x) = \frac{2p}{p+1}x + \frac{3p+2}{p+1}$.

λ_i	$f_p^{(j)}(\lambda_i)$	$F_i^j = \lim_{p\to\infty} f_p^{(j)}(\lambda_i)$
$\lambda_1 = 1$	$f_p^{(0)}(\lambda_1) = \frac{4p+7}{p+1}$	$F_1^0 = \lim_{p\to\infty} f_p^{(0)}(\lambda_1) = 4$
$\lambda_2 = 2$	$f_p^{(0)}(\lambda_2) = \frac{10p+9}{p+1}$	$F_2^0 = \lim_{p\to\infty} f_p^{(0)}(\lambda_2) = 10$
$\lambda_2 = 2$	$f_p^{(1)}(\lambda_2) = \frac{7p+2}{p+1}$	$F_2^1 = \lim_{p\to\infty} f_p^{(0)}(\lambda_2) = 7$

vi) Τα δεδομένα αριθμητικής παρεμβολής για την πολυωνυμική συνάρτηση $f(x)$ είναι

i	λ_i	$f(\lambda_i)$	$f^{(1)}(\lambda_i)$
1	1	4	
2	2	10	
3	2		7

Η πολυωνυμική συνάρτηση παρεμβολής είναι $f(x) = x^2 + 3x$. Για την συνάρτηση αυτή ισχύει

$$f(A) = A^2 + 3A = B \text{, όπου } B = \lim_{p\to\infty} A_p = \begin{bmatrix} 17 & -7 & -7 \\ 14 & 2 & -2 \\ -7 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

4) Έστω

- Z_{ij} είναι οι συνιστώσες της μήτρας A, $i = 1,2,...,s$ και $j = 0,1,...,d_i - 1$
- Η ακολουθία μητρών $A_p = \sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{j=0}^{d_i-1}\left(b_{p,i}^{j} \cdot Z_{ij}\right)\right)$, $p \in \mathbb{N}$ συγκλίνει,

τότε και οι ακολουθίες $\left(b_{p,i}^{j}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ συγκλίνουν για κάθε $i = 1,2,...,s$ και για κάθε $j = 0,1,...,d_i - 1$.

Απόδειξη

Συμβολίζω με V_A το γραμμικό υπόχωρο του $M_n(K)$, που παράγεται από τις μήτρες συνιστώσες Z_{ij}, δηλαδή είναι $V_A = < Z_{ij} >$. Γνωρίζουμε ότι οι πίνακες είναι γραμμικά ανεξάρτητοι και σε πλήθος $m = d_1 + d_2 + ... + d_s$, συνεπώς αποτελούν βάση του V_A και είναι $\dim V_A = m$.

Προφανώς είναι $A_p \in V_A$ και η παράσταση $A_p = \sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{j=0}^{d_i-1}\left(b_{p,i}^{j} \cdot Z_{ij}\right)\right)$ της μήτρας A_p ως γραμμικό συνδιασμό των Z_{ij} είναι μοναδική.

Για p σταθερό από την ισότητα $A_p = \sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{j=0}^{d_i-1}\left(b_{p,i}^{j} \cdot Z_{ij}\right)\right)$ προκύπτει ένα σύστημα n^2 εξισώσεων με m αγνώστους τα $b_{p,i}^{j}$, $i = 1,2,...,s$ και $j = 0,1,...,d_i - 1$.

Οι συντελεστές του συστήματος αυτού είναι σταθεροί αριθμοί ανεξάρτητοι του p. (είναι γραμμικοί συνδιασμοί των στοιχείων των Z_{ij}) και επειδή τα $b_{p,i}^{j}$ είναι μοναδικά, το σύστημα έχει μοναδική λύση. Λύνοντας το σύστημα αυτό προκύπτει ότι τα $b_{p,i}^{j}$ είναι γραμμικοί συνδιασμοί στοιχείων της μήτρας A_p με σταθερούς συντελεστές, δηλαδή είναι της μορφής $b_{p,i}^{j} = \sum_{s=1}^{s_{\max}}\left(\sum_{r=1}^{r_{\max}} c_{i_s,j_r} \cdot a_{i_s,j_r}^{p}\right)$, όπου τα c_{i_s,j_r} είναι ανεξάρτητα του p.

Οι ακολουθίες $\left(a_{i_s,j_r}^{p}\right)_{p\in N}$ είναι συγκλίνουσες συνεπώς είναι συγκλίνουσα και η ακολουθία $\left(b_{p,i}^{j}\right)_{p\in\mathbb{N}}$

και αυτό ισχύει για κάθε $i=1,2,...,s$ και $j=0,1,...,d_i-1$.

5) Αν

- $\sigma(A)=\{\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_s\}$ είναι το φάσμα της μήτρας $A\in M_n(K)$
- Z_{ij} είναι οι συνιστώσες της μήτρας A, $i=1,2,...,s$ και $j=0,1,...,d_i-1$
- $\left(b_{pi}^{j}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ είναι $m=d_1+d_2+...+d_s$ συγκλίνουσες ακολουθίες με $\lim\limits_{p\to\infty} b_{pi}^{j}=a_i^j$.
- $A_p=\sum\limits_{i=1}^{s}\left(\sum\limits_{j=0}^{d_i-1}\left(b_{pi}^{j}Z_{ij}\right)\right)$.

τότε

i) Υπάρχει ακολουθία συναρτήσεων $\left(f_p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε $A_p=f_p(A)$, $p\in\mathbb{N}$.

ii) Υπάρχει μια συνάρτηση f τέτοια ώστε $\lim\limits_{p\to\infty}A_p=\lim\limits_{p\to\infty}f_p(A)=f(A)$.

