ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

Δήμος Λούκας

ΠΟΛΥΚΡΙΤΗΡΙΑ ΥΠΟΣΤΗΡΙΞΗ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ ΜΕ ΤΗΝ ΒΟΗΘΕΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΤΩΝ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΩΝ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ
ΠΟΥ ΥΠΟΒΛΗΘΗΚΕ ΣΤΟ ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗΣ
ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΤΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ 2004

Ευχαριστίες

Παρουσιάζοντας το τελικό κείμενο, θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους όσους συνέβαλλαν στην πραγματοποίηση του.

Ευχαριστώ ολόψυχα τον επιβλέποντα καθηγητή κ. Γιάννη Παπαδημητρίου, χωρίς την βοήθεια του οποίου δεν θα υπήρχε η παρούσα διατριβή. Εκφράζω την ευγνωμοσύνη μου, τόσο για την επιστημονική του καθοδήγηση όσο και για την ανθρώπινη βοήθεια του, που μου παρείχε αφειδώς σε όλη την διαδικασία για την εκπόνιση της διατριβής μου.

Επίσης ευχαριστώ θερμά, τα άλλα δύο μέλη της τριμελούς συμβουλευτικής επιτροπής, τον επίκουρο καθηγητή κ. Αδαμάντιο Χαρίτου και την επίκουρο καθηγήτρια κ. Άννα Νικολάου του Πανεπιστημίου Μακεδονίας, καθώς και τον αναπληρωτή καθηγητή κ. Νίκο Ματσατσίνη του Πολυτεχνείου Κρήτης για την πολύτιμη βοήθεια τους σε όλα τα στάδια της έρευνας. Ευχαριστώ επίσης, και τον καθηγητή κ. Χρόνη Μωυσιάδη του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου για τις χρήσιμες υποδείξεις του, κατά το τελικό στάδιο της διατριβής.

Οφείλω επίσης να ευχαριστήσω τους φίλους και συνεργάτες του τμήματος Εφαρμοσμένης Πληροφορικής καθώς και το προσωπικό μου περιβάλλον, για κάθε υλική και ηθική βοήθεια που μου προσέφεραν.

Τέλος, εκφράζω τις ευχαριστίες μου στα μέλη της επταμελούς εξεταστικής επιτροπής για τον χρόνο που αφιέρωσαν στην μελέτη και κριτική της διατριβής.

Στους γονείς μου
Γιάννη και Παρασκευή

Omne superius sicut inferius

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

1. Η Πολυκριτήρια προσέγγιση του προβλήματος απόφασης 14
2. Ανάλυση δεδομένων 17
3. Αντικείμενο της έρευνας 19
4. Διάρθρωση διατριβής 21

Κεφάλαιο 1: Οι μέθοδοι της Παραγοντικής ανάλυσης

1.0. Εισαγωγή στην Ανάλυση δεδομένων και στις μεθόδους της Παραγοντικής ανάλυσης 24
1.1. Γενική ανάλυση 25
1.2. Πίνακας δεδομένων και οι διανυσματικές αναπαραστάσεις του 26
- 1.2.1. Αναπαράσταση των αντικειμένων και των μεταβλητών στους χώρους $\Re^m$ και $\Re^q$ 27
- 1.2.2. Αναπαράσταση των αντικειμένων και των μεταβλητών στους χώρους $\Re^{m*}$ και $\Re^{q*}$ 28
- 1.2.3. Σχέσεις μεταξύ των χώρων 28

1.3. Νέφος σημείων 30
1.4. Κέντρο βαρύτητας του νέφους – Αδράνεια και πίνακας της αδράνειας 30
1.5. Αναπαράσταση του νέφους σε υπόχωρο μικρότερης διάστασης 31
1.6. Παραγοντικοί άξονες – Παραγοντικά επίπεδα 34
1.7. Παράγοντες – Κύριες συνιστώσες 36
1.8. Παραγοντική ανάλυση και Ταξινόμηση 37

Κεφάλαιο 2: Παραγοντική ανάλυση των αντιστοιχιών

2.0. Εισαγωγή 41
2.1. Πίνακες συχνοτήτων 43
2.2. Χώροι και νόμοι πιθανότητας στην Παραγοντική ανάλυση των Αντιστοιχιών 46
2.3. Χώροι και σχέσεις μεταξύ των χώρων στην Παραγοντική ανάλυση των αντιστοιχιών 48
2.4. Νέφη σημείων – Κέντρα βαρύτητας των νεφών 51
2.5. Αποστάσεις σημείων γραμμών και σημείων στηλών 52
2.6. Χώρος simplex των νόμων πιθανότητας 53
2.7. Απόσταση του X^2 μεταξύ των νόμων πιθανότητας 55
2.8. Σύνδεση μεταβλητών – Κριτήρια του Pearson 57
2.9. Αδράνεια νέφους 59
2.10. Αδράνεια και πληροφορία 60

2.11. Κανονικές ή «κανονικοποιημένες» μορφές των κατανομών πιθανότητας 61
2.12. Παραγοντικοί άξονες 63
2.13. Παράγοντες 66
2.14. Σχέσεις σύνδεσης των παραγόντων στα δύο σύνολα: σχέση μετάβασης και σχέση ανακατασκευής 67
2.15. Ερμηνεία των αποτελεσμάτων 70
2.16. Είδη παραγόντων 72

Κεφάλαιο 3: Μέτρηση

3.0. Εισαγωγή 74
3.1. Δυαδικές σχέσεις 75
3.2. Ιδιότητες και είδη των δυαδικών σχέσεων 75
3.3. Διατεταγμένα σύνολα 78
3.4. Σχέσεις προτίμησης – Η θεωρία της μέτρησης στα προβλήματα Απόφασης 81
3.5. Ταξινόμηση 85
3.5.1. Ταξινόμηση κατ' αύξουσα ιεραρχία 86
3.5.2. Ταξινόμηση και Παραγοντική ανάλυση των αντιστοιχιών 90
3.6. Διαμερισμοί και αντιστοιχίες 92

Κεφάλαιο 4: Πολυκριτήρια ανάλυση Ι

4.0. Εισαγωγή 95
4.1. Το πολυκριτήριο μοντέλο 97
4.2. Ο ανθρώπινος παράγοντας 98
4.3. Το μοντέλο Alternatives, Attributes, Evaluators 100
4.4. Το πολυκριτήριο πρόβλημα τιμής 102
4.5. Διαδικασίες επιλογής όπου δεν απαιτείται η τυποποίηση των προτιμήσεων 104
4.6. Η σχέση διάταξης της προτίμησης 105
4.7. Η σχέση διάταξης 107
4.8. Η θεωρία Τιμής 108
4.8.1. Η ύπαρξη της συνάρτησης τιμής 108
4.8.2. Αθροιστικές συναρτήσεις τιμής 111
4.8.3. Άλλα μοντέλα 114
4.9. Η θεωρία της αναμενόμενης Χρησιμότητας 114
4.9.1. Η ύπαρξη της συνάρτησης αναμενόμενης χρησιμότητας 116
4.9.2. Αθροιστικές συναρτήσεις χρησιμότητας 119
4.10. Άμεσοι τρόποι για την κατασκευή της αθροιστικής συνάρτησης 120
4.11. Η θεωρία της κοινωνικής επιλογής 122
4.11.1. Οι συναρτήσεις κοινωνικής επιλογής 123
4.11.2. Συναρτήσεις επιλογής με δύο εναλλακτικές 124
4.11.3. Συναρτήσεις επιλογής με περισσότερες εναλλακτικές 125
4.11.4. Συνθήκες για κοινωνική επιλογή 127
4.11.5. Αθροιστικές συναρτήσεις κοινωνικής επιλογής 128
4.11.6 Λοταρίες για κοινωνικές εναλλακτικές 129

Κεφάλαιο 5: Πολυκριτήρια ανάλυση ΙΙ

5.0. Εισαγωγή 132
5.1. Το πολυκριτήριο μοντέλο 133
5.2. Σχηματισμός προτιμήσεων 136
5.2.1. Δομή προτιμήσεων 136
5.2.2. Κατώφλια 140
5.2.3. Είδη κριτηρίων – Πολυκριτήριος πίνακας 142
5.3. Σχέσεις υπεροχής 143
5.4. Κατασκευή των σχέσεων υπεροχής 146
5.4.1. Θέματα συμφωνίας και ασυμφωνίας 147
5.4.2. Δείκτες συμφωνίας και ασυμφωνίας 149
5.5. Οι μέθοδοι ELECTRE 151
5.5.1. Η μέθοδος ELECTRE Is 152
5.5.2. Η μέθοδος ELECTRE III 153
5.5.3. Άλλες μέθοδοι ELECTRE 153
5.6. Κατάταξη των μεθόδων ELECTRE 154
5.7. Εξερεύνηση των σχέσεων υπεροχής 156

Κεφάλαιο 6: Πολυκριτήρια υποστήριξη αποφάσεων με την βοήθεια της Παραγοντικής ανάλυσης των αντιστοιχιών

6.0. Εισαγωγή 161
6.1. Πολυκριτήριοι πίνακες 163
6.2. Πολυκριτήρια θεωρία Χρησιμότητας 164
6.2.1. Μια άλλη ματιά στην θεωρία Χρησιμότητας (α) 168
6.2.2. Μια άλλη ματιά στην θεωρία Χρησιμότητας (β) 170
6.3. Η γεωμετρία του X^2 στην Παραγοντική ανάλυση των αντιστοιχιών 171
6.4. Παραγοντική ανάλυση και θεωρία της Κοινωνικής επιλογής 175
6.5. Αθροιστική συνδιαστική μέτρηση 178
6.6. Πολυκριτήρια προσέγγιση της Παραγοντικής Ανάλυσης 181
6.7. Σύνθεση των παραγοντικών αξόνων 185
6.8. Η πρόταση μας συμπερασματικά 190

Εφαρμογή

1. Στατιστική ανάλυση 194
2. Πολυκριτήρια ερμηνεία των αποτελεσμάτων της Παραγοντικής ανάλυσης των αντιστοιχιών στον πίνακα C 197
2.1. $1^{ος}$ Παραγοντικός άξονας 200
2.2. $2^{ος}$ Παραγοντικός άξονας 202
2.3. $3^{ος}$ Παραγοντικός άξονας 203
3. Υποστήριξη απόφασης 204
4. Συμπεράσματα 209

Βιβλιογραφία 210

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα προβλήματα απόφασης είναι βασικό χαρακτηριστικό της ανθρώπινης δραστηριότητας. Καθημερινά, καλούμαστε να απαντήσουμε σε μια μεγάλη γκάμα προβλημάτων τέτοιου είδους, τα οποία και προσεγγίζουν το σύνολο της ζωής μας, από τις πιο απλές μέχρι τις πιο σύνθετες πτυχές της. Κάθε πρόβλημα απόφασης, προσωπικό ή κοινωνικό, συνδέεται αποκλειστικά με ένα και μόνο κομμάτι της ανθρώπινης δραστηριότητας. Η αντιστοίχιση αυτή, σε συνδυασμό με την ποικιλότητα της καθημερινότητας, μας επιτρέπει να θεωρήσουμε ένα ευρύ πεδίο τέτοιων προβλημάτων, τα οποία και παρουσιάζουν περισσότερες διαφορές απ' ότι ομοιότητες, μεταξύ τους.

