Πανεπιστημιο Μακεδονιας

Προγραμμα μεταπτυχιακων σπουδων

Τμημα εφαρμοσμενης πληροφορικης

Η ΦΟΡΟΔΙΑΦΥΓΗ ΩΣ ΜΕΡΙΚΩΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΜΗ ΜΑΡΚΟΒΙΑΝΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ

Διπλωματική εργασία

της

Παπαδοπούλου Παρασκευής

Θεσσαλονίκη , 06/2019

Η ΦΟΡΟΔΙΑΦΥΓΗ ΩΣ ΜΕΡΙΚΩΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΜΗ ΜΑΡΚΟΒΙΑΝΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ

Παπαδοπούλου Παρασκευή

Πτυχίο Μαθηματικών, ΑΠΘ, 2014

Διπλωματική Εργασία

υποβαλλόμενη για τη μερική εκπλήρωση των απαιτήσεων του

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟΥ ΤΙΤΛΟΥ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ

Επιβλέπων Καθηγητής
Χρήστου-Βαρσακέλης Δημήτριος

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 24/06/2019

Χρήστου-Βαρσακέλης Δημήτριος	Ρεφανίδης Ιωάννης	Σαμαράς Νικόλαος
....	....	....

Παπαδοπούλου Παρασκευή

....

Περίληψη

Παρακινούμενοι από το επίμονο φαινόμενο της φοροδιαφυγής και από την πρόκληση της είσπραξης φόρων κατά τη διάρκεια της οικονομικής κρίσης, διερευνούμε τη συμπεριφορά μιας επιχείρησης που είναι συντηρητική ως προς τον κίνδυνο και που μπορεί να εμπλακεί σε φοροδιαφυγή για να μεγιστοποιήσει τα κέρδη της. Η επιχείρηση εξελίσσεται σε ένα φορολογικό σύστημα το οποίο περιλαμβάνει πολλά από τα συνήθη χαρακτηριστικά όπως οι έλεγχοι, τα πρόστιμα και οι περιστασιακές φορολογικές αμνηστίες, για τις οποίες μπορεί να επικρατεί αβεβαιότητα (μη γνωρίζοντας, για παράδειγμα, εάν μια φορολογική αμνηστία θα γίνει διαθέσιμη). Δείχνουμε ότι η δυναμική της επιχείρησης μπορεί να εκφραστεί ως μερικώς παρατηρήσιμη διαδικασία λήψης αποφάσεων Μαρκοβ, με βάση την οποία μπορεί να υπολογιστεί η βέλτιστη συμπεριφορά της επιχείρησης και οι αναμενόμενες μακροπρόθεσμες προεξοφλημένες αμοιβές σε διάφορα σενάρια πρακτικού ενδιαφέροντος. Ανατρέχοντας σε προηγούμενες έρευνες, είμαστε σε θέση να διερευνήσουμε την επίδραση των «διαρροών» ή «προ-ανακοινώσεων» οποιασδήποτε φορολογικής αμνηστίας στη συμπεριφορά της επιχείρησης. Υπολογίζουμε επίσης την επίδραση της συμπεριφοράς της τυχόν επέκτασης των φορολογικών ετών, εντός των οποίων μπορούν να ελεγχθούν οι φορολογικές δηλώσεις της επιχείρησης, και δείχνουμε ότι μπορεί να αποτρέψει σε σημαντικό βαθμό τη φοροδιαφυγή.

Λέξεις Κλειδιά: φοροδιαφυγή, μερικώς παρατηρήσιμη διαδικασία λήψης αποφάσεων Μαρκόβ (POMDP), αλγοριθμος βασισμένος σε σημεία, Perseus

Abstract

Motivated by the persistent phenomenon of tax evasion and the challenge of tax collection during economic crises, we explore the behavior of a risk-neutral self-interested firm that may engage in tax evasion to maximize its profits. The firm evolves in a tax system which includes many of "standard" features such as audits, penalties and occasional tax amnesties, and may be uncertain as to its tax status (not knowing, for example, whether a tax amnesty may be imminent). We show that the firm's dynamics can be expressed via a partially observable Markov decision process and use that model to compute the firm's optimal behavior and expected long-term discounted rewards in a variety of scenarios of practical interest. Going beyond previous work, we are able to investigate the effect of "leaks" or "pre-announcements" of any tax amnesties on the firm's behavior (and thus on tax revenues). We also compute the effect on firm behavior of any extensions of the statute of limitations within which the firm's tax filings can be audited, and show that such extensions can be a significant deterrent against tax evasion.

Keywords: tax evasion, Partially Observable Markov Decision Process (POMDP), point-based algorithm, Perseus

Ευχαριστίες

Αρχικά θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Καθηγητή κ.Χρήστου Βαρσακέλη Δημήτρη για την καθοδήγηση του και την εμπιστοσύνη που έδειξε στο πρόσωπο μου ως επιβλέπων της διπλωματικής μου εργασίας.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τους δικούς μου ανθρώπους για την υπομονή τους και την στήριξη τους κατά τη διάρκεια όλου αυτού του διαστήματος.

Περιεχόμενα

Κατάλογος Εικόνων

Κατάλογος Πινάκων

1 Εισαγωγή

Διαχρονικά η ελληνική οικονομία ταλανίζεται από το φαινόμενο της φοροδιαφυγής, το οποίο κανείς δε φαίνεται να μπορεί να αντιμετωπίσει αποτελεσματικά ως τώρα. Εν έτει 2019 και έπειτα από τα αρκετά χρόνια οικονομικής στενότητας στην ελληνική οικονομία, η φοροδιαφυγή αποτελεί σήμερα όσο ποτέ καίριο θέμα συζήτησης. Παρόλο που αυτό δεν είναι νέο φαινόμενο, η συμπεριφορά τόσο των απλών φορολογούμενων πολιτών όσο και των επιχειρήσεων, έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον ειδικά στο τομέα των δεύτερων. Αυτό συμβαίνει καθώς αυτές επιφέρουν περισσότερα κέρδη σε σύγκριση με έναν πολίτη και η απόκρυψη μέρους αυτών των κερδών μπορεί να προκαλέσει μεγαλύτερη ζημία στο ελληνικό κράτος. Η παρούσα εργασία έρχεται να συμβάλει με τον τρόπο της στη μείωση της φοροδιαφυγής μέσω του υπολογισμού των ορθολογικών επιλογών μίας επιχείρησης που φορολογείται και μπορεί να φοροδιαφύγει ώστε να μεγιστοποιήσει τα κέρδη της. Ένας τέτοιος υπολογισμός μπορεί να λειτουργήσει προς όφελος της κυβέρνησης, καθώς θα μπορέσει να αναγνωρίσει ποια είναι εκείνα τα στοιχεία που οδηγούν μία επιχείρηση στη φοροδιαφυγή. Το κράτος, γνωρίζοντας αυτά τα στοιχεία, θα μπορέσει να τα χειριστεί σωστά και πιθανόν να καταφέρει να μειώσει το φαινόμενο της φοροδιαφυγής.

Οι εταιρείες, που σκοπό έχουν τη πρόβλεψη των κερδών τους με όσο είναι εφικτό μεγαλύτερη ακρίβεια, χρειάζεται να εξερευνήσουν τις μελλοντικές οικονομικές τους απολαβές συνυπολογίζοντας και τις οικονομικές τους συναλλαγές με το κράτος. Αυτές οι οικονομικές συναλλαγές περιλαμβάνουν, πέραν της ετήσιας διαδικασίας κατάθεσης της φορολογικής δήλωσης της εταιρείας, τον έλεγχο αυτής και ανάλογα πρόστιμα σε περίπτωση πιθανής φοροδιαφυγής, αποτελώντας παράγοντες που θα πρέπει να λάβει υπόψιν της. Είναι κατανοητό λοιπόν πως η πρόβλεψη των μακροπρόθεσμων κερδών της είναι τόσο περίπλοκη όσο και αναγκαία. Ταυτόχρονα, το κράτος καταβάλει προσπάθεια για πάταξη της φοροδιαφυγής, δηλαδή της απόκρυψης της φορολογητέας ύλης ενός προσώπου ή μίας εταιρείας. Για το σκοπό αυτό πραγματοποιούνται έλεγχοι στις επιχειρήσεις σε τυχαία χρονικά διαστήματα με σκοπό τη μείωση του φαινομένου αυτού και την εξασφάλιση των φορολογικών εσόδων. Οι φορολογικοί έλεγχοι είναι ο μοναδικός τρόπος να καταλογιστεί το αντίστοιχο πρόστιμο στους παραβάτες.

Επιπλέον, από την ελληνική φορολογική αρχή υπάρχει η δυνατότητα προσφοράς ενός ιδιαίτερου «προνομίου» στις επιχειρήσεις, το οποίο το κράτος μπορεί να επιλέξει εάν θα το παραχωρήσει ή όχι. Εάν παραχωρηθεί το προνόμιο αυτό, που ονομάζεται «περαίωση» και αποτελεί είδος φορολογικής αμνηστίας, η επιχείρηση μπορεί, προχωρώντας σε έναν ειδικό διακανονισμό για το κλείσιμο των ανέλεγκτων φορολογικών και λογιστικών εκκρεμοτήτων της, να πληρώσει ένα ποσό και σε αντάλλαγμα αυτού το κράτος να μη προχωρήσει στον φορολογικό της έλεγχο. Φυσικά η περαίωση δεν είναι υποχρεωτική ούτε διαθέσιμη σε ετήσια βάση και η διάθεσή της αποτελεί επιλογή του ελληνικού κράτους, άρα η επιχειρήσεις δε μπορούν να γνωρίζουν εκ των προτέρων εάν θα παραχωρηθεί. Υπάρχουν λοιπόν άγνωστες «κινήσεις» από την κάθε πλευρά (εταιρεία - κράτος), όμως μπορούν να «διαρρεύσουν» πληροφορίες από τη μεριά του κράτους, είτε μέσω τυχαίων ανεπίσημων δηλώσεων είτε από τα μέσα μαζικής ενημέρωσης. Αυτές οι πληροφορίες, είναι φανερό πως μπορούν να αλλάξουν τη συμπεριφορά μίας εταιρείας. Για παράδειγμα, εάν μία εταιρεία έχει ενδείξεις πως πρόκειται να γίνει διαθέσιμη η αμνηστία, ένδειξη που προκύπτει από διαρροή πληροφοριών, μπορεί να επιλέξει τις κινήσεις της με μεγαλύτερη βεβαιότητα. Γνωρίζει δηλαδή με μεγαλύτερη σιγουριά εάν θα μπορεί να επιλέξει τη φορολογική αμνηστία και αυτό μπορεί να αλλάξει την απόφαση που θα έπαιρνε εάν δεν είχε καμία ένδειξη για το ποια είναι η απόφαση της κυβέρνησης..

Η φοροδιαφυγή δεν επηρεάζει μόνο τα συνολικά έσοδα του κράτους αλλά επιδρά και στην οικονομική κατάσταση κάθε πολίτη της χώρας, παρόλο που αυτό δε μπορεί να το κατανοήσει ο ίδιος, αφού θεωρεί πως αυτό είναι το πιο ωφέλιμο για εκείνον και γι αυτό καταφεύγει σε αυτή. Εφόσον με τον ίδιο τρόπο συμπεριφέρονται και οι επιχειρήσεις, κρίνεται απαραίτητο από τις κυβερνητικές αρχές να καταφέρουν να μετριάσουν αυτό το φαινόμενο. Οι τρόποι με τους οποίους θα το φέρουν εις πέρας, πρέπει πρώτα να ελεγχθούν και να μελετηθούν κατάλληλα, προτού τεθούν σε εφαρμογή. Στην ουσία χρειάζεται να δημιουργηθούν μοντέλα προσομοίωσης της συμπεριφοράς του κράτους ως προς τον έλεγχο των επιχειρήσεων, τα οποία θα λαμβάνουν υπόψη τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ τους, καθώς και τις παραμέτρους που τις συνοδεύουν (έλεγχοι, πρόστιμα, αμνηστίες).

Συνεπώς, είναι αναγκαίο να δημιουργηθεί ένα μαθηματικό μοντέλο το οποίο θα μπορεί να δείξει τον τρόπο με τον οποίο λαμβάνει αποφάσεις μια φορολογική οντότητα. Οι αποφάσεις αυτές επηρεάζονται από τις συνθήκες κατά τις οποίες αλληλεπιδρά η οντότητα με τον κρατικό μηχανισμό φορολογικού ελέγχου και από την προσπάθειά της να αποφύγει τον κίνδυνο. Είναι σημαντικό το μοντέλο αυτό να δίνει την κατάλληλη βαρύτητα στην ασάφεια που υπάρχει για την πρόθεση του κράτος να κάνει διαθέσιμη την αμνηστία και να ενσωματώσει τη μεταβολή των αποφάσεων της εταιρείας όταν υπάρχουν ενδείξεις για την παραπάνω πρόθεση της κυβέρνησης. Μια μερικώς παρατηρήσιμη Μαρκοβιανή διαδικασία αποφάσεων (POMDP) αποτελεί τον κατάλληλο τρόπο για να μεταφράσουμε τη συμπεριφορά μίας επιχείρησης σε ένα μαθηματικό μοντέλο, καθώς καταφέρνει να αναπαραστήσει μαθηματικά τα κατάλληλα στοιχεία της αβεβαιότητας που διέπουν τη συμπεριφορά της επιχείρησης.

Με βάση όλα τα παραπάνω, θα δημιουργήσουμε ένα δομημένο τρόπο σύνδεσης των διαδικασιών που ακολουθούνται από την αλληλεπίδραση κράτους - επιχείρησης ώστε να καταφέρουμε να προσδιορίσουμε τις ενέργειες που πρέπει να ακολουθήσει μία επιχείρηση, η οποία πιθανόν να καταφύγει στην απόκρυψη κερδών με σκοπό να μεγιστοποιήσει τα μακροπρόθεσμα κέρδη της. Σε αυτό το πλαίσιο, το οποίο θα αναλύσουμε σύντομα, θέλουμε i) να καθορίσουμε τη βέλτιστη συμπεριφορά της επιχείρησης και τα αναμενόμενα προεξοφλημένα μακροπρόθεσμα κέρδη της, ii) να διαπιστώσουμε εάν η επιχείρηση μπορεί να ωφεληθεί μειώνοντας την αβεβαιότητά της σε σχέση με τις προσεχείς αμνηστίες (π.χ. αλλάζοντας τη συμπεριφορά της εφόσον λαμβάνει υπόψιν της τις κυβερνητικές ανακοινώσεις ή τις «διαρροές» στον Τύπο) και iii) να ποσοτικοποιήσουμε τις επιπτώσεις στα έσοδα της επιχείρησης, που πιθανόν να έχει η αύξηση των ετών για τα οποία ελέγχονται οι φορολογικές της δηλώσεις.

1.1 Συνεισφορά

Στη παρούσα εργασία γίνεται μία προσπάθεια επίλυσης του προβλήματος βελτιστοποίησης των αποφάσεων που παίρνει μία εταιρεία, η οποία έχει σαν στόχο έχει τη μακροπρόθεσμη μεγιστοποίηση των κερδών της. Εστιάζουμε στην αβεβαιότητα που έχει κάθε επιχείρηση σχετικά με τις κινήσεις την ελληνικής φορολογικής αρχής όσον αφορά τη ενεργοποίηση φορολογικών αμνηστιών και εν συνεχεία ενσωματώνουμε την ιδιαιτερότητα αυτή σε ένα Μαρκοβιανό μοντέλο. Με αυτό τον τρόπο το μοντέλο μετατρέπεται σε μερικώς παρατηρήσιμο Μαρκοβιανό και έτσι η προσέγγισή μας γίνεται πιο αληθοφανής και προσαρμοσμένη στην πραγματικότητα σε σχέση με παλαιότερες προσεγγίσεις.

Η συμβολή αυτής της εργασίας είναι διπλή. Αρχικά, όσον αφορά την περιγραφή της συμπεριφοράς της επιχείρησης σχετικά με τη φοροδιαφυγή, προτείνουμε ένα μοντέλο που είναι δομικώς πιο περίπλοκο και ακόμα πιο ρεαλιστικό από προηγούμενα για την επίλυση του ίδιου προβλήματος, αναγνωρίζοντας το γεγονός ότι η επιχείρηση έχει ελλιπή γνώση της φορολογικής της κατάστασης. Το μοντέλο μας, με τη μορφή μίας μερικώς παρατηρήσιμης Μαρκοβιανής διαδικασίας, θα μας επιτρέψει να προσεγγίσουμε τη βέλτιστη πολιτική της επιχείρησης, λαμβάνοντας υπόψη τις παραμέτρους του φορολογικού περιβάλλοντος. Στη συνέχεια, θα καταφέρουμε να διερευνήσουμε το κατά πόσο είναι σημαντικό η κυβέρνηση να είναι προσεκτική με τις πληροφορίες που γνωστοποιεί σχετικά με τις πιθανές φορολογικές αμνηστίες. Αυτό κατορθώνεται ποσοτικοποιώντας το κέρδος που θα αποκομίσει η κυβέρνηση εάν οι φορολογούμενοι παραμείνουν σε άγνοια σχετικά με τις αποφάσεις της. Το προτεινόμενο μοντέλο χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό εκείνων των συνδυασμών φορολογικών κυρώσεων και πιθανοτήτων ελέγχου που οδηγούν σε σύννομη συμπεριφορά των φορολογούμενων. Ταυτόχρονα προσδιορίζεται το αντίκτυπο, που θα είχε στη φοροδιαφυγή, η αύξηση του πλήθους των ετών για τα οποία μπορεί να ελεγχθούν οι επιχειρήσεις, παράγοντας που δεν έχει διερευνηθεί επαρκώς στο πλαίσιο των αντίστοιχων προγενέστερων δυναμικών μοντέλων. Η μελέτη που έχει γίνει για τους σκοπούς της παρούσας εργασίας έχουν οδηγήσει στη παρακάτω δημοσίευση :

P. Papadopoulou and D. Hristu-Varsakelis : "Tax evasion as an optimal solution to a partially observable Markov decision process", Approximation and Optimization: Algorithms, Complexity and Applications, I. Demetriou and P. Pardalos (eds.), p. 219-237, Springer 2019.

1.2 Διάρθρωση της εργασίας

Η παρούσα εργασία είναι δομημένη ως εξής. Το Κεφάλαιο 2 παρουσιάζει προηγούμενες μελέτες για το πρόβλημα της φοροδιαφυγής που έγιναν κατά καιρούς, καθώς και εκείνες που δημιουργήθηκαν για τη διερεύνηση της επίλυσης των POMDP μοντέλων. Το Κεφάλαιο 3 εισάγει τον αναγνώστη στις βασικές έννοιες των Μαρκοβιανών και μερικώς παρατηρήσιμων Μαρκοβιανών διαδικασιών καθώς και στους αλγορίθμους που έχουν προταθεί για την επίλυση μερικώς παρατηρήσιμων Μαρκοβιανών μοντέλων. Το Κεφάλαιο 4 πραγματεύεται τις παραμέτρους του ελληνικού φορολογικού συστήματος και τις ιδιαιτερότητές που λάβαμε υπόψη κατά τη δημιουργία του μοντέλου. Στο Κεφάλαιο 5 προτείνεται ένα POMDP μοντέλο που περιγράφει την εξέλιξη της επιχείρησης στο φορολογικό σύστημα. Η επιχείρηση επιδιώκει να μεγιστοποιήσει το προεξοφλημένο μακροπρόθεσμο κέρδος της, λαμβάνοντας υπόψη της τους κανόνες που επιβάλλει το φορολογικό σύστημα και την ευαισθησία του (ή την έλλειψή αυτής) απέναντι σε πιθανή ευκαιρία αμνηστίας που μπορεί να παράσχει το κράτος. Το Κεφάλαιο 6 παρουσιάζει τις λύσεις που υπολογίστηκαν από το μοντέλο μας και εξετάζει τον αντίκτυπο που έχει η εισαγωγή αβεβαιότητας στις αποφάσεις της επιχείρησης και επίσης εξετάζει τις συνθήκες υπό τις οποίες είναι χρήσιμο για την επιχείρηση να γνωρίζει εκ των προτέρων τις προθέσεις του κράτους. Επίσης, διερευνά το αποτέλεσμα της επέκτασης των ετών για τα οποία μπορεί να ελέγχεται μία επιχείρηση και του τρόπου με τον οποίο μια τέτοια επέκταση επηρεάζει τη φοροδιαφυγή.

2 Βιβλιογραφική Ανασκόπηση

Τα τελευταία χρόνια, έχει αυξηθεί το ενδιαφέρον για την εφαρμογή μεθόδων βελτιστοποίησης και την επίλυση προβλημάτων βέλτιστου ελέγχου στον τομέα της φορολογίας και της φορολογικής πολιτικής. Αυτή η δραστηριότητα ενθαρρύνεται, εν μέρει, από την πρόσφατη παγκόσμια οικονομική κρίση, η οποία έφερε στο προσκήνιο το πρόβλημα της συλλογής φορολογικών εσόδων, το οποίο αφορά κυρίως τη δυσκολία της πάταξης της φοροδιαφυγής. Μία από αυτές τις σύγχρονες έρευνες αποτελεί η [5], στην οποία περιγράφεται η δημιουργία ενός μοντέλου συμμόρφωσης μεμονωμένων αναφορών (IRCM) για συγκεκριμένο αριθμό φορολογούμενων, το οποίο αποτελεί ένα μοντέλο βασισμένο σε πράκτορες και κατάφερε να προσομοιώσει με μεγάλη ακρίβεια το φορολογικό σύστημα των Ηνωμένων Πολιτειών. Βέβαια δε κατάφερε να αναλύσει με επιτυχία τη συμπεριφορά των φορολογουμένων και να παράγει ασφαλή συμπεράσματα. Επίσης η [7] διερεύνησε το κατά πόσο θα πρέπει να φορολογείται το κεφάλαιο και κατέληξε πως σε σταθερά περιβάλλοντα αυτό δε θα πρέπει να φορολογείται καθώς η φορολόγησή του έχει ως αποτέλεσμα την αύξηση του φόρου στα μελλοντικά αγαθά. Ως μέση λύση προτείνεται η ήπια φορολόγηση του κεφαλαίου από ένα χρονικό σημείο και έπειτα.

Στην [21] παρουσιάζεται μία διαφορετική προσέγγιση που δε στηρίζεται αποκλειστικά σε περιβάλλοντα όπου μόνο το εισόδημα μπορεί να αποκρυφτεί, αλλά το ίδιο μπορεί να γίνει και για τα περιουσιακά στοιχεία. Ενσωματώνοντας τέτοια περιβάλλοντα, διαχωρίζει τα περιουσιακά στοιχεία σε ασφαλή και μη, όπου τα επισφαλή στοιχεία μπορεί να δηλωθούν στο κράτος ή όχι. Με αυτή την ενσωμάτωση, καταλήγει στο συμπέρασμα πως η φοροδιαφυγή είναι ανασταλτικός παράγοντας για τις επενδύσεις σε μη ασφαλή περιουσιακά στοιχεία ενώ συμβαίνει το αντίθετο για τα ασφαλή. Η ίδια εργασία συμπεραίνει πως ο αριθμός των φορολογικών ελέγχων δεν έχει επίδραση στη μείωση της φοροδιαφυγής, αλλά αυτή επιτυγχάνεται με την αύξηση των προστίμων. Στην [23] αρχικά παρατηρείται πως σε ορισμένους τομείς λόγω της φύσης τους είναι πιο δύσκολο να φοροδιαφύγει κανείς, όπως οι τομείς της διάθεσης καυσίμου. Ερευνώντας συγκεκριμένες χώρες (ΗΠΑ, Ινδία, Κίνα) συμπεραίνει πως η χαμηλή φοροδιαφυγή είναι προς το συμφέρον των εταιρειών.