Απόδειξη

i) Έστω $p\in\mathbb{N}$. Συμβολίζουμε με f_p το πολυώνυμο που παρεμβάλεται στα δεδομένα

$f_p^{(j)}(\lambda_i)=b_{pi}^{j}$ για κάθε $i=1,2,...,s$ και για κάθε $j=0,1,...,d_i-1$. Τότε είναι

$$f_p(A)=\sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{j=0}^{d_i-1}\left(f_p^{(j)}(\lambda_i)Z_{ij}\right)\right)\Rightarrow$$

$$f_p(A)=\sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{j=0}^{d_i-1}\left(b_{pi}^{j}Z_{ij}\right)\right)\Rightarrow f_p(A)=A_p\,.$$

ii) Συμβολίζουμε με f το πολυώνυμο που παρεμβάλεται στα δεδομένα

$f^{(j)}(\lambda_i)=a_i^j$ για κάθε $i=1,2,...,s$ και για κάθε $j=0,1,...,d_i-1$.

Τότε είναι

$$\lim_{p\to\infty}A_p=\lim_{p\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{j=0}^{d_i-1}\left(b_{pi}^{j}Z_{ij}\right)\right)\right]\Rightarrow$$

$$\lim_{p\to\infty}A_p=\sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{j=0}^{d_i-1}\left(\left(\lim_{p\to\infty}b_{pi}^{j}\right)Z_{ij}\right)\right)\Rightarrow$$

$$\lim_{p\to\infty}A_p=\sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{j=0}^{d_i-1}\left(a_i^jZ_{ij}\right)\right)\Rightarrow$$

$$\lim_{p\to\infty}A_p=\sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{j=0}^{d_i-1}\left(f^{(j)}(\lambda_i)Z_{ij}\right)\right)\Rightarrow$$

$$\lim_{p\to\infty}A_p=f(A)\,.$$

Παράδειγμα

Δίνεται η μήτρα $A=\begin{bmatrix}4 & -1 & -1\\ 2 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 2\end{bmatrix}$ και οι ακολουθίες $b_{p1}^{0}=\dfrac{5p+1}{p+1}$, $b_{p2}^{0}=\dfrac{4p-1}{p+1}$, $b_{p2}^{1}=\dfrac{3p+2}{p+1}$, $p\in\mathbb{N}$.

i) Να βρεθεί το φάσμα της μήτρας A.

ii) Να βρεθούν οι συνιστώσες της μήτρας A.

iii) Να δειχθεί ότι οι ακολουθίες b_{p1}^{0}, b_{p2}^{0}, b_{p2}^{1} συγκλίνουν και να βρεθούν τα όριά τους.

iv) Να βρεθεί η μήτρα $A_p=b_{p1}^{0}Z_{10}+b_{p2}^{0}Z_{20}+b_{p2}^{1}Z_{21}$ καθώς και το $\lim\limits_{p\to\infty}A_p$.

v) Να βρεθεί ακολουθία συναρτήσεων $\left(f_p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ για την οποία ισχύει $A_p=f_p(A)$, $p\in\mathbb{N}$.

vi) Να βρεθεί πολυωνυμική συνάρτηση $f(x)$ για την οποία ισχύει $f(A)=\lim\limits_{p\to\infty}A_p$.

Λύση

i) Η μήτρα A έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο $q(x)=-(x-3)^2(x-2)$. Άρα το φάσμα της είναι $\sigma(A)=\{2,3\}$.

ii) Για τις ιδιοτιμές της μήτρας A ισχύουν

Ιδιοτιμές	**Ιδιοδιανύσματα**	**Αλγεβρικές Πολλαπλότητες**	**Γεωμετρικές Πολλαπλότητες**	**Δείκτες**
$\lambda_1=2$	$v_1=(0,-1,1)$	$a_1=1$	$\gamma_1=1$	$d_1=1$
$\lambda_2=3$	$v_2=(-1,-2,1)$	$a_2=2$	$\gamma_2=1$	$d_2=2$

Α) Υπολογισμός της συνιστώσας που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1=2$.

Τα δεδομένα αριθμητικής παρεμβολής είναι

i	λ_i	$\varphi_{10}(\lambda_i)$	$\varphi_{10}^{(1)}(\lambda_i)$
1	2	1	
2	3	0	
3	3		0

Το πολυώνυμο παρεμβολής είναι $\varphi_{10}(x)=x^2-6x+9$

άρα είναι $Z_{10}=\varphi_{10}(A)\Rightarrow Z_{10}=A^2-6A+9I_3\Rightarrow$

$$Z_{10}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -2\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}.$$

Β) Υπολογισμός των συνιστωσών που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_2=3$.

Τα δεδομένα αριθμητικής παρεμβολής για την συνιστώσα Z_{20} είναι

i	λ_i	$\varphi_{20}(\lambda_i)$	$\varphi_{20}^{(1)}(\lambda_i)$
1	2	0	
2	3	1	
3	3		0

Το πολυώνυμο παρεμβολής είναι $\varphi_{20}(x) = -x^2 + 6x - 8$, άρα είναι

$$Z_{20} = \varphi_{20}(A) \Rightarrow Z_{20} = -A^2 + 6A - 8I_3 \Rightarrow$$

$$Z_{20} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Τα δεδομένα αριθμητικής παρεμβολής για την συνιστώσα Z_{21} είναι

i	λ_i	$\varphi_{21}(\lambda_i)$	$\varphi_{21}^{(1)}(\lambda_i)$
1	2	0	
2	3	0	
3	3		1

Το πολυώνυμο παρεμβολής είναι $\varphi_{21}(x) = x^2 - 5x + 6$, άρα είναι

$$Z_{21} = \varphi_{21}(A) \Rightarrow Z_{21} = A^2 - 5A + 6I_3 \Rightarrow$$

$$Z_{21} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

iii) Είναι $b_{p1}^0 = \dfrac{5p+1}{p+1}$, $b_{p2}^0 = \dfrac{4p-1}{p+1}$, $b_{p2}^1 = \dfrac{3p+2}{p+1}$, $p \in \mathbb{N}$.