Κάθε πρόβλημα απόφασης συνδέεται με μια αντίστοιχη διαδικασία: την διαδικασία υποστήριξης της απόφασης. Κεντρικό ρόλο σ' αυτήν την διαδικασία παίζει το άτομο (ή το σύνολο των ατόμων), το οποίο και επιθυμεί να επιλέξει από ένα σύνολο εναλλακτικών αποφάσεων, την «βέλτιστη» από αυτές. Το άτομο έχει καθαρά ενεργητικό ρόλο σ' αυτήν την διαδικασία και ορίζει το «βέλτιστο» σύμφωνα με τις προτιμήσεις του. Οι προτιμήσεις αυτές δηλώνονται πάνω σε ένα σύνολο θέσεων, οι οποίες και προσδιορίζουν περιοριστικά, το πρόβλημα απόφασης. Οι θέσεις αυτές ονομάζονται κριτήρια, και οριοθετούν τις κατευθύνσεις πάνω στις οποίες θα κινηθούν οι προτιμήσεις. Στην περίπτωση που το κριτήριο είναι μοναδικό, η επιλογή της «βέλτιστης» εναλλακτικής αντιστοιχεί σε μια διαδικασία βελτιστοποίησης της προτίμησης (μέγιστο, ελάχιστο), για το ένα κριτήριο. Σε διαφορετική περίπτωση, που έχουμε περισσότερα του ενός κριτήρια, επιβάλλεται μια σύνθεση αυτών σε ένα και μόνο κριτήριο.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, η διαδικασία εξαγωγής απόφασης, συνίσταται σε δύο βασικά χαρακτηριστικά: την αφαίρεση και την σύνθεση. Η αφαίρεση απαντάται στον προσδιορισμό των κριτηρίων που συνθέτουν το πρόβλημα απόφασης. Τα κριτήρια έχουν περιοριστική φύση, καθώς αναφέρονται πάντα σε ένα σύστημα τιμής, το οποίο και αναδεικνύει τον χαρακτήρα, την παιδεία και την ηθική του ατόμου που συμμετέχει σε μια τέτοια διαδικασία. Δεν είναι παράξενο λοιπόν, που οι αποφάσεις

αποτέλεσαν φιλοσοφικό αντικείμενο, από την αρχαιότητα μέχρι τις μέρες μας. Από την άλλη πλευρά, η σύνθεση αναφέρθηκε επίσης ως απαραίτητο συστατικό της διαδικασίας απόφασης. Με άλλα λόγια, η επίλυση ενός προβλήματος απόφασης απαιτεί συγχρόνως, την συμμετοχή και των δύο συστατικών της ανθρώπινης σκέψης: του αφαιρετικού (αναλυτικού) τμήματος και του συνθετικού. Δεν είναι παράλογο λοιπόν, να πούμε ότι το πρώτο πρόβλημα απόφασης τέθηκε όταν ο άνθρωπος άρχισε να ερμηνεύει τον κόσμο με την λογική.

Η ελεύθερη απόδοση της προτίμησης συμβαδίζει με την ελευθερία της έκφρασης. Στην αρχαιότητα, το άτομο δεν μπορούσε να λάβει μέρος σε όλες τις αποφάσεις. Οι πιο σημαντικές από αυτές λαμβάνονταν από κλειστά συμβούλια, όπως η Γερουσία. Χρειάστηκε να συμβούν σημαντικές αλλαγές και να δημιουργηθούν κατάλληλα πολιτικά συστήματα έτσι ώστε το άτομο να μπορεί να αποφασίζει ελεύθερα για όλα τα θέματα που το απασχολούν, άμεσα ή έμμεσα. Χαρακτηριστικό παράδειγμα μιας τέτοιας κοινωνικής συμμετοχής είναι το όργανο της Εκκλησίας του Δήμου, το οποίο και καθιερώθηκε στην Αθηναϊκή Δημοκρατία του $5^{ου}$ π.Χ. αιώνα. Τότε είναι που εδραιώθηκε και το μοντέλο της πλειοψηφίας, για την επίλυση των προβλημάτων κοινωνικής επιλογής. Το μοντέλο αυτό υιοθετήθηκε και κατά την περίοδο της Γαλλικής Επανάστασης από τον βουλευτή Marquis de Condorcet, και εφαρμόστηκε στο κοινοβούλιο της εποχής. Ο Condorcet, ο οποίος ήταν επίσης και μαθηματικός, κατόρθωσε, με βάση το μοντέλο της πλειοψηφίας, να διατυπώσει το πρώτο μαθηματικό μοντέλο για τα προβλήματα απόφασης. Από τότε μέχρι σήμερα, η μαθηματική θεωρία των προβλημάτων απόφασης έχει σημειώσει μεγάλη πρόοδο, χωρίς καμιά παρέκκλιση από τις βασικές αρχές της Δημοκρατίας.

1. Η ΠΟΛΥΚΡΙΤΗΡΙΑ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΑΠΟΦΑΣΗΣ

Με την εισαγωγή των μαθηματικών στον χώρο των αποφάσεων κατορθώθηκε η οργάνωση και η διαμόρφωση του θεωρητικού προβλήματος της εξαγωγής της απόφασης. Καθώς η μαθηματική επιστήμη στηρίζεται στην μέτρηση, η περιγραφική δύναμη των αριθμών επέτρεψε την ποσοτικοποίηση των προτιμήσεων και την δημιουργία διατάξεων στο σύνολο των εναλλακτικών αποφάσεων. Κατ' αυτό τον

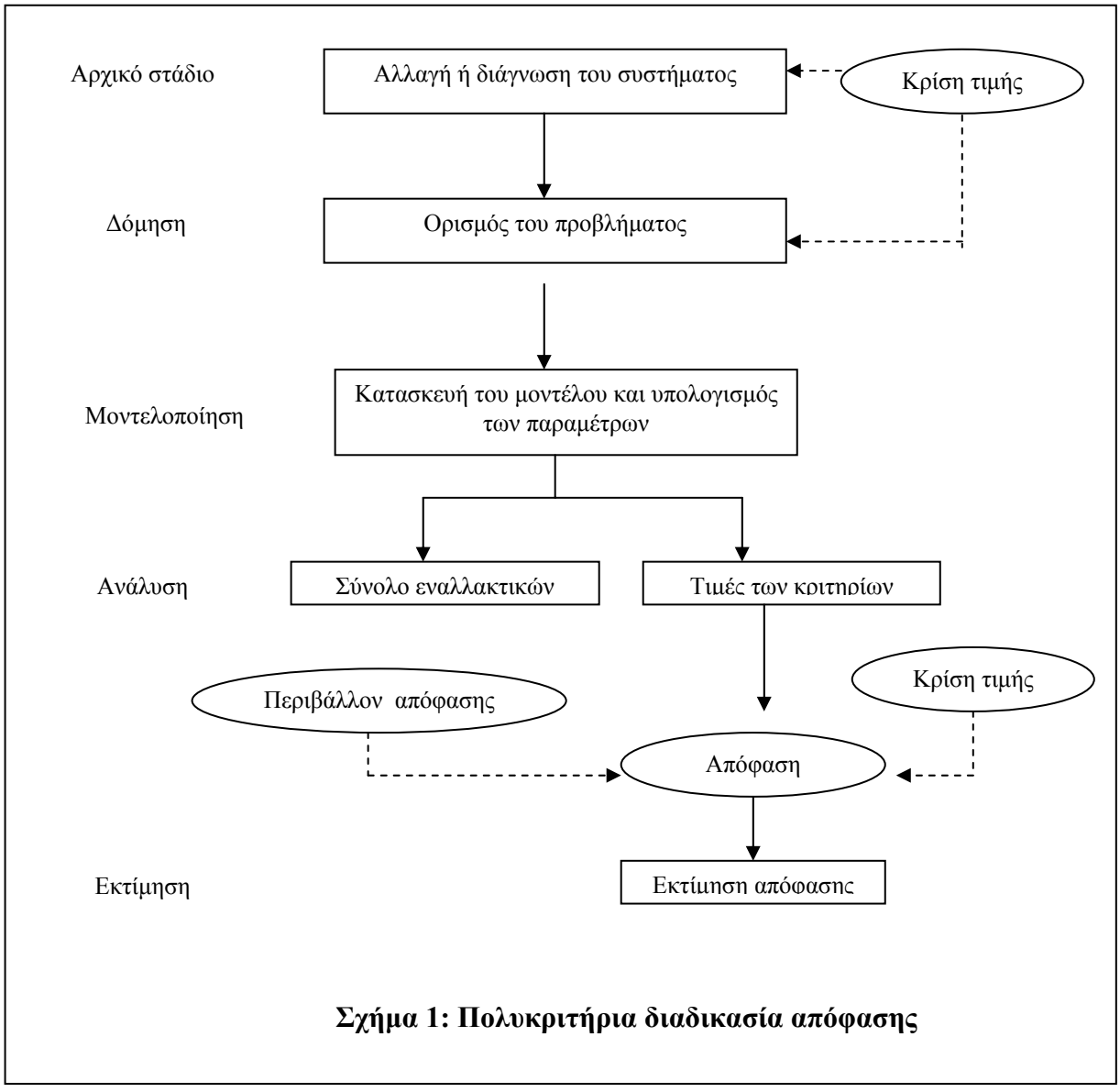
τρόπο δημιουργήθηκαν μοντέλα, στηριζόμενα κατά κύριο λόγο σε μαθηματικούς μετασχηματισμούς, τα οποία προσδίδουν, αν όχι σίγουρα την λύση, πάντως σημαντική βοήθεια στην επίλυση των προβλημάτων απόφασης.