Οι προηγούμενες εργασίες που σχετίζονται με τη βέλτιστη φορολογία και τη μοντελοποίηση της φοροδιαφυγής περιλαμβάνουν προσεγγίσεις προ κρίσης, όπως η [1], η οποία εξέτασε τη φοροδιαφυγή ως πρόβλημα κατανομής χαρτοφυλακίου, αρχικά ως ένα απλό στατικό μοντέλο. Σε αυτό το στατικό μοντέλο η πιθανότητα να ελεγχθεί ένας φορολογούμενος δεν εξαρτάται από το ποσό του εισοδήματος που έχει δηλώσει ο φορολογούμενος, παράμετρος που μπορεί να επηρεάσει τη φοροδιαφυγή. Στη συνέχεια έδωσε μεγαλύτερη έμφαση στην αντιμετώπιση του προβλήματος μετατρέποντας το στατικό πρόβλημα σε δυναμικό, όπου η παράμετρος του ποσού εισοδήματος που δηλώθηκε λαμβάνεται υπόψη στις αποφάσεις. Τελικά η προσέγγιση αυτή οδήγησε σε προτάσεις για την περαιτέρω επέκτασή της, στις οποίες βασίστηκαν μελλοντικές έρευνες. Τέτοιες βελτιώσεις έγιναν από τις [40] και [4] στις οποίες συμπεριλήφθηκε η παράμετρος της προσφοράς εργασίας. Ένα μειονέκτημα αυτών των μεθόδων και των αναλυτικών προσεγγίσεων ήταν ότι, για να παραμείνουν σύγχρονες, συχνά λάμβαναν μια μακροσκοπική οπτική γωνία και δεν μπορούσαν να εκφράσουν την ετερογένεια των φορολογουμένων ούτε να καταγράψουν πλήρως τη δυναμική της φοροδιαφυγής. Ένα παράδειγμα αποτελεί η [24], που προσέγγισε το πρόβλημα για διαφορετικούς τρόπους φοροδιαφυγής, με στοχοποιημένο τρόπο και μη. Ως στοχοποιημένο τρόπο αναφέρει τη στρατηγική των φορολογούμενων να φοροδιαφύγουν για συγκεκριμένα εισοδήματα, τα οποία μπορεί να είναι πιο εύκολο να αποκρυψούν από το κράτος (π.χ. είναι πιο δύσκολο να αποκρύψει κανείς τα εισοδήματα του από το μισθό του και πιο εύκολο να αποκρύψει απολαβές από άλλου είδους πηγές). Κατέληξε, λοιπόν, πως αυξάνοντας τους ελέγχους οδηγεί σε θετικά αποτελέσματα συμμόρφωσης των φορολογουμένων που ακολουθούν το στοχοποιημένο τρόπο, ενώ έχει αρνητικά αποτελέσματα για το μη στοχοποιημένο.

Αργότερα, η [20] περιέγραψε το φορολογικό σύστημα ως δυναμικό σύστημα και εξέτασε τη φοροδιαφυγή ως πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου. Προσπαθώντας να καταλήξει στη βέλτιστη πολιτική διεκπεραίωσης του ελέγχου συμπεραίνει πως δεν μπορεί να υπάρξει ένα αμετάβλητο αυτορυθμιζόμενο μοντέλο πολιτικής. Σε ακόμη νεότερη έρευνα, στη [38], παρουσιάστηκε μία προσέγγιση γραμμικής φορολογίας με ελάχιστο φόρο, εξετάζοντας σενάρια στα οποία υπήρχαν «ειλικρινείς» φορολογούμενοι ή/και «ανέντιμοι» φορολογούμενοι. Για κάθε ένα από τα τρία σενάρια (μόνο «ειλικρινείς» φορολογούμενοι - μόνο «ανέντιμοι» - «ειλικρινείς» και «ανέντιμοι») υπάρχουν συγκεκριμένες τιμές που παίρνει κάθε φορολογική παράμετρος οι οποίες οδηγούν σε νομοταγή συμπεριφορά των φορολογουμένων. Στη [37] προσεγγίζεται η ελληνική φοροδιαφυγή, εστιάζοντας περισσότερο σε θεωρητικό επίπεδο παρά σε πρακτικό.

Τα τελευταία χρόνια, υπήρξε ενδιαφέρον για τη μοντελοποίηση των φορολογικών οντοτήτων σε ένα πιο λεπτομερές επίπεδο, δηλαδή να μελετηθεί η ετήσια εξέλιξή τους μέσω του φορολογικού συστήματος, όπως στη [13] και αργότερα στη [14]. Αυτή η δυναμική μπορεί να περιλαμβάνει τις τυχαίες μεταβάσεις στη φορολογική κατάσταση μιας επιχείρησης (π.χ. υποβάλλοντας τη σε έκτακτο έλεγχο ή να συμπεριλαμβάνουν πρόγραμμα αμνηστίας) ή τις μεταβαλλόμενες προτιμήσεις των επιχειρήσεων, παράγοντες που θεωρούνται αλληλεπιδραστικοί. Σε ορισμένες περιπτώσεις, όμως, ο «πλούτος» αυτών των μοντέλων μειονεκτεί από άποψη πολυπλοκότητας. Γι αυτό απαιτούνται πιο υπολογιστικές και όχι τόσο αναλυτικές προσεγγίσεις, οι οποίες δημιουργούν μοντέλα που στηρίζονται στο αυτοματοποιημένο σύστημα. Τέτοια εργασία αποτελεί η [11], η οποία έδειξε τον τρόπο με τον οποίο μία υπόθεση (hypothesis) για τη συμπεριφορά ενός αντικειμένου μπορεί να μετατραπεί σε αυτόματη διαδικασία και πως μπορούν να υπολογιστούν μαθηματικά οι πιθανότητες αποφυγής της φοροδιαφυγής σε κάθε κατάσταση της αυτοματοποιημένης διαδικασίας. Κατέληξε πως μία τέτοια διαδικασία μπορεί να λειτουργήσει πιο ορθά για μικρό αριθμό καταστάσεων. Ακόμη μία ανταγωνιστική έρευνα αποτελεί η προσέγγιση που στηρίζεται στους πράκτορες, όπως η [12].

Η εργασία [13] λαμβάνει υπόψη το στοιχείο της φορολογικής αμνηστίας, την επονομαζόμενη «περαίωση», την οποία το κράτος μπορεί να επιλέξει εάν θα παρέχει περιοδικά στους φορολογούμενους. Αν σε ένα φορολογικό έτος αυτή ενεργοποιηθεί από το κράτος και ο φορολογούμενος επιλέξει να τη χρησιμοποιήσει, πληρώνοντας το αντίτιμο, η φορολογική αρχή δε θα ελέγξει τη συγκεκριμένη φορολογική οντότητα που τη χρησιμοποίησε. Όπως διαπιστώνεται και στο [2], τα πλεονεκτήματα της περαίωσης δεν είναι σαφή, παρόλο που μπορεί στιγμιαία να αποφέρει μεγαλύτερα έσοδα στο κράτος όταν αυτή δοθεί. Επίσης, επισημαίνεται ο κίνδυνος που υπάρχει, οι φορολογούμενοι να θεωρήσουν πως δεν είναι μία ευκαιρία που τους δίνεται για εκείνο το έτος, αλλά πως θα συμβαίνει και στο μέλλον. Η χρήση φορολογικών αμνηστιών δεν είναι ασυνήθιστη, με αρκετές περιπτώσεις τεκμηριωμένες σε πολλές χώρες, μεταξύ των οποίων περιλαμβάνονται οι ΗΠΑ [29], η Ινδία [9] και η Ρωσία [3]. Στην Ελλάδα, η επιλογή της αμνηστίας που αναφέρθηκε παραπάνω χρησιμοποιήθηκε κατά την περίοδο 1998-2006 [15, 16] και εξετάστηκε και πάλι πιο πρόσφατα [17].

Η εργασία [13], στην οποία βασίζεται η παρούσα διπλωματική, εξετάζει ένα Μαρκοβιανό μοντέλο αποφάσεων μίας φορολογικής οντότητας. Σε ένα Μαρκοβιανό μοντέλο ο εκάστοτε πράκτορας αλληλεπιδρά με το περιβάλλον και προσπαθεί να διδαχτεί πως να συμπεριφερθεί, δηλαδή να μάθει ποιες είναι οι καλύτερες αποφάσεις, με σκοπό να μεγιστοποιήσει την αμοιβή του. Μία Μαρκοβιανή διαδικασία αποτελείται από ένα χώρο καταστάσεων όπου σε κάθε μία κατάσταση οι μεταβάσεις και οι άμεσες αμοιβές επηρεάζονται από τις αποφάσεις που παίρνει ο πράκτορας. Οι καταστάσεις του Μαρκοβιανού μοντέλου που προτάθηκε στην εργασία [13] αντιστοιχούν στην ετήσια φορολογική κατάσταση (όπου η επιχείρηση μπορούσε να ελεγχθεί για προηγούμενες φορολογικές δηλώσεις, να εκμεταλλευτεί τυχόν προσφερόμενη αμνηστία κτλ). Στην εργασία αυτή η πολιτική της φορολογικής οντότητας αντιστοιχεί στην απόφασή της να φοροδιαφύγει και κατά πόσο, αποκρύπτοντας μέρος του εισοδήματός της. Τελικά η εργασία έδειξε ότι, για μία επιχείριση που αποφεύγει τον κίνδυνο, η βέλτιστη πολιτική μπορεί να υπολογιστεί μέσω δυναμικού προγραμματισμού και εξερεύνησε τον χώρο των φορολογικών παραμέτρων αναδεικνύοντας εκείνες που θα εξαλείψουν το κίνητρο που έχει η επιχείρηση να καταφύγει στη φοροδιαφυγή.

Ένας περιορισμός της [13] ήταν το γεγονός ότι η επιχείρηση γνώριζε κάθε χρόνο εάν το κράτος σκόπευε να παραχωρήσει φορολογική αμνηστία και επομένως θα μπορούσε να επωφεληθεί, καθώς αποφάσιζε τη μελλοντική της πορεία με γνώμονα αυτή τη γνώση. Σε ρεαλιστικά περιβάλλοντα (π.χ. στην Ελλάδα, την οποία η [13] και η παρούσα εργασία χρησιμοποιούν ως μελέτη περίπτωσης), αυτό μπορεί να συμβεί όταν η κυβέρνηση δημιουργεί προσδοκίες είτε με επίσημες ανακοινώσεις είτε με διαρροές στον Τύπο. Ωστόσο, υπό κανονικές συνθήκες, η επιχείρηση δεν μπορεί να θεωρηθεί ότι έχει πληροφορίες σχετικά με τις προσεχείς αμνηστίες. Είναι επομένως ζωτικής σημασίας να αναπτυχθούν μοντέλα που λαμβάνουν υπόψη την προκύπτουσα αβεβαιότητα από τη πλευρά της επιχείρησης όσον αφορά την πραγματική φορολογική της κατάσταση.

Το μοντέλο που προτείνεται στη παρούσα εργασία θα συμπεριλάβει την αβεβαιότητα που αντιμετωπίζει η επιχείρηση ως προς τη διαθεσιμότητα ή όχι της αμνηστίας, όταν πρέπει να αποφασίσει πόσο να φοροδιαφύγει κάθε έτος. Με τον τρόπο αυτό θα μπορέσουμε να διερευνήσουμε τις επιπτώσεις που έχει αυτή η αβεβαιότητα στις ενέργειες της επιχείρησης όσον αφορά τη φοροδιαφυγή. Ταυτόχρονα, είναι σημαντικό οι υπεύθυνοι για τη χάραξη πολιτικής να γνωρίζουν ποιες είναι ποσοτικά οι συνέπειες από διαρροές πληροφοριών, εάν υπάρχουν, και να αποφασίσουν κατά πόσο θα πρέπει να είναι προσεκτικοί στις δηλώσεις τους. Την αβεβαιότητα αυτή θα χρειαστεί να την εισάγουμε στο [13] μέσω της μετατροπής του μοντέλου αποφάσεων από Μαρκοβιανό (MDP) σε μερικώς παρατηρήσιμο Μακροβιανό (POMDP). Το κυριότερο στοιχείο που διαφοροποιεί τα Μαρκοβιανά από τα μερικώς παρατηρήσιμα Μαρκοβιανά περιβάλλοντα, είναι πως στα πρώτα η κατάσταση είναι πλήρως παρατηρήσιμη από τον πράκτορα, ενώ στα δεύτερα η παρατήρηση είναι πιθανοκρατική, δηλαδή ο πράκτορας γνωρίζει την κατανομή - υποσυνθήκη - της κατάστασής του και όχι την κατάσταση με βεβαιότητα. Αυτές οι παρατηρήσεις αντιστοιχίζονται, στη περίπτωση που μελετάμε, στο μέρος των πληροφοριών που γνωστοποιούνται από τον Τύπο και μπορούν να αποτυπώσουν την αβεβαιότητα. Χαρακτηριστικά και λειτουργίες του μοντέλου POMDP μπορούν να βρεθούν και να μελετηθούν στα [6, 10, 19, 28]. Η ασάφεια που ενσωματώνεται στο μοντέλο POMDP ως προς την υπάρχουσα κατάσταση, τροφοδοτεί τη γνώμη της επιχείρησης ως προς τις κινήσεις του κράτους κάθε χρόνο και με βάση αυτή τη γνώμη η επιχείρηση αποφασίζει για τις κινήσεις που θα κάνει στη συνέχεια.

Βέβαια, για την επίλυση ενός τέτοιου προβλήματος, δεν αρκεί ο απλός αλγόριθμος επανάληψης τιμής που χρησιμοποιείται συνήθως για την επίλυση ενός MDP, όπως στην [13]. Θα χρειαστεί να καταφύγουμε σε υπολογιστικές λύσεις που επιλύουν το πιο πολύπλοκο πρόβλημα των POMDPs. Για την επίλυσή τους, μελετήθηκαν αλγόριθμοι που κατά καιρούς έχουν προταθεί για την αντιμετώπιση τους. Οι πρώτες προσεγγίσεις δίνουν λύσεις που στηρίζονται σε αυτές για την επίλυση ενός MDP μοντέλου, όπως ο αλγόριθμος Sondik/Monahan's Enumeration, ο οποίος αναφέρθηκε αρχικά στην [32] και προτάθηκε αργότερα από την [36]. Η πολυπλοκότητα του προβλήματος όμως επιβάρυνε την προτεινόμενη διαδικασία κάνοντας την εξαιρετικά αργή.

Την επιβάρυνση στο χρόνο επίλυσης διόρθωσαν επόμενες προσεγγίσεις, όπως ο OnePass Algorithm [33] και ο Linear Support Algorithm [8]. Οι προτάσεις αυτών των «ακριβών» (exact) αλγορίθμων δεν κατάφεραν να μειώσουν το κόστος στο χρόνο επίλυσης για μεγάλου διαστάσεις προβλήματα. Αποτέλεσαν όμως πρότυπο για την δημιουργία του Witness Algorithm [22], ο οποίος χρησιμοποίησε ένα είδους «μάρτυρα» που βοηθάει στον εντοπισμό των καλύτερων λύσεων. Επιτάχυνση στο χρόνο επίλυσης κατάφερε ο αλγόριθμος της [41] σε σχέση με τους προηγούμενους, χωρίς όμως να καταφέρει να μειώσει σημαντικά την πολυπλοκότητα.

Η επίλυση των POMDP αποτέλεσε πρόκληση ως προς τη μείωση της πολυπλοκότητας που έχουν από τη φύση τους. Οι επόμενες προτάσεις κινήθηκαν προς αυτή την κατεύθυνση και μείωσαν τη εστίασή τους σε απόλυτα ακριβείς λύσεις. Παρατηρήθηκε λοιπόν πως η δημιουργία προσεγγιστικών λύσεων επιταχύνει την επίλυση του είδους του προβλήματος που καλούμαστε να δώσουμε λύση και μειώνει το κόστος της κατασκευής τους, όπως αναλύεται και στις [18, 26, 31]. Τέτοιοι αλγόριθμοι «βασισμένοι σε σημεία» που παράγουν αυτές τις προσεγγιστικές λύσεις προτάθηκαν στις [27] και [30], όπως και στην [25]. Ο επόμενος αλγόριθμος, που θα χρησιμοποιήσουμε για την επίλυση του προβλήματος της φοροδιαφυγής, αρχικά παρουσιάστηκε στην [39] και αργότερα στην [35] και είναι ο Perseus. Αυτός ο αλγόριθμος επιλέχθηκε διότι σε σύγκριση με τους προηγούμενους παράγει πολύ καλά αποτελέσματα στην επίλυση των ίδιων προβλημάτων.

3 Θεωρητικό υπόβαθρο

Για να μπορέσει ο αναγνώστης να κατανοήσει το μοντέλο που αναπτύσσεται στην παρούσα εργασία είναι απαραίτητη η εξοικείωσή του με μερικές βασικές έννοιες. Θα ξεκινήσουμε με τον ορισμό της Μαρκοβιανής αλυσίδας, μετά θα περιγράψουμε τις Μαρκοβιανές διαδικασίες αποφάσεων, καθώς και τις μερικώς παρατηρήσιμες, και τέλος τους διαθέσιμους αλγόριθμους για την επίλυση τους.

Έστω μία στοχαστική ανέλιξη σε διακριτό χρόνο, δηλαδή η ακολουθία $X_0, X_1, X_2, ..., X_t$ από τυχαίες μεταβλητές που παίρνουν τιμές στο πεπερασμένο ή άπειρο (αλλά αριθμήσιμο) χώρο καταστάσεων S. Η στοχαστική ανέλιξη ονομάζεται Αλυσίδα Μαρκόβ αν ικανοποιεί τη μαρκοβιανή ιδιότητα, δηλαδή :

$$P(X_{t+1} = s_{t+1} | X_t = s_t, X_{t-1} = s_{t-1}, ..., X_0 = s_0) = P(X_{t+1} = s_{t+1} | X_t = s_t) \tag{1}$$

για κάθε $t \in N$ (N όλοι οι φυσικοί αριθμοί) και για κάθε $s_0, s_1, s_2, ..., s_t \in S$.

Έστω πως το t συμβολίζει το τρέχον βήμα, το $t+1$ το επόμενο βήμα και το ενδεχόμενο $\{X_0 = s_0, X_1 = s_1, X_2 = s_2, ..., X_{t-2} = s_{t-2}, X_{t-1} = s_{t-1}\}$ το «παρελθόν» της διαδικασίας. Τότε η μαρκοβιανή ιδιότητα μπορεί να εκφραστεί επιγραμματικά ως: «Δοθέντος του παρόντος, το μέλλον είναι ανεξάρτητο από το παρελθόν». Αν επιπλέον ισχύει και ότι $P(X_{t+1} = s_j | X_t = s_i) = P(X_1 = s_j | X_0 = s_i)$, για κάθε $s_i, s_j \in S$ και κάθε $t \in N$, τότε η μετάβαση από μία κατάσταση σε μία άλλη δεν εξαρτάται από το χρόνο και η αλυσίδα λέγεται ότι είναι χρονικά ομοιογενής.

3.1 Διαδικασίες αποφάσεων

Μία ακολουθιακή διαδικασία λήψης αποφάσεων περιλαμβάνει συνήθως έναν πράκτορα (agent) ο οποίος αλληλεπιδρά με το περιβάλλον και έχει ως στόχο να μεγιστοποιήσει την αμοιβή του επιλέγοντας τις κατάλληλες ενέργειες για ορισμένο χρονικό διάστημα. Αυτές οι ενέργειες, μαζί με το περιβάλλον καθορίζουν την κατανομή πιθανότητας των επόμενων καταστάσεων, ορίζοντας έτσι μία στοχαστική διαδικασία, μερικώς «καθοδηγούμενη» από τις αποφάσεις του πράκτορα.

Η Μαρκοβιανή διαδικασία αποφάσεων (MDP) είναι ίσως το πιο γνωστό μοντέλο πλήρους παρατηρήσιμης ακολουθιακής διαδικασίας αποφάσεων. Μία MDP επεκτείνει τις αλυσίδες Μαρκόβ συμπεριλαμβάνοντας ένα σύνολο από αποφάσεις (actions) και αμοιβές (reward) εξαρτώμενες από τις καταστάσεις (states) και τις αποφάσεις. Για κάθε μία πιθανή κατάσταση της διαδικασίας πρέπει να ληφθεί μία απόφαση, η οποία έχει επίδραση τόσο στις πιθανότητες μετάβασης όσο και στην αμοιβή. Ο στόχος είναι να επιλεγεί η βέλτιστη απόφαση σε κάθε μία κατάσταση έτσι ώστε να μεγιστοποιηθεί κάποιο προεπιλεγμένο μέτρο απόδοσης.

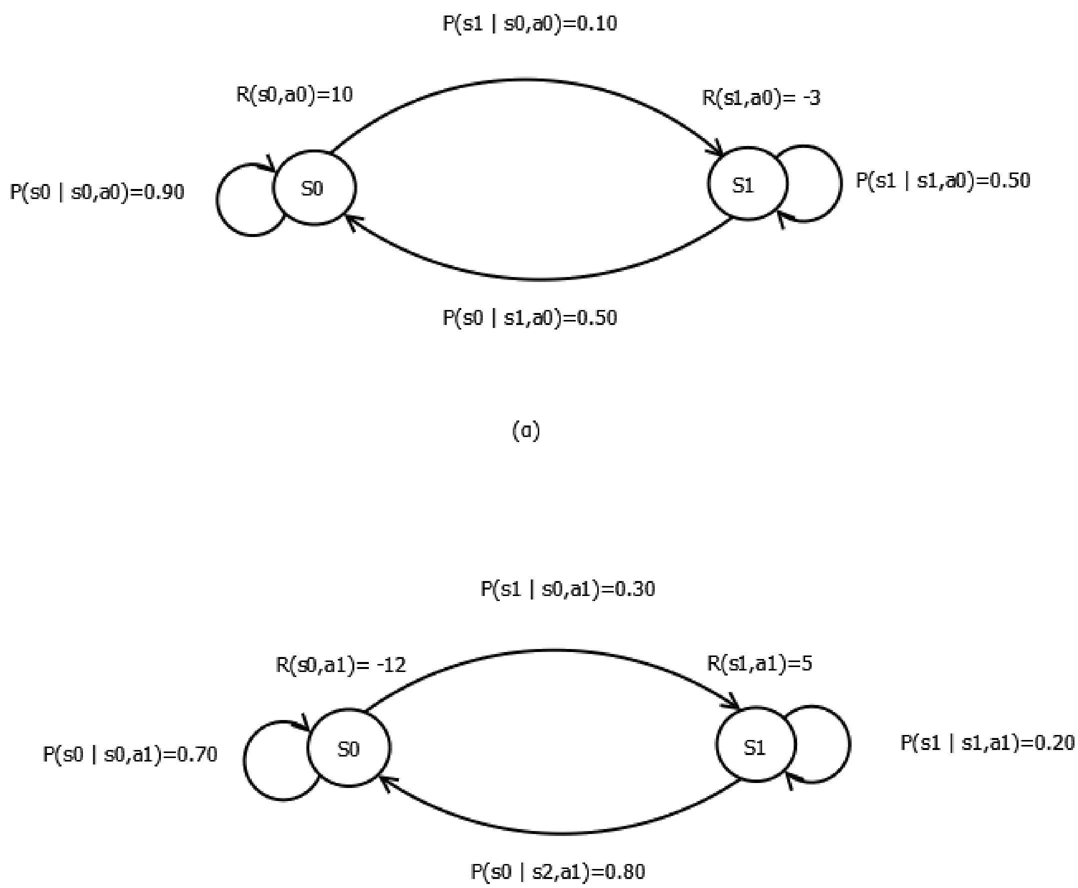
Θεωρούμε πως το περιβάλλον μπορεί να περιγραφεί με ένα πεπερασμένο αριθμό καταστάσεων, $S \in \{s_1, s_2, ..., s_t\}$, και ο πράκτορας μπορεί να επιλέξει από πεπερασμένο σύνολο αποφάσεων, $A \in \{a_1, a_2, ..., a_m\}$. Καθώς η διαδικασία είναι στοχαστική, η κατάσταση σε συγκεκριμένο χρόνο $t \in N$, μπορεί να χαρακτηριστεί ως μία τυχαία μεταβλητή S_t η οποία ανήκει στο χώρο των καταστάσεων S.

Για να μπορεί μία διαδικασία να είναι Μαρκοβιανή πρέπει να έχει τη Μαρκοβιανή ιδιότητα, δηλ. $P(S_{t+1}|S_0, S_1, ..., S_t) = P(S_{t+1}|S_t)$, δηλαδή η παρούσα κατάσταση καθορίζει τη κατανομή της επόμενης. Σε κάθε κατάσταση, ο πράκτορας μπορεί να επηρεάσει τις πιθανότητες μετάβασης εκτελώντας μία από τις διαθέσιμες ενέργειες. Συνεπώς, κάθε ενέργεια $a \in A$ περιγράφεται πλήρως από έναν $|S| \times |S|$ πίνακα μεταβάσεων, όπου το στοιχείο που βρίσκεται στην i-στη σειρά και στην j-στη στήλη δηλώνει την πιθανότητα το σύστημα να μεταβεί από την κατάσταση s_i στην s_j εάν εκτελεστεί η ενέργεια a: $p_{ij}^a = P(S_{t+1} = s_j | S_t = s_i, A_t = a)$

Η συνάρτηση μετάβασης T συνοψίζει τα αποτελέσματα των ενεργειών στις καταστάσεις του συστήματος. Η $T : S \times A \times S \mapsto \Delta(S)$ είναι μία συνάρτηση η οποία για κάθε κατάσταση και ενέργεια συνδέει μία κατανομή πιθανότητας με τις πιθανές διαδοχικές καταστάσεις, όπου $\Delta(S)$ είναι το σύνολο όλων των κατανομών πιθανότητας επί του S). Συνεπώς, για κάθε $s, s' \in S$ και $a \in A$, η συνάρτηση T καθορίζει την πιθανότητα της μετάβασης από την κατάσταση s στην s' αφού εκτελεστεί η ενέργεια a, δηλ. $T(s, a, s') = P(S_{t+1} = s' | S_t = s, A_t = a)$

Η $R : S \times A \mapsto \Re$ είναι η συνάρτηση αμοιβής, η οποία για κάθε κατάσταση και ενέργεια αντιστοιχίζει μία αριθμητική τιμή. Η $R(s, a)$ είναι μία «άμεση» αμοιβή την οποία ο πράκτορας λαμβάνει επειδή βρίσκεται στην κατάσταση s και εκτελεί την ενέργεια a.