Προφανώς οι ακολουθίες αυτές συγκλίνουν και είναι

$$\lim_{p\to\infty} b_{p1}^0 = \lim_{p\to\infty} \frac{5p+1}{p+1} = 5, \ \lim_{p\to\infty} b_{p2}^0 = \lim_{p\to\infty} \frac{4p-1}{p+1} = 4, \ \lim_{p\to\infty} b_{p2}^1 = \lim_{p\to\infty} \frac{3p+2}{p+1} = 3.$$

Θέτουμε $a_1^0 = \lim\limits_{p\to\infty} b_{p1}^0 = 5$, $a_2^0 = \lim\limits_{p\to\infty} b_{p2}^0 = 4$, $a_2^1 = \lim\limits_{p\to\infty} b_{p2}^1 = 3$.

iv) Θέτουμε $A_p = b_{p1}^0 Z_{10} + b_{p2}^0 Z_{20} + b_{p2}^1 Z_{21} \Rightarrow A_p = \begin{bmatrix} \dfrac{7p+1}{p+1} & -\dfrac{3p+2}{p+1} & -\dfrac{3p+2}{p+1} \\ \dfrac{6p+4}{p+1} & -\dfrac{3p+7}{p+1} & -8 \\ -\dfrac{3p+2}{p+1} & 4 & \dfrac{9p+5}{p+1} \end{bmatrix}$.

Προφανώς υπάρχουν τα όρια των στοιχείων της μήτρας A_p και είναι πεπερασμένα, άρα υπάρχει το όριο $\lim\limits_{p\to\infty} A_p$ και είναι

$$\lim_{p\to\infty} A_p = \begin{bmatrix} \lim_{p\to\infty}\frac{7p+1}{p+1} & -\lim_{p\to\infty}\frac{3p+2}{p+1} & -\lim_{p\to\infty}\frac{3p+2}{p+1} \\ \lim_{p\to\infty}\frac{6p+4}{p+1} & -\lim_{p\to\infty}\frac{3p+7}{p+1} & -8 \\ -\lim_{p\to\infty}\frac{3p+2}{p+1} & 4 & \lim_{p\to\infty}\frac{9p+5}{p+1} \end{bmatrix} \Rightarrow \lim_{p\to\infty} A_p = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ 6 & -3 & -8 \\ -3 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

v) Τα δεδομένα αριθμητικής παρεμβολής για τη πολυωνυμική συνάρτηση $f_p(x)$ είναι

i	λ_i	$f_p(\lambda_i)$	$f_p^{(1)}(\lambda_i)$
1	2	$\frac{5p+1}{p+1}$	
2	3	$\frac{4p-1}{p+1}$	
3	3		$\frac{3p+2}{p+1}$

Το πολυώνυμο παρεμβολής είναι $f_p(x) = \frac{2p+4}{p+1}x^2 - \frac{21p+22}{p+1}x + \frac{31p+29}{p+1}$.

Είναι $f_p(A) = \frac{2p+4}{p+1}A^2 - \frac{21p+22}{p+1}A + \frac{31p+29}{p+1}I_3 \Rightarrow f_p(A) = A_p$ (μετά τις πράξεις).

vi) Τα δεδομένα αριθμητικής παρεμβολής για τη πολυωνυμική συνάρτηση $f(x)$ είναι

i	λ_i	$f(\lambda_i)$	$f^{(1)}(\lambda_i)$
1	2	$a_1^0 = 5$	
2	3	$a_2^0 = 4$	
3	3		$a_2^1 = 3$

Το πολυώνυμο παρεμβολής είναι $f(x) = 4x^2 - 21x + 31$.

Είναι $f(A) = 4A^2 - 21A + 31I_3 \Rightarrow f(A) = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ 6 & -3 & -8 \\ -3 & 4 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow f(A) = \lim_{p\to\infty} A_p$.

4.5 ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΚΑΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΠΡΟΟΔΟΙ

1) Έστω η ακολουθία των συναρτήσεων $\left(f_p(x)\right)_{p\in\mathbb{N}}$ με $f_p(x) = x^p$ και $x \in (-1,1)$, τότε οι ακολουθίες $\left(f_p^{(j)}(x)\right)_{p\in\mathbb{N}}$, $j = 0,1,...,p-1$ συγκλίνουν και είναι $\lim_{p\to\infty} f_p^{(j)}(x) = 0$, για κάθε $x \in (-1,1)$.

Απόδειξη

Άμεση συνέπεια του κρητηρίου του λόγου.

2) Αν $\sigma(A)=\{\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_s\}$ είναι το φάσμα της μήτρας $A\in M_n(K)$ και ισχύει $|\lambda_i|<1$, για κάθε $i=1,2,...,s$, τότε η ακολουθία μητρών $\left(A^p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει και είναι $\lim_{p\to\infty}A^p=O$.

Απόδειξη

Θέτουμε $f_p(x)=x^p$.

Τότε είναι

$$A^p=\sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{j=0}^{d_i-1}\left(f_p^{(j)}(\lambda_i)Z_{ij}\right)\right)\Rightarrow \lim_{p\to\infty}A^p=\lim_{p\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{j=0}^{d_i-1}\left(f_p^{(j)}(\lambda_i)Z_{ij}\right)\right)\right]\Rightarrow$$

$$\lim_{p\to\infty}A^p=\sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{j=0}^{d_i-1}\left(\lim_{p\to\infty}f_p^{(j)}(\lambda_i)\cdot Z_{ij}\right)\right)\Rightarrow \lim_{p\to\infty}A^p=\sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{j=0}^{d_i-1}\left(0\cdot Z_{ij}\right)\right)\Rightarrow \lim_{p\to\infty}A^p=O.$$

Πόρισμα 1.

Αν $\sigma(A)=\{\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_s\}$ είναι το φάσμα της μήτρας $A\in M_n(K)$ και ισχύει $|\lambda_i|<1$, για κάθε $i=1,2,...,s$ τότε η ακολουθία μητρών $\left(p^kA^p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει και είναι $\lim_{p\to\infty}\left(p^kA^p\right)=O$. ($k>0$)

Πόρισμα 2.