Τα πρώτα μαθηματικά μοντέλα, αρχικά παρουσιάστηκαν στον χώρο της Στατιστικής και ακολούθως στους συγγενείς χώρους της Επιχειρησιακής Έρευνας και του Μαθηματικού Προγραμματισμού. Βασικό χαρακτηριστικό αυτών των αρχικών προσεγγίσεων, είναι η παρουσία ενός μοναδικού κριτηρίου (αλλιώς, αντικειμενικής συνάρτησης) και ενός αρχικού συνόλου περιορισμών. Η βελτιστοποίηση του κριτηρίου οδηγεί αυτόματα στην επίλυση του προβλήματος απόφασης.

Η αρχική υπόθεση του μοναδικού κριτηρίου καθιστά δύσχρηστη την εφαρμογή των παραπάνω μοντέλων στα προβλήματα της πραγματικής ζωής. Η πραγματικότητα ποτέ δεν είναι μονοδιάστατη, αλλά αντίθετα πολυδιάστατη. Μια ολοκληρωμένη προσέγγιση της πραγματικότητας, απαιτεί την συγκέντρωση του συνόλου της πληροφορίας, που αντανακλά τις κατευθύνσεις της. Αυτή η βασική παρατήρηση, αποκτά ιδιαίτερη βαρύτητα στον χώρο των αποφάσεων, καθώς αυτές αναφέρονται σε προβλήματα της πραγματικότητας. Κατ' αυτό τον τρόπο, η δόμηση ενός προβλήματος απόφασης απαιτεί την παρουσία όλων των κριτηρίων που το χαρακτηρίζουν. Τα κριτήρια αυτά, συνήθως είναι ανεξάρτητα και ανταγωνίζονται μεταξύ τους για τις προτιμήσεις του συμμετέχοντος στην απόφαση. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα, την ανάδειξης μιας λιγότερο βεβαίας, αλλά περισσότερο συμβιβαστικής λύσης. Μια τέτοια λύση, βασίζεται στις δημοκρατικές αξίες και βρίσκεται σε μεγαλύτερη συμφωνία με τις απαιτήσεις της πραγματικής ζωής.

Η αναγκαιότητα που δημιούργησε η απαίτηση για την εισαγωγή πολλών κριτηρίων στα προβλήματα απόφασης, ανέδειξε το νέο ρεύμα στον χώρο της θεωρίας των αποφάσεων: την Πολυκριτήρια Ανάλυση. Η Πολυκριτήρια Ανάλυση, είναι σχετικά νέο επιστημονικό πεδίο, καθώς αναπτύχθηκε ιδιαίτερα μετά τον δεύτερο παγκόσμιο πόλεμο στις δημοκρατίες των Ηνωμένων Πολιτειών και της Δυτικής Ευρώπης. Οι πρώτες πολυκριτήριες μεθοδολογίες βρήκαν πρόσφορο έδαφος για την εφαρμογή τους, στον τομέα της οικονομίας. Η παρουσία διαφορετικών και συνεχώς αυξανόμενων παραγόντων στα οικονομικά προβλήματα, επέτρεψε την δημιουργία μαθηματικών μοντέλων υποστήριξης αποφάσεων. Στην συνέχεια τα μοντέλα αυτά επεκτάθηκαν και σε άλλους τομείς, πέραν του οικονομικού.

Η πολυκριτήρια διαδικασία υποστήριξης αποφάσεων, χαρακτηρίζεται τυπικά από το παρακάτω σχήμα (Σχήμα 1) (Chankong, 1983). Μια τέτοια διαδικασία αποτελείται από τα βασικά στάδια της δόμησης, της μοντελοποίησης καθώς και της ανάλυσης του προβλήματος. Η εκτίμηση της απόφασης συνιστά το τελευταίο στάδιο αυτής της διαδικασίας.



Σχήμα 1: Πολυκριτήρια διαδικασία απόφασης

Η πολυκριτήρια θεωρία αποφάσεων, βρίσκεται σε πλήρη συμφωνία με τα προβλήματα της πραγματικής ζωής. Αυτή η αντιστοιχία ερμηνεύει απόλυτα την ανάδειξη μεγάλου πλήθους πολυκριτήριων μεθοδολογιών, οι οποίες και παρουσιάζουν σημαντικές, μεταξύ τους, διαφοροποιήσεις. Οι διαφορές αυτές επικεντρώνονται κυρίως στον ορισμό του προβλήματος απόφασης (ατομικό ή κοινωνικό) καθώς και στην πιθανή χρήση, ή απουσία, σεναρίων στο περιβάλλον της

απόφασης. Η επιλογή επίσης του μαθηματικού μοντέλου επιφέρει επιπλέον διαχωρισμούς στις μεθοδολογίες. Η εφαρμογή των μαθηματικών στο πολυκριτήριο πρόβλημα απόφασης, εντοπίζεται ιδιαίτερα στο πεδίο ποσοτικοποίησης των προτιμήσεων. Η ποσοτικοποίηση αυτή εκφράζεται με την έννοια της δυαδικής σχέσης, με αποτέλεσμα η υιοθέτηση διαφορετικών μαθηματικών μοντέλων δυαδικών σχέσεων να οδηγεί σε διαφορετικές μεθοδολογίες.

Σε σχέση με τον τελευταίο διαχωρισμό, διακρίνουμε δύο μεγάλα ρεύματα, στον χώρο της Πολυκριτήριας Ανάλυσης. Το πρώτο από αυτά, είναι αγγλικής έμπνευσης και ονομάζεται Πολυκριτήρια θεωρία της Χρησιμότητας. Η μεθοδολογία αυτή βασίζεται σε καθαρά αλγεβρική θεώρηση της προτίμησης και επιδιώκει, μέσω της χρήσης ισχυρών δυαδικών σχέσεων, να εισάγει γραμμικά μοντέλα μέτρησης των εναλλακτικών. Σε αντίθεση με αυτή την προσέγγιση, το δεύτερο ρεύμα είναι γαλλικής έμπνευσης και διαπραγματεύεται το θέμα της θεωρίας των Σχέσεων Υπεροχής. Η θεωρία αυτή, επικεντρώνεται στην κατασκευή ασθενέστερων δυαδικών σχέσεων και προτείνει επίλυση του πολυκριτήριου προβλήματος με την χρήση των γραφημάτων. Οι μέθοδοι των σχέσεων υπεροχής αναγνωρίζονται ως μέθοδοι μη-κυρτής βελτιστοποίησης.

2. ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

Στην πρώτη εμφάνιση της, η Στατιστική χρησιμοποιήθηκε μόνο για την καταμέτρηση και την παρουσίαση στοιχείων. Με την επιστημονική της όμως καθιέρωση, η Στατιστική προχώρησε πέρα από τα στάδια της παρουσίασης και της συλλογής και καθιερώθηκε στους τομείς της ανάλυσης και εξαγωγής συμπερασμάτων ή προβλέψεων. Η πολυδιάστατη θεώρηση των χαρακτηριστικών ενός φαινομένου, οδήγησε με την σειρά της στην δημιουργία της οικογένειας των μεθόδων της Πολυδιάστατης Στατιστικής Ανάλυσης. Οι μέθοδοι αυτές, επιτρέπουν την ανάλυση μεγάλου όγκου δεδομένων και επικεντρώνονται στην ταυτόχρονη παρουσίαση και αναζήτηση σχέσεων μεταξύ πολλών (ομογενών ή ετερογενών) μεταβλητών.

Η Ανάλυση Δεδομένων υπάγεται στις μεθόδους της Πολυδιάστατης Στατικής Ανάλυσης και προσφέρει σημαντικά εργαλεία για την ανάδειξη των κυρίαρχων τάσεων που χαρακτηρίζουν ένα αρχικό σύνολο δεδομένων καθώς και των νόμων στους οποίους τα δεδομένα αυτά υπακούουν. Οι μέθοδοι της Ανάλυσης Δεδομένων,

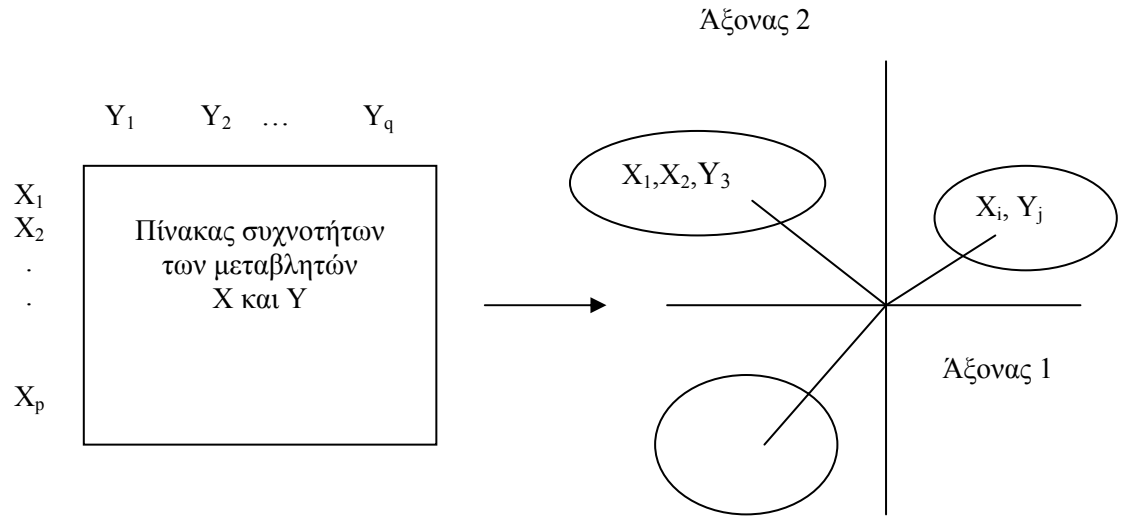
προέκυψαν από το έλλειμμα της *πληροφορίας* που δημιουργεί μια απλή στατιστική ανάλυση ενός μεγάλου συνόλου δεδομένων. Οι απαιτήσεις για μια επαρκή ανάλυση και επεξεργασία πλήθους ερωτηματολόγιων, ερευνών και συνεντεύξεων επέβαλε την ανάγκη μιας εποπτικής παρουσίασης των δεδομένων σε συνθήκες μέγιστης *πληροφορίας*. Σε γενικές γραμμές, η Ανάλυση Δεδομένων χαρακτηρίζεται ως σύνολο μεθόδων, των οποίων η βασική αρχή συνίσταται στην ανάδειξη των επικρατέστερων σχέσεων μεταξύ των αντικειμένων (παρατηρήσεων), μεταξύ των μεταβλητών που τα χαρακτηρίζουν καθώς και μεταξύ των αντικειμένων και των μεταβλητών. Με άλλα λόγια, οι μέθοδοι αυτές μας επιτρέπουν να μελετήσουμε τις σχέσεις μεταξύ των αντικειμένων και να μετρήσουμε την σημαντικότητα καθεμιάς μεταβλητής στις σχέσεις αυτές.