Διαγραμματικά μια MDP αναπαριστάται όπως στα Σχήματα 1(α) και 1(β). Σε αυτά τα παραδείγματα η διαδικασία αποτελείται από δύο καταστάσεις $s \in \{s_0, s_1\}$, δύο ενέργειες $a \in \{a_0, a_1\}$ και 2 αμοιβές $r \in \{r_0, r_1\}$, με τα βέλη να δείχνουν τη φορά της κάθε μετάβασης. Για κάθε απόφαση που εκτελείται υπάρχει ένα χωριστό διάγραμμα που αναπαριστά τις αντίστοιχες πιθανότητες μετάβασης. Έτσι, στο Σχήμα 1(α) δίνονται οι μεταβάσεις που αντιστοιχούν στην απόφαση a_0, ενώ στο Σχήμα 1(β) αυτές που αντιστοιχούν στην απόφαση a_1.



Σχήμα 1: Απλή Μαρκοβιανή διαδικασία 2 καταστάσεων με 2 αμοιβές, όπου εκτελείται η ενέργεια a_0 (α) και η ενέργεια a_1 (β)

Οι μερικώς παρατηρήσιμες Μαρκοβιανές διαδικασίες αποφάσεων (POMDP) αποτελούν γενίκευση των MDP, επεκταμένες με ένα σύνολο παρατηρήσεων O και μία συνάρτηση παρατήρησης Z, και χρησιμοποιούνται για τη μοντελοποίηση διαδικασιών οι οποίες δεν είναι πλήρως παρατηρήσιμες. Αυτή η επέκταση αυξάνει την πολυπλοκότητά των POMDP σε σχέση με τις MDP. Έστω O το σύνολο των πιθανών παρατηρήσεων του πράκτορα. Στις MDPs ο πράκτορας έχει πλήρη γνώση της κατάστασης στην οποία βρίσκεται, οπότε και σε εκείνη την περίπτωση $O \equiv S$ και $P(S = s_i | O = oi) = 1$. Στις POMDP οι παρατηρήσεις εξαρτώνται πιθανοτικά από την τρέχουσα κατάσταση. Έτσι, μπορεί να είναι δύσκολο για τον πράκτορα να προσδιορίσει σε ποια κατάσταση βρίσκεται, καθώς η ίδια παρατήρηση μπορεί να αντιστοιχεί σε διαφορετικές καταστάσεις. Η $Z : S \times A \times O \mapsto \Delta(O)$ είναι η συνάρτηση παρατήρησης η οποία προσδιορίζει τη σχέση μεταξύ των καταστάσεων του συστήματος και των παρατηρήσεων. Η $Z(s', a, o')$ είναι η πιθανότητα η παρατήρηση o' να καταγραφεί αφού ο πράκτορας εκτελέσει την ενέργεια a και βρεθεί στην κατάσταση s' : $Z(s', a, o') = P(O_{t+1} = o' | S_t = s', A_t = a)$.

Προκειμενου ένας πράκτορας να επιλεξει επιτυχώς τις αποφάσεις του σε POMDP περιβάλλοντα, απαιτείται κάποια μορφή μνήμης, γι' αυτό ο πράκτορας συνοψίζει όλες τις πληροφορίες για το παρελθόν του χρησιμοποιώντας ένα διάνυσμα πληροφόρησης $b(s)$. Η διάνυσμα πληροφόρησης b είναι μία κατανομή επί του S. Μία POMDP μπορεί να μετατραπεί σε μία πλήρως παρατηρήσιμη MDP όπου οι καταστάσεις πληροφόρησης περιλαμβάνουν τον συνεχή αλλά πλήρως παρατηρήσιμο χώρο MDP. Μια MDP κατάσταση πληροφόρησης είναι επομένως η τετράδα $\langle B, A, T^b, R^b \rangle$, όπου

1. $B = \Delta(S)$ είναι ο συνεχής χώρος καταστάσεων
2. A είναι ο χώρος των ενεργειών
3. $T^b : B \times A \times B \mapsto B$ είναι η συνάρτηση μεταβάσεων πληροφορίας :

$$\begin{gathered}
T^b(b, a, b') = P(b'|b, a) = \sum_{o \in O} P(b'|a, b, o) P(o|a, b) = \\
\sum_{o \in O} P(b'|a, b, o) \sum_{s' \in S} Z(s', a, o) \sum_{s \in S} T(s, a, s') b(s)
\end{gathered} \tag{2}$$

όπου

$$P(b'|a, b, o) = \begin{cases} 1 & \text{εάν} \qquad b_o^a = b' \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases} \tag{3}$$

Αφού εκτελεστεί η ενέργεια a και παρθεί η παρατήρηση o, το ανανεωμένο διάνυσμα πληροφόρησης b_o^a μπορεί να υπολογιστεί από τη προηγούμενη πληροφόρηση b ως εξής :

$$b_o^a(s') = \frac{Z(s',a,o)\sum_{s\in S} T(s,a,s')b(s)}{P(o|a,b)} \tag{4}$$

4. $R^b : B \times A \mapsto \Re$ είναι η συνάρτηση αμοιβής :

$$R^b(b,a) = \sum_{s\in S} b(s)R(s,a) \tag{5}$$

3.2 Πολιτικές και συνάρτηση αξίας

Ο στόχος του πράκτορα είναι να υπολογίσει τη βέλτιστη ενέργεια σε ένα αβέβαιο περιβάλλον και έπειτα να εκτελέσει ένα πλάνο εξαρτώμενο από τη πληροφόρηση που έχει, αποφασίζοντας με ένα προεπιλεγμένο κριτήριο. Βέβαια η συμπεριφορά του πράκτορα ορίζεται από την πολιτική του π, η οποία αποτελεί την αντιστοίχηση του συνόλου των πληροφοριών στις αποφάσεις : $\pi : B \mapsto A$. Η $\pi(b)$ αποτελεί μία συνάρτηση σε ένα συνεχές σύνολο από κατανομές πιθανότητας πάνω στο S. Μία πολιτική μπορεί να προσδιοριστεί από μία συνάρτηση τιμών value function $J^\pi : \Delta(S) \mapsto \Re$, η οποία ορίζεται ως η αναμενόμενη προεξοφλιμένη αμοιβή που μπορεί να λάβει ο πράκτορας ξεκινώντας έχοντας τη πληροφόρηση b και ακολουθώντας την πολιτική π.

$$J^\pi(b) = E_\pi\left[\sum_{t=0}^{\infty} \gamma^t R(b_t,\pi(b_t))|b_0 = b\right] \tag{6}$$

όπου $R(b_t,\pi(b_t)) = \sum_{s\in S} R(s,\pi(b_t))b_t(s)$, b_t είναι το διάνυσμα πληροφόρησης που έχει ο πράκτορας τη χρονική στιγμή t και $\gamma \in (0,1)$. Λόγω του γεγονότος πως μία αμοιβή στο παρόν και στο μέλλον δεν έχει την ίδια αξία, καθώς στο παρόν έχει μεγαλύτερη, θεωρούμε γ ως τον παράγοντα προεξόφλησης $\gamma \in (0,1)$ για να μπορέσουμε να εξασφαλίσουμε πως το άθροισμα των μελλοντικών αμοιβών θα είναι πεπερασμένο.

Μία πολιτική που μεγιστοποιεί το J^π την ονομάζουμε βέλτιστη πολιτική π^* και ορίζει, για κάθε πληροφόρηση b, τη βέλτιστη απόφαση που πρέπει να εκτελεστεί στο τρέχον βήμα, υποθέτοντας ότι ο πράκτορας θα ενεργήσει επίσης βέλτιστα στα επόμενα βήματα. Η συνάρτηση αξίας μίας βέλτιστης πολιτικής χαρακτηρίζεται από τη συνάρτηση βέλτιστης τιμής J^*,

$$J_t^*(b) = max_{a \in A} \left[\sum_{s \in S} R(s,a) b(s) + \gamma \sum_{o \in O} P(o|a,b) J_{t-1}^*(b_a^o) \right] \quad (7)$$

Όταν η παραπάνω εξίσωση ισχύει για όλα τα $b \in \Delta(S)$ τότε διασφαλίζουμε πως η πολιτική είναι βέλτιστη. Ο στόχος του πράκτορα είναι να βρει μία πολιτική π^* η οποία βελτιστοποιεί τη συνάρτηση αξίας $J(.)$ για όλες τις καταστάσεις $s \in S$.

3.3 Ο αλγόριθμος της επανάληψης τιμής

Η επανάληψη τιμής (value iteration) για τα MDP είναι μία βασική μέθοδος επίλυσης για να βρεθεί η βέλτιστη μη πεπερασμένη πολιτική π^* χρησιμοποιώντας μία σειρά από βέλτιστες πεπερασμένες συναρτήσεις αξίας $J_0^*, J_1^*, ..., J_t^*$. Η βέλτιστη συνάρτηση τιμής μπορεί να υπολογιστεί σε πεπερασμένο αριθμό βημάτων δοθέντος του σφάλματος ε του Bellman.

1. Αρχικά θέσε $t = 0$ και $J_0(s) = 0$ για όλα τα $s \in S$

2. Όσο $\max_{s \in S} |J_{t+1} - J_t(s)| > \varepsilon$, υπολόγισε τη τιμή $J_{t+1}(s)$ για όλα τα $s \in S$ σύμφωνα με την παρακάτω συνάρτηση και μετά αύξησε το t :

$$J_{t+1}(s) = \max_{a \in A} \left[R(s,a) + \gamma \sum_{s' \in S} T(s,a,s') J_t(s') \right] \quad (8)$$

Κάθε POMDP μπορεί να αναπαρασταθεί (αντικατασταθεί) από ένα συνεχές MDP με βάση τις καταστάσεις πληροφόρησης. Γι' αυτό το λόγο, η επανάληψη τιμής μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να υπολογιστούν οι βέλτιστες πολιτικές μη πεπερασμένου ορίζοντα POMDP :

1. Αρχικά θέσε $t = 0$ και $J_0(b) = 0$ για όλα τα $b \in B$.

2. Όσο $sup_{b \in B} |J_{t+1}(b) - J_t(b)| > \varepsilon$, υπολόγισε $J_{t+1}(b)$ για όλες τις καταστάσεις πληροφόρησης του $b \in B$ σύμφωνα με την παρακάτω συνάρτηση, και έπειτα αύξησε το t :

$$J_{t+1}(b) = \max_{a \in A} \left[R^b(s,a) + \gamma \sum_{b' \in B} T^b(b,a,b') J_t(b') \right] \quad (9)$$

Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να γραφτεί ξανά χρησιμοποιώντας την ορολογία POMDP ως εξής :

$$J_{t+1}(b) = \max_{a \in A} \left[\sum_{s \in S} b(s) R(s,a) + \gamma \sum_{b' \in B} P(o|a,b) J_t(b_o^a) \right] \tag{10}$$

όπου $P(o|a,b) = \sum_{s' \in S} Z(s',a,o) \sum_{s \in S} T(s,a,s') b(s)$.

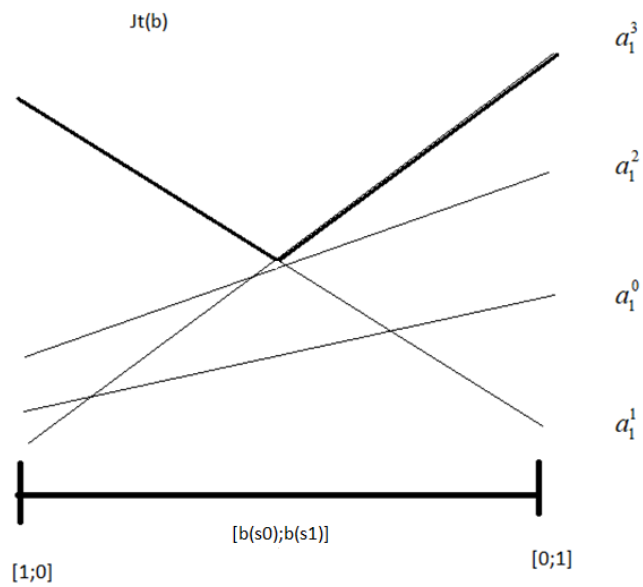
Για προβλήματα πεπερασμένου ορίζοντα τα J^* είναι κατά τμήματα γραμμικά και κυρτά. Η συνάρτηση αξίας παραμετροποιείται από ένα πεπερασμένο αριθμό διανυσμάτων (*hyperplanes*) στο χώρο B και χωρίζει το χώρο αυτό σε ένα ορισμένο αριθμό περιοχών. Κάθε διάνυσμα μεγιστοποιεί τη συνάρτηση αξίας σε μία συγκεκριμένη περιοχή και με κάθε διάνυσμα συσχετίζεται μία απόφαση, η οποία είναι η βέλτιστη απόφαση που μπορεί να ληφθεί στην συγκεκριμένη περιοχή. Παραμετροποιούμε μία συνάρτηση αξίας J_t, η οποία αντιπροσωπεύεται από ένα σύνολο (έστω U_t) πεπερασμένων α-διανυσμάτων (α ελληνικό γράμμα) $\{\alpha_t^i\}, i = 1, ..., |J_t|$. Κάθε διάνυσμα αντιπροσωπεύει μία περιοχή στο χώρο των πληροφοριών για την οποία είναι το στοιχείο μεγιστοποίησης της J_t. Δεδομένου ενός συνόλου από α-διανύσματα $\{\alpha_t^i\}_{i=1}^{|J_t|}$ στο βήμα t η συνάρτηση αξίας μίας πληροφόρησης b δίνεται από

$$J_t(b) = \max_{\{\alpha_t^i\}_{i=1}} (b * \alpha_t^i) \tag{11}$$

όπου $*$ συμβολίζει το εσωτερικό γινόμενο. Η κλίση της συνάρτησης τιμών στο b δίνεται από το διάνυσμα $\alpha_t^b = arg\max_{\{\alpha_t^i\}_{i=1}} (b * \alpha_t^i)$.

Η βέλτιστη συνάρτηση αξίας J_t αντιπροσωπεύεται από το σύνολο U_t^- των α-διανυσμάτων στο U_t (βλ.Σχήμα 2) και προκύπτει από την παραπάνω διαδικασία. Για κάθε περιοχή πληροφόρησης όταν ένα διάνυσμα είναι καλύτερο έναντι των άλλων, αποτελεί κομμάτι του συνόλου U_t^- και τότε μπορεί να υπολογιστεί η βέλτιστη συνάρτηση. Στο χειρότερο σενάριο, όλα τα διανύσματα είναι καλύτερα έστω για μία μικρή περιοχή πληροφόρησης, όμως κάτι τέτοιο συμβαίνει σπάνια. Πολλά διανύσματα του συνόλου U_t μπορεί να υπερκαλυφθούν από άλλα διανύσματα, και γι αυτό το λόγο δεν είναι απαραίτητο να υπολογιστεί η βέλτιστη συνάρτηση αξίας για εκείνα που υπερκαλύφθηκαν. Στο Σχήμα 2 (στο στάδιο 1 άρα $t = 1$), το διάνυσμα α_1^3 τμηματικά καλύπτεται από το α_1^1, ενώ ταυτόχρονα το διάνυσμα α_1^1 υπερκαλύπτεται και από το α_1^0 και από το α_1^2.

Τελικά θα χρησιμοποιηθούν εκείνα τα α-διανύσματα που είναι καλύτερα σε κάποια περιοχή πληροφόρησης. Τότε το σύνολο των α-διανυσμάτων U_t μπορεί να αντικατασταθεί από το U_t^-, το οποίο συνεχίζει να αντιπροσωπεύει την ίδια βέλτιστη συνάρτηση αξίας J_t^*. Στο παράδειγμα στο Σχήμα 2 τελικά θα χρησιμοποιηθούν τα διανύσματα α_1^0 και α_1^2. Σε ένα τέτοιο μικρότερο σύνολο U_t^-, όλα τα α-διανύσματα είναι «χρήσιμα».



Σχήμα 2: Για ένα POMDP δύο καταστάσεων, ο οριζόντιος άξονας αντιπροσωπεύει όλο το χώρο πληροφόρησης B στο οποίο ορίζεται η συνάρτηση αξίας $J_t(b)$. Μόνο 2 από τα 4 διανύσματα είναι χρήσιμα, δηλ. τα α_1^0 και α_1^2.

Παρόλο που ο χώρος των πληροφόρησης (belief space) είναι συνεχής, οποιαδήποτε βέλτιστη συνάρτηση πεπερασμένου ορίζοντα είναι κατά τμήματα γραμμική και κυρτή και μπορεί να αναπαρασταθεί από ένα πεπερασμένο σύνολο α-διανυσμάτων. Γι' αυτό το λόγο, το κρίσιμο σημείο όλων των POMDP αλγορίθμων επανάληψης τιμής είναι να βρεθεί το σύνολο των U_{t+1} που αναπαριστά το J_{t+1}, δοθέντος του προηγούμενου συνόλου α-διανυσμάτων U_t.

Οι POMDP αλγόριθμοι διαφέρουν στον τρόπο με τον οποίο υπολογίζουν τις συναρτήσεις αξίας. Ο απλός τρόπος είναι να κατασκευαστεί το σύνολο των U_{t+1} απαριθμώντας όλες τις πιθανές ενέργειες και παρατηρήσεις που απεικονίζουν το σύνολο των U_t. Το μέγεθος των U_{t+1} τότε φτάνει στα $|A||U_t|^{|O|}$. Καθώς πολλά διανύσματα στο U_t μπορεί να υπερκαλυφθούν από άλλα, η βέλτιστη συνάρτηση αξίας t-ορίζοντα μπορεί να αναπαρασταθεί από το σύνολο U_t^-. Το σύνολο U_t^- είναι το μικρότερο υποσύνολο του U_t το οποίο μπορεί ακόμη να αναπαριστά τη συνάρτηση αξίας J_t^*. Αυτό σημαίνει πως όλα τα α-διανύσματα στο U_t^- είναι χρήσιμα σε κάποια κατάσταση πληροφόρησης. Για να υπολογιστεί το U_{t+1} (και κατ' επέκταση το U_{t+1}^-) χρειάζεται μόνο να υπολογιστεί το U_t^-.

3.4 Άλλοι αλγόριθμοι

Ο πρώτος αλγόριθμος επίλυσης με τον οποίο αποπειράθηκε να λυθεί ένα POMDP βασίζεται στην επανάληψη τιμής (value iteration) που περιγράφηκε παραπάνω. Η μέθοδος Sondik/Monahan's Enumeration προτάθηκε από την [36], όμως υπάρχει αντίστοιχη αναφορά από την [32]. Η προσέγγιση της Sondik/ Monahan προσπαθεί να δημιουργήσει όσα από τα βέλτιστα διανύσματα μπορούν να δημιουργηθούν, διαλέγοντας μία απόφαση και ένα διάνυσμα για κάθε παρατήρηση. Αυτό απαιτεί τη δημιουργία πολλών διανυσμάτων, πολλά από τα οποία μπορεί να αποδειχθούν αχρείαστα καθώς μπορεί άλλα διανύσματα να τα υπερκαλύψουν και να μη χρησιμοποιηθούν στη λύση. Βέβαια, η δημιουργία τους και μόνο αποτελεί πολύ χρονοβόρα και κοστοβόρα διαδικασία. Με αυτό τον τρόπο η επίλυση γίνεται πολύ πολύπλοκη και αργή.

Αργότερα εμφανίστηκαν οι ακριβείς (exact) αλγόριθμοι επανάληψης τιμής, όπως οι Sondik's One-Pass Algorithm [33] και Cheng's Linear Support Algorithm [8]. Οι αλγόριθμοι αυτοί αναζητούν σε κάθε βήμα του αλγόριθμου επανάληψης τιμής τον πλήρη χώρο σημείων για ένα ελάχιστο σύνολο των σημείων πληροφόρησης. Τα σημεία αυτά δημιουργούν το απαραίτητο σύνολο διανυσμάτων που απαιτείται για τη δημιουργία της νέας συνάρτησης αξίας του επόμενου βήματος. Αυτό συνήθως χρειάζεται την δημιουργία κάθε γραμμικού διανύσματος του χώρου και γι' αυτό το λόγο είναι δαπανηρό για προβλήματα μεγάλων διαστάσεων.

Η επόμενη προσέγγιση προτάθηκε από τον [22], με τον Witness Algorithm , στον οποίο χρησιμοποιείται η ίδια δομή όπως στους [33] και [8], δηλαδή ορίζει περιοχές για ένα διάνυσμα και αναζητά ένα σημείο όπου αυτό το διάνυσμα είναι το καλύτερο. Επικεντρώνεται στην εύρεση της συνάρτησης καλύτερης αξίας για κάθε μία από τις ενέργειες ξεχωριστά. Μόλις τις εντοπίσει τις συνδυάζει για τη δημιουργία της συνάρτηση τιμής. Όπως και οι άλλοι αλγόριθμοι, ορίζει την περιοχή όπου βεβαιώνεται ότι η συγκεκριμένη επιλογή είναι η καλύτερη. Εάν μπορεί να βρει ένα σημείο πληροφόρησης όπου μια διαφορετική στρατηγική θα ήταν καλύτερη, τότε αυτό χρησιμεύει ως μάρτυρας (witness) στο γεγονός ότι η διαδικασία δε μπορεί ακόμη να σταματήσει, καθώς η τρέχουσα δέσμη διανυσμάτων δεν είναι ακόμα η τελική συνάρτηση τιμής που θα δημιουργηθεί.

Στη προσέγγιση της [41] αποδείχτηκε πως η επανάληψη τιμής εξακολουθεί να συγκλίνει στη βέλτιστη συνάρτηση τιμής, όταν σε κάθε βήμα η τωρινή συνάρτηση τιμής είναι το άνω όριο της συνάρτησης τιμής του προηγούμενου βήματος. Παρατηρήθηκε πως με αυτό τον τρόπο επιτεύχθηκε επιτάχυνση του αλγορίθμου. Ωστόσο, ο γραμμικός προγραμματισμός χρειάζεται και πάλι για να εξασφαλιστεί πως η νέα συνάρτηση τιμής είναι το άνω όριο της συνάρτησης του προηγούμενου βήματος. Με αυτόν τον τρόπο η πολυπλοκότητα της επίλυσης αυξάνεται.

Κατά τη διερεύνηση του καλύτερου αλγορίθμου επίλυσης μερικώς παρατηρήσιμων Μαρκοβιανών διαδικασιών, καταλήξαμε πως η παραγωγή προσεγγιστικών λύσεων επιταχύνει την διαδικασία επίλυσης. Οι αλγόριθμοι βασισμένοι σε σημεία παράγουν λύσεις που δεν είναι απόλυτα ακριβείς, αλλά πετυχαίνουν πολύ καλά αποτελέσματα επίλυσης και κυρίως κερδίζουν σε χρόνο και κόστος, έναντι αυτών που παράγουν απόλυτα ακριβείς λύσεις.

Οι αλγόριθμοι βασισμένοι σε σημεία, ή αλλιώς point-based, δημιουργούν ένα διάνυσμα α μέσω ενός τελεστή ασφαλείας (back up operator), το οποίο κάθε φορά θεωρείται το πως είναι το καλύτερο στο σύνολο B, όπου B το σύνολο πληροφόρησης το οποίο εμπεριέχει όλα τα διανύσματα πληροφόρησης του χώρου. Σε κάθε βήμα ο αλγόριθμος κάνει προσπέλαση όλου του συνόλου πληροφόρησης B και για κάθε σημείο δημιουργεί ένα διάνυσμα α. Η συνάρτηση αξίας αποτελείται από ένα σύνολο διανυσμάτων $max(bi * a)$. Τελικά σε κάθε βήμα η συνάρτηση αξίας ενημερώνεται με το προηγούμενο βήμα του τελεστή ασφαλείας.