Αν

- $\sigma(A)=\{\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_s\}$ είναι το φάσμα της μήτρας $A\in M_n(K)$ και ισχύει $|\lambda_i|<1$, για κάθε $i=1,2,...,s$.
- $\left(a_p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ είναι μια αριθμητική πρόοδος

τότε η ακολουθία μητρών $\left(a_pA^p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει και είναι $\lim_{p\to\infty}\left(a_pA^p\right)=O$. ($k>0$)

Πόρισμα 3.

Αν

- $\sigma(A)=\{\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_s\}$ είναι το φάσμα της μήτρας $A\in M_n(K)$ και ισχύει $|\lambda_i|<1$, για κάθε $i=1,2,...,s$.
- $\left(a_p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ είναι μια γεωμετρική πρόοδος με λόγο ω, όπου $|\omega|<1$

τότε η ακολουθία μητρών $\left(a_pA^p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει και είναι $\lim_{p\to\infty}\left(a_pA^p\right)=O$. ($k>0$)

Πόρισμα 4.

Αν

- $\sigma(A)=\{\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_s\}$ είναι το φάσμα της μήτρας $A\in M_n(K)$ και ισχύει $|\lambda_i|<1$, για κάθε $i=1,2,...,s$.

- $\left(a_p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ είναι μια μεικτή πρόοδος με λόγο ω, όπου $|\omega|<1$

τότε η ακολουθία μητρών $\left(a_p A^p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει και είναι $\lim_{p\to\infty}\left(p^k A^p\right)=O$. ($k>0$)

3) Αν

- $\sigma(A)=\{\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_s\}$ είναι το φάσμα της μήτρας $A\in M_n(K)$ και ισχύει $|\lambda_i|<1$, για κάθε $i=1,2,...,s$.
- $\lambda\notin\sigma(A)$
- $\left(B_p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ είναι η ακολουθία μητρών $B_p=I_n+\lambda A+\lambda^2A^2+...+\lambda^{p-1}A^{p-1}$.

τότε

- αν $\lambda\in(-1,1]$ η ακολουθία $\left(B_p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει και είναι $\lim_{p\to\infty}B_p=\left(I_n-\lambda A\right)^{-1}$.
- αν $\lambda\notin(-1,1]$ η ακολουθία $\left(B_p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ αποκλίνει

Απόδειξη

Επειδή $\lambda\notin\sigma(A)$ η μήτρα $I_n-\lambda A$ είναι αντιστρέψιμη. Τότε είναι

$$\left(I_n-\lambda A\right)\cdot B_p=\left(I_n-\lambda A\right)\cdot\left(I_n+\lambda A+\lambda^2A^2+...+\lambda^{p-1}A^{p-1}\right)\Rightarrow$$

$$\left(I_n-\lambda A\right)\cdot B_p=I_n-\lambda^pA^p\Rightarrow B_p=\left(I_n-\lambda A\right)^{-1}\cdot\left(I_n-\lambda^pA^p\right).$$

Αν $\lambda=1$ τότε είναι $B_p=\left(I_n-A\right)^{-1}\cdot\left(I_n-A^p\right)$.

Αλλά είναι

$$\lim_{p\to\infty}A^p=O\text{, άρα }\lim_{p\to\infty}B_p=\left(I_n-\lambda A\right)^{-1}\cdot\left(I_n-O\right)\Rightarrow\lim_{p\to\infty}B_p=\left(I_n-\lambda A\right)^{-1}.$$

Αν $\lambda\in\left(-1,1\right)$ τότε είναι $\lim_{p\to\infty}\lambda^p=0$ και $\lim_{p\to\infty}A^p=0$ οπότε $\lim_{p\to\infty}\lambda^pA^p=O$, άρα

$$\lim_{p\to\infty}B_p=\left(I_n-\lambda A\right)^{-1}\cdot\left(I_n-O\right)\Rightarrow\lim_{p\to\infty}B_p=\left(I_n-\lambda A\right)^{-1}.$$

Πόρισμα 1.

Αν

- $\sigma(A)=\{\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_s\}$ είναι το φάσμα της μήτρας $A\in M_n(K)$ και ισχύει $|\lambda_i|<1$, για κάθε $i=1,2,...,s$.
- $\left(B_p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ είναι η ακολουθία μητρών $B_p=I_n+A+A^2+...+A^{p-1}$.

τότε η ακολουθία μητρών $\left(B_p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει και είναι $\lim_{p\to\infty}\left(I_n+A+A^2+...+A^{p-1}\right)=\left(I_n-A\right)^{-1}$.

Πόρισμα 2.

Αν

- $\sigma(A)=\{\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_s\}$ είναι το φάσμα της μήτρας $A\in M_n(K)$ και ισχύει $|\lambda_i|<1$, για κάθε

$i = 1, 2, \ldots, s$
- $-1 \notin \sigma(A)$
- $\left(B_p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ είναι η ακολουθία μητρών $B_p = I_n - A + A^2 + \ldots + (-1)^{p-1} A^{p-1}$.

τότε η ακολουθία μητρών $\left(B_p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει και είναι $\lim\limits_{p\to\infty}\left(I_n - A + A^2 + \ldots + (-1)^p A^{p-1}\right) = \left(I_n + A\right)^{-1}$.

4) Αν
- $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s\}$ είναι το φάσμα της μήτρας $A \in M_n(K)$ και ισχύει $|\lambda_i| < 1$, για κάθε $i = 1, 2, \ldots, s$.
- $\lambda^{-1} \notin \sigma(A)$
- $\left(B_p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ είναι η ακολουθία μητρών $B_p = \lambda^{p-1} I_n + \lambda^{p-2} A + \ldots + \lambda A^{p-2} + A^{p-1}$.