Η Ανάλυση δεδομένων βασίστηκε στις εργασίες των στατιστικών της δεκαετίας του 1930. Η μεγάλη ανάπτυξη όμως στον τομέα αυτό, εκδηλώθηκε στην Γαλλία την δεκαετία του 1960. Η ανάπτυξη αυτή απέφερε εντυπωσιακά αποτελέσματα και οδήγησε στην καθιέρωση της γαλλικής σχολής της Ανάλυσης Δεδομένων. Η σχολή αυτή, διέπεται από την αρχή να μείνουμε όσο γίνεται πλησιέστερα στα αρχικά δεδομένα (χωρίς τροποποιήσεις και a priori υποθέσεις), μετασχηματίζοντας τα το λιγότερο δυνατό. Χαρακτηριστική είναι η φράση του Benzecri (1973), ενός εκ των πρώτων και σημαντικότερων ερευνητών της Ανάλυσης Δεδομένων : « Το μοντέλο οφείλει να προσαρμόζεται στα δεδομένα και όχι το αντίστροφο». Κατ' αυτό τον τρόπο, οι στατιστικοί επιστήμονες της σχολής αυτής, αρνούμενοι να κάνουν αμφίβολες υποθέσεις, παρουσιάζουν τα αρχικά δεδομένα και τις τάσεις που εξάγονται από αυτά. Η απουσία υποθέσεων, διευκολύνει έναν λιγότερο εξειδικευμένο στατιστικά επιστήμονα να οδηγηθεί σε ερμηνείες των γεγονότων και των συνεπειών τους.

Δύο είναι οι βασικές προσεγγίσεις στον χώρο της γαλλικής σχολής της Ανάλυσης Δεδομένων, η Παραγοντική Ανάλυση και η Ταξινόμηση:

- Η παραγοντική ανάλυση έχει σαν σκοπό την αναγνώριση των αξόνων, γύρω από τους οποίους οργανώνονται τα δεδομένα και την παρουσίαση μιας «γεωμετρικής εικόνας τους». Κυριότερος εκπρόσωπος της προσέγγισης αυτής είναι η μέθοδος της Παραγοντικής Ανάλυσης των Αντιστοιχιών, με την οποία αναλύονται πίνακες συχνοτήτων ποιοτικών, κυρίως, μεταβλητών (Σχήμα 2).

- Η Ταξινόμηση, διαχωρίζει σε κλάσεις ένα σύνολο δεδομένων ανάλογα με τις ιδιότητες που το χαρακτηρίζουν και δομεί τις σχέσεις μεταξύ των παρατηρήσεων.



Σχήμα 2:Εποπτική παρουσίαση σε παραγοντικό επίπεδο των αποτελεσμάτων μιας Παραγοντικής Ανάλυσης Αντιστοιχιών

3. ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Η Στατιστική επιστήμη θεωρείται το λίκνο της θεωρίας των Αποφάσεων. Οι στατιστικές μετρήσεις των δεδομένων παρείχαν, εξ αρχής, ελκυστικές εκτιμήσεις των προτιμήσεων ενός συνόλου ατόμων. Η ραγδαία εξέλιξη της Στατιστικής επέτρεψε επίσης, την εξαγωγή συμπερασμάτων, με την μορφή των προβλέψεων, που αφορούσαν αποφάσεις.

Σε σχέση με το σύνολο των ρευμάτων που χαρακτηρίζουν τα δύο αυτά επιστημονικά πεδία, την μεγαλύτερη συνάφεια παρουσιάζουν μεταξύ τους, τα δύο ρεύματα της Ανάλυσης Δεδομένων και της Πολυκριτήριας ανάλυσης. Αν και με μια πρώτη ματιά οι δύο αυτοί χώροι, φαίνεται να παρουσιάζουν σημαντικές διαφορές, παρόλα αυτά εμφανίζουν λίγα, αλλά σημαντικά, κοινά χαρακτηριστικά. Τα χαρακτηριστικά αυτά εντοπίζονται στον:

1. Κοινωνικό χαρακτήρα των μεθόδων
2. Πολυδιάστατη αντιμετώπιση ενός φαινομένου
3. Απουσία αυθεντίας.

Τα δύο πρώτα χαρακτηριστικά, αναφέρθηκαν επανειλημμένα ως βασικά χαρακτηριστικά των δύο χώρων. Το τρίτο χαρακτηριστικό εδραιώνεται στην δημοκρατική θεώρηση των μεθόδων της Πολυκριτήριας Ανάλυσης καθώς και στην απουσία αρχικών υποθέσεων που παρατηρείται στην Ανάλυση Δεδομένων.

Αν και η Ανάλυση Δεδομένων παρέχει ένα ευρύτερο πεδίο εφαρμογών σε σχέση με την Πολυκριτήρια Ανάλυση, οι δύο αυτοί χώροι συνεργάστηκαν αρκετές φορές στο επίπεδο των εφαρμογών. Η συνεργασία αυτή, ήταν εντονότερη στην περίπτωση της Ταξινόμησης, η οποία και κρίνεται ως αλγεβρική μέθοδος. Αυτή η προκατάληψη, επηρέασε σε μεγάλο βαθμό την εισαγωγή των γεωμετρικών μεθόδων της Παραγοντικής Ανάλυσης στην πολυκριτήρια διαδικασία υποστήριξης αποφάσεων. Πιο συγκεκριμένα οι μέθοδοι αυτές, αναμείχθηκαν μόνο στα αρχικά στάδια μιας πολυκριτήριας εφαρμογής, αλλά ποτέ στο στάδιο της ανάλυσης.

Με την παρούσα διατριβή, θα προσπαθήσουμε να ανανεώσουμε, σε βαθύτερο επίπεδο, τον βαθμό συγγένειας μεταξύ των παραγοντικών και των πολυκριτήριων μεθόδων. Ειδικότερα, θα επιχειρήσουμε να εισάγουμε τα αποτελέσματα μιας εφαρμογής της Παραγοντικής Ανάλυσης των Αντιστοιχιών, σε ένα πίνακα συχνοτήτων κριτηρίων-εναλλακτικών, στο κυρίως σώμα μιας πολυκριτήριας εφαρμογής. Η προσέγγιση αυτή διακρίνεται σε δύο στάδια:

1. Πολυκριτήρια εκτίμηση των παραγοντικών αξόνων και ερμηνεία της διάταξης των εναλλακτικών σ' αυτούς. Η εκτίμηση αυτή θα βασιστεί στην συσχέτιση της μεθόδου της Παραγοντικής Ανάλυσης των Αντιστοιχιών με τον ευρύτερο χώρο των μεθόδων της θεωρίας της Χρησιμότητας.

2. Ανάδειξη σύνθετων κριτηρίων καθώς και των τιμών των εναλλακτικών ως προς αυτά, και εισαγωγή των νέων δεδομένων σε μια μέθοδο Υπεροχής.

4. ΔΙΑΡΘΡΩΣΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗΣ

Όπως προαναφέρθηκε, η παρούσα μελέτη τοποθετείται σε ένα εκτεταμένο πεδίο θεωριών και μεθοδολογιών. Καθώς θεωρείται ότι οι μέθοδοι, είναι λίγο ως πολύ γνωστές μέσω των εφαρμογών τους, η προσέγγιση τοποθετείται αποκλειστικά στο θεωρητικό επίπεδο. Ειδικότερα, η μόνη εφαρμογή που υπάρχει, αφορά την προτεινόμενη πολυκριτήρια προσέγγιση της μεθόδου της Παραγοντικής Ανάλυσης των Αντιστοιχιών. Σ' αυτό το σημείο οφείλουμε να παρατηρήσουμε ότι η θεωρητική προσέγγιση των μεθόδων, είναι πιθανόν να οδηγήσει σε παρερμηνείες στο επίπεδο της ορολογίας. Γι' αυτό τον λόγο, όπου κρίθηκε απαραίτητο, αναφέρεται και ο πρωτότυπος όρος (είτε σε αγγλική είτε σε γαλλική απόδοση) μαζί με την εκτιμώμενη μετάφραση.

Στο σύνολο της η διατριβή, αποτελείται από έξι κεφάλαια. Κάθε κεφάλαιο αναφέρεται σε συγκεκριμένο θέμα, το οποίο και αναλύεται διεξοδικά. Ακολουθεί μια συνοπτική παρουσίαση των κεφαλαίων.

Το πρώτο κεφάλαιο διαπραγματεύεται την ενότητα των μεθόδων της Παραγοντικής Ανάλυσης. Θα λέγαμε ότι το κεφάλαιο αυτό συνιστά μια εισαγωγή στη μέθοδο της Παραγοντικής Ανάλυσης των Αντιστοιχιών καθώς αντιμετωπίζει την μέθοδο από γεωμετρική σκοπιά.