Ο PBUA, από τον [27], είναι ένας ευρετικός αλγόριθμος που χρησιμοποιεί στοχαστική προσομοίωση για να δημιουργήσει νέα σημεία πληροφόρησης. Ωστόσο, διαπίστωσαν ότι δεν αποτέλεσε καλύτερη προσέγγιση από τις μεθόδους που χρησιμοποιούν τυχαία δημιουργία των σημείων πληροφόρησης. Ο αλγόριθμός στην [30] αρχίζει με μια σειρά από διανύσματα πληροφόρησης από ένα POMDP. Χρησιμοποιεί αυτά τα διανύσματα για να βρει ένα υποσύνολο του χώρου των διανυσμάτων πληροφόρησης με ένα μικρό αριθμό b σημείων. Τέλος, σχεδιάζει πάνω σε αυτό το χώρο μικρών διαστάσεων, διακριτοποιώντας τα χαρακτηριστικά και χρησιμοποιώντας επανάληψη τιμής για να βρει μια πολιτική για κάθε διάνυσμα.

Το PBVI, από τον [25] επιλέγει ένα μικρό σύνολο αντιπροσωπευτικών σημείων πληροφόρησης και εφαρμόζει επαναληπτικά τις ενημερωμένες τιμές σε αυτά τα σημεία. Η ενημέρωση των σημείων είναι πολύ πιο αποτελεσματική από μια ενημέρωση σε έναν ακριβή αλγόριθμο (τετραγωνική έναντι εκθετικής). Επειδή ενημερώνει και την τιμή και την αξία, καταφέρνει καλύτερα αποτελέσματα σε ανεξερεύνητα σημεία πληροφόρησης από ότι καταφέρνουν οι προσεγγίσεις οι οποίες ενημερώνουν μόνο την τιμή. Με αυτό τον τρόπο μειώνει τον αριθμό των σημείων του διανύσματος πληροφόρησης που είναι απαραίτητα για να βρεθεί μια καλή λύση.

Ο Perseus [35] είναι ο αλγόριθμος βασισμένος σε σημεία που επιλέχθηκε για την επίλυση του προβλήματος της παρούσας εργασίας. Σε σύγκριση με άλλους point-based αλγόριθμους, μέσω επίλυσης βασικών προβλημάτων με benchmarks, αποτέλεσε έναν αποδοτικό και ανταγωνιστικό τρόπο επίλυσης μερικώς παρατηρήσιμων διαδικασιών. Αυτό που τον διαφοροποιεί σε σύγκριση με τους άλλους τρόπους, είναι πως ο Perseus αντιγράφει (back up) και χρησιμοποιεί μόνο ένα τυχαίο υποσύνολο B' του συνόλου B και όχι όλο το B. Αυτό του επιτρέπει να επιταχύνει τη διαδικασία καθώς δε κάνει προσπέλαση όλα τα σημεία του B. Όταν όλα τα σημεία του B' βελτιωθούν ή τουλάχιστον δε χειροτερέψουν, η συνάρτηση αξίας του επόμενου βήματος δημιουργείται. Η διαδικασία σταματάει (όπως και στον αλγόριθμο επανάληψης τιμής) όταν η διαφορά της συνάρτησης του τωρινού βήματος από το προηγούμενο βήμα γίνει πολύ μικρή.

4 Ένα βασικό φορολογικό σύστημα

Στο μοντέλο που διερευνάται στη παρούσα εργασία γίνεται προσπάθεια κατανόησης της συμπεριφοράς μιας επιχείρησης, η οποία έχει σαν στόχο τη μεγιστοποίηση του κέρδους της. Είναι απαραίτητο να κατανοηθούν και να ληφθούν υπόψη οι διαδικασίες του ελληνικού κράτους κατά την αλληλεπίδρασή του με τις φορολογικές οντότητες. Κάθε μικρή ή μεγάλη επιχείρηση σε κάθε φορολογικό έτος υποχρεούται να καταθέσει δήλωση προς το κράτος, μέσα στην οποία περιγράφονται οι οικονομικές της δραστηριότητες για τις οποίες θα φορολογηθεί. Στη δήλωση αυτή η εταιρεία έχει την ευκαιρία να αναφέρει το ποσό των εσόδων που «επιθυμεί», δηλαδή αποφασίζει εάν θα δηλώσει όλα τα έσοδά της.

4.1 Ελεγχοι και πρόστιμα

Ο κυριότερος τρόπος με τον οποίο το κράτος μπορεί να επιβεβαιώσει πως τα δηλωθέντα εισοδήματα κάθε εταιρείας συμπίπτουν με τα πραγματικά της είναι η πραγματοποίηση ελέγχου. Κατά τη διάρκεια ενός ελέγχου, το κράτος μπορεί να εξετάσει δηλώσεις της εταιρείας όχι μόνο για το τρέχον φορολογικό έτος αλλά και για τα 4 προηγούμενα χρόνια. Έτσι για να αποφύγει η εταιρεία το πρόστιμο θα πρέπει να μην έχει παρανομήσει για συνολικά 5 χρόνια. Αυτό δίνει ένα πλεονέκτημα στο κράτος, διότι καθώς θα πραγματοποιεί τον έλεγχο θα μπορεί να εντοπίσει προηγούμενες παραβάσεις της εταιρείας. Επίσης αυτή η ιδιορρυθμία του φορολογικού συστήματος αναγκάζει πιθανότατα τις επιχειρήσεις να είναι περισσότερο συνεπείς ως προς το κράτος. Στο μοντέλο μας το πρόστιμο (έστω β) που θα δοθεί σε κάθε επιχείρηση για κάθε ένα χρόνο παραβατικότητας ανέρχεται ενδεικτικά στο 24% των συνολικών εσόδων.

Από την άλλη πλευρά, παρόλο που ο έλεγχος των δηλώσεων για περισσότερα από ένα φορολογικά έτη μπορεί να δίνει προβάδισμα στο κράτος κατά τη διάρκεια ενός ελέγχου, το κράτος δε διαθέτει αρκετούς χρηματικούς πόρους για τον έλεγχο όλων των επιχειρήσεων. Κάθε έλεγχος είναι χρονοβόρος και γι' αυτό οι αντίστοιχοι αρμόδιοι δε θα μπορούν να ελέγξουν μεγάλο όγκο εταιρειών και οι δαπάνες που θα προκύψουν είναι ένα ποσό που η ελληνική οικονομία δε μπορεί να καλύψει. Είναι λοιπόν λογικό πως, θα υπόκειται σε κάθε έλεγχο ένας μικρός αριθμός εταιρειών και -στο μοντέλο μας- μόνο το 5% του συνόλου των επιχειρήσεων. Το σύνολο των εταιρειών που πρόκειται να ελεγχθούν κάθε έτος ονομάζεται σύνολο ελέγχου (audit pool).

4.2 Περαίωση

Το ελληνικό κράτος, κατά καιρούς, δίνει μία επιλογή στις επιχειρήσεις που τους επιτρέπει να αποφύγουν τον έλεγχο. Αυτή η επιλογή, γνωστή ως περαίωση, λειτουργεί ως φορολογική αμνηστία και επί της ουσίας αποτελεί τη πληρωμή συγκεκριμένου ποσού από την επιχείρηση στο κράτος και σε αντάλλαγμα αυτού το κράτος συμφωνεί να μην ελέγξει φορολογικά την επιχείρηση. Καθώς ο έλεγχος εμπεριέχει συνολικά 5 χρόνια φορολογικών δηλώσεων, η επιχείρηση πληρώνει αυτό το κόστος για κάθε ένα χρόνο που επιλέγει να «καλύψει». Αυτή η συμφωνία παρέχει αμοιβαίο όφελος για την εταιρεία και το κράτος, καθώς η επιχείρηση αποφεύγει τον έλεγχο αλλά από την άλλη πλευρά το κράτος θα λάβει ένα χρηματικό ποσό από όλες τις επιχειρήσεις που θα επιλέξουν να χρησιμοποιήσουν αυτή τη δυνατότητα που το κράτος τους προσφέρει. Η χρήση της περαίωσης από πλευράς της επιχείρησης προσφέρει το προνόμιο διαγραφής της φορολογικής ιστορίας της και τον επόμενο χρόνο το κράτος θα είναι σε θέση να ελέγξει την επιχείρηση για το καινούριο φορολογικό έτος και μόνο.

Η επιλογή της αμνηστίας, αν αυτή παρέχεται, αποτελεί ένα ευαίσθητο θέμα, καθώς η επιλογή της μπορεί να δείχνει ενοχή εκ μέρους της εταιρείας. Δηλαδή ότι η επιχείρηση διαλέγει να κάνει χρήση της περαίωσης με σκοπό να αποκρύψει κάτι. Άρα μια καλή τακτική, αν μία επιχείρηση έχει σκοπό να παρανομήσει, θα μπορούσε να είναι η άρνηση της επιλογής της περαίωσης, ώστε να μη δώσει λαβή για μελλοντικούς ελέγχους. Από την άλλη πλευρά όμως, καθώς ο αριθμός των επιχειρήσεων που θα ελεγχθεί κάθε χρόνο είναι συγκεκριμένος και εφόσον με την περαίωση αποκλείονται από τον έλεγχο όλες οι εμπλεκόμενες επιχειρήσεις που θα την χρησιμοποιήσουν, είναι πιθανό ο αριθμός των εναπομείναντων επιχειρήσεων να είναι πολύ μικρός (ίσως και πιο μικρός από το αρχικό 5% αυτών που είχαν σκοπό να ελέγξουν). Συνεπώς, όλες οι εναπομείνασες επιχειρήσεις θα ελεγχθούν και αν κάποια από αυτές έχει επιλέξει να μην κινήσει υποψίες, μπορεί τελικά να κινδυνεύει να ελεγχθεί.

Σαφώς, μπορούμε να κατανοήσουμε πως η επιλογή της καλύτερης στρατηγικής δεν είναι κάτι εύκολο και τελικά κάθε απόφαση της επιχείρησης, για τον αν θα παρανομήσει και αν θα χρησιμοποιήσει τις διευκολύνσεις που παρέχονται από το κράτος, εξαρτάται κυρίως από το πως επιδρά αυτή στο συνολικό κέρδος της εταιρείας. Σε αυτό το σημείο θα ήταν καλό να σημειωθεί πως, όπως προκύπτει και από την παραπάνω περιγραφή, το κράτος μπορεί να καταφέρει να έχει διπλό κέρδος από την διάθεση της αμνηστίας, αφού πέρα από τους πόρους που θα καταφέρει να συλλέξει από το κόστος που επιβαρύνει τις εταιρείες αυτή η επιλογή ($\ell = 0.023$ για κάθε χρόνο που επιλέγεται να αποκρυφτεί), μπορεί να μην χρειαστεί να ελέγξει τον αριθμό των εταιρειών που αρχικά προέβλεπε αλλά μικρότερο.

4.2.1 Η περαίωση στο μοντέλο μας

Όπως θα περιγράψουμε λεπτομερώς και παρακάτω, υπάρχουν μικρές διαφορές μεταξύ της δικής μας προσέγγισης και της [13], πάνω στην οποία στηρίχτηκε η παρούσα εργασία. Η βασική διαφορά είναι οι συνθήκες κατά τις οποίες η επιχείρηση διαλέγει να κάνει χρήση του προνομίου της περαίωσης ή όχι. Στην [13], η κυβέρνηση ανακοίνωνε εάν τη φετινή φορολογική χρονιά θα δοθεί η επιλογή της αμνηστίας και έπειτα η κάθε εταιρεία επέλεγε εάν θα την εκμεταλλευτεί ή όχι. Δηλαδή, πριν κάθε φορολογική δήλωση κάθε επιχείρηση γνώριζε πλήρως αν μπορούσε να εκμεταλλευτεί την περαίωση και βάση αυτού μπορούσε να επιλέξει και το επίπεδο της παραβατικότητάς της. Η γνώση αυτή δίνει επιπλέον πληροφορία στην εταιρεία και πιθανόν να τη βοηθάει στις αποφάσεις της και στο τελικό μακροπρόθεσμο κέρδος της. Αντίθετα, στην παρούσα εργασία, η επιλογή για χρήση ή όχι της αμνηστίας γίνεται προτού δοθεί στην δημοσιότητα η απόφαση του κράτους. Δηλαδή, ενώ η φορολογική αρχή έχει ήδη αποφασίσει εάν θα τη δώσει φέτος την περαίωση, θα ανακοινώσει την απόφασή της αφού πρώτα όλες οι επιχειρήσεις δηλώσουν την επιθυμία τους εάν τη θέλουν ή όχι.

Στην ουσία, λαμβάνεται υπόψιν από κάθε εταιρεία η πρόθεση του κράτος στο θέμα της διάθεσης της περαίωσης. Μία τέτοια πληροφορία μπορεί να είναι κάποια ανεπίσημη δήλωση από τη μεριά της κυβέρνησης ή κάποια «διαρροή» από τον Τύπο. Αυτό σημαίνει πως η επιχείρηση θα λάβει την καλύτερη απόφαση κάθε χρόνο αφού πρώτα δει αν υπάρχουν τέτοιες πληροφορίες. Οι δύο προσεγγίσεις, στην διπλωματική εργασία που παρουσιάζεται και στην [13], μπορεί να θεωρηθεί ότι αντιμετωπίζουν το πρόβλημα με τον ίδιο τρόπο, εάν υπάρχουν επίσημες πληροφορίες για την πρόθεση της κυβέρνησης ως προς τη διάθεση της αμνηστίας το τρέχον έτος. Σε μία τέτοια περίπτωση η εταιρεία γνωρίζει με βεβαιότητα εάν θα υπάρχει η δυνατότητα να επωφεληθεί από το κράτος και αποφασίζει με γνώμονα αυτό.

Επιπροσθέτως, υπάρχει μία λεπτομέρεια που επηρεάζει την κατάσταση της εταιρείας σύμφωνα με αυτά που έχει αποφασίσει. Αν μια επιχείρηση έχει αποφασίσει να μη κάνει χρήση του προνομίου της περαίωσης και τελικά αυτή δοθεί, είναι λογικό πως θα έχει αυξημένη πιθανότητα να ελεγχθεί. Αυτό συμβαίνει διότι ο συνολικός αριθμός των επιχειρήσεων που θα ελεγχθούν έχει μειωθεί σημαντικά, τόσο ώστε τελικά να εμπίπτει και η επιχείρηση αυτή στο σύνολο ελέγχου.

4.3 Το ιστορικό των αποφάσεων της επιχείρησης

Το ιστορικό των αποφάσεων μιας επιχείρησης λειτουργεί ως μια βάση δεδομένων όπου οι δηλώσεις των εσόδων της για κάθε φορολογικό έτος για τα τελευταία 5 χρόνια αποθηκεύονται, δηλαδή «κρατούνται» οι αποφάσεις της επιχείρησης όσον αναφορά το ποσό που θέλει να αποκρύψει από το κράτος. Συνεπώς, σε περίπτωση που η επιχείρηση ελεγχθεί, καλείται να «λογοδοτήσει» όχι μόνο για το τρέχον φορολογικό έτος αλλά και για τα προηγούμενα 4 χρόνια.

Αυτός ο περιορισμός μειώνει την παραβατικότητα των επιχειρήσεων καθώς γνωρίζει πως οι πράξεις τους θα «αποθηκευτούν» και πιθανόν να ελεγχθούν. Με αυτόν τον τρόπο η κυβέρνηση έχει καλύτερη εικόνα της συμπεριφοράς της εταιρείας, καθώς δεν στηρίζεται μόνο στην τωρινή της δήλωση. Επίσης, η ιστορία των αποφάσεων επηρεάζει σημαντικά τους πιθανούς ελέγχους που θα κάνει το κράτος. Είναι λογικό πως, εάν μία εταιρεία δεν έχει ελεγχθεί, για παράδειγμα, για τα τελευταία 4 χρόνια έχει αυξημένη πιθανότητα να ελεγχθεί, διότι κάποιες από τις παλαιότερες δηλώσεις κινδυνεύουν να παραγραφούν.

Σε αυτό το σημείο, γεννάται το ερώτημα ποια θα είναι η επίδραση στις αποφάσεις της εταιρείας, αν η κυβέρνηση κατά τη διάρκεια ενός ελέγχου, είχε τη δυνατότητα να δει τη φορολογική συμπεριφορά της εταιρείας για παραπάνω από 5 χρόνια. Ερωτήματα όπως ποια θα ήταν η συμπεριφορά της εταιρείας ως προς τη παράβαση, εάν συνέβαινε αυτό ή/και αν θα αποτελούσε παράγοντα μείωσης της φοροαποφυγής, θα κληθούμε να τα απαντήσουμε στην πορεία της εργασίας αυτής.

5 Μαθηματικό υπόδειγμα

Λαμβάνοντας υπόψη τις παραμέτρους του ελληνικού φορολογικού συστήματος όπως περιγράφηκαν στο Κεφάλαιο 4, καλούμαστε να συνθέσουμε το μοντέλο με το οποίο θα εξετάσουμε τα ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν στο Κεφάλαιο 1. Θα χρησιμοποιήσουμε τη κύρια δομή του Μαρκοβιανού μοντέλου που περιγράφηκε στην [13] και θα το μετατρέψουμε σε ένα μερικώς παρατηρήσιμο Μαρκοβιανό μοντέλο εισάγοντας το στοιχείο της αβεβαιότητας που έχει η εταιρεία ως προς τις αποφάσεις της φορολογικής αρχής για τη διάθεση της αμνηστίας. Είναι σημαντικό να κατανοήσουμε τη λειτουργία του φορολογικού συστήματος στην Ελλάδα και να μοντελοποιήσουμε κατάλληλα τη φορολογική συμπεριφορά μιας επιχείρησης. Στη συνέχεια περιγράφονται με λεπτομέρειες οι καταστάσεις στις οποίες μπορεί να βρεθεί μια επιχείρηση, οι αποφάσεις που μπορεί να πάρει, η αβεβαιότητα που έχει σε κάθε κατάσταση και τέλος η αμοιβή της επιχείρησης ως συνάρτηση όλων των παραμέτρων της, αμοιβή την οποία η επιχείρηση θα προσπαθήσει να μεγιστοποιήσει.

5.1 Οι καταστάσεις μιας επιχείρησης και οι αποφάσεις της

Χρησιμοποιώντας τους συμβολισμούς της εργασίας [13], ορίζουμε $s_k \in \mathscr{S}$ ως την φορολογική κατάσταση στην οποία μπορεί να βρίσκεται η εταιρεία στο έτος $k = 0, 1, 2, ...$ με

$$\mathscr{S} = \{V_1, ..., V_5, O_1, ..., O_5, N_1, ..., N_5\} \tag{12}$$

όπου

- V_i: η εταιρεία ελέγχεται για τις τελευταίες $i = 1, ..., 5$ φορολογικές δηλώσεις της,
- O_i: το κράτος δίνει το δικαίωμα περαίωσης στην εταιρεία, η οποία ελέγχθηκε ή έκανε περαίωση πριν $i = 1, ..., 5$ χρόνια ,
- N_i: Η εταιρεία δεν ελέγχθηκε ή δεν είχε το δικαίωμα περαίωσης, και ο τελευταίος έλεγχος ή η χρήση της περαίωση συνέβη πριν $i = 1, ..., 5$ χρόνια.

Προς διευκόλυνσή μας με τους συμβολισμούς, θα αναφερόμαστε μερικές φορές στα στοιχεία του συνόλου $\mathscr{S}$ με ακέραιους αριθμούς, και συγκεκριμένα με τη σειρά με την οποία εμφανίζονται, δηλ. $V_1 \to 1$, $V_2 \to 2$, $\ldots$, $N_5 \to 15$. Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε, το σύνολο $\mathscr{S}$ εμπεριέχει 5 «αντίγραφα» από κάθε τύπο φορολογικής κατάστασης (V,O,N) τα οποία αντιστοιχούν στα 5 χρόνια ελέγχου-παραγραφής της φοροδιαφυγής. Φυσικά, το σύνολο $\mathscr{S}$ (και όλη η συζήτηση που ακολουθεί) μπορεί να γενικευτεί έτσι ώστε να μοντελοποιήσει ένα μεγαλύτερο όριο ετών ελέγχου-παραγραφής L, στα οποία το κράτος θα ανατρέχει για να ελέγξει παλαιότερες δηλώσεις για την φοροδιαφυγή :

$$\mathscr{S} = \{V_1, ..., V_L, O_1, ..., O_L, N_1, ..., N_L\}.$$

Τα παραπάνω θα αναλυθούν περισσότερο στο Κεφάλαιο 6.

Επιπλέον θέτουμε $\mathscr{A} = \{1,2\} \times [0,1]$ ως το σύνολο των αποφάσεων την επιχείρησης, η οποία στο έτος k επιλέγει μία συνδυαστική απόφαση $a_k \in \mathscr{A}$, $a_k = [v_k, u_k]^T$, όπου $v \in \{1,2\}$ συμβολίζει την απόφαση της επιχείρησης να χρησιμοποιήσει την περαίωση ($v_k = 1$) ή να μην τη χρησιμοποιήσει ($v_k = 2$), και $u_k \in [0,1]$ συμβολίζει το μέρος των κερδών της εταιρείας που η ίδια επιλέγει να αποκρύψει από το κράτος.

Με βάση τα παραπάνω, η κατάσταση της εταιρείας το χρόνο k είναι το διάνυσμα

$$x_k = [s_k, h_k^T]^T \tag{13}$$

όπου $s_k \in \mathscr{S}$, και $h_k \in [0,1]^5$ εμπεριέχει την ιστορία των αποφάσεων της επιχείρησης όσον αναφορά τη φοροδιαφυγή.

Σε αυτό το σημείο, πρέπει να υπενθυμίσουμε πως το μοντέλο που παρουσιάζεται εδώ είναι διαφορετικό από αυτό της [13] ως προς ένα σημαντικό και καθοριστικό σημείο. Στο μοντέλο εκείνο, το διάνυσμα των καταστάσεων περιείχε ένα επιπλέον στοιχείο, το οποίο αντιστοιχούσε στην πληροφορία: αν η περαίωση ήταν διαθέσιμη ή όχι. Στη δική μας περίπτωση, η εταιρεία δεν έχει αυτή την πληροφορία. Αυτό που κάνει η εταιρεία κάθε χρόνο είναι να δηλώνει την επιθυμία της (v_k) να κάνει χρήση της περαίωσης, ενώ η φορολογική αρχή ανακοινώνει εάν θα την κάνει διαθέσιμη μετά την καταληκτική ημερομηνία υποβολής των δηλώσεων. Η επιχείρηση επίσης υποχρεούται εκ των προτέρων να δεσμευτεί σε μία απόφαση για τη φοροδιαφυγή (u_k), δηλαδή αποφασίζει ποιο θα είναι το ακριβές ποσό των κερδών της το οποίο τελικά θα αποκρύψει. Εάν δεν υπάρχουν πληροφορίες σχετικά με την πρόθεση του κράτους να προσφέρει την αμνηστία, δηλαδή χωρίς κάποιες διαρροές ή δηλώσεις, η εκάστοτε εταιρεία δε γνωρίζει εάν θα βρίσκεται σε κατάσταση O_i (δίνεται η αμνηστία) ή N_i (δε δίνεται η αμνηστία).