τότε
- αν $\lambda = 1$ η ακολουθία $\left(B_p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει και είναι $\lim\limits_{p\to\infty} B_p = \left(I_n - A\right)^{-1}$
- αν $\lambda \in (-1,1)$ η ακολουθία $\left(B_p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει και είναι $\lim\limits_{p\to\infty} B_p = O$
- αν $\lambda \notin (-1,1]$ η ακολουθία $\left(B_p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ αποκλίνει.

Απόδειξη

Επειδή $\lambda^{-1} \notin \sigma(A)$ η μήτρα $\lambda I_n - A$ είναι αντιστρέψιμη. Τότε είναι

$$\left(\lambda I_n - A\right)\cdot B_p = \left(\lambda I_n - A\right)\cdot\left(\lambda^{p-1} I_n + \lambda^{p-2} A + \ldots + \lambda A^{p-2} + A^{p-1}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\lambda I_n - A\right)\cdot B_p = \lambda^p I_n - A^p \Rightarrow B_p = \left(\lambda I_n - A\right)^{-1}\cdot\left(\lambda^p I_n - A^p\right).$$

Αν $\lambda = 1$ τότε είναι $B_p = \left(I_n - A\right)^{-1}\cdot\left(I_n - A^p\right)$. Αλλά είναι

$\lim\limits_{p\to\infty} A^p = O$, άρα $\lim\limits_{p\to\infty} B_p = \left(I_n - A\right)^{-1}\cdot\left(I_n - O\right) \Rightarrow \lim\limits_{p\to\infty} B_p = \left(I_n - A\right)^{-1}$.

Αν $\lambda \in \left(-1, 1\right)$ τότε είναι $\lim\limits_{p\to\infty} \lambda^p = 0$ και $\lim\limits_{p\to\infty} A^p = 0$, άρα

$\lim\limits_{p\to\infty} B_p = \left(\lambda I_n - A\right)^{-1}\cdot\left(O - O\right) \Rightarrow \lim\limits_{p\to\infty} B_p = O$.

4.6 ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΚΑΙ ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

1) Αν
- $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s\}$ είναι το φάσμα της μήτρας $A \in M_n(K)$ και ισχύει $|\lambda_i| < 1$, για κάθε $i = 1, 2, \ldots, s$.
- $1 \notin \sigma(A)$
- $B_0, C \in M_n(K)$ και ισχύουν οι σχέσεις $A\cdot C = C\cdot A$ και $B_0\cdot A = A\cdot B_0$.
- $\left(B_p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ είναι η ακολουθία μητρών που ορίζεται από την αναδρομική σχέση $B_p = A\cdot B_{p-1} + C$.

τότε

i) $B_p \cdot A = A \cdot B_p$ για κάθε $p \in \mathbb{N}$.

ii) Αν $D_p = B_p - B_{p-1}$ τότε είναι $D_{p+1} = A \cdot D_p$ και $A \cdot D_p = D_p \cdot A$, για κάθε $p \in \mathbb{N}$.

iii) Είναι $D_{p+1} = A^p \cdot D_1$, για κάθε $p \in \mathbb{N}$.

iv) Είναι $B_p = B_0 + \left(I_n + A + A^2 + ... + A^{p-1}\right) \cdot D_1$, για κάθε $p \in \mathbb{N}$.

v) $\lim\limits_{p\to\infty} B_p = \left(I_n - A\right)^{-1} \cdot \left(B_1 - A \cdot B_0\right)$.

Απόδειξη

i) Άμεση εφαρμογή της μαθηματικής επαγωγής.

ii) Για κάθε $p \in \mathbb{N}$ είναι $B_{p+1} = A \cdot B_p + C$ και $B_p = A \cdot B_{p-1} + C$.

Αφαιρώντας κατά μέλη τις δύο ισότητες παίρνουμε

$B_{p+1} - B_p = A \cdot \left(B_p - B_{p-1}\right) \Rightarrow D_{p+1} = A \cdot D_p$. Είναι

$$A \cdot D_p = A \cdot \left(B_p - B_{p-1}\right) = A \cdot B_p - A \cdot B_{p-1} = B_p \cdot A - B_{p-1} \cdot A = \left(B_p - B_{p-1}\right) \cdot A = D_p \cdot A.$$

iii) Είναι

$$D_{p+1} = A \cdot D_p \Rightarrow D_{p+1} = A \cdot \left(A \cdot D_{p-1}\right) \Rightarrow D_{p+1} = A^2 \cdot D_{p-1} \Rightarrow \ldots \Rightarrow D_{p+1} = A^p \cdot D_1$$

iv) Είναι $D_{p+1} = A^p \cdot D_1 \Rightarrow B_{p+1} - B_p = A^p \cdot D_1$.

Από την σχέση αυτή προκύπτουν οι σχέσεις

$$B_p - B_{p-1} = A^{p-1} \cdot D_1$$
$$B_{p-1} - B_{p-2} = A^{p-2} \cdot D_1$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$B_3 - B_2 = A^2 \cdot D_1$$
$$B_2 - B_1 = A \cdot D_1$$
$$B_1 - B_0 = A \cdot D_1$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις ισότητες αυτές προκύπτει ότι

$$B_p - B_0 = \left(A^{p-1} + A^{p-2} + ... + A^2 + A + I_n\right) \cdot D_1 \Rightarrow$$

$$B_p = B_0 + \left(A^{p-1} + A^{p-2} + ... + A^2 + A + I_n\right) \cdot D_1 \text{ ή } B_p = B_0 + \left(I_n + A + A^2 + ... + A^{p-2} + A^{p-1}\right) \cdot D_1$$

v) Επειδή $1 \notin \sigma(A)$ γνωρίζουμε ότι είναι

$\lim\limits_{p\to\infty}\left(I_n + A + A^2 + ... + A^{p-1}\right) = \left(I_n - A\right)^{-1}$, άρα

$$\lim_{p\to\infty} B_p = \lim_{p\to\infty}\left[B_0 + \left(I_n + A + A^2 + ... + A^{p-2} + A^{p-1}\right) \cdot D_1\right] \Rightarrow$$