Το δεύτερο κεφάλαιο συνιστά μια εκτεταμένη αναφορά στην Παραγοντική Ανάλυση των Αντιστοιχιών. Η προσέγγιση αυτή την φορά γίνεται αλγεβρικά, και δίνεται ιδιαίτερη σημασία στους μετασχηματισμούς που λαμβάνουν χώρα στους simplex χώρους των πιθανοτήτων.

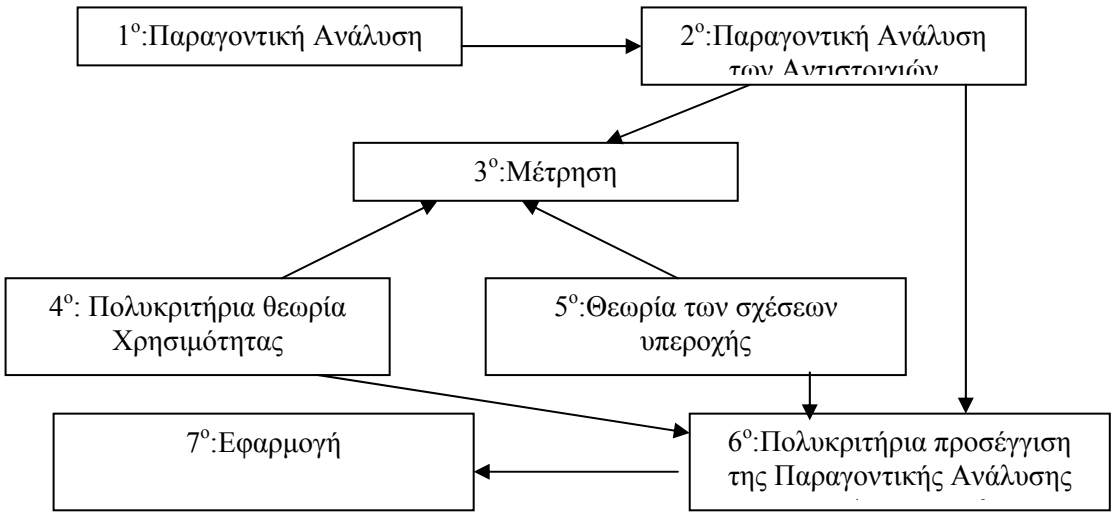
Το τρίτο κεφάλαιο αναφέρεται στη μέτρηση και αποτελεί μια πρώτη σύνδεση μεταξύ των πολυκριτήριων μεθόδων και της Παραγοντικής Ανάλυσης των Αντιστοιχιών. Η σύνδεση αυτή βασίζεται στον προσδιορισμό της δυαδικής σχέσης και των ιδιοτήτων της. Τέλος επιχειρείται μια σύγκλιση των μεθόδων της Παραγοντικής Ανάλυσης των Αντιστοιχιών και της Ταξινόμησης κατ' αύξουσα Ιεραρχία, στο θέμα των σχέσεων ισοδυναμίας.

Το τέταρτο και το πέμπτο κεφάλαιο, αναφέρονται στην Πολυκριτήρια Ανάλυση. Ειδικότερα στο τέταρτο κεφάλαιο, που είναι και το μεγαλύτερο, αντιμετωπίζεται το σύνολο της θεωρίας της Χρησιμότητας, μέσα από τις μεθόδους της θεωρίας της Τιμής, της θεωρίας της αναμενόμενης Χρησιμότητας και της θεωρίας

της κοινωνικής επιλογής. Αντίστοιχα στο πέμπτο κεφάλαιο, περιγράφεται η θεωρία των μεθόδων υπεροχής.

Το έκτο κεφάλαιο είναι και το σημαντικότερο, μια και σ' αυτό επιχειρείται η πραγμάτωση του σκοπού της έρευνας. Η τελευταία παράγραφος του κεφαλαίου αυτού, παρέχει σε μορφή συμπερασμάτων τα κυριότερα σημεία της πολυκριτήριας προσέγγισης της Παραγοντικής Ανάλυσης των Αντιστοιχιών. Το κεφάλαιο αυτό, τέλος, συνοδεύεται από μια εφαρμογή της προτεινόμενης προσέγγισης σε πίνακα δεδομένων.

Στο παρακάτω σχήμα (Σχήμα 3), προτείνουμε τον τρόπο σύνδεσης των κεφαλαίων.



Σχήμα 3 : Διάρθρωση της Διατριβής

Είναι πιθανόν, το θεωρητικό ύφος της προσέγγισης, να δημιουργήσει δυσκολίες στην ανάγνωση. Παρόλα αυτά, οφείλουμε να σημειώσουμε ότι η υιοθέτηση μιας τέτοιας κατεύθυνσης, βασίζεται κατά κύριο λόγο, στην προκατάληψη με την οποία αντιμετωπίζει η Πολυκριτήρια Ανάλυση τις παραγοντικές μεθόδους. Η εισαγωγή της Παραγοντικής Ανάλυσης των Αντιστοιχιών σε μια πολυκριτήρια διαδικασία πρέπει να τεκμηριωθεί ουσιαστικά. Μια τέτοια τεκμηρίωση, μπορεί να γίνει στην μόνο στην βάση του μηχανισμού των μεθοδολογιών και ειδικότερα του μαθηματικού τους υπόβαθρου.

Σε γενικές γραμμές, η έννοια της γεωμετρικής διάταξης που εκφράζουν οι παραγοντικές μέθοδοι, έχει αναφερθεί στην πολυκριτήρια βιβλιογραφία. Με την παρούσα όμως διατριβή, επιχειρείται η υποστήριξη μιας πολυκριτήριας διαδικασίας με βάση το μηχανισμό της Παραγοντικής Ανάλυσης των Αντιστοιχιών. Αισιοδοξούμε, η πρόταση μας να αποτελέσει το εφαλτήριο για περαιτέρω έρευνα, προς την κατεύθυνση αυτή.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{Ο}

Οι μέθοδοι της Παραγοντικής Ανάλυσης

1.0. ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ ΚΑΙ ΣΤΙΣ ΜΕΘΟΔΟΥΣ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

Η Ανάλυση Δεδομένων αποτελεί έναν ιδιαίτερο κλάδο του ευρύτερου πεδίου των μεθόδων της « Πολυδιάστατης Στατιστικής Ανάλυσης». Το θεωρητικό υπόβαθρο των μεθόδων της συνιστά έναν επαναπροσδιορισμό των μεθόδων της Περιγραφικής Στατιστικής με την βοήθεια των εργαλείων που παρέχει η σύγχρονη Άλγεβρα και κυρίως η Γραμμική Άλγεβρα. Αυτή η συγκεκριμένη τοποθέτηση μπορεί να θεωρηθεί κατ' άλλους απλοϊκή αλλά είναι αυτή η απλότητα που επικυρώνει την αξιοπιστία των συγκεκριμένων μεθόδων.

Ο συνδυασμός των απλών μεθόδων της Περιγραφικής Στατιστικής επιτρέπει, μέσω της Ανάλυσης Δεδομένων, την πληρέστερη περιγραφή του φαινομένου που αντιστοιχεί σε έναν πίνακα δεδομένων. Οι πίνακες αυτοί αποτελούν καταχωρήσεις στατιστικών μετρήσεων οι οποίες είτε εμφανίζονται στην πρωτογενή τους μορφή είτε κωδικοποιημένες (πίνακες συχνοτήτων, λογικοί πίνακες [0-1], κ.λ.π.). Κύριο χαρακτηριστικό της μεθοδολογίας είναι η απουσία « a priori » υποθέσεων κατά τη στατιστική ανάλυση των παραπάνω δεδομένων.

Στις μέρες μας, η επανάσταση της πληροφορίας έφερε τους στατιστικούς αντιμέτωπους με ένα συνεχώς αυξανόμενο πλήθος δεδομένων. Παράλληλα όμως, η χρήση των ηλεκτρονικών υπολογιστών επέτρεψε τη μαζική τους επεξεργασία. Η ενσωμάτωση της νέας τεχνολογίας στο περιβάλλον των μεθόδων της Ανάλυσης Δεδομένων, καθιστά τις μεθόδους αυτές ένα ικανότατο εργαλείο για την ανάλυση μεγάλου πλήθους δεδομένων.

Οι μέθοδοι της Ανάλυσης Δεδομένων κατηγοριοποιούνται σε δύο μεγάλες οικογένειες: τις μεθόδους της Παραγοντικής Ανάλυσης (Factor Analysis) και τις μεθόδους της ταξινόμησης (Classification) . Οι παραγοντικές μέθοδοι, οι οποίες και αποτελούν το αντικείμενο μελέτης αυτού του κεφαλαίου, βασίζονται ως ένα σημείο σε συμπεράσματα ερευνών που έγιναν στα επιστημονικά πεδία της Ψυχομετρίας και της Βιομετρίας. Μέσω συγκεκριμένων αλγεβρικών υπολογισμών επιτρέπουν τη γεωμετρική αναπαράσταση των γραμμών και των στηλών ενός πίνακα μέσω των προβολών τους σε ένα ή περισσότερα επίπεδα. Οι μέθοδοι της ταξινόμησης επιτρέπουν, μέσω της χρήσης συγκεκριμένων αλγορίθμων, την ομαδοποίηση των ατόμων ενός πληθυσμού σε συγκεκριμένες κλάσεις που προσδιορίζονται από ιδιαίτερες ιδιότητες.