5.2 Ανάλυση των καταστάσεων

Βασιζόμενοι στην παραπάνω συζήτηση η επιχείρηση θα εξελίσσεται στο χώρο των καταστάσεων $\mathscr{S} \times [0,1]^5$ σύμφωνα με την εξίσωση :

$$x_{k+1} = Ax_k + Ba_k + n_k, \quad x(0) \text{ αρχική τιμή}, \tag{14}$$

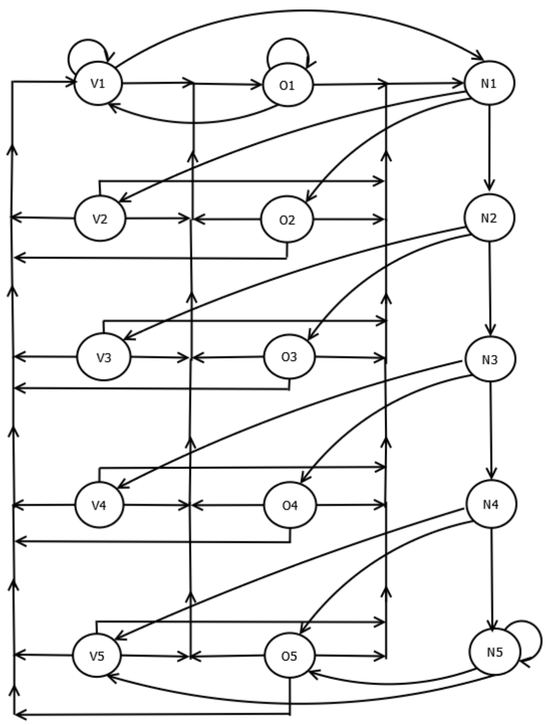
όπου

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \\ & H \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad n_k = \begin{bmatrix} w_k \\ 0_{5\times 1} \end{bmatrix} \tag{15}$$

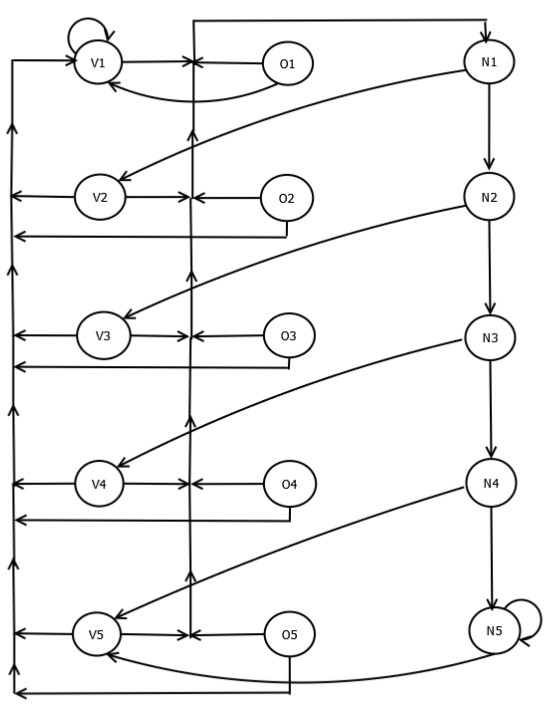
όπου ο όρος $w_k \in \mathscr{S}$ αντιπροσωπεύει μια τυχαία διαδικασία της οποίας οι πιθανότητες μετάβασης εξαρτώνται από το αν η επιχείρηση αποφασίζει να πάρει την περαίωση ή όχι, και από το αν το κράτος αποφασίζει να την παρέχει στο τρέχον έτος.

Με βάση την προηγούμενή μας συζήτηση για το φορολογικό σύστημα, μπορούμε να αναπαραστήσουμε αυτή την διαδικασία μετατρέποντας το w_k σε διαγραμματική μορφή χρησιμοποιώντας δύο διαγράμματα μετάβασης, ένα για την περίπτωση όπου $v_k = 1$ (η εταιρεία αποφασίζει να χρησιμοποιήσει την περαίωση - Σχήμα 3) και ένα για την περίπτωση όπου $v_k = 2$ (όταν η εταιρεία αποφασίζει να μην χρησιμοποιήσει την αμνηστία- Σχήμα 4).

Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι στο Σχήμα 3 η εταιρεία βρίσκεται στην κατάσταση O_2. Αυτό σημαίνει ότι η εταιρεία θα πληρώσει για να μην ελεγχθεί για τις τελευταίες δύο φορολογικές της δηλώσεις, τρόπο με τον οποίο «καθαρίζει την κατάσταση της» και τώρα θα



Σχήμα 3: Διάγραμμα μετάβασης όταν η εταιρεία ζητάει να χρησιμοποιήσει την περαίωση. Τα τόξα αντιστοιχούν σε πιθανότητες μεταβάσεις και οι τιμές τους περιγράφονται στο κείμενο και στο Παράρτημα



Σχήμα 4: Διάγραμμα μετάβασης όταν η εταιρεία αποφασίζει να μην χρησιμοποιήσει την περαίωση. Τα τόξα αντιστοιχούν σε πιθανότητες μεταβάσεις και οι τιμές τους περιγράφονται στο κείμενο και στο Παράρτημα

υποβάλει την επόμενη φορολογική της δήλωση - η μόνη που υπόκειται σε πιθανό έλεγχο το επόμενο έτος. Οι πιθανές μεταβάσεις της επιχείρησης είναι στο O_1 (αν η κυβέρνηση δώσει εκ νέου την επιλογή της περαίωσης), όπου θα διαγραφεί η κατατεθείσα φορολογική δήλωση, είτε στο V_1 όπου θα ελεγχθεί ή στο N_1, όπου η επιχείρηση θα αποφύγει έναν έλεγχο, αλλά η φορολογική της δήλωση θα παραμείνει σε αναμονή, για ενδεχόμενους μελλοντικούς ελέγχους ή αμνηστίες.

Το διάγραμμα μετάβασης στο Σχήμα 4 (όπου η επιχείρηση έχει απορρίψει την επιλογή περαίωσης) λειτουργεί με παρόμοιο τρόπο, με την επιχείρηση να μην μεταβαίνει ποτέ σε κατάσταση O_i. Εντούτοις, οι πιθανότητες μετάβασης από τις καταστάσεις της O_i προς τις καταστάσεις ελέγχου V_i θα είναι υψηλότερες σε σύγκριση με την προηγούμενη περίπτωση (βλ. παρακάτω και Α΄ Παράρτημα για αριθμητικές τιμές). Αυτό αντικατοπτρίζει το γεγονός ότι μόλις η κυβέρνηση προσφέρει την περαίωση, τότε η εταιρεία έχει μεγαλύτερη πιθανότητα ελέγχου, διότι οι υπόλοιπες εταιρείες που επέλεξαν να χρησιμοποιήσουν την περαίωση, έχουν πλέον απομακρυνθεί από το σύνολο ελέγχου.

Τα παραπάνω διαγράμματα περιγράφουν τη μετάβαση από μία κατάσταση σε μία άλλη όπως τις έχουμε περιγράψει, δηλαδή ορίζονται σύμφωνα με τις παραμέτρους του ελέγχου ή μη και της περαίωσης. Δεν αναπαριστούν την ιστορία των αποφάσεων της εταιρείας, η οποία συνοδεύει κάθε κατάσταση. Με αυτόν τον τρόπο οι καταστάσεις δεν είναι μόνο οι 15 που φαίνονται στα διαγράμματα αυτά αλλά $|\mathscr{S}| \cdot |h|^5$, όπου $|h|$ το πλήθος των τιμών του διανύσματος h. Το h μπορεί να πάρει οποιονδήποτε αριθμό μεταξύ 0 και 1, ανάλογα πόσο είναι το ποσοστό απόκρυψης κερδών από την εταιρεία σε κάθε χρονιά. Σκεπτόμενοι αυτά, υπάρχουν τόσα διαγραμμάτα από 15 καταστάσεις όσο και το πλήθος το $|h|$ και αναλόγως την τωρινή κατάσταση, την «15άδα» που βρισκόμαστε και την επιλογή από το $|h|$, μεταφερόμαστε τόσο στην κατάλληλη κατάσταση όσο και στην κατάλληλη «15άδα».

5.2.1 Πιθανότητες μετάβασης

Συμπληρωματικά των διαγραμμάτων μετάβασης είναι απαραίτητο να παρουσιάσουμε και τις αντίστοιχες πιθανότητες μετάβασης της τυχαίας διαδικασίας w_k. Αυτές οι πιθανότητες συμβολίζουν τη πιθανότητα η εταιρεία να μεταβεί από μία κατάσταση σε μία άλλη και είναι οι :

$$Pr\left(s_{k+1}=i|s_k=j,a_k=(v_k,u_k)\right)=T_{ij}\left(v_k\right), \quad i,j\in\{1,...15\}, \tag{16}$$

όπου T_{ij} είναι το (i,j)- στοιχείο του πίνακα μετάβασης T, ο οποίος δίνεται από

$$T\left(v_k\right)=\begin{cases} T_1 \quad \text{εάν} \quad v_k=1 \quad \text{(ζητώ περαίωση)} \\ T_2 \quad \text{εάν} \quad v_k=2 \quad \text{(απορρίπτω περαίωση)} \end{cases} \tag{17}$$

και οι T_1 και T_2 δίνονται στο Παράρτημα Α΄.

5.3 Η αμοιβή της εταιρείας

Έστω ότι Π είναι το συνολικό κέρδος της επιχείρησης, r ο φορολογικός συντελεστής, β το ετήσιο πρόστιμο για απλήρωτους φόρους που θα χρεωθεί στην εταιρεία σε περίπτωση ελέγχου της, και ℓ το κόστος της περαίωσης. Άρα η αμοιβή της εταιρείας είναι η εξής (ομοίως με [13]) :

$$g(x,a)=g\left([s,h^T]^T,a\right)=\Pi\cdot\begin{cases} 1-r+ru & s\in\{11,...,15\} \\ 1-r+ru-\ell(s-5) & s\in\{6,...,10\} \\ 1-r+ru-r\sum_{i=1}^{s}[h]_{6-i} & \\ -\frac{3}{5}\beta r\sum_{i=1}^{s}i[h]_{6-i} & s\in\{1,...,5\} \end{cases} \tag{18}$$

όπου συμβολίζουμε τα στοιχεία του $\mathscr{S}$ ως ακέραιους αριθμούς, και $[h]_i$ παριστάνει το i-στο στοιχείο του διανύσματος h.

Ο πρώτο όρος στη δεξιά πλευρά της συνάρτησης (18) αντιστοιχεί στην αμοιβή που αποκτάται αν η επιχείρηση δεν ελέγχεται ούτε χρησιμοποιεί την περαίωση και αποκρύπτει ένα ποσό Πu. Ο δεύτερος όρος ισχύει όταν η επιχείρηση χρησιμοποιεί την επιλογή της περαίωσης και έτσι πληρώνει ℓ ανά έτος από τον τελευταίο έλεγχο ή την αμνηστία της. Ο τελευταίος όρος είναι η αμοιβή της επιχείρησης σε περίπτωση ελέγχου, όπου το παρελθόν της ιστορίας της φοροδιαφυγής χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό των οφειλόμενων φόρων και των οφειλόμενων χρημάτων.

5.4 Παρατηρήσεις της επιχείρησης, διάνυσμα πληροφόρησης και η συνάρτηση αξίας

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, η επιχείρηση δεν γνωρίζει αν το κράτος πρόκειται να προσφέρει την επιλογή της αμνηστίας έως ότου δηλώσει τους φόρους της για το τρέχον έτος. Αυτό σημαίνει ότι η επιχείρηση είναι αβέβαιη για την φορολογική της κατάσταση, εκτός και αν βρίσκεται σε κατάσταση ελέγχου. Δηλαδή είναι αβέβαιη για το αν βρίσκεται σε κατάσταση N_i (η περαίωση δεν είναι διαθέσιμη) ή σε κατάσταση O_i (η περαίωση είναι διαθέσιμη και η επιχείρηση είναι πρόθυμη να πληρώσει γι' αυτή). Στην πράξη, η επιχείρηση μπορεί να έχει κάποιες πληροφορίες από τον Τύπο, τη φορολογική αρχή ή τις πηγές της αγοράς εργασίας, για το αν θα υπάρξει η διάθεση της αμνηστίας από την κυβέρνηση. Φυσικά, οι πληροφορίες μπορεί να μην είναι πάντα σωστές. Επίσης, είναι προς το συμφέρον του κράτους να γνωρίζει ποια αποτελέσματα θα είχαν αυτές οι «διαρροές» στις αποφάσεις της εταιρείας (και συνεπώς στα φορολογικά έσοδά της).

Θέτουμε $\hat{\mathscr{S}}$ να είναι το σύνολο των παρατηρήσεων που έχει η εταιρεία για το σύνολο των καταστάσεων της με

$$\hat{\mathscr{S}} = \{\hat{V}_1, ..., \hat{V}_5, \hat{O}_1, ..., \hat{O}_5, \hat{N}_1, ..., \hat{N}_5\}. \tag{19}$$

Συνεπώς τη χρονική στιγμή k η επιχείρηση παρατηρεί $\hat{s}_k \in \hat{\mathscr{S}}$, βάση του οποίου θα πρέπει να πάρει την αντίστοιχη απόφασή της a_k.

Όταν η εταιρεία βρίσκεται σε κατάσταση ελέγχου, έχει προφανώς πλήρη επίγνωση της κατάστασης της και γι αυτό ισχύει το εξής :

$$P\left(\hat{s}_k = \hat{V}_i | s_k = V_i\right) = 1, \tag{20}$$

ενώ όταν η εταιρεία βρίσκεται σε κατάσταση O_i ή N_i έχουμε :

$$P\left(\hat{s}_k = \hat{O}_i | s_k = O_i\right) = z_O, \quad P\left(\hat{s}_k = \hat{N}_i | s_k = O_i\right) = 1 - z_O, \tag{21}$$

$$P\left(\hat{s}_k = \hat{N}_i | s_k = N_i\right) = z_N, \quad P\left(\hat{s}_k = \hat{O}_i | s_k = N_i\right) = 1 - z_N, \tag{22}$$

όπου z_O είναι η πιθανότητα να διακρίνει σωστά η επιχείρηση μια O_i κατάσταση από την αντίστοιχη N_i, ενώ z_N είναι η πιθανότητα σωστής παρατήρησης N_i έναντι της O_i.

Δοθείσας της εξίσωσης (14) και των παρατηρήσεων $\hat{s}_k$, μπορούμε να κατασκευάσουμε το διάνυσμα πληροφόρησης της επιχείρησης ως πιθανοτική κατανομή επί των καταστάσεών της, το οποίο θα πρέπει να ενημερώνεται με κάθε νέα παρατήρηση της επιχείρησης.

Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι η αβεβαιότητα στις παρατηρήσεις της επιχείρησης αφορά μόνο τη φορολογική της κατάσταση, δηλαδή το πρώτο στοιχείο s_k του διανύσματος κατάστασης $x_k = [s_k, h_k^T]^T$. Το υπόλοιπο του διανύσματος αυτού, h_k, είναι η φορολογική ιστορία της επιχείρησης η οποία, φυσικά, είναι πάντοτε γνωστή σε αυτήν. Υπό το πρίσμα αυτό, μπορούμε να ορίσουμε τις παρατηρήσεις σε ολόκληρο το χώρο καταστάσεων πληροφόρησης

$$\hat{x}_k = [\hat{s}_k, h_k^T]^T,$$

και οι εξισώσεις (20)-(22) ορίζουν τις πιθανότητες μετάβασης όλων των καταστάσεων, έτσι ώστε να είναι αρκετό να λάβουμε υπόψη την πληροφόρηση $b(s)$ ως πιθανότητα κατανομής στο $\mathscr{S}$, αντί του $b(x)$ σε ολόκληρο το χώρο των καταστάσεων.

Το διάνυσμα πληροφόρησης της εταιρείας $b_k(s_k)$ αφού λάβει την απόφαση a_k και στη συνέχεια παρατηρήσει $\hat{s}_{k+1}$ θα μπορεί να ανανεωθεί σύμφωνα με τη σχέση :

$$b_{k+1}(s_{k+1}) = c\ P(\hat{s}_{k+1}|s_{k+1}) \sum_{s_k \in \mathscr{S}} Pr(s_{k+1}|s_k, a_k) b_k(s_k) \tag{23}$$

όπου c είναι μια σταθερά κανονικοποίησης. Στην εξίσωση (23) χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι οι παρατηρήσεις εξαρτώνται μόνο από την κατάσταση στην οποία βρίσκεται η επιχείρηση και όχι από τις ενέργειές της.

Δεδομένης της πληροφόρησης της επιχείρησης σε χρόνο k, $b_k(s_k)$, ως φορολογικής κατάστασης της, τη γνωστή φορολογική ιστορία h_k και της απόφασης a_k, μπορούμε να υπολογίσουμε την αναμενόμενη τιμή της αμοιβής της, βασισμένοι στην εξίσωση (18) :

$$R(b_k, h_k, a_k) = \sum_{s_k \in S} g\left([s_k, h_k^T]^T, a_k\right) b_k(s_k). \tag{24}$$

Έτσι, θεωρώντας έναν άπειρο χρονικό ορίζοντα, η επιχείρηση αντιμετωπίζει το πρόβλημα της επιλογής της ως προς την περαίωση και τη φοροδιαφυγή, $a_k = \pi(b_k, h_k) = (v_k, u_k)$, έτσι ώστε να μεγιστοποιήσει την προεξοφλημένη αναμενόμενη αμοιβή:

$$J^{\pi}(b_0, h_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k \mathop{\mathbb{E}}_{w_k} \left\{ g\left([s_k, h_k^T]^T, a_k\right) | b_0, h_0, \pi \right\} \tag{25}$$

ως προς την πολιτική αποφάσεων π, στηριζόμενη στην δυναμική εξίσωση (14) και στις παρατηρήσεις (23), όπου $\gamma \in (0,1]$ είναι ένας παράγοντας έκπτωσης.

Η βέλτιστη συνάρτηση αξίας J^* της συνάρτησης δίνεται από τη πασίγνωστη συνάρτηση Bellman

$$J^*(b_k, h_k) = \max_{a_k} \left[R(b_k, h_k, a_k) + \gamma \sum_{\hat{s}_{k+1} \in \hat{\mathscr{S}}} P(\hat{s}_{k+1} | b_k, a_k) J^*(b_{k+1}, h_{k+1}) \right] \tag{26}$$

με

$$P(\hat{s} | b_k, a_k) = \sum_{s, s_k \in \mathscr{S}} P(\hat{s} | s) Pr(s | s_k, a_k) b_k(s_k).$$

5.5 Επίλυση για τη βέλτιστη πολιτική της εταιρείας

Η επίλυση ενός προβλήματος POMDP είναι ιδιαιτέρως περίπλοκη και δύσκολη γενικώς αλλά και ειδικώς στο παρόν πρόβλημα, δεδομένου ότι ο αριθμός των καταστάσεων της εταιρείας δεν είναι αριθμήσιμος. Αυτό συμβαίνει διότι κάθε κατάσταση περιέχει και την αντίστοιχη ιστορία των προηγούμενων αποφάσεων της εταιρείας για τα τελευταία 5 χρόνια. Στη δυσκολία του προβλήματος έρχεται να προστεθεί και η αβεβαιότητα της μερικής παρατηρησιμότητας των καταστάσεων. Είναι λοιπόν σύνηθες το φαινόμενο της προσεγγιστικής επίλυσης την βέλτιστης συνάρτησης σε τέτοια προβλήματα για την αποτελεσματικότερη επίδοση των αποτελεσμάτων που προκύπτουν.

Θεωρώντας πως η εταιρεία που εξετάζουμε προτιμά να είναι ουδέτερη ως προς το κίδυνο (risk-neutral), ή αντίστοιχα δρα με γραμμική συνάρτηση χρησιμότητας τότε και η συνάρτηση J^* θα είναι επίσης γραμμική. Αυτό σημαίνει ότι, όπως στη [13] το J^* θα μεγιστοποιηθεί στα όρια της εφικτής περιοχής του u, άρα θα χρειαστεί να λάβουμε υπόψη μόνο τις ακραίες τιμές του u, δηλαδή τις $u = 0$ (η εταιρεία δεν αποκρύπτει τίποτα) και $u = 1$ (η εταιρεία αποκρύπτει όλα τα έσοδα) για κάθε χρόνο. Αυτή η προσέγγιση αποφέρει σημαντική μείωση στην υπολογιστική πολυπλοκότητα, καθώς θα χρειαστεί να ληφθούν υπόψιν μόνο οι ιστορίες $h_k \in \{0,1\}^5$ και η εξίσωση του Bellman θα χρειαστεί να λυθεί μόνο για τον πεπερασμένο αριθμό $|\mathscr{S}| \cdot 2^5 = 480$ καταστάσεων. Σε σύγκριση με τον μοντέλο στο οποίο βασίζεται το δικό μας [13], το οποίο περιέχει 869 καταστάσεις, το δικό μας είναι απλούστερο. Παρόλα αυτά, λόγω της μερικής παρατηρησιμότητας των καταστάσεων, το παρόν μοντέλο δημιουργεί το φαινόμενο της αβεβαιότητας κάτι που το καθιστά πιο περίπλοκο υπολογιστικά.

Όπως εξηγήσαμε και σε προηγούμενο κεφάλαιο, θα χρησιμοποιήσουμε ως μέθοδο επίλυσης τον αλγόριθμο Perseus, έναν αλγόριθμο βασισμένο σε σημεία. Παρακάτω παρουσιάζονται μερικά αριθμητικά πειράματα, στα οποία υπολογίζουμε τη βέλτιστη πολιτική της εταιρείας, υπό διάφορα σενάρια, και συζητάμε τα αποτελέσματα που προέκυψαν.

6 Αποτελέσματα

Αρχικά, θα θέλαμε να καθορίσουμε τη βέλτιστη πολιτική και τα αναμενόμενα έσοδα της επιχείρησης ανάλογα με τη διαθεσιμότητα της περαίωσης και τη πιθανότητα η επιχείρηση να έχει παρατηρήσει σωστά την κατάσταση την οποία βρίσκεται. Εξετάσαμε λοιπόν 3 περιπτώσεις ως προς την περαίωση i) διαθέσιμη σε κάθε οικονομικό έτος ii) μη διαθέσιμη (σε κανένα οικονομικό έτος) και iii) διαθέσιμη με τυχαίο τρόπο, με πιθανότητα q=0.2 κάθε έτος. Αντίστοιχα, σε σχέση με τη πιθανότητα ορθής παρατήρησης της κατάστασης της επιχείρησης, διακρίναμε τις περιπτώσεις όπου η εταιρεία έχει i) απόλυτη επίγνωση των αποφάσεων του κράτους για τη διάθεση της περαίωσης (δηλαδή μπορεί να γνωρίζει με βεβαιότητα αν βρίσκεται σε κατάσταση N ή O- αυτή η περίπτωση θα μας βοηθήσει να συγκρίνουμε την αποτελεσματικότητα του μοντέλου μας σε σχέση με άλλες λύσεις) ή ii) δεν έχει καμία πληροφόρηση για τις προθέσεις του κράτους και πρέπει να «μαντέψει» με κάποια πιθανότητα. Οι φορολογικές παράμετροι που υπήρχαν στο μοντέλο [13] στο οποίο στηριχθήκαμε παραμένουν ως έχουν, δηλαδή : ο φορολογικός συντελεστής $r = 0.24$, το πρόστιμο παράβασης $\beta = 0.24$, το κόστος της περαίωσης $\ell = 0.023$ και το παράγοντα προεξόφλησης $\gamma = 0.971$ που αντιστοιχεί σε 3% πληθωρισμό.

6.1 Επικύρωση του μοντέλου- Η περίπτωση των «τέλειων» παρατηρήσεων

Στη περίπτωση όπου η περαίωση δίνεται τυχαία αλλά η εταιρεία μπορεί να παρατηρήσει με απόλυτη ακρίβεια την κατάσταση στην οποία βρίσκεται, η πιθανότητα «σωστής» παρατήρησης είναι $z_N = z_O = 1$. Με αυτόν τον τρόπο το πρόβλημα μετατρέπεται σε ένα MDP πρόβλημα, δηλαδή σε μία Μαρκοβιανή Διαδικασία Αποφάσεων, όπως και το αρχικό πρόβλημα [13], και επομένως μπορεί να λυθεί εύκολα με επανάληψη τιμής (value iteration). Επιπλέον, οι περιπτώσεις όπου η περαίωση είναι διαθέσιμη σε κάθε ή σε κανένα οικονομικό έτος εμπίπτουν επίσης στην περίπτωση των «τέλειων» παρατηρήσεων. Αυτό συμβαίνει καθώς η εταιρεία, όταν δεν ελέγχεται, μπορεί με βεβαιότητα να γνωρίζει αν βρίσκεται σε N_i ή σε O_i κατάσταση.

Στον πίνακα 1 δίνεται η βέλτιστη αναμενόμενη αμοιβή σε κάθε μία από τις περιπτώσεις περαίωσης. Όπως φαίνεται, η βέλτιστη αμοιβή είναι μεγαλύτερη στην περίπτωση όπου η φορολογική αρχή δίνει τη περαίωση με πιθανότητα ίση με 1 (δηλαδή πάντοτε). Σε αυτή τη περίπτωση η βέλτιστη πολιτική είναι $a = (1,1)$, δηλαδή η καλύτερη απόφαση για την εταιρεία κάθε έτος είναι να χρησιμοποιεί την περαίωση και να αποκρύπτει τα κέρδη της. Αντιθέτως, από την πλευρά του κράτους, είναι καλύτερο να μην δίνει ποτέ την επιλογή της περαίωσης. Ταυτόχρονα παρατηρούμε πως σε σύγκριση με την [13] η βέλτιστη πολιτική είναι ακριβώς η ίδια, καθώς και η βέλτιστη αμοιβή με μία πολύ μικρή απόκλιση της τάξεως του 0.11%.