$$\lim_{p\to\infty} B_p = B_0 + \left(I_n - A\right)^{-1} \cdot D_1 \Rightarrow \lim_{p\to\infty} B_p = B_0 + \left(I_n - A\right)^{-1} \cdot \left(B_1 - B_0\right) \Rightarrow$$

$$\lim_{p\to\infty} B_p = (I_n - A)^{-1} \cdot \left[(I_n - A)\cdot B_0 + (B_1 - B_0) \right] \Rightarrow \lim_{p\to\infty} B_p = B(I_n - A)^{-1} \cdot \left[B_0 \cdot (I_n - A) + (B_1 - B_0) \right] \Rightarrow$$

$$\lim_{p\to\infty} B_p = (I_n - A)^{-1} \cdot (B_1 - A \cdot B_0).$$

4.7 ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΛΟΓΟΥ

Έστω $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία αντιστρέψιμων μητρών για την οποία η ακολουθία $\left(A_{p+1}\cdot A_p^{-1}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στην μήτρα A, για την οποία ισχύει $\|A\|<1$. Τότε η ακολουθία $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει και είναι $\lim_{p\to\infty} A_p = O$.

Απόδειξη

Είναι

$$\lim_{p\to\infty}\left(A_{p+1}\cdot A_p^{-1}\right) = A \Rightarrow \lim_{p\to\infty}\left(A_{p+1}\cdot A_p^{-1} - A\right) = O \Rightarrow \lim_{p\to\infty}\left\|A_{p+1}\cdot A_p^{-1} - A\right\| = O.$$

Επιλέγω $k>0$ τέτοιο ώστε $k+\|A\|<1$. Από τον ορισμό του ορίου προκύπτει ότι υπάρχει $p_0\in\mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\left\|A_{p+1}\cdot A_p^{-1} - A\right\|<k$, για κάθε $p\ge p_0$. Αλλά είναι

$$\left\|A_{p+1}\cdot A_p^{-1}\right\| - \|A\| \le \left\|A_{p+1}\cdot A_p^{-1} - A\right\| \Rightarrow \left\|A_{p+1}\cdot A_p^{-1}\right\| \le \left\|A_{p+1}\cdot A_p^{-1} - A\right\| + \|A\| \Rightarrow$$

$$\left\|A_{p+1}\cdot A_p^{-1}\right\| < k + \|A\| \Rightarrow \left\|A_{p+1}\cdot A_p^{-1}\right\| < k + \|A\| < 1.$$

Θέτουμε $m = k + \|A\| < 1$ τότε είναι

$\left\|A_p\cdot A_{p-1}^{-1}\right\| < m$

$\left\|A_{p-1}\cdot A_{p-2}^{-1}\right\| < m$

…………….

$\left\|A_{p_0+1}\cdot A_{p_0}^{-1}\right\| < m$

Πολλαπλασιάζουμε κατά μέρη τις στάσεις αυτές οπότε προκύπτει

$$\left\|A_p\cdot A_{p-1}^{-1}\right\|\cdot\left\|A_{p-1}\cdot A_{p-2}^{-1}\right\|\cdot\ldots\cdot\left\|A_{p_0+1}\cdot A_{p_0}^{-1}\right\| < m^{p-p_0+1} \Rightarrow$$

$$\left\|\left(A_p\cdot A_{p-1}^{-1}\right)\left(A_{p-1}\cdot A_{p-2}^{-1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(A_{p_0+1}\cdot A_{p_0}^{-1}\right)\right\| < m^{p-p_0+1} \Rightarrow \left\|A_p\cdot A_{p_0}^{-1}\right\| < m^{p-p_0+1}.$$

Αλλά $\lim_{p\to\infty} m^{p-p_0+1} = 0$, άρα $\lim_{p\to\infty}\left\|A_p\cdot A_{p_0}^{-1}\right\| = 0 \Rightarrow \lim_{p\to\infty}\left(A_p\cdot A_{p_0}^{-1}\right) = 0 \Rightarrow \lim_{p\to\infty} A_p = 0$.

Πόρισμα

Αν

- $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία αντιστρέψιμων μητρών
- A μήτρα για την οποία ισχύει $\|A\|<1$ και $A_{p+1} = A\cdot A_p$, για κάθε $p\in\mathbb{N}$

τότε $\lim_{p\to\infty} A_p = O$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ – ΠΡΟΕΚΤΑΣΕΙΣ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Η εργασία αυτή ανήκει στο πεδίο της Βασικής Μαθηματικής Έρευνας. Σκοπός της εργασίας μου αυτής είναι να οριστούν και να μελετηθούν διάφορες μαθηματικές έννοιες πάνω στον Δακτύλιο των τετραγωνικών Μητρών. Το βασικό πρόβλημα είναι ότι ο δακτύλιος των τετραγωνικών μητρών δεν είναι ακεραία περιοχή, δηλαδή έχει διαρέτες του μηδενός. Αυτό συνιστά μια τεράστια διαφορά σε σχέση με το σώμα των πραγματικών ή μιγαδικών αριθμών, όπου εκεί, ως σωμα, δεν έχουμε διαρέτες του μηδενός.

Επίσης στον δακτύλιο των τετραγωνικών μητρών δεν υπάρχει η έννοια του πηλίκου, όπως υπάρχει στο σώμα των πραγματικών ή μιγαδικών αριθμών.

Στο πρώτο κεφάλαιο της διατριβής μου παρουσιάζεται ένας αποτελεσματικός αλγόριθμος λύσης και διερεύνησης της πλήρους πολυωνυμικής εξίσωσης μητρών, όχι προσεγγιστικά (επαναληπτική μέθοδος), αλλά με κλειστό μαθηματικό τύπο και μάλιστα χωρίς να μας ενδιαφέρει αν το πολυώνυμο είναι αντιστρέψιμη συνάρτηση, ούτε σε περίπτωση που είναι μας χρειάζεται η αντίστροφη συνάρτηση.