Η ομάδα των μεθόδων της Παραγοντικής Ανάλυσης στηρίζεται σε κοινό θεωρητικό υπόβαθρο, το οποίο και θα αναπτυχθεί στη συνέχεια. Ως ενδεικτική μέθοδος της Παραγοντικής Ανάλυσης αναγνωρίζεται η μέθοδος της Ανάλυσης σε Κύριες Συνιστώσες (Principal Components Analysis). Η μέθοδος αυτή ξεκίνησε από τον Hotelling, ο οποίος βασίστηκε σε εργασίες του Pearson. Η περιγραφή του γενικότερου μηχανισμού της μεθόδου της Παραγοντικής Ανάλυσης των Αντιστοιχιών, κρίνεται ότι πρέπει να βασιστεί στα γενικότερα συμπεράσματα της μεθόδου της Ανάλυσης σε Κύριες Συνιστώσες και θα περιοριστεί σε ένα μόνο νέφος, το νέφος N(I) των αντικειμένων. Η μαθηματική προσέγγιση του παραπάνω μηχανισμού είναι απαραίτητη για τις ανάγκες της παρούσης εργασίας και αποσκοπεί στο να διασαφηνίσει συγκεκριμένες -και ως ένα βαθμό δυσνόητες- έννοιες που θα αναπτυχθούν στα παρακάτω κεφάλαια. Η μαθηματική μελέτη της Παραγοντικής Ανάλυσης θα περιοριστεί στο γεωμετρικό σκέλος καθώς και στην αλγεβρική διατύπωση των σχέσεων των συνόλων. Τέλος σ' αυτό το κεφάλαιο θα επιχειρήσουμε μία πρώτη προσέγγιση της Παραγοντικής Ανάλυσης με την ουσία της Ταξινόμησης και θα δείξουμε τις ομοιότητες που υπάρχουν ανάμεσα σε αυτές τις δύο κατηγορίες μεθόδων.

1.1. ΓΕΝΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Το πρόβλημα που θέτει η ομάδα των μεθόδων της Παραγοντικής Ανάλυσης είναι το εξής: έστω ένα αρχικό σύνολο δεδομένων το οποίο και μπορεί να

καταχωρηθεί σε ένα πίνακα X[x_{ij}] με n γραμμές και m στήλες. Υπάρχει διαδικασία που να επιτρέπει την ανακατασκευή των $n \times m$ στοιχείων x_{ij} με την βοήθεια ενός μικρότερου αριθμού αριθμητικών τιμών και αν ναι, ποια είναι αυτή;

Το πρόβλημα αυτό μπορεί να δοθεί σε μία πιο εκλεπτυσμένη μορφή με την βοήθεια της Γραμμικής Άλγεβρας. Αν υποτεθεί ότι υπάρχει ένα διάνυσμα στήλη u_1 με n συνιστώσες και ένα διάνυσμα στήλη v_1 με m συνιστώσες, ο παραπάνω πίνακας X να μπορεί να γραφεί ως γινόμενο των παραπάνω διανυσμάτων: $X = u_1 v_1^{'}$. Το ζητούμενο είναι να βρεθεί ένας συγκεκριμένος αριθμός q (τάξη του πίνακα X), έτσι ώστε ο X να μπορεί να δοθεί στην μορφή : $X = u_1 v_1^{'} + u_2 v_2^{'} + ... + u_q v_q^{'} + E$ (Lebart, 1979). Η παραπάνω σχέση αντιστοιχεί στην τεχνική των ελαχίστων υπολοίπων, μόνο που σε αυτή την περίπτωση δεν αναζητούμε την ευθεία αλλά τον κατάλληλο υπόχωρο τάξης q, επί του οποίου ο πίνακας υπολοίπων E($n \times m$) σχεδόν μηδενίζεται. Γενικά το πρόβλημα της Παραγοντικής Ανάλυσης αντιστοιχεί στην αναζήτηση του κατάλληλου υπόχωρου επί του οποίου και θα επιτυγχάνεται η καλύτερη αναπαράσταση για κάθε νέφος N(I) ή N(J) ξεχωριστά, όπως αυτή θα ορίζεται από την χρήση της μετρικής της αδράνειας. Ο υπόχωρος αυτός ορίζεται από ένα νέο σύστημα ορθοκανονικών αξόνων, οι οποίοι εκτός από κανονική βάση του υπόχωρου συνιστούν και ένα νέο σύστημα συντεταγμένων. Ακολουθεί η επεξήγηση των προαναφερθείσων εννοιών.

1.2. ΠΙΝΑΚΑΣ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ ΚΑΙ ΟΙ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΕΣ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΤΟΥ

Για την συγκεκριμένη εφαρμογή θα χρησιμοποιηθεί ένα συγκεκριμένος πίνακας που περιγράφει την αξιολόγηση m αριθμητικών μεταβλητών από n άτομα. Ο πίνακας αυτός είναι ο X[x_{ij}] $n \times m$ διαστάσεων και μπορεί να περιγραφεί από δύο πεπερασμένα σύνολα δεικτών: το πρώτο ονομάζεται I και αντιστοιχεί στις i γραμμές του πίνακα και το δεύτερο ονομάζεται J και αντιστοιχεί στις j στήλες του. Συνηθίζεται οι γραμμές του πίνακα να προσδιορίζονται ως **αντικείμενα** και οι στήλες του ως **μεταβλητές**. Αυτή η παραδοχή θα χαρακτηρίζει από εδώ και στο εξής τα σύνολα I και J.

1.2.1. Αναπαράσταση των αντικειμένων και των μεταβλητών στους χώρους $\Re^m$ και $\Re^n$

Ένα αντικείμενο i αντιστοιχεί στο σημείο – διάνυσμα $x_i = \left(x_i^1, ..., x_i^m\right)$ του χώρου των μεταβλητών $E=\Re^m$. Τα διανύσματα των μεταβλητών $\{x^j$ / j=1, …, m$\}$ορίζουν την βάση του E.

Ο χώρος E, είναι ευκλείδειος χώρος εφοδιασμένος με την μετρική M η οποία εισάγει το ευκλείδειο γινόμενο στον χώρο αυτό και ορίζει την ορθοκανονική του βάση. Η μετρική M συνδέεται με τον πίνακα

$D_m = m^{JJ}$

ο οποίος και προσδιορίζεται από τους συντελεστές $m^{jj'}$ του εσωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων της βάσης του χώρου. Στην περίπτωση αυτή, το εσωτερικό γινόμενο των δύο διανυσμάτων x^j και $x^{j'}$ ορίζεται ως εξής:

$$\left\langle x^j, x^{j'} \right\rangle = \sum \left\{ m^{jj'} x^j x^{j'} / j, j' \in J \right\}.$$

Ο πίνακας m^{JJ} είναι διαγώνιος ($j \neq j' \Rightarrow m^{jj'} = 0$) και συμμετρικός ($m^{jj'} = m^{j'j}$). Τα στοιχεία $m^{jj'}$ του παραπάνω πίνακα ορίζουν το σύστημα m_J των μαζών των μεταβλητών:

$$m_J = \left\{ m_j / j \in J \right\}$$

Στην περίπτωση που το σύνολο $[e_1, ..., e_m]$ αποτελεί μια ορθοκανονική βάση του E:

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \ldots, \quad e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ ... \\ 1(i) \\ ... \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \ldots, \quad e_m = \begin{bmatrix} 0 \\ ... \\ 0 \\ ... \\ 1 \end{bmatrix},$$

κάθε διάνυσμα γραμμή x_i, μπορεί να γραφεί στην μορφή $x_i = \sum_{j=1}^{m} x_i^j e_j$

Κατ' αντίστοιχο τρόπο, μια μεταβλητή j αντιστοιχεί στο σημείο $x^j = \left(x_1^j, ..., x_n^j\right)$ του χώρου των αντικειμένων $F=\Re^n$. Ο χώρος αυτός προσδιορίζεται από τα διανύσματα των αντικειμένων x_i τα οποία και συνιστούν μια βάση του F. Ο χώρος F είναι εφοδιασμένος με την μετρική N, η οποία εισάγει το ευκλείδειο γινόμενο στον χώρο και ορίζει την ορθοκανονική του βάση. Η μετρική N συνδέεται

με τον συμμετρικό, διαγώνιο πίνακα D_p τα στοιχεία του οποίου ορίζουν το σύστημα p_I των μαζών των αντικειμένων:

$$p_I = \{p_i / i \in I\}$$

Στην περίπτωση που το σύνολο $[f_1,...,f_n]$ συνιστά μία ορθοκανονική βάση του χώρου F (όμοια με παραπάνω), τότε η μεταβλητή x^j μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$x^j = \sum_{i=1}^{n} x_i^j f_i .$$

1.2.2. Αναπαράσταση των αντικειμένων και των μεταβλητών στους χώρους $\Re^{m*}$ και $\Re^{n*}$

Έστω E* και F* οι δυϊκοί χώροι των $E=\Re^m$ και $F=\Re^n$, αντίστοιχα. Σε αυτό το σημείο μπορούμε να αναφέρουμε ότι κάποιες φορές στην βιβλιογραφία η παραπάνω δυϊκότητα παρουσιάζεται αναστρέψιμη. Έτσι για παράδειγμα (Bastin, 1980), μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο χώρος E* συνιστά τον διανυσματικό χώρο των πραγματικών συναρτήσεων που παίρνουν τιμές από το σύνολο J και ο δυϊκός του, ο χώρος E, συνιστά τον χώρο των μετρικών που παίρνουν τιμές από το σύνολο J (στην γλώσσα των πιθανοτήτων ο όρος μετρική θεωρείται συνώνυμο του όρου τυχαία μεταβλητή). Αυτή η παρέμβαση κρίνεται αναγκαία στον βαθμό που θα βοηθήσει στην ερμηνεία της θεωρίας που θα παρουσιαστεί στο επόμενο κεφάλαιο.

Οι βάσεις των παραπάνω χώρων είναι οι

$$\{e_j^* / j = 1,...m\} \text{ και } \{f_i^* / i = 1,...n\}.$$

Σε γενικές γραμμές μπορούμε να αναφέρουμε συνοπτικά ότι: ένα αντικείμενο i αντιστοιχεί στο σημείο x_i του E, αντιστοιχεί στον άξονα Δ_{fi} του διανύσματος f_i της βάσης του F και τέλος αντιστοιχεί στο διάνυσμα βάσης f_i^* του F*. Όμοια μια μεταβλητή j αντιστοιχεί στο διάνυσμα x^j του F, αντιστοιχεί στον άξονα Δ_{ej} του διανύσματος e_j της βάσης του E και τέλος αντιστοιχεί στο διάνυσμα βάσης e_j^* του E* (Cailliez, 1976).

1.2.3. Σχέσεις μεταξύ των χώρων.