Πίνακας 1: Σύγκριση της αναμενόμενης αμοιβής της εταιρείας, κάτω από «τέλεια» παρατήρηση, με $r = 0.24$, $\beta = 0.24$, $\ell = 0.023$ και 5% συνολική πιθανότητα ελέγχου. Οι αριθμοί είναι σε ποσοστό επί τις εκατό % του ετήσιου κέρδους της εταιρείας Π, με παράγοντα προεξόφλησης γ που αντιστοιχεί σε 3% πληθωρισμό.

Περαίωση	Διαθέσιμη πάντα	Διαθέσιμη με πιθανότητα 20%	Ποτέ διαθέσιμη
Αναμενόμενη τιμή εσόδων	3354.3	3307.1	3254.5

6.2 Ο ρόλος των αβέβαιων παρατηρήσεων

Στη συνέχεια ερευνήσαμε το αν η αβεβαιότητα της εταιρείας ως προς τη διάθεση της περαίωσης επηρεάζει τη φορολογική της συμπεριφορά και γενικώς η αναμενόμενη αμοιβή της. Σε αυτό το σημείο πρέπει να επιλέξουμε μία συγκεκριμένη πιθανότητα για την περαίωση με την οποία θα δίνεται σε κάθε έτος. Θέσαμε λοιπόν την $q = 0.2$, η οποία είναι κοντά στην εμπειρική συχνότητα με την οποία δόθηκε η περαίωση στο παρελθόν. Αυτή η συχνότητα αντιστοιχεί στην προσπάθεια του κράτους να εισπράξει κάποια έσοδα (με τη μορφή περαίωσης) από τις επιχειρήσεις που δε διαθέτουν τους πόρους για έλεγχο.

Με βάση τη παραπάνω σύμβαση, επιλύσαμε το πρόβλημα υπολογίζοντας την βέλτιστη πολιτική της επιχείρησης και τη αναμενόμενη αμοιβή της στις εξής περιπτώσεις: i) «τέλεια» παρατήρηση, όπου η εταιρεία γνωρίζει πάντα την κατάσταση στην οποία βρίσκεται (ουσιαστικά γνωρίζει την απόφαση της κυβέρνησης να προσφέρει περαίωση ή όχι, άρα $z_O = z_N = 1$), ii) παρατήρηση με 50% ορθότητα, π.χ, η επιχείρηση δε γνωρίζει τίποτα για την απόφαση της κυβέρνησης ($z_O = z_N = 0.5$) και iii) παρατήρηση με 90% ορθότητα, π.χ, σε περιπτώσεις όπου η κυβέρνηση έχει αφήσει να διαρρεύσουν οι προθέσεις της για την διάθεση ή όχι της περαίωσης ($z_O = z_N = 0.9$). Στον πίνακα 2 παρουσιάζονται οι αναμενόμενες μακροπρόθεσμες αμοιβές της εταιρείας γι' αυτές τις 3 περιπτώσεις.

Πίνακας 2: Σύγκριση της αναμενόμενης αμοιβής της εταιρείας με $q = 0.2$ πιθανότητα διάθεσης περαίωσης. Τα πειράματα έγιναν με $r = 0.24$, $\beta = 0.24$, $\ell = 0.023$ και 5% συνολική πιθανότητα ελέγχου. Οι αριθμοί είναι σε ποσοστό επί τις εκατό % του ετήσιου κέρδους της εταιρείας Π, με παράγοντα προεξόφλησης γ που αντιστοιχεί σε 3% το ετήσιο πληθωρισμό.

Πιθαν ορθότητας παρατήρησης	100%	50%	90%
Αναμενόμενη τιμή εσόδων	3307.1	3309.7	3309.7

Παρατηρήσαμε πως η τιμή για τα αναμενόμενα έσοδα της επιχείρησης είναι ίδια για τις περιπτώσεις των παρατηρήσεων 50% και 90%, ενώ παρουσιάζει μικρή διαφορά αν το συγκρίνουμε με την περίπτωση της 100% παρατήρησης («τέλεια» παρατήρηση). Αυτό φαίνεται περίεργο καθώς θα περίμενε κανείς η επιχείρηση να εκμεταλλευόταν οποιαδήποτε πληροφόρηση θα είχε για την «πραγματική» της κατάσταση προς όφελος της. Η αιτιολόγηση αυτού του φαινομένου μπορεί να βρεθεί στην βέλτιστη πολιτική της επιχείρησης, η οποία είναι σταθερή και ίδια για όλες τις περιπτώσεις του πίνακα 2. Δηλαδή σε κάθε μία από αυτές τις περιπτώσεις η καλύτερη απόφαση που μπορεί να πάρει η εταιρεία σε κάθε φορολογικό έτος είναι να δηλώνει ότι επιθυμεί να χρησιμοποιήσει την περαίωση ($v = 1$) και να δηλώνει στην κυβέρνηση όσο το δυνατόν λιγότερα έσοδα ($u = 1$), άσχετα με την πληροφόρησή της ότι βρίσκεται σε O_i ή σε N_i κατάσταση.

Η [13], στην οποία έχουμε βασιστεί, είχε δείξει πως οι παράμετροι-φόροι που χρησιμοποιούνται από το ελληνικό φορολογικό σύστημα ενθαρρύνουν την φοροδιαφυγή. Αυτό που βρίσκουμε εδώ είναι πως το κίνητρο που έχει δημιουργηθεί για την φοροδιαφυγή είναι τέτοιο που η αβεβαιότητα ως προς τις κινήσεις της κράτους είναι ασήμαντη, διότι η βέλτιστη πολιτική - ακόμη και εν όψη αυτής της αβεβαιότητας - είναι να φοροδιαφεύγει πάντα. Ωστόσο αυτό πιθανόν να μπορεί να αλλάξει με διάφορους συνδυασμούς των παραμέτρων, π.χ. ίσως με μεγαλύτερα πρόστιμα. Πειραματιζόμενοι με άλλους συνδυασμούς παραμέτρων βρήκαμε πως υπάρχει ένα εύρος τιμών για τα β και ℓ όπου οι πιθανότητες παρατήρησης στις καταστάσεις O_i και N_i γίνονται ιδιαίτερα σημαντικές ως προς τη βέλτιστη αναμενόμενη τιμή εσόδων και πολιτική. Για παράδειγμα, για πρόστιμο $\beta = 9$ (το οποίο σημαίνει πληρωμή 9 φορές επιπλέον για κάθε ένα ευρώ φόρου που παρέμεινε απλήρωτο λόγω της φοροδιαφυγής) και το κόστος της περαίωσης $\ell = 0.04$ (ή διαφορετικά 4% των εσόδων της επιχείρησης), παρατηρήσαμε μία διαφορά στις αναμενόμενες τιμές εσόδων καθώς συγκρίναμε τα αποτελέσματα με 50% και 90% πιθανότητα ορθότητας παρατήρησης. Τα αποτελέσματα δίνονται στον πίνακα 3.

Πίνακας 3: Σύγκριση της αναμενόμενης αμοιβής της εταιρείας με $q = 0.2$ πιθανότητα διάθεσης περαίωσης. Τα πειράματα έγιναν με $r = 0.24$, $\beta = 9$, $\ell = 0.04$ και 5% συνολική πιθανότητα ελέγχου. Οι αριθμοί είναι σε ποσοστό επί τις εκατό % του ετήσιου κέρδους της εταιρείας Π, με παράγοντα προεξόφλησης γ που αντιστοιχεί σε 3% ετήσιο πληθωρισμό.

Πιθαν ορθότητας παρατήρησης	50%	90%
Αναμενόμενη τιμή εσόδων	2630.6	2648

Η διαφορά που υπάρχει στις αναμενόμενες τιμές εσόδων μεταξύ των δύο περιπτώσεων (πίνακας 3) προκύπτει από τον κατάλληλο συνδυασμό διαφόρων παραμέτρων που αξίζει να μελετήσουμε και να δούμε για ποιες από αυτές υπάρχει διαφορά στην αναμενόμενη αμοιβή της επιχείρησης.

Έπειτα από μία διαδικασία δοκιμών για τις κατάλληλες παραμέτρους παρατηρήσαμε πως μεγαλύτερες διαφορές στις αναμενόμενες τιμές, μεταξύ των παρατηρήσεων 50% και 90%, ξεκίνησαν να υπάρχουν για $\beta = 6$ και $\ell = 0.023$. Εάν κρατήσουμε σταθερή τη παράμετρο β και αυξάνουμε σταδιακά το ℓ η διαφορά αυτή αυξάνεται. Παρακάτω παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των αναμενόμενων τιμών για ενδεικτικές τιμές των παραπάνω παραμέτρων.

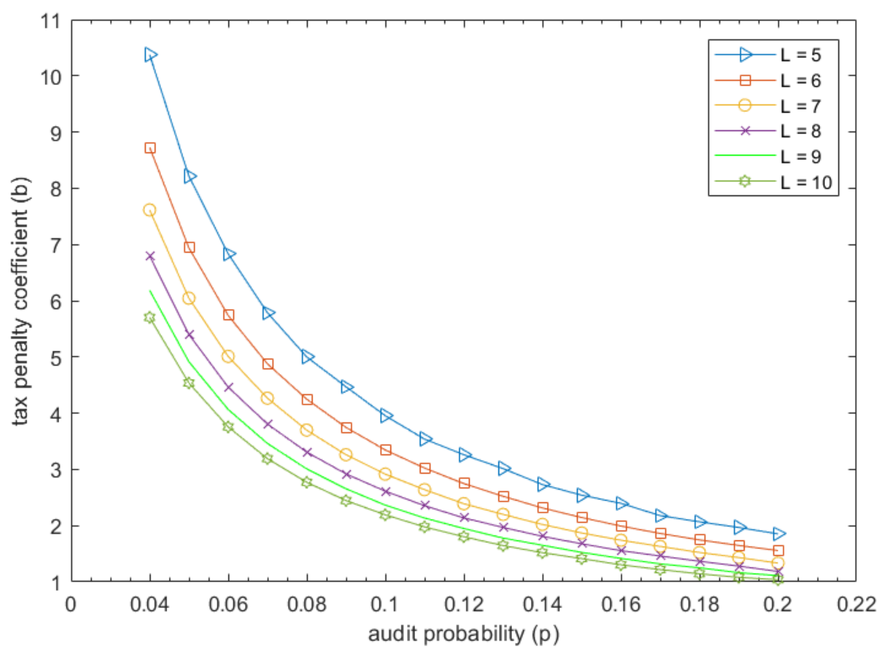
Πίνακας 4: Σύγκριση της αναμενόμενης αμοιβής της εταιρείας με $q = 0.2$ πιθανότητα διάθεσης περαίωσης. Τα πειράματα έγιναν με $r = 0.24$ και 5% συνολική πιθανότητα ελέγχου, για διάφορες τιμές β και ℓ. Οι αριθμοί είναι σε ποσοστό επί τις εκατό % του ετήσιου κέρδους της εταιρείας Π, με παράγοντα προεξόφλησης γ που αντιστοιχεί σε 3% ετήσιο πληθωρισμό.

β	ℓ	50%	90%
6	0.023	2750	2778.5
6	0.04	2714.8	2743.2
7	0.023	2691.3	2733.6
7	0.04	2668.3	2698.3
8	0.023	2662.4	2694
8	0.04	2647.3	2665.9
9	0.023	2642.1	2664
9	0.04	2630.6	2648

6.3 Ο ρόλος της παραγραφής

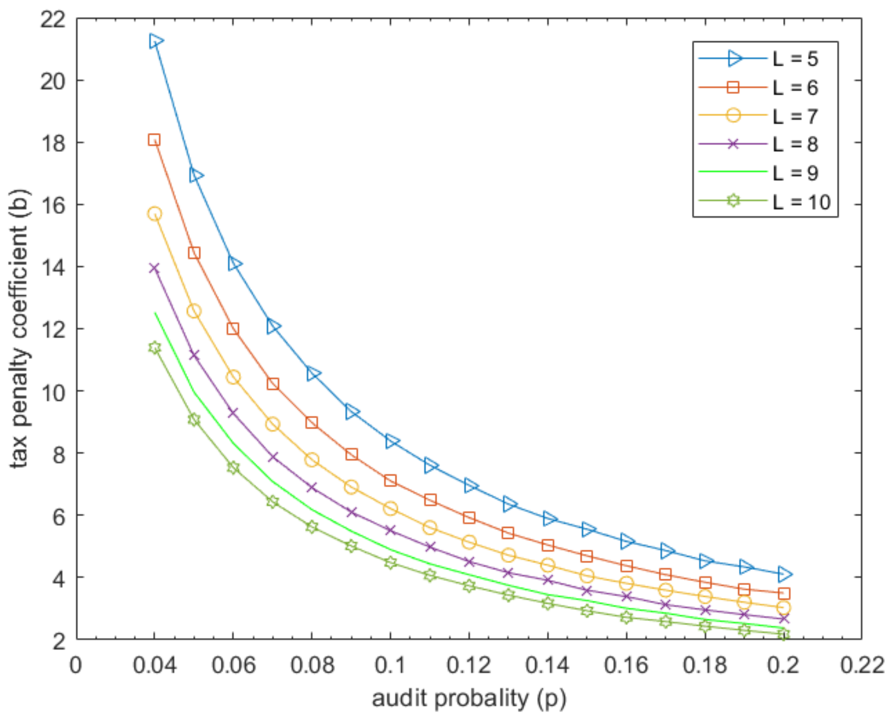
Το πρότυπο φορολογικό μας σύστημα στην Ελλάδα έχει συμπεριλάβει ένα εύρος πέντε ετών μέσα στο οποίο η φορολογική αρχή έχει τη δυνατότητα να ελέγχει τις φορολογικές δηλώσεις της επιχείρησης. Ωστόσο, το αποτέλεσμα επέκτασης αυτού του χρονικού ορίζοντα παραγραφής δεν έχει διερευνηθεί. Για να ποσοτικοποιήσουμε την επίδραση μια τέτοιας επέκτασης, συνδυάσαμε κατάλληλα την πιθανότητα ελέγχου p και το πρόστιμο β, για να δούμε ποιες είναι εκείνες οι τιμές των p και β για τις οποίες η εταιρεία αρχίζει να συμπεριφέρεται νόμιμα (δηλαδή να επιλέγει $u = 1$ σε κάθε κατάσταση). Ως αποτέλεσμα της ουδετερότητας της επιχείρησης ως προς τον κίνδυνο (και κατ' επέκταση της γραμμικότητας της συνάρτησης αμοιβών), υπάρχει ένα «σύνορο εντιμότητας» σε μορφή καμπύλης για τα (p,β), κάτω από το οποίο η εταιρεία κρύβει τα έσοδά της τουλάχιστον σε μία κατάσταση, ενώ πάνω από αυτό δε φοροδιαφεύγει.

Κάθε σημείο σε αυτό το σύνορο μπορεί να υπολογιστεί κρατώντας σταθερό το p και χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της διχοτόμησης για το β, υπολογίζοντας κάθε φορά την βέλτιστη πολιτική της εταιρείας και ελέγχοντας αν είναι απόλυτα νόμιμη. Για τις περιπτώσεις όπου δεν υπάρχει αβεβαιότητα στις πεποιθήσεις της εταιρείας ως προς τις προθέσεις της κυβέρνησης («τέλεια» παρατήρηση), η παραπάνω διαδικασία μπορεί να πραγματοποιηθεί μέσω του αλγορίθμου επανάληψης τιμής (value iteration). Συνεπώς μορφοποιήσαμε το μοντέλο μας έτσι ώστε να αυξάνεται το όριο της παραγραφής από το τωρινό $L = 5$ σε $L = 6, \ldots, 10$ χρόνια, και υπολογίστηκαν τα αντίστοιχα σύνορα σε σύγκριση με εκείνο των 5 ετών. Τα παραπάνω σύνορα φαίνονται στο Σχήμα 5 για την περίπτωση όπου η περαίωση δεν είναι ποτέ διαθέσιμη, ενώ στο Σχήμα 6 μπορεί κανείς να δει τα αποτελέσματα για μη-μηδενική πιθανότητα περαίωσης. Καθώς το εύρος με των χρόνων ελέγχου μεγαλώνει χρησιμοποιούμε ως πιθανότητα περαίωσης το $q = 1/L$, έτσι ώστε η εταιρεία να έχει κατά μέσο όρο μία «ευκαιρία» για περαίωση κάθε χρόνο, όσο μεγάλο και αν γίνει το εύρος των ετών.



Σχήμα 5: Σύνορα εντιμότητας της εταιρείας ως προς τα p-β όταν η περαίωση δεν είναι ποτέ διαθέσιμη, καθώς ο χρονικός ορίζοντας ελέγχου L αυξάνεται από 5 σε 10. Πάνω από κάθε γραμμή η βέλτιστη πολιτική της εταιρείας είναι $u_k = 0$ δηλ. να δηλώνει όλα τα κέρδη της

Παρατηρούμε πως όσο η πιθανότητα ελέγχου αυξάνεται χρειάζεται όλο και μικρότερο πρόστιμο για να αναγκάσει την εταιρεία να συμπεριφερθεί έντιμα. Επιπλέον, όσο αυξάνονται τα έτη ελέγχου το σύνορο τιμιότητας χαμηλώνει, άρα πάλι χρειάζονται μικρότερα πρόστιμα για να επιτευχθεί η μη παραβατικότητα των επιχειρήσεων. Αυτό ήταν



Σχήμα 6: Σύνορα εντιμότητας της εταιρείας ως προς τα p-β όταν η περαίωση είναι διαθέσιμη με πιθανότητα $q = 1/L$, καθώς ο χρονικός ορίζοντας ελέγχου L αυξάνεται από 5 σε 10. Πάνω από κάθε γραμμή η βέλτιστη πολιτική της εταιρείας είναι $u_k = 0$ δηλ. να δηλώνει όλα τα κέρδη της

αναμενόμενο, διότι το κράτος έχει περισσότερες ευκαιρίες να εντοπίσει τις επιχειρήσεις να παρανομούν, άρα και κάθε εταιρεία συμπεριφέρεται και πιο τίμια. Κατά συνέπεια, από πρακτικής άποψης το κράτος θα μπορούσε να αυξήσει τα έτη για τα οποία μπορεί να πραγματοποιεί ελέγχους και να θεσπίσει μεγαλύτερες ποινές για να αποτρέψει την φοροδιαφυγή. Βέβαια, παρατηρώντας τις τιμές των διαγραμμάτων συνειδητοποιούμε πως οι τιμές των προστίμων, για τις οποίες επιτυγχάνεται η έντιμη συμπεριφορά, είναι αρκετά υψηλές (η τιμή του προστίμου β είναι ίση με 10 με 5% πιθανότητα ελέγχου ακόμη και για 10 χρόνια ελέγχου). Στο Σχήμα 5, όπου δεν υπάρχει δυνατότητα αμνηστίας, το κατώφλι τιμιότητας είναι πάντα πιο χαμηλό και αντιστοιχεί μικρότερα πρόστιμα απ' ότι στο Σχήμα 6.

Για να ποσοτικοποιήσουμε την μείωση του κατωφλίου της ποινής β όσο το L αυξάνεται, υπολογίσαμε τη μέση ποσοστιαία μεταβολή από χρόνο σε χρόνο και επίσης τη συνολική μεταβολή από τα 5 χρόνια στα 10. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον πίνακα 5. Παρατηρούμε λοιπόν πως κάθε επέκταση (ανά ένα έτος τη φορά) του χρονικού ορίζοντα ελέγχου μειώνει το μέσο συντελεστή φορολογικής ποινής που απαιτείται για να καταστεί η φοροδιαφυγή μία μη ελκυστική επιλογή. Σε συνδυασμό με τα προηγούμενα αποτελέσματά μας, αυτό δείχνει: i) μακροχρόνιο όριο ελέγχων, ii) αυξημένη πιθανότητα ελέγχου και iii) αποφυγή φορολογικών αμνηστιών ως χρήσιμα εργαλεία πολιτικής.

Πίνακας 5: Μέση ποσοστιαία μεταβολή στο πρόστιμο β το οποίο είναι απαραίτητο για τον περιορισμό της φοροδιαφυγής, καθώς ο χρονικός ορίζοντας ελέγχων, L, αυξάνεται.

χρόνο σε χρόνο / πιθ περαίωσης	$q = 0$	$q = 0.2$
5-6	15.67%	15.10%
6-7	12.87%	12.88%
7-8	10.61%	11.7%
8-9	8.91%	10.28%
9-10	7.63%	8.85%
Συνολικό 5-10	44.74%	46.6%

7 Συμπεράσματα

Με κίνητρο το πρόβλημα της φοροδιαφυγής και της ανάγκης υπολογιστικών εργαλείων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την αποσαφήνιση της συμπεριφοράς των φορολογικών οντοτήτων, περιγράψαμε μια μερικώς παρατηρήσιμη Μαρκοβιανή διαδικασία που διαμορφώνει τη συμπεριφορά μιας επιχείρησης σε ένα φορολογικό σύστημα που περιλαμβάνει τυχαίους ελέγχους, κυρώσεις και περιστασιακές αμνηστίες. Χρησιμοποιώντας το μοντέλο μας, μαζί με μια τεχνική προσέγγισης βασισμένη σε σημεία, καταφέραμε να υπολογίσουμε τις βέλτιστες αποφάσεις της επιχείρησης σχετικά με το εάν θα ζητήσει ή όχι αμνηστία (σε περίπτωση που αυτή θα δοθεί) και ποιο είναι το ποσό από το κέρδος της που θα αποκρύψει από τις φορολογικές αρχές.

Το μοντέλο μας είναι πιο ρεαλιστικό από προηγούμενα Μαρκοβιανά μοντέλα, δεδομένου ότι η επιχείρηση είναι αβέβαιη ως προς τη φορολογική της κατάσταση και οφείλει να καταθέσει τη φορολογική της δήλωση πριν της γνωστοποιηθεί εάν θα έχει τη δυνατότητα αμνηστίας ή όχι. Χρησιμοποιώντας το ελληνικό φορολογικό σύστημα ως μελέτη περίπτωσης, επιβεβαιώσαμε τα προηγούμενα αποτελέσματα που υποδηλώνουν ότι για μια σειρά φορολογικών παραμέτρων που έχουν χρησιμοποιηθεί, η βέλτιστη πολιτική της εταιρείας είναι να επιλέγει πάντα την αμνηστία και να αποκρύπτει όσο το δυνατόν περισσότερο κέρδος. Αυτό είναι συνέπεια του γεγονότος ότι η πιθανότητα του φορολογικού ελέγχου και το ύψος των προστίμων είναι πολύ χαμηλά για να έχουν αποτέλεσμα.

Όσον αφορά τον ρόλο των υποθετικών παρατηρήσεων της επιχείρησης, διαπιστώσαμε ότι εάν οι φορολογικές παράμετροι δεν έχουν επαρκή αποτρεπτική αξία, η αβεβαιότητα της εταιρείας ως προς την πραγματική φορολογική της κατάσταση είναι ασήμαντη. Μεταξύ άλλων, αυτό σημαίνει ότι το κράτος δεν χρειάζεται να ανησυχεί για «διαρροές» πληροφοριών όσον αφορά τη φορολογική αμνηστία, η οποία ωστόσο καθίσταται λιγότερο αποτελεσματική. Εάν τα φορολογικά έσοδα πρόκειται να αυξηθούν (εν μέρει με τη διατήρηση των επιχειρήσεων στο σκοτάδι για μια επερχόμενη αμνηστία), ο συνδυασμός των φορολογικών κυρώσεων, των ποσοστών ελέγχου και του κόστους της αμνηστίας πρέπει να αυξηθεί σημαντικά από τα επίπεδα που μελετήθηκαν στο παρόν μοντέλο.

Τέλος, προσδιορίσαμε το σύνολο των φορολογικών συντελεστών και των φορολογικών κυρώσεων που εξαλείφουν τη φοροδιαφυγή στο μοντέλο μας. Οι προκύπτουσες καμπύλες του φορολογικού συντελεστή δείχνουν, μεταξύ άλλων, πόσο συχνά πρέπει να γίνονται οι φορολογικοί έλεγχοι προκειμένου το κράτος να μπορεί να αποθαρρύνει τη φοροδιαφυγή με ρεαλιστικές φορολογικές κυρώσεις. Διαπιστώσαμε επίσης ότι τα «όρια» μεταξύ της φοροδιαφυγής και της ειλικρινούς συμπεριφοράς μετατοπίζονται σημαντικά προς χαμηλότερες ποινές καθώς παρατείνεται το όριο των ετών για τα οποία μπορεί να ασκηθεί ο φορολογικός έλεγχος.