Μια πολύ καλή ιδέα που μου δόθηκε κατά την διάρκεια της παρουσίασης της διατριβής μου από μέλος της επταμελούς Επιτροπής είναι να μελετήσουμε και να λύσουμε την εξίσωση αυτή στο σώμα Z_p, των κλάσεων υπολοίπων mod$p$, όπου p πρώτος αριθμός.

Μια άλλη ιδέα είναι να αναζητηθούν οι «ακέραιες» λύσεις μιας τέτοιας εξίσωσης.

Με δεδομένο ότι η διωνυμική πολυωνυμική εξίσωση μητρών έχει εφαρμοφές στην αεροναυπηγική πιστεύω ότι τα συμπεράσματά της διατριβής μου θα αξιοποιηθούν από άλλους επιστήμονες σε υψηλού επιπέδου εφαρμογές.

Η μαθηματική υποδομή που δημιουργήθηκε από τα αποτελέσματα της διατριβής μου πιστεύω ότι ανοίγει τον δρόμο για την λύση και διερεύνηση εξισώσεων της μορφής $f(X)=A$, όπου f τυχαία συνάρτηση, X η άγνωστη μήτρα και A γνωστή μήτρα. Σκοπεύω στο άμεσο μέλλον να ασχοληθώ και με το θέμα αυτό.

Στο επόμενα κεφάλαια συγκενρώνω και συμπληρώνω με ένα μεγάλο πλήθος ιδιοτήτων για τις συνιστώσες μιας τετραγωνικής μήτρας, που αποτελεί απαραίτητη γνώση για την συνέχιση του ορισμού και της μελέτης των ακολουθιών και των σειρών μητρών.

Στο τελευταίο κεφάλαιο μελετάω την σύγκλιση των ακολουθιών μητρών παρουσιάζοντας διάφορα κριτήρια σύγκλισης και υπολογισμού του όρίου μια ακολουθίας μητρών.

Παρουσίασα επίσης κρητήρια σύγκλισης των αναδρομικών ακολουθιών μητρών πρώτης τάξης και όπως σχολιάστηκε από μέλος της επταμελούς επιτροπής τα συμπεράσματά μου θα έχουν εφαρμογή

και σε θέματα εξισώσεων διαφορών.

Τέλος με βάση τα αποτελέσματα της διατριβής μου μπορούμε να προχωρήσουμε στη μελέτη των σειρών Fourier όπου η μεταβλητή t θα αντικατασταθεί με την τετραγωνική μήτρα T, θέμα πολύ ενδιαφέρον και πιστεύω με πολλές και ενδιαφέρουσες εφαρμογές.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] N. J. Higham (2008), Functions of Matrices, Theory and Computations.
Society of Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia USA.

[2] B. Iannazzo (2006), On the Newton method for the matrix n-th root.
J. Siam, Matrix Anal. Appl. 28:2, 503-525.

[3] D. Bini, N. J. Higham (2005), Algorithms for the matrix *p*th root.
Numerical Algorithms 39:4, 349-378.

[4] A. Bjorck, S. Hammarling (2005), A Schur method for the square root of a Matrix.
Linear Algebra Applications 52:53, 255-288.

[5] T. Arponen (2004), Matrix approach to polynomials 2.
Linear Algebra Applications 359, 181-192.

[6] A. Choudhry (2004), Extraction of *n*th roots of 2x2 matrices.
Linear Algebra Applications 378, 183-192.

[7] T. Arponen (2004), Matrix approach to polynomials.
Linear Algebra Applications 387, 183-196

[8] P. Psarrakos (2002), On the *n*th roots od a complex matrix.
Electron J. Linear Algebra 9, 32-41.

[9] C. Guo, N. J. Higham (1998), A Schur-Newton method for the matrix *p*th root and its inverse.
J. Siam, Matrix Anal. Appl. 28:3, 788-803.

[10] S. Lacic (1998), On the computation of matrix kth root.
Angew. Math. Mech. 78:3, 167-172

[11] D. Sullivan (1993), The square roots of 2x2 matrices.
Math. Magazine 66, 314-316.

[12] N. J. Higham (1987), Computing real square roots of a real matrix.
Linear Algebra Appl. 88/89, 405:430.

[13] P. Lancaster & M. Tismenetsky (1985), Theory of matrices.
Academic Press, San Diego, California, USA.

[14] G. Alefeld, N. Schneider (1982), On square roots of M-matrices.
Linear Algebra Appl. 42, 119-132.

[15] G. Cross, P. Lancaster (1974), Square roots of complex matrices.
Linear and Multilinear Algebra 1, 289-293.

[16] Farej Omer and Nabil Shalaby (2018), *Journal of Information and Optimization Sciences*,
Generalized starte sequences, 39:6, 1329-1348 (2018)
DOI: 10.1080/02522667.2017.1367509.

[17] Rajae Ban Taher, Youness El Khatabi and Mustafa Rachidib(2008), *Journal of Information and Optimization Sciences*, On the matrix *p*th root functions and generalized Fibonacci sequences, 39:7, 1483-1504,
DOI: 10.1080/02522667.2017.1367514

[18] Harley Flanders (1974), Analytic Solutions of Matrix Equations, *Linear and Multilinear Algebra, Gordon Breach Science Publishers Ltd.,* , Vol. 2, pp. 241-243.

[19] E. J. Allen, J. Baglama and S. K. Boyd (2000). Numerical approximation of the product of the square root of a matrix with a vector. *Linear Algebra Appl.*, 310:167-181.

[20] Huzihiro Araki and Shigeru Yamagami (1981). An inequality hor Hilbert-Schnidt norm, *Commun. Math Phys*., 81:89-96.

[21] M. Aroli, B. Codenotti and C. Fassino (1996). The Pade method fot computing the matrix exponential. *Linear Algebra Appl.*, 240:111-130.