Όπως προαναφέρθηκε, κάθε αντικείμενο i -και κάθε μεταβλητή j- αναφέρεται σε τρεις συγκεκριμένους διανυσματικούς χώρους. Είναι λογικό λοιπόν, να αναζητηθούν γραμμικές σχέσεις που συνδέουν την υπόσταση του i (j) σε καθένα από τους χώρους αυτούς.

Όσον αφορά το αντικείμενο i, εισάγουμε την σχέση X:

$$F^* \xrightarrow{X} E / f_i^* \rightarrow x_i = X(f_i^*),$$

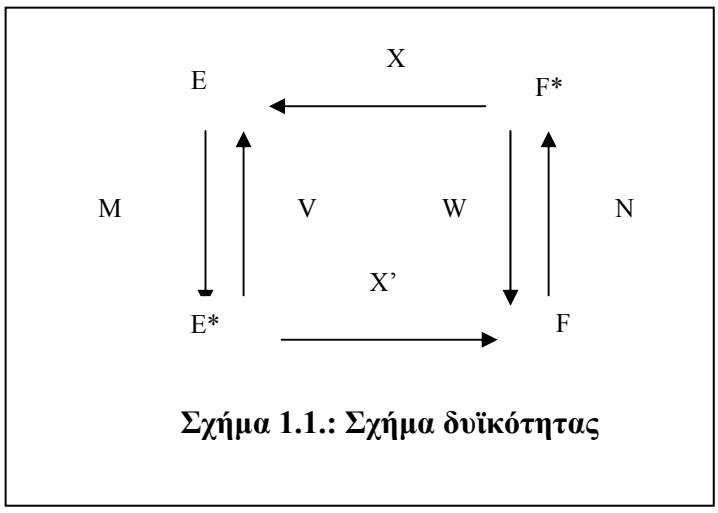
σύμφωνα με την οποία η γραμμική σχέση f_i^* αντιστοιχεί στο διάνυσμα x_i. Όμοια για την μεταβλητή j, εισάγουμε την σχέση X' (ανάστροφη της X):

$$E^* \xrightarrow{X'} F / e_j^* \rightarrow x^j = X'(e_j^*)$$

με την οποία και αντιστοιχίζουμε την e_j^* σχέση στο διάνυσμα x^j.

Οι χώροι E και F είναι εφοδιασμένοι με τις αντίστοιχες μετρικές M και N. Οι μετρικές αυτές είναι υπεύθυνες για την ευκλείδεια δομή των χώρων και αποτελούν δείκτη εγγύτητας (απόστασης) των στοιχείων του χώρου – είτε αυτά λέγονται αντικείμενα, είτε λέγονται μεταβλητές (οι όροι μετρική και απόσταση είναι συνώνυμοι). Παράλληλα κάθε μετρική αποτελεί μια συμμετρική διγραμμική μορφή, θετικά ορισμένη και εισάγει έναν ισομορφισμό του χώρου στον αντίστοιχο δυϊκό του. Ο αντίστροφος του κάθε ισομορφισμού συνιστά την ευκλείδεια μετρική του δυϊκού χώρου.

Οι σχέσεις αυτές μπορούν να περιγραφούν από το παρακάτω σχήμα (Σχήμα 1.1.).



Σχήμα 1.1.: Σχήμα δυϊκότητας

Από το παραπάνω σχήμα παρατηρούμε ότι: ο ισομορφισμός M εισάγει την μετρική του E*:

$$M^{-1} = V = X \circ N \circ X'$$

και αντίστοιχα ο ισομορφισμός N εισάγει την μετρική του F*:

$$N^{-1} = W = X' \circ M \circ X$$ (Cailliez, 1976).

Η V (αντίστοιχα η W) είναι τετραγωνική μορφή θετικά ημιορισμένη και είναι υπεύθυνη για την διατήρηση των αποστάσεων μεταξύ δύο στοιχείων του I (ή J, αντίστοιχα) στον F* (E*) κατά ανάλογο τρόπο της απόστασης των ίδιων στοιχείων στον E (F):

$$d^2(i,i') = M(x_i, x_i^{'}) = W(f_i^*, f_{i'}^*)$$
$$d^2(j,j') = N(x_j, x_{j'}) = V(e_j^*, e_{j'}^*).$$

1.3. ΝΕΦΟΣ ΣΗΜΕΙΩΝ

Το σύνολο των σημείων ενός πεπερασμένου διανυσματικού χώρου εφοδιασμένο με τις αντίστοιχες μάζες (βάρη) τους ονομάζεται νέφος σημείων. Το σχήμα του νέφους ποικίλει: το νέφος μπορεί να έχει την μορφή ελλειψοειδούς (περίπτωση πολυδιάστατης κανονικής κατανομής) είτε να έχει την μορφή τετραέδρου, μανιταριού, είτε να βρίσκεται γύρω από μία παραβολή (Volle, 1978).

Το νέφος των αντικειμένων i ονομάζεται N(I) και ορίζεται ως:
$N(I)=\{(x_i, p_i)/\, p_i \geq 0, i \in I\}$.

Η ποσότητα p_i ονομάζεται μάζα του αντικειμένου i και είναι δείκτης της σημαντικότητας της γραμμής i στο νέφος.

Αντίστοιχα ορίζουμε και το νέφος των j μεταβλητών:

$N(J)=\{(x^j, m_j)/\, m_j \geq 0, j \in J\}$.

1.4. ΚΕΝΤΡΟ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ ΤΟΥ ΝΕΦΟΥΣ – ΑΔΡΑΝΕΙΑ ΚΑΙ ΠΙΝΑΚΑΣ ΤΗΣ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ

Η μηχανική θεώρηση των στατιστικών κατανομών (Στατιστική Μηχανική), επιτρέπει την ομογενοποίηση ενός πεπερασμένου αριθμού διανυσμάτων σε συγκεκριμένο φυσικό σώμα – το νέφος- το οποίο και προσδιορίζεται από τις «μηχανικές» ιδιότητες της μάζας, του κέντρου βαρύτητας και της αδράνειας.

Η ολική μάζα του νέφους N(I) αντιστοιχεί στον αριθμό $p=\sum_i p_i$. Αντίστοιχα το κέντρο βαρύτητας (μάζας) ή βαρύκεντρο του νέφους αντιστοιχεί στο σημείο:

$$g=\frac{1}{p}\sum_i p_i x_i .$$

Ο όρος αδράνεια αντιστοιχεί στην τάση ενός φυσικού σώματος να κινηθεί προς μία συγκεκριμένη κατεύθυνση, όταν αυτό είναι ελεύθερο από την επίδραση εξωτερικής δύναμης. Στην περίπτωση του νέφους, η αδράνεια είναι μία πολυδιάστατη έννοια και αναφέρεται στην ανάδειξη των τάσεων που χαρακτηρίζουν το σύνολο των σημείων ενός νέφους. Οι τάσεις αυτές προσδιορίζονται από έναν πεπερασμένο αριθμό ορθοκανονικών αξόνων, τους άξονες αδράνειας.

Οι άξονες αδράνειας συνιστούν ένα ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς, η κατασκευή του οποίου απαιτεί τον προσδιορισμού ενός σταθερού σημείου το οποίο και θα αποτελέσει την αρχή του συστήματος συντεταγμένων. Το σημείο αυτό είναι είτε το βαρύκεντρο g είτε οποιοδήποτε άλλο σημείο a του νέφους. Γι’ αυτό τον λόγο, η αδράνειας του νέφους σχετίζεται πάντα με αυτό το σημείο και αντιστοιχεί στο άθροισμα των τετραγώνων των αποστάσεων των σημείων του νέφους από το σταθερό σημείο, όπως αυτές εκφράζονται από την αντίστοιχη μετρική του διανυσματικού χώρου.

Στην περίπτωση που αναφερόμαστε στο νέφος N(I) και στο βαρύκεντρο του g, έχουμε:

$$I_N(g) = \sum_i p_i \left\| x_i - g \right\|^2 .$$

Στην περίπτωση που το σημείο αναφοράς a είναι διαφορετικό του g, η αδράνεια του N(I) ως προς το a είναι:

$$I_N(a) = \sum_i p_i \left\| x_i - a \right\|^2 .$$

Ο μαθηματικός τύπος του Huyghens:

$$I_N(a) = I_N(g) + \sum_i p \cdot \|g - a\|^2$$

συνδέει τις δύο παραπάνω αδράνειες κατά την ποσότητα του τετραγώνου της απόστασης των δύο σημείων g και a. Από την σχέση αυτή προκύπτει ότι η ποσότητα της αδράνειας γίνεται ελάχιστη για g=a.

1.5. ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΝΕΦΟΥΣ ΣΕ ΥΠΟΧΩΡΟ ΜΙΚΡΟΤΕΡΗΣ ΔΙΑΣΤΑΣΗΣ

Ο χώρος Ε και κατ' επέκταση το νέφος N(I) προσδιορίζονται από τα διανύσματα μεταβλητές: $\{x_j / j = 1, \ldots, m\}$, οι οποίες και συνιστούν το σύστημα αναφοράς του νέφους. Το πρόβλημα στην Παραγοντική Ανάλυση και ειδικότερα στην Ανάλυση στις Κύριες Συνιστώσες, συνίσταται στο πέρασμα από τις m σε q νέες μεταβλητές. Οι νέες αυτές μεταβλητές ορίζουν το ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς σε έναν υπόχωρο του Ε, τον W, επί του οποίου και επιτυγχάνεται η απεικόνιση του νέφους N(I), μέσω της προβολής των σημείων του στον W. Ο W είναι ο βέλτιστος υπόχωρος για αυτού του είδους την απεικόνιση και είναι ο «πλησιέστερος» στο νέφος.

Για να ορίσουμε αυτόν τον χώρο αρκεί να αναζητήσουμε το κατάλληλο σημείο το οποίο και θα λειτουργήσει ως σύστημα αναφοράς για την σύσταση της ορθοκανονικής βάσης $[u_1,\ldots,u_q]$ του χώρου. Η «εγγύτητα» του υπόχωρου W στο νέφος N(I) αναλύεται καταρχάς στην «εγγύτητα» του a στο N(I) και κατά δεύτερον στην «εγγύτητα» των διανυσμάτων της βάσης $[u_1,\ldots,u_q]$ στο νέφος. Για την μέτρηση των παραπάνω απαιτείται η εισαγωγή ενός συγκεκριμένου δείκτη, του δείκτη της αδράνειας. Ο δείκτης αυτός πρέπει να ελαχιστοποιείται και κατά την εφαρμογή του στο σημείο a καθώς και κατά την εφαρμογή του στους άξονες (ευθείες) της βάσης του W.