7.1 Μελλοντικές Επεκτάσεις

Θα ήταν ενδιαφέρον να επεκταθεί το μοντέλο που παρουσιάζεται εδώ εξετάζοντας μια επιχείρηση συντηρητική ως προς τον κίνδυνο και να διερευνηθούν τρόποι επίλυσης της προκύπτοντος POMDP παρουσία της μη γραμμικότητας που εισάγει η αποστροφή κινδύνου στη λειτουργία ανταμοιβής. Επίσης, κάτι πολύ ενδιαφέρον θα ήταν, με βάση τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας και τη βέλτιστη στρατηγική της επιχείρησης, να ερευνηθεί το αντίστοιχο έσοδο του κράτους από τις επιλογές της επιχείρησης. Αν δηλαδή η επιχείρηση εκμεταλλεύεται την περαίωση κάθε φορά, τι έσοδα δίνει αυτό για το κράτος και ταυτόχρονα αν το σύνολο των επιχειρήσεων προς έλεγχο μειωθεί τόσο που οι πόροι που θα διαθέτει το κράτος θα μειωθούν σημαντικά ή όχι.

Α΄ Παράρτημα

Πίνακες Μετάβασης

Πίνακας μετάβασης όταν η εταιρεία επιλέγει την αμνηστία

Πίνακας μετάβασης Μαρκοβ για την περίπτωση όπου η εταιρεία αποφασίζει να ζητήσει τη χρησιμοποίηση της περαίωσης. Η παραγραφή θεωρείται στα $L = 5$ χρόνια.

$$T_1 = \begin{bmatrix}
p_V & p_V & p_V & p_V & p_V & p_O & p_O & p_O & p_O & p_O & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_N & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_N & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_N & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{Nf} & p_{Nf} \\
q & q & q & q & q & q & q & q & q & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q & q \\
p_{IV} & p_{IV} & p_{IV} & p_{IV} & p_{IV} & p_{IO} & p_{IO} & p_{IO} & p_{IO} & p_{IO} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{IN} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{IN} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{IN} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{INf} & p_{INf}
\end{bmatrix}$$

Εδώ, p είναι το μέρος των φορολογικών καταλόγων που η κυβέρνηση μπορεί να ελέγχει κάθε χρόνο ανεξάρτητα από την κατάσταση της εταιρείας. Για τους σκοπούς μας, p ορίζεται ονομαστικά σε 0.05 (5%). Ένα 20% αυτών των ελέγχων (1%) κατανέμεται σε επιχειρήσεις που δεν έχουν ελεγχθεί για χρονικό διάστημα έως τριών ετών και το υπόλοιπο 80% των ελέγχων (ονομαστικά 4%) είναι για εκείνους που δεν έχουν ελεγχθεί για 4 ή περισσότερα χρόνια. q είναι η πιθανότητα της κυβέρνησης να προσφέρει την επιλογή της αμνηστίας. $p_V = (p - 0.8p)/4$ είναι η πιθανότητα επαναλαμβανόμενου ελέγχου (δηλ. για το δεύτερο έτος σε σειρά). $p_O = (p/5)/4$ είναι η πιθανότητα ελέγχου μετά τη χρησιμοποίηση της αμνηστίας· $p_N = (p/5)/4$ είναι η πιθανότητα ενός ελέγχου εάν η επιχείρηση δεν έχει ελεγχθεί για 1-3 χρόνια. $p_{N_f} = (p/5)4$ είναι η πιθανότητα ελέγχου, εάν η επιχείρηση έχει ελεγχθεί για 4 ή περισσότερα έτη (και επομένως ορισμένες από τις φορολογικές της δηλώσεις πρόκειται να περάσουν τα χρόνια της παραγραφής). $p_{IV} = 1 - q - p_V$, $p_{IO} = 1 - q - p_O$, $p_{IN} = 1 - q - p_N$, $p_{INf} = 1 - q - p_{Nf}$.

Πίνακας μετάβασης όταν η εταιρεία επιλέγει να απορρίψει την αμνηστία

Πίνακας μετάβασης Μαρκοβ για την περίπτωση όπου η εταιρεία αποφασίζει να απορρίψει τη χρησιμοποίηση της περαίωσης. Η παραγραφή θεωρείται στα $L = 5$ χρόνια.

$$T_2 = \begin{bmatrix}
p_V & p_V & p_V & p_V & p_V & p_O & p_O & p_O & p_O & p_O & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_N & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_N & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_N & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{Nf} & p_{Nf} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
p_{IV} & p_{IV} & p_{IV} & p_{IV} & p_{IV} & p_{IO} & p_{IO} & p_{IO} & p_{IO} & p_{IO} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{IN} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{IN} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{IN} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{INf} & p_{INf}
\end{bmatrix}$$

Ομοίως, p είναι το μέρος των φορολογικών καταλόγων που η κυβέρνηση μπορεί να ελέγχει κάθε χρόνο ανεξάρτητα από την κατάσταση της εταιρείας. $p_V = (p - 0.8p)/4$ είναι η πιθανότητα ενός επαναλαμβανόμενου ελέγχου (δηλ. για το δεύτερο έτος σε σειρά). $p_O = 3[(p/5)/4]$ είναι η πιθανότητα ελέγχου μετά τη χρησιμοποίηση της αμνηστίας. $p_N = (p/5)/4$ είναι η πιθανότητα ενός ελέγχου εάν η επιχείρηση δεν έχει ελεγχθεί για 1-3 χρόνια. $p_{N_f} = (p/5)4$ είναι η πιθανότητα ελέγχου, εάν η επιχείρηση έχει ελεγχθεί για 4 ή περισσότερα έτη (και επομένως ορισμένες από τις φορολογικές της δηλώσεις πρόκειται να περάσουν τα χρόνια της παραγραφής). $p_{IV} = 1 - p_V$, $p_{IO} = 1 - p_O$, $p_{IN} = 1 - p_N$, $p_{INf} = 1 - p_{Nf}$.

Β΄ Παράρτημα

Παράθεση κώδικα

Για την επίλυση και διερεύνηση του προβλήματος χρησιμοποιήθηκε ο κώδικας επίλυσης του αλγορίθμου βασισμένου σε σημεία `Perseus`, ο οποίος είναι διαθέσιμος στο
`http://www.st.ewi.tudelft.nl/mtjspaan/software/approx/`
και η υλοποίηση του είναι στη γλώσσα προγραμματισμού `Matlab` [34]. Ο κώδικας αυτός απαιτεί την προσαρμογή του ώστε να προσαρμοστεί στο μοντέλο που περιγράφηκε στο κεφάλαιο 5.

Αρχικά χρειάστηκε αλλαγή κάποιων παραμέτρων στον ήδη υπάρχων κώδικα. Στο φάκελο `generic`, με τον κώδικα `Perseus` αλλάξαμε τη συνάρτηση `runvi.m` στη σειρά 125, όπου η εντολή `"save(filename,'vi');"` αντικαστάθηκε από την `"save(filename,'vi','-v7.3');"`. Αυτό χρειάστηκε να γίνει λόγω του μεγάλου όγκου δεδομένων που έπρεπε να αποθηκευτεί στο τέλος του αλγορίθμου.

Επίσης, στη συνάρτηση `Samplebeliefs.m` η σειρά 42 αντικαταστάθηκε την εντολή `"if i==lastPrint+300"` αντί της `"if i==lastPrint+1000"`, με σκοπό να επεκταθεί ο αριθμός των βημάτων που απαιτούνται πριν το τέλος του αλγορίθμου.

Για να μπορέσει ο κώδικας να τρέξει για το δικό μας πρόβλημα έπρεπε να χρησιμοποιήσει τις συναρτήσεις του φακέλου `generic` και να θέσουμε τις προϋποθέσεις για το τρέχων πρόβλημα σε ένα άλλο φάκελο (έστω τον φάκελο `tax`) ο οποίος να περιέχει τις επόμενες 3 συναρτήσεις :

1. `getDefaultMaxTime.m` : στην οποία επιτρέπεται να δοθεί το όριο των δευτερολέπτων για το οποίο ο αλγόριθμος θα σταματούσε, αν δεν είχε συγκλίνει ήδη πριν από αυτό. Σε αυτό το πρόβλημα τέθηκαν τα 10000 δευτερόλεπτα.

2. `getDefaultSamplingParam.m` :, όπου τίθενται τα μέγιστα βήματα του αλγορίθμου σε κάθε βήμα. Εδώ κρίθηκε σωστό να γίνουν 300.

3. `initProblem.m` : όπου γίνονται οι κατάλληλες αλλαγές στον κώδικα για να διαβάζει το σωστό αρχείο για αρχικοποίηση καθώς και αλλαγές όπως στη σειρά 30 που χρειάστηκε η προσθήκη +1 στο τέλος της εντολής.

Στη συνάρτηση `initProblem.m` απαιτείται το «διάβασμα» ενός αρχείο το οποίο είναι και εκείνο που περιέχει τις αρχικές πληροφορίες για την έναρξη του αλγορίθμου επίλυσης. Παρακάτω παρατίθενται συναρτήσεις οι οποίες απαιτούνται για τη δημιουργία του αρχικού αυτού αρχείου.

Listing 1: initproblem.m

```
function initProblem
% Problem specific initialization function for every problem.

% Make changes where needed

% The function had changed to fit the problem faced for the
%purposes of this master thesis, named "tax"

% $Id: initProblem.m,v 1.8 2004/09/20 15:04:08 mtjspaan Exp $

clear global pomdp;
global problem;
global pomdp;

% String describing the problem.
problem.description='Tax␣problem';

% String used for creating filenames etc.
problem.unixName='tax';

% Use sparse matrix computation.
problem.useSparse=1;

% Load the (cached) .POMDP, defaults to unixName.POMDP.
initPOMDP('model.POMDP');

% Generic POMDP initialization code. Should be called after
%initPOMDP.
initProblemGeneric;

% This allows us to use the default episodeEnded.m.
problem.goodReward=max(problem.rewards)+1;
```

Listing 2: createPOMDPfile.m

```
function create_POMDP_file(filename)
%This function is being used in order to create the POMDP
% file in a proper format.

% create your POMDP file with the command
% ''create_POMDP_file('***.POMDP')''
% where ***= ( your name of the file )
% for the purposes of this Master thesis use
% ''create_POMDP_file('model.POMDP')''

%%%basic parameters%%%

% discount factor
dis=0.9709;

% belief probabilities
% zo : is the probability of correctly observing a state O_i
% versus N_i.
% zn : is the probability of correctly observing a state N_i
% versus O_i.
zo=0.5;
zn=0.5;

% number of history years
Hsize=5;

%table of powers of 2
pow2=zeros(1,Hsize);
for i=1:Hsize
    pow2(i)=2^(Hsize-i);
end

% number of states
n=(3*Hsize)*(2^Hsize);
%overall audit probability
p=0.05;
% probability of closure option
qp=0.2; % 0.2;


fid=fopen(filename,'w+t');
fprintf(fid,'%s','discount:␣');
fprintf(fid,'%f\n',dis);
```

```
fprintf(fid,'%s\n','values:␣reward');

% the number of states , actions and observations must be given
%at the beginning

%states
fprintf(fid,'%s','states:');
for i=1:n
    j=num2str(i);
    fprintf(fid,'%s','␣s');
    fprintf(fid,'%s',j);
end
fprintf(fid,'\n');

%actions
fprintf(fid,'%s\n','actions:␣a10␣a11␣a20␣a21');

%observations
fprintf(fid,'%s','observations:');
for i=1:n
    j=num2str(i);
    fprintf(fid,'%s','␣o');
    fprintf(fid,'%s',j);
end
fprintf(fid,'\n');
fprintf(fid,'\n');

% initial distribution
fprintf(fid,'%s\n','start:');
fprintf(fid,'%f',1.0000);
fprintf(fid,'%s','␣');
for i=2:n
    fprintf(fid,'%f',0.0000);
    fprintf(fid,'%s','␣');
end
fprintf(fid,'\n');
fprintf(fid,'\n');

% Transition Probabilities
fprintf(fid,'%s\n','#␣Transition␣Probabilities');

w=(3*Hsize)-1;
fprintf(fid,'\n');
fprintf(fid,'%s','T:␣*␣:␣*␣:␣*␣');
fprintf(fid,'%f\n', 0.0);
```

```
for i=1:n
   h=history(i,Hsize);
   q=next_history(h,0,Hsize);
   k = start_point(q,pow2,Hsize);
   c=num2str(i);
   for j=k:k+w
       r=num2str(j);
       t=Prob(c,r,1,p,qp,Hsize);
       if t = 0
        fprintf(fid,'%s','T:␣a10␣:␣s');
        fprintf(fid,'%s',c);
        fprintf(fid,'%s','␣:␣s');
        fprintf(fid,'%s',r);
        fprintf(fid,'%s','␣');
        fprintf(fid,'%f\n',t);
       end
   end
end

fprintf(fid,'\n');
for i=1:n
   h=history(i,Hsize);
   q=next_history(h,1,Hsize);
   k = start_point(q,pow2,Hsize);
   c=num2str(i);
   for j=k:k+w
       r=num2str(j);
       t=Prob(c,r,1,p,qp,Hsize);
       if t = 0
        fprintf(fid,'%s','T:␣a11␣:␣s');
        fprintf(fid,'%s',c);
        fprintf(fid,'%s','␣:␣s');
        fprintf(fid,'%s',r);
        fprintf(fid,'%s','␣');
        fprintf(fid,'%f\n',t);
       end
   end
end

fprintf(fid,'\n');
for i=1:n
   h=history(i,Hsize);
   q=next_history(h,0,Hsize);
   k = start_point(q,pow2,Hsize);
   c=num2str(i);
```

```
    for j=k:k+w
        r=num2str(j);
        t=Prob(c,r,2,p,qp,Hsize);
        if t =0
         fprintf(fid,'%s','T:␣a20␣:␣s');
         fprintf(fid,'%s',c);
         fprintf(fid,'%s','␣:␣s');
         fprintf(fid,'%s',r);
         fprintf(fid,'%s','␣');
         fprintf(fid,'%f\n',t);
        end
    end
end

fprintf(fid,'\n');
for i=1:n
    h=history(i,Hsize);
    q=next_history(h,1,Hsize);
    k = start_point(q,pow2,Hsize);
    c=num2str(i);
    for j=k:k+w
        r=num2str(j);
        t=Prob(c,r,2,p,qp,Hsize);
        if t =0
         fprintf(fid,'%s','T:␣a21␣:␣s');
         fprintf(fid,'%s',c);
         fprintf(fid,'%s','␣:␣s');
         fprintf(fid,'%s',r);
         fprintf(fid,'%s','␣');
         fprintf(fid,'%f\n',t);
        end
    end
end

% Observation probabilities

fprintf(fid,'\n');
fprintf(fid,'%s\n','#␣Observations');
fprintf(fid,'\n');
fprintf(fid,'%s','O:␣*␣:␣*␣:␣*␣');
fprintf(fid,'%f\n', 0.0);
for i=1:n
    c=num2str(i);
    h=history(i,Hsize);
    k=start_point(h,pow2,Hsize);
```

```
    for j=k:k+w
        r=num2str(j);
        t=Obser_Prob(c,r,zo,zn,Hsize);
        if t =0
         fprintf(fid,'%s','O:␣*␣:␣s');
         fprintf(fid,'%s',c);
         fprintf(fid,'%s','␣:␣o');
         fprintf(fid,'%s',r);
         fprintf(fid,'%s','␣');
         fprintf(fid,'%f\n',t);
        end
    end
end

% Rewards

fprintf(fid,'\n');
fprintf(fid,'%s\n','#Rewards');
fprintf(fid,'%s','R␣:␣*␣:␣*␣:␣*␣:␣*␣');
fprintf(fid,'%f\n', 0.0);

fprintf(fid,'\n');
for i=1:n
    c=num2str(i);
    fprintf(fid,'%s','R:␣a10␣:␣s');
    fprintf(fid,'%s',c);
    fprintf(fid,'%s','␣:');
    fprintf(fid,'%s','*␣:␣*␣');
    r=reward(i,0,Hsize);
    fprintf(fid,'%f\n',r);
end
for i=1:n
    c=num2str(i);
    fprintf(fid,'%s','R:␣a11␣:␣s');
    fprintf(fid,'%s',c);
    fprintf(fid,'%s','␣:');
    fprintf(fid,'%s','*␣:␣*␣');
    r=reward(i,1,Hsize);
    fprintf(fid,'%f\n',r);
end

for i=1:n
    c=num2str(i);
    fprintf(fid,'%s','R:␣a20␣:␣s');
    fprintf(fid,'%s',c);
```

```
    fprintf(fid,'%s',' :');
    fprintf(fid,'%s','* : * ');
    r=reward(i,0,Hsize);
    fprintf(fid,'%f\n',r);
end

for i=1:n
    c=num2str(i);
    fprintf(fid,'%s','R: a21 : s');
    fprintf(fid,'%s',c);
    fprintf(fid,'%s',' :');
    fprintf(fid,'%s','* : * ');
    r=reward(i,1,Hsize);
    fprintf(fid,'%f\n',r);
end

fclose(fid);


end
```

Listing 3: Prob.m

```
% This function helps to get the proper transition probabilities
% INPUT -> s1: the next state in [1,n] , where n the number of
%           all states
%           s2 : the current state in [1,n] , where n the number
%           of all states
%           a : the action one of a10,a11,a20 or a21
%           p: overall audit probability
%           q: probability of closure option
%           Hsize : number of history years
% OUTPUT -> g : the proper number from the transition matrix
% Prob(s1,s2,a)=P(s2|s1,a)
% basic case for Hsize= 5 years is n=480

function g=Prob(s1,s2,a,p,q,Hsize)

if q==1
   P1=MatriceP1Q1(p,q,Hsize);
   P2=MatriceP2Q1(p,Hsize);
else
   P1=MatriceP1(p,q,Hsize);
   P2=MatriceP2(p,Hsize);
end

i=convert(s1,Hsize);
j=convert(s2,Hsize);


if a==1
    g=P1(j,i);
else
    g=P2(j,i);
end

end
```

Listing 4: MatriceP1.m

```
% This function creates an array of probabilities (Transition
% Probabilities:the firm decides to use the closure option)
% INPUTS -> p: overall audit probability
%           q: probability of closure option
%           Hsize : number of history years
% OUTPUT -> M : array of transition probabilities for the case
%           where the firm decides to use the closure option

function M = MatriceP1(p,q, Hsize)

pv=(p-0.8*p)/(Hsize-1);
po=(p/Hsize)/(Hsize-1);
pn=(p/Hsize)/(Hsize-1);
pnend=(p/Hsize)*(Hsize-1);


M=zeros(3*Hsize,3*Hsize);

% first row
for i=1:Hsize
   M(1,i)=pv;
end

startloop=Hsize+1;
endloop=(2*Hsize)-1;
for i=startloop:endloop
   M(1,i)=po;
end
M(1,2*Hsize)=po;

for i=(2*Hsize)+1:3*Hsize
    M(1,i)=0.0;
end

%next rows until Hsize
kstart=0;
for j=2:Hsize-1
   knext=2*Hsize+1+kstart;
   M(j,knext)=pn;
   for i=knext+1:(3*Hsize)-1
       M(j,i)=0.0;
   end
   kstart=kstart+1;
```

```
end
M(Hsize,(3*Hsize)-1)=pnend;
M(Hsize,3*Hsize)=pnend;

% row Hsize+1
for i=1:2*Hsize
    M(Hsize+1,i)=q;
end

for i=(2*Hsize)+1:3*Hsize
    M(Hsize+1,i)=0.0;
end
kstart=0;
for j=Hsize+2:(2*Hsize)-1
   knext=2*Hsize+1+kstart;
   M(j,knext)=q;
   for i=knext+1:(3*Hsize)-1
       M(j,i)=0.0;
   end
   kstart=kstart+1;
end
M(2*Hsize,(3*Hsize-1))=q;
M(2*Hsize,3*Hsize)=q;

%next rows until 2*Hsize
for i=1:Hsize
    M((2*Hsize)+1,i)=1-q-pv;
end
for i=Hsize+1:(2*Hsize)-1
    M((2*Hsize)+1,i)=1-q-po;
end
M((2*Hsize)+1,2*Hsize)=1-q-po;
for i=(2*Hsize)+1:3*Hsize
    M((2*Hsize)+1,i)=0.0;
end

kstart=0;
for j=(2*Hsize)+2:(3*Hsize)-1
   knext=2*Hsize+1+kstart;
   M(j,knext)=1-q-pn;
   for i=knext+1:(3*Hsize)-1
       M(j,i)=0.0;
   end
   kstart=kstart+1;
end
```

```
M(3*Hsize,(3*Hsize-1))=1-q-pnend;
M(3*Hsize,3*Hsize)=1-q-pnend;


end
```

Listing 5: MatriceP1Q1.m

```
% This function creates an array of probabilities (Transition
% Probabilities:the firm decides to use the closure option)
% This function is used only for the case where the probability
% of closure option (q) is equal to 1.
% INPUTS -> p: overall audit probability
%           q: probability of closure option (q=1 always)
%           Hsize : number of history years
% OUTPUT -> M : array of transition probabilities for the case
%           where the firm decides to use the closure option



function M = MatriceP1Q1(p,q, Hsize)

pv=(p-0.8*p)/(Hsize-1);
po=(p/Hsize)/(Hsize-1);
poend=(p/Hsize)*(Hsize-1);
pn=0.0;
pnend=0.0;


M=zeros(3*Hsize,3*Hsize);

% first row
for i=1:Hsize
   M(1,i)=pv;
end

startloop=Hsize+1;
endloop=(2*Hsize)-1;
for i=startloop:endloop
   M(1,i)=po;
end
M(1,2*Hsize)=poend;

for i=(2*Hsize)+1:3*Hsize
    M(1,i)=0.0;
end

%next rows until Hsize
kstart=0;
for j=2:Hsize-1
   knext=2*Hsize+1+kstart;
```

```
   M(j,knext)=pn;
   for i=knext+1:(3*Hsize)-1
       M(j,i)=0.0;
   end
   kstart=kstart+1;
end
M(Hsize,(3*Hsize)-1)=pn;
M(Hsize,3*Hsize)=pnend;

% row Hsize+1
for i=1:2*Hsize-1
    M(Hsize+1,i)=1-pv;
end
M(Hsize+1,2*Hsize)=1-poend;
for i=(2*Hsize)+1:3*Hsize
    M(Hsize+1,i)=0.0;
end
kstart=0;
for j=Hsize+2:(2*Hsize)-1
   knext=2*Hsize+1+kstart;
   M(j,knext)=q;
   for i=knext+1:(3*Hsize)-1
       M(j,i)=0.0;
   end
   kstart=kstart+1;
end
M(2*Hsize,(3*Hsize-1))=q;
M(2*Hsize,3*Hsize)=q;

%next rows until 2*Hsize
for i=1:Hsize
    %M((2*Hsize)+1,i)=1-q-pv;
    M((2*Hsize)+1,i)=0.0;
end
for i=Hsize+1:(2*Hsize)-1
    M((2*Hsize)+1,i)=0.0;
end
M((2*Hsize)+1,2*Hsize)=0.0;
for i=(2*Hsize)+1:3*Hsize
    M((2*Hsize)+1,i)=0.0;
end

kstart=0;
for j=(2*Hsize)+2:(3*Hsize)-1
   knext=2*Hsize+1+kstart;
```

```
   M(j,knext)=0.0;
   for i=knext+1:(3*Hsize)-1
       M(j,i)=0.0;
   end
   kstart=kstart+1;
end

M(3*Hsize,(3*Hsize-1))=0.0;
M(3*Hsize,3*Hsize)=0.0;

end
```