[22] W. E. Arnoldi (1981). The principle of minimized iterations in th solution of the matrix eigenvalue problem. *Quart. Appl. Math*., 9:17-29.

[23] Vincent Arsigny, Pierre Filland, Xavier Pennec and Nicholas Ayache (2007). Geometric means in a novel vector space structure on symmetric positive-define matrices. SIAM J. *Matrix Anal. Appl.,* 29:328-347.

[24] Zhaojun Bai and James W. Demmel (1993). On swapping diagonal blocks in real Schur form. *Linear Algebra Appl*., 186:73-95.

[25] R. P. Bambah and C. Cola. On integer cube roots of the unit matrix. *Science and Culture*, 12:105, Cited on p. 187.

[26] Connice A. Bavely and G. W. Stewart (1979). An algorithm for computing reducing subspaces by block diagonalization, *SIAM J. Numer. Analysis*, 16:359-367.

[27] Ake Bjorck and Sven Hammarling (1983). A Schur method for the square root of a matrix. Linear Algebra Appl. 52/53:127-140.

[28] Joao R. Cardoso, Charles S. Kenney and Silva Leite (2003). Computing the square rooy and logarithm of a real P-orthogonal matrix. *Appl. Numer. Math*., 46:173-196.

[29] F. Chaitin-Chatelin and S. Gratton (2000). On the condition numbers associated with the polar factorization of a matrix. *Numer. Linear Algebra Appl*., 7:337-354.

[30] Raymond H. Chan, Chen Greif and Dianne P. O’ Leary (2007). Milestones in Matrix Computations, *Oxford University Press*.

[31] A. R. Collar. The first fifty years of aeroelasticity (1978). *Royal Aeronautical Society Journal*, 5:12-20.

[32] G. W. Cross and P. Lancaster (1974). Square roots of complex matrices. *Linear and Multilinear Algebra*, 1:289-293.

[33] Charles G. Gullen (1190). Matrices and Linear Transformations. *Addison-Wesley*, Reading MA,

USA.

[34] Chandler J. Davis (1973). Explicit functional calculus. *Linear Algebra Applications*, 6:193-199.

[35] George J. Davis (1981). Numerical solution of a quadratic matrix equation*, SIAM J. Sci. Statist. Comput*., 2:164-175

[36] John E. Dennis, J. F. Traub and R. P. Weber (1976). The algebraic theory of matrix polynomials. *SIAM J. Numerical Analysis*, 13:831-845

[37] Jean Descloux (1963). Bounds for the spectral norm of functions of matrices. *Numerical Mathematics*, 15:185-190.

[38] Luca Dieci and Alessandra Papini (2000). Pade Approximation for a block triangular matrix. *Linear Algebra Appl*., 308:183-202.

[39] Jean-Claude Evard and Frank Uhlig (1992). On the matrix equation f(X)=A. *Linear Algebra Appl*., 162-164:447-519.

[40] Ky Fan and A. J. Hoffman (1955). Some metric inequalities in the space of matrices. *Proc. American Mathematical Soc.* 6:111-116.

[41] Judith D. Gardiner (1997). A stabilized matrix sign function algorithm for solving algebraic Riccati equations. *SIAM J. Sci. Computing*, 18:1393-1411.

[42] Michael Gil (1993). Estimate for the norm of matrix-valued functions*. Linear and Multilinear Algebra*, 35:65-73.

[43] I. Gohberg, Peter Lancaster and Leiba Rodman (1982). Matrix Polynomials. *Academic Press*, New York.

[44] Konrad J. Heuvers and Daniel Moak (1987). Matrix solutions of the functional equation of the gamma function. *A equationes Mathematicae*, 33:1-17.

[45] Nicholas J. Higham (1986). Newton's Method for the matrix square root. *Mathematical. Computing* 45: 537-549.

[46] Nicholas J. Higham (1987). Computing real square roots of a real matrix. *Linear Algebra Applic*. 103:405-430.

[47] Nicholas J. Higham and Hyun-Min Kim (2001). Solving a quadratic matrix equation by Newtons Method with exact line searches. *SIAM J. Matrix Anal. Appl*. 23:303-316.

[48] W. D. Hoskins and D. J. Walton (1979). A faster, more stable method for computing the p-th roots of positive definite matrices. *Linear Algebra Appl*., 26:139-163.

[49] Bo Kagstrom and Axel Ruhe (1988). An algorithm for numerical computation of the Jordan normal form of a complex matrix. ACM Trans. Math. Software, 6:398-419.

[50] H. Kreis. Auflosung der Gleichung $X^n = A$. Vierteljschr. Maturforsch. Ges, Zurich, 53:366-376

[51] S. Lakic (1998). On the computation of the matrix k-th root. A. Angew. Mathemat. Mechan. 78:167-172.

[52] Bernard W. Levinger (1980). The square root of a 2x2 matrix. Mathem. Mag. 53:222-224

[53] Carl D. Meyer (2000). Matrix Analysis and Applied Linear Algebra. Society for Industrial and Applied Mathematics, Pholadelphia, PA, USA.

[54] Norman J. Pullman (1976). Matrix Theory and Applications: Selected Topics. Marcel Dekker, New York.

https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/07468342.1986.11972985?journalCode=ucmj20

ΔΗΜΟΣΙΕΥΣΕΙΣ

1. D. A. Petraki and N. Samaras, Solving thn n-th Degree Polynomial Matrix Equation (2020), Ref. No 1904021, *JIM-T-942*
   Journal of Interdisciplinary mathematics, Taru, Francis & Taylor

2. D. A. Petraki and N. Samaras, Matrix Sequences (2019), Ref. No 1806045, *JIM-T-838*
   Journal of Interdisciplinary mathematics, Taru, Francis & Taylor, Vol. 22, pp. 377-385

3. D. A. Petraki and N. Samaras, Component Matrix of a Square Matrix and their properties (2016), *Mathematical analysis, Approximation Theory and their Applications,* Springer, Optimization and its Applications 111, p.559.