Listing 6: MatriceP2.m

```
% This function creates an array of probabilities (Transition
% Probabilities:the firm decides not to use the closure option)
% INPUTS -> p: overall audit probability
%           q: probability of closure option
%           Hsize : number of history years
% OUTPUT -> M : array of transition probabilities for the case
%           where the firm decides not to use the closure option


function M = MatriceP2(p,Hsize)

pv=(p-0.8*p)/(Hsize-1);

pn=(p/Hsize)/(Hsize-1);
pnend=(p/Hsize)*(Hsize-1);
p3=3*(p/Hsize)/(Hsize-1);

M=zeros(3*Hsize,3*Hsize);

% first row
for i=1:Hsize
   M(1,i)=pv;
end

startloop=Hsize+1;
endloop=(2*Hsize)-1;
for i=startloop:endloop
   M(1,i)=p3;
end
M(1,2*Hsize)=p3;

for i=(2*Hsize)+1:3*Hsize
    M(1,i)=0.0;
end

%next rows until Hsize
kstart=0;
for j=2:Hsize-1
   knext=2*Hsize+1+kstart;
   M(j,knext)=pn;
   for i=knext+1:(3*Hsize)-1
       M(j,i)=0.0;
   end
```

```
   kstart=kstart+1;
end
M(Hsize,(3*Hsize)-1)=pnend;
M(Hsize,3*Hsize)=pnend;

%row Hsize+1
for i=1:3*Hsize
   M(Hsize+1,i)=0.0;
end

% row Hsize+2
kstart=0;
for j=Hsize+2:(2*Hsize)-1
   knext=Hsize+1+kstart;
   M(j,knext)=0.0;
   for i=knext+1:(3*Hsize)-1
       M(j,i)=0.0;
   end
   kstart=kstart+1;
end
M(2*Hsize,(2*Hsize-1))=0.0;
M(2*Hsize,2*Hsize)=0.0;

%next rows until 2*Hsize
for i=1:Hsize
    M((2*Hsize)+1,i)=1-pv;
end
for i=Hsize+1:(2*Hsize)-1
    M((2*Hsize)+1,i)=1-p3;
end
M((2*Hsize)+1,2*Hsize)=1-p3;
for i=(2*Hsize)+1:3*Hsize
    M((2*Hsize)+1,i)=0.0;
end

kstart=0;
for j=(2*Hsize)+2:(3*Hsize)-1
   knext=2*Hsize+1+kstart;
   M(j,knext)=1-pn;
   for i=knext+1:(3*Hsize)-1
       M(j,i)=0.0;
   end
   kstart=kstart+1;
end
M(3*Hsize,(3*Hsize-1))=1-pnend;
```

```
M(3*Hsize,3*Hsize)=1-pnend;

end
```

Listing 7: MatriceP2Q1.m

```
% This function creates an array of probabilities (Transition
% Probabilities:the firm decides not to use the closure option)
% This function is used only for the case where the probability
% of closure option (q) is equal to 1.
% INPUTS -> p: overall audit probability
%           Hsize : number of history years
% OUTPUT -> M : array of transition probabilities for the case
%           where the firm decides not to use the closure option


function M = MatriceP2Q1(p,Hsize)


pv=1;
pn=0.0;
pnend=0.0;
p3=3*(p/Hsize)/(Hsize-1);
p3end=(p3/Hsize)*(Hsize-1);

M=zeros(3*Hsize,3*Hsize);

% first row
for i=1:Hsize
   M(1,i)=pv;
end

startloop=Hsize+1;
endloop=(2*Hsize)-1;
for i=startloop:endloop
   M(1,i)=p3;
end
M(1,2*Hsize)=p3end;

for i=(2*Hsize)+1:3*Hsize
    M(1,i)=0.0;
end

%next rows until Hsize
kstart=0;
for j=2:Hsize-1
   knext=2*Hsize+1+kstart;
   M(j,knext)=pn;
   for i=knext+1:(3*Hsize)-1
```

```
        M(j,i)=0.0;
    end
    kstart=kstart+1;
end
M(Hsize,(3*Hsize)-1)=pn;
M(Hsize,3*Hsize)=pnend;

%row Hsize+1
for i=1:3*Hsize
    M(Hsize+1,i)=0.0;
end

% row Hsize+2
kstart=0;
for j=Hsize+2:(2*Hsize)-1
    knext=Hsize+1+kstart;
    M(j,knext)=1-p3;
    for i=knext+1:(3*Hsize)-1
        M(j,i)=0.0;
    end
    kstart=kstart+1;
end
M(2*Hsize,(2*Hsize-1))=1-p3;
M(2*Hsize,2*Hsize)=1-p3end;

%next rows until 2*Hsize
for i=1:Hsize
     M((2*Hsize)+1,i)=0.0;
end

for i=Hsize+1:(2*Hsize)-1
     M((2*Hsize)+1,i)=0.0;
end

M((2*Hsize)+1,2*Hsize)=0.0;
for i=(2*Hsize)+1:3*Hsize
     M((2*Hsize)+1,i)=0.0;
end

kstart=0;
for j=(2*Hsize)+2:(3*Hsize)-1
    knext=2*Hsize+1+kstart;
    M(j,knext)=0.0;
    for i=knext+1:(3*Hsize)-1
        M(j,i)=0.0;
```

```
   end
   kstart=kstart+1;
end

M(3*Hsize,(3*Hsize-1))=0.0;
M(3*Hsize,3*Hsize)=0.0;

end
```

Listing 8: ObserProb.m

```
% This function helps to get the proper observation probabilities

%INPUTS -> s: the current state in [1,n] ,where n the number of
% all states
%          o : observation [1,n] ,where n the number of all states
%          zo : is the probability of correctly observing a state
%          O_i versus N_i.
%          zn : is the probability of correctly observing a state
%          N_i versus O_i.
%          Hsize : number of history years
% OUTPUT -> g : the proper number from the observation matrix

function g = Obser_Prob(s,o,zo,zn,Hsize)

P=MatriceOb(zo,zn,Hsize);

i=convert(s,Hsize);
j=convert(o,Hsize);

g=P(i,j);


end
```

Listing 9: MatriceOb.m

```
% This function creates an array of probabilities (Observation
% Probabilities )
% INPUTS -> zo : is the probability of correctly observing a
%           state O_i versus N_i.
%           zn : is the probability of correctly observing a
%           state N_i versus O_i.
%           Hsize : number of history years
% OUTPUT -> M : array of observation probabilities


function M = MatriceOb(zo,zn,Hsize)
M=zeros(3*Hsize,3*Hsize);


for i=1:Hsize
   M(i,i)=1.0000;
end

kstart=0;
for j=Hsize+1:2*Hsize
   knext=Hsize+kstart+1;
   M(j,knext)=zo;
   knext2=2*Hsize+kstart+1;
   M(j,knext2)=1-zo;
   kstart=kstart+1;
end

kstart=0;
for j=2*Hsize+1:3*Hsize
   knext=Hsize+kstart+1;
   M(j,knext)=1-zn;
   knext2=2*Hsize+kstart+1;
   M(j,knext2)=zn;
   kstart=kstart+1;
end


end
```

Listing 10: reward.m

```
% This function returns the proper reward, given the state and
% the current action
% INPUT -> s : current state in [1,n] , where n the number of
%          all states
%          a : current action one of a10,a11,a20 or a21
%          Hsize : number of history years
% OUTPUT -> g : reward


function g = reward(s,a,Hsize)

% tax rate
r=0.24;

% cost of closure
l=0.023;

% annual penalty rate
b1=0.24;
b=(3/5)*b1;

% firm's annual profit
V=100;


% in case the firm made the action a=(1,0) or a=(2,0)
if a==0
    s2=num2str(s);
    s1=convert(s2,Hsize);
    if s1<Hsize+1
        h=history(s,Hsize);
        sh=0;
        sih=0;
        for i=1:s1
            sh=sh+h(length(h)-i+1);
            sih=sih+i*h(length(h)-i+1);
        end
        g=1-r+r*0-r*sh-b*r*sih;

    elseif s1<2*Hsize+1
        g=1-r+r*0-l*(s1-Hsize);

    else
```

```
        g=1-r+r*0;
    end
% in case the firm made the action a=(1,1) or a=(2,1)
else
    s2=num2str(s);
    s1=convert(s2,Hsize);
    if s1<Hsize+1
        h=history(s,Hsize);
        sh=0;
        sih=0;
        for i=1:s1
            sh=sh+h(length(h)-i+1);
            sih=sih+i*h(length(h)-i+1);
        end
        g=1-r+r*1-r*sh-b*r*sih;

    elseif s1<2*Hsize+1
        g=1-r+r*1-l*(s1-Hsize);

    else
        g=1-r+r*1;
    end

end
g=V*g;

end
```

Listing 11: convert.m

```
% This function converts a state into the number of basic states
% INPUTS -> s : state in [1,n], where n the number of all states
%           Hsize : number of history years
% OUTPUT -> t : the state after the alternation, in [1,3*Hsize]

% basic case for Hsize= 5 years is n=480 and t in [1,15]

function t=convert(s,Hsize)

str=s;
s=str2double(str);
d=3*Hsize;
t=mod(s,d);
if t==0
    t=d;
end

end
```

Listing 12: history.m

```
% This function generates the proper history given the current
% state
% INPUTS ->  s: current state in [1,n] ,where n the number of
%            all states
%            Hsize : number of history years
% OUTPUT -> history of that state

% basic case for Hsize= 5 years is n=480


function h=history(s,Hsize)

d=3*Hsize;
if mod(s,15)==0
    k=s/d;
    i=fix(k);
else
    k=s/d;
    i=fix(k)+1;
end
hs=mod(i-1,2^Hsize);
hs=dec2bin(hs,Hsize);
h=zeros(Hsize,1);
for j=1:Hsize
    h(j)=str2num(hs(j));
end
```

Listing 13: nexthistory.m

```
% This function generates the history after the desicion is made
% INPUT -> h : the current history. A vector of 5 elements of 0
%          or 1 number-decision
%          u : the next decision
%          Hsize : number of history years
% OUTPUT -> q : the next history.A vector of Hsize-elements of 0
%           or 1 number-decision


function q = next_history(h,u,Hsize)

for j=1:Hsize-1
    k=j+1;
    q(j,:)=h(k);
end

q(Hsize)=u;


end
```

Listing 14: startpoint.m

```
% This function converts the history of a state in the
% proper group of 3*Hsise numbers
% INPUTS -> h : history of the last-Hsise tax-years desicions
%           pow2 : table of powers of 2
%           Hsize : number of history years
% OUTPUT -> k : the first number of the 3*Hsize-numbers group
% EXAMPLE : For Hsize=5 years
%           1st group -> k=1
%           2nd group -> k=16
%           3rd group -> k=31
%      ......................

function k = start_point(h,pow2,Hsize)

d=3*Hsize;
k=pow2(Hsize-length(h)+1:length(pow2))*h;
k=k*d+1;
end
```

Για τη δημιουργία των διαγραμμάτων τιμιότητας χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος της διχοτόμησης, κατά την οποία ξεκινώντας με μία μέγιστη και ελάχιστη τιμή για τη τιμή b και λαμβάνοντας το μέσο όρο της, ελέγχαμε αν η εταιρεία θα είναι τίμια ως προς το κράτος. Αν ναι θέταμε αυτή τη τιμή ως τη μέγιστη τιμή του b (bup) αλλιώς αυτή η τιμή γινόταν η ελάχιστη τιμή (blow). Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία μέχρι η διαφορά του bup και blow να είναι αρκετά μικρή. Η διαδικασία αυτή γίνεται για διάφορες τιμές της πιθανότητας να ελεγχθεί η επιχείρηση : paudit και η υλοποίηση της φαίνεται στη συνάρτηση ScoreBvsPvalueiteration.m.

Για τη ταχύτερη και αποτελεσματική διερεύνηση αυτών των συνθηκών δε χρειάζεται παρά μόνο η δημιουργία των κατάλληλων πινάκων μετάβασης (createMatrices.m), για να χρησιμοποιηθούν για τη Value iteration συνάρτηση (NEWVALUE.m). Η δημιουργία των πινάκων γίνεται για όσα χρόνια επιλεγούν. Για τους σκοπούς αυτής της έρευνας, έγινε σύγκριση της συμπεριφοράς της εταιρείας από 5 μέχρι 10 χρόνια.

Listing 15: ScoreBvsPvalueiteration.m

```
% This code generates the threshold values, above which the
% firm become honest
% These values used in case to generate the proper diagram

% initialization
DSSStochUpperBoundU=[];  % table of results

paudit=0.04; % %overall audit probability
Hsize=5; % number of history years
bmidsave=30; % upper bound of annual penalty rate

while paudit<=0.21;
bup=bmidsave;
blow=1;

S=create_Matrices(paudit,Hsize);

%test if bup is high enough to enforce honesty
[U,A]=NEW_VALUE(paudit,bup,S,Hsize);
if (sum(U)>0) %some states use u=1 ! bup is too low
    fprintf('Bup is not high enough to enforce honesty. Exiting\n');
    return;
else
    fprintf('Bup OK-proceeding\n');
end

while (abs(bup)-abs(blow)>=0.05)
    bmid=(bup+blow)/2;
    disp('*************')
    disp('paudit:')
```

```
    disp(paudit)
    disp('difference:')
    disp(abs(bup)-abs(blow))
    disp('bmid:')
    disp(bmid)
    disp('**************')
    b=bmid;

    [U,A]=NEW_VALUE(paudit,b,S,Hsize);

    if sum(U)==0  %sum(v==0)==0
        evade=0;
    else
        evade=1;
    end


    if (evade==0)
        bup=bmid;
    else
        blow=bmid;
    end

    disp('bup␣:␣');
    disp(bup);
    disp('blow␣:␣');
    disp(blow);

    bmidsave=bmid;
end
    DSSStochUpperBoundU=[DSSStochUpperBoundU;bmid,paudit];
    paudit=paudit+0.01;
    DSSStochUpperBoundUv2=DSSStochUpperBoundU;
    save('DSSNeverUpperBoundU_BvsP_h5_q02.mat','DSSStochUpperBoundUv2');
    % change properly the name for every diagram
end
```

Listing 16: createMatrices.m

```
% This function generates 4 matrices which contain only the
% transition probabilities
% INPUT -> p : overall audit probability
%                   Hsize : number of history years
% OUTPUT -> S : Matrices

function  S=create_Matrices(p,Hsize)
%global S1 S2 S3 S4

% belief probability
z=1.0000;


%table of powers of 2
pow2=zeros(1,Hsize);
for i=1:Hsize
    pow2(i)=2^(Hsize-i);
end

% number of states
n=(3*Hsize)*(2^Hsize);

% probability of closure option
qp=1/Hsize;
% qp=1 where there is always given the closure option





A=[];
B=[];
T=[];
w=(3*Hsize)-1;

x=1;
for i=1:n
   h=history(i,Hsize);
   q=next_history(i,h,0,Hsize);
   k = start_point(q,pow2,Hsize);
   c=num2str(i);
   for j=k:k+w
       r=num2str(j);
       t=Prob(c,r,1,p,qp,Hsize);
```

```
        if t =0
         s2=str2num(r);
         A(x)=s2;
         s1=str2num(c);
         B(x)=s1;
         T(x)=t;
         x=x+1;
        end
    end
end

S{1}= sparse(A,B,T,n,n);


A=[];
B=[];
T=[];
x=1;
for i=1:n
    h=history(i,Hsize);
    q=next_history(i,h,1,Hsize);
    k = start_point(q,pow2,Hsize);
    c=num2str(i);
    for j=k:k+w
        r=num2str(j);
        t=Prob(c,r,1,p,qp,Hsize);
        if t =0
         s2=str2num(r);
         A(x)=s2;
         s1=str2num(c);
         B(x)=s1;
         T(x)=t;
         x=x+1;
        end
    end
end
S{2}= sparse(A,B,T,n,n);


A=[];
B=[];
T=[];
x=1;
for i=1:n
    h=history(i,Hsize);
```

```
    q=next_history(i,h,0,Hsize);
    k = start_point(q,pow2,Hsize);
    c=num2str(i);
    for j=k:k+w
        r=num2str(j);
        t=Prob(c,r,2,p,qp,Hsize);
        if t =0
         s2=str2num(r);
         A(x)=s2;
         s1=str2num(c);
         B(x)=s1;
         T(x)=t;
         x=x+1;
        end
    end
end
S{3}= sparse(A,B,T,n,n);


A=[];
B=[];
T=[];
x=1;
for i=1:n
    h=history(i,Hsize);
    q=next_history(i,h,1,Hsize);
    k = start_point(q,pow2,Hsize);
    c=num2str(i);
    for j=k:k+w
        r=num2str(j);
        t=Prob(c,r,2,p,qp,Hsize);
        if t =0
         s2=str2num(r);
         A(x)=s2;
         s1=str2num(c);
         B(x)=s1;
         T(x)=t;
         x=x+1;
        end
    end
end
S{4}= sparse(A,B,T,n,n);


end
```

Listing 17: NEWVALUE.m

```
% code for Value iteration
% This function generates the values of a=(v,u) action and value
% where there was value iteration
% INPUT -> paudit : overall audit probability
%                  b : annual penalty rate
%                  S : Matrices of transition probabilities
%                  Hsize : number of history years
% OUTPUT->U : Matrice with the u action/decision in each
%           iteration  ( u decision = declare or not all profits)
%          A : Matrice with the v action/decision in each
%           iteration ( v decision = take or not the closure option)

function [U,A,V]=NEW_VALUE(paudit,b,S,Hsize)

dis=0.9709;
eps=0.5; %convergence threshold

n=(3*Hsize)*(2^Hsize);

R=zeros(n,4);


%prepare R - reward (SxA) matrix
for i=1:n
    for a=1:4
        if a==1 | a==3 %u=0
            R(i,a)=reward(i,0,Hsize,b);
        else
            R(i,a)=reward(i,1,Hsize,b);
        end
    end
end
disp('Reward␣matrix␣created');

V=max(R,[],2);

done=0;

while  done
   Vold=V;

   for a=1:4
       Q(:,a) = R(:,a) + dis*S{a}'*Vold;
```

```
    end

    [V, policy] = max(Q,[],2);

    thresh=max(abs(V-Vold))
    if thresh<eps
        done=1;
    end

    A1=(policy<3);
    A2=(policy>2)*2;
    A=A1+A2;

    U1=rem(policy,2);
    U2=abs(U1-1)*2;

    U=(U1+U2)-1;

end
```

Βιβλιογραφία

[1] Allingham, P. and Sandmo, H.: Income tax evasion: a theoretical analysis. Journal of Public Economics Vol.1, Issue 6, pp. 988-1001 (1972).

[2] Alm, J. and Beck, W.: Tax amnesties and tax revenues. Pub. Fin. Rev. Vol.18, Issue 4, pp.433-453 (1990).

[3] Alm, J. and Rath, D.M.: Tax policy analysis: the introduction of a Russian Tax Amnesty. Technical Report, Georgia State University, Andrew Young School of Policy Studies (1998).

[4] Baldry, J.C.: Tax evasion and labour supply. Economic Letters, ISSN: 0165-1765 Vol.3, Issue 1, pp.53-56 (1979).

[5] Bloomquist, K.M. and Koehler, M.: A Large-Scale Agent-Based Model of Taxpayer Reporting Compliance. Journal of Artificial Societies and Social Simulation 18 (2) 20 (2015).

[6] Braziunas, D.: POMDP solution methods, Department of Computer Science, University of Toronto (2003).

[7] Chari, V.V., Nicolini, J. P. and Teles, P., Optimal Capital Taxation, University of Minnesota and Federal Reserve Bank of Minneapolis, Federal Reserve Bank of Minneapolis- Universidad Di Tella, Universidad Autonoma de Barcelona, Banco de Portugal, Catolica Lisbon SBE, CEPR (2016).

[8] Cheng, H. T. Algorithms for partially observable Markov decision processes. Ph.D.thesis, University of British Columbia (1988).

[9] Das-Gupta, A. and Mookherjee D.: Tax amnesties in India: an empirical evaluation. Boston University, Institute for Economic Development Vol. 23, Issue 12, pp. 2051-2064 (1995).

[10] Dutech, A. and Scherrer, B., Partially Observable Markov Decision Processes, Wiley & Sons Inc (2013).

[11] Garrido, N. and Mittone, L., Tax evasion behavior using finite automata: Experiments in Chile and Italy. Expert Systems with Applications, Vol.39, Issue 5, pp. 5584-4492 (2012).

[12] Gao, S. and Xu, D., Conceptual modeling and development of an intelligent agent-assisted decision support system for anti-money laundering: Expert Systems with Applications, Vol.36, Issue 2, pp. 1493–1504 (2009).

[13] Goumagias, N.D., Hristu-Varsakelis, D. and Saraidaris,A.: A Decision Support Model for a Tax Revenue Collection in Greece. Decision Support Systems Vol. 53, Issue 1, pp. 76–96 (2012).

[14] Goumagias, N.D., Hristu-Varsakelis, D. and Assael, J.: Using deep Q-learning to understand the tax evasion behavior of risk-averse firms. Expert Systems with Applications, to appear, (2018).

[15] Greek Ministry of Finance, Law N.3259/2004 (pol.1034/2005) (in Greek) (2004).

[16] Greek Ministry of Finance, Law N.3697/2008 (pol.1130/2008) (in Greek) (2008).

[17] Greek Ministry of Finance, Law N.4337/2015 (pol.4337/2015) (in Greek) (2015).

[18] Kaplow, R.: Point-based pomdp solvers: Survey and comparative analysis. Master's thesis, McGill University (2010).

[19] Krishnamurthy, V.: Partially Observed Markov Decision Processes: From Filtering to Controlled Sensing. Cambridge University Press (2016).

[20] Kydland, F.E. and Prescott, E.C.: Dynamic optimal taxation, rational expectations and optimal control. Journal of Economic Dynamics and Control Vol. 2, Issue 1, pp. 79-91 (1980).

[21] Levagi, R. and Menoncin, F.: Optimal dynamic tax evasion: a portfolio approach, University of Brescia, Department of Economics, Vol.37, Issue 11, pp. 2157-2167 (2011).

[22] M. L. Littman, A. R. Cassandra, and L. P. Kaelbling. Learning policies for partially obsevable environments: Scaling up. In ICML (1995).

[23] Liu, A.A.: Tax Evasion and Optimal Environmental Taxes. Journal of Environmental Economics and Management Vol.66, Issue 3, pp.656{670 (2013).

[24] Martinez-Vazquez, J. and Rider, M.: Multiple modes of tax evasion: theory and evidence, National Tax Journal, pp. 51–76 (2005).

[25] Pineau,J., Gordon, G. and Thrun, S.: Point-based value iteration: An anytime algorithm for POMDPs. In Proc. Int. Joint Conf. on Articial Intelligence, Acapulco, Mexico (2003).

[26] Pineau, J., Gordon, G. and Thrun, S.: Anytime point-based approximations for large POMDPs. Journal of Artificial Intelligence Research (JAIR) 27, pp.335-380 (2006).

[27] Poon, K. M. A fast heuristic algorithm for decision-theoretic planning. Master's thesis, The Hong-Kong University of Science and Technology (2001).

[28] Poupart, P.: Exploiting structure to efficiently solve large scale partially observable Markov decision processes. PhD thesis, Department of Computer Science, University of Toronto (2005).

[29] Ross, J. M. and Buckwalter, N. D.: Strategic Tax Planning for State Tax Amnesties Evidence from Eligibility Period Restrictions. Public Finance Review Vol.4, Issue 3, pp.275-301 (2013).

[30] Roy, N. and Gordon, G. Exponential family PCA for belief compression in POMDPs. In Advances in Neural Information Processing Systems 15, Cambridge, MA. MIT Press (2003).

[31] Shani, G., Pineau, J. and Kaplow, R.: A survey of point-based POMDP solvers, Auton. Agent Multi-Agent Syst. Vol.27, Issue 1, pp. 1{51 (2012).

[32] Sondik, E. J.: The optimal control of partially observable Markov decision processes. PhD thesis, Stanford University (1971).

[33] Sondik, E.J. , The optimal control of partially observable Markov processes over the infinite horizon: discounted case, Oper. Res. Vol.26, pp. 282-304 (1978).

[34] Spaan, M. T.. J.: POMDP solving software - Perseus randomized point-based algorithm. Universiteit van Amsterdam (2004).

[35] Spaan, M. T. J. and Vlassis, N.: Perseus: randomized point-based value iteration for POMDPs. Intelligence Autonomous Systems (2004).

[36] Monahan, G. E. A survey of partially observable Markov decision processes: theory, models and algorithms. Management Science, Vol 28, Issue 1, (1982).

[37] Tatsos N.: Economic fraud and tax evasion in Greece (in Greek), Papazisis Publishings (2001).

[38] Vasin, A. and Vasina, P.: Tax Optimization under tax evasion, the role of penalty constraints. Economics Education and Research Consortium 1, pp.1-44 (2009).

[39] Vlassis, N. and Spaan, M. T. J.: A fast point-based algorithm for POMDPs. In Benelearn 2004: Proc. Annual Machine Learning Conf. of Belgium and the Netherlands, pp. 170-176, (2004) (Also presented at the NIPS 16 workshop 'Planning for the Real-World', Whistler, Canada, Dec. 2003).

[40] Yitzhaki, S.: Income tax evasion: A theoretical analysis. Journal of Public Economics Vol.3, Issue 2, pp.201-202 (1974).

[41] Zhang, N. L. and Zhang, W. Speeding up the convergence of value iteration in partially observable Markov decision processes. Journal of Artificial Intelligence Research, Issue 14 pp.29{51 (2001).