Το σημείο a ταυτίζεται με το κέντρο βαρύτητας g του νέφους N(I) και είναι το μοναδικό σημείο του χώρου Ε επί του οποίου η αδράνεια $I_N(a)$ γίνεται ελάχιστη. Η ποσότητα $I_N(g)$ ονομάζεται ολική αδράνεια (ή απλώς αδράνεια) του νέφους και αντιστοιχεί στην τετραγωνική μορφή της αδράνειας V, η οποία περιγράφεται από τον πίνακα της διακύμανσης των μεταβλητών x^j:

V=Var(X).

Στην περίπτωση που η αρχή των αξόνων δεν ταυτίζεται με το βαρύκεντρο του νέφους, απαιτείται ένα εκ νέου κεντράρισμα των αντικειμένων.

Στην περίπτωση των αξόνων, θεωρούμε την ευθεία Δ_u που περνά από το σημείο g και παράγεται από το μοναδιαίο διάνυσμα u. Η ευθεία Δ_u είναι M-ορθογώνια με το υπερεπίπεδο $\Delta_u^{\perp}$. Η ολική αδράνεια $I_N(g)$ αναλύεται σε δύο επί μέρους αδράνειας (moments of inertia) ως εξής:

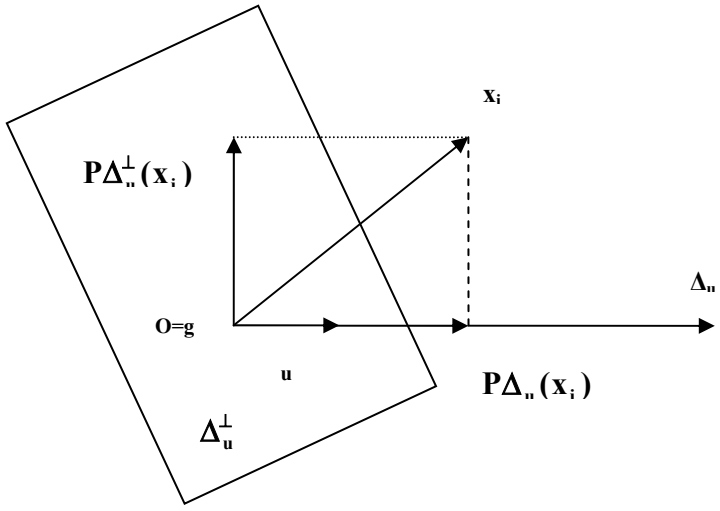
$I_N(g)= I_N(\Delta_u)+ I_N(\Delta_u^{\perp})$.

Ο πρώτος όρος του παραπάνω αθροίσματος αντιστοιχεί στο υπόλοιπο αδράνειας προς την κατεύθυνση του άξονα Δ_u (δείκτης εγγύτητας του υπόχωρου $\Delta_u^{\perp}$ με το νέφος), σε αντίθεση με τον δεύτερο όρο που εκφράζει την αδράνεια που ερμηνεύεται από τον άξονα Δ_u (δείκτης «εγγύτητας» του υπόχωρου Δ_u με το νέφος) . Η ποσότητα $I_N(\Delta_u)$, εκφράζει το μέρος της αδράνειας που πρέπει να ελαχιστοποιηθεί.

Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να περιγραφεί αναλυτικά με την μορφή συντεταγμένων, όπως φαίνεται από το παρακάτω σχήμα (Σχήμα 1.2.):

$$I_N(g) = \sum_{i=1}^{n} p_i \left\| P\Delta_u^{\perp}(x_i) \right\|^2 + \sum_{i=1}^{n} p_i \left\| P\Delta_u(x_i) \right\|^2 , \text{ (Bertier,1975)}$$

όπου: $P\Delta_u^{\perp}(x_i)$ η προβολή του αντικειμένου i στον υπόχωρο $\Delta_u^{\perp}$ και $P\Delta_u(x_i)$ η προβολή του i στον υπόχωρο Δu.



Σχήμα 1.2.: Μετασχηματισμός της αδράνειας

Η αδράνεια $I_N(g)$ είναι σταθερή ποσότητα και εκφράζει αναλογικά την διασπορά των σημείων του νέφους περί το κέντρο βαρύτητας του - όσο μεγαλύτερη είναι η αδράνεια τόσο μεγαλύτερη και η διασπορά του νέφους. Η αδράνεια $I_N(g)$, εκφράζει επίσης το σύνολο των σχέσεων μεταξύ των σημείων του – στην προκειμένη περίπτωση των αντικειμένων i – όπως αυτές ερμηνεύονται από τις μεταξύ τους αποστάσεις. Η αναζήτηση του βέλτιστου υπόχωρου W, αφορά την διατήρηση των παρατηρούμενων σχέσεων των i, μέσω των προβολών τους σε αυτόν. Για να μιλήσουμε με όρους αδράνειας, πρέπει η αδράνεια που ερμηνεύεται από τον υπόχωρο αυτόν, να είναι μέγιστη. Στην περίπτωση που ο υπόχωρος W παράγεται αποκλειστικά από το διάνυσμα u και περιγράφεται αντίστοιχα από τον άξονα Δ_u, η ελαχιστοποίηση της αδράνειας $I_N(\Delta_u)$ αντιστοιχεί μέσω της σχέσης:

$$I_N(g)= I_N(\Delta_u)+ I_N(\Delta_u^{\perp})=\text{σταθερό},$$

μεγιστοποίηση της αδράνειας $I_N(\Delta_u^{\perp})$.

1.6. ΠΑΡΑΓΟΝΤΙΚΟΙ ΑΞΟΝΕΣ – ΠΑΡΑΓΟΝΤΙΚΑ ΕΠΙΠΕΔΑ

Η αναπαράσταση του νέφους N(I) στον υπόχωρο W συνιστά έναν αυτομορφισμό :

$$T = V \circ M \,(T: E \xrightarrow{V} E^* \xrightarrow{M} E)$$

Ο πίνακας VM είναι ο πίνακας του αυτομορφισμού $V \circ M$. Το ίχνος του πίνακα VM αντιστοιχεί στην αδράνεια $I_N(g)$ του νέφους:

$[I_N(g)=Tr(VM)]$.

Η αδράνεια $I_N(\Delta_{u1}^{\perp})$που ερμηνεύεται από τον υπόχωρο που παράγεται από το μοναδιαίο διάνυσμα u_1 ($\|u_1\| = 1$) είναι:

$$I_N(\Delta_{u1}^{\perp})= u_1'MVMu_1 .$$

Η μεγιστοποίηση της ποσότητας $I_N(\Delta_{u1}^{\perp})$(αντίστοιχα, η ελαχιστοποίηση της ποσότητας $I_N(\Delta_{u1})$) – με την μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange – οδηγεί στην κατασκευή του ζητούμενου διανύσματος u (Bertier,1975), (Lebart,1979).

Στην περίπτωση που ο ζητούμενος υπόχωρος είναι επίπεδο (δύο διαστάσεων) αναζητούμε το διάνυσμα u_2, μοναδιαίο ($\|u_2\| = 1$) και ορθοκανονικό του u_1 ($u_2' u_1 = 0$) το οποίο και μεγιστοποιεί την ποσότητα

$I_N(\Delta_{u2}^{\perp}) = u_2' MVMu_2$.

Η ίδια διαδικασία ισχύει και για την εύρεση των q διανυσμάτων που αντιστοιχούν σε μεγαλύτερη διάσταση του υπόχωρου.

Η επίλυση του συστήματος των q εξισώσεων Lagrange, οδηγεί στην διαγωνιοποίηση του πίνακα VM. Οι ιδιοτιμές λ_i του πίνακα VM είναι διακεκριμένες, μη αρνητικοί αριθμοί και δίνονται σε φθίνουσα σειρά ($\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots \lambda_q$) (Lebart,1979). Τα ζητούμενα διανύσματα $\{u_i / i=1,\ldots q\}$ αντιστοιχούν στα ιδιοδιανύσματα του πίνακα VM:

$VMu_i = \lambda_i u_i \quad / \{i=1,2,\ldots,q\}$.

Το σύνολο των διανυσματικών υπόχωρων που παράγονται από τις απλές ιδιοτιμές του παραπάνω ενδομορφισμού ταυτίζεται με τον χώρο E - και κατ' επέκταση με το νέφος :

$$E = E(\lambda_1) \oplus E(\lambda_2) \oplus \ldots \oplus E(\lambda_q).$$

Η νέα αυτή θεώρηση του νέφους θεωρείται «καρτεσιανή» και επιτρέπει την εύκολη περιγραφή του.

Οι άξονες Δ_{ui} που παράγονται από τα ιδιοδιανύσματα u_i και διέρχονται από το κέντρο βαρύτητας του νέφους ονομάζονται κύριοι άξονες της αδράνειας (principal axes of inertia) ή παραγοντικοί άξονες (factorial axes) και συνιστούν το νέο σύστημα αναφοράς του νέφους.

Η αδράνεια που ερμηνεύει ο κάθε άξονας Δu_i περιγράφεται από την αντίστοιχη ιδιοτιμή λ_i :

$[I_N(\Delta_{ui}^{\perp}) = \lambda_i]$.

Το ποσοστό της αναπαράστασης του νέφους στον διανυσματικό υπόχωρο που παράγεται από τον άξονα Δu_i δίνεται από την σχέση:

$$I_{ui} = \frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^{q} \lambda_i}.$$

Στην περίπτωση που ο υπόχωρος παράγεται από τον γραμμικό συνδυασμό των$\{ u_i /$ $i=1,\ldots,m \quad m<q\}$ συνιστά το κύριο (παραγοντικό) υπερεπίπεδο. Το αντίστοιχο ποσοστό αναπαράστασης του νέφους στον υπόχωρο αυτό, είναι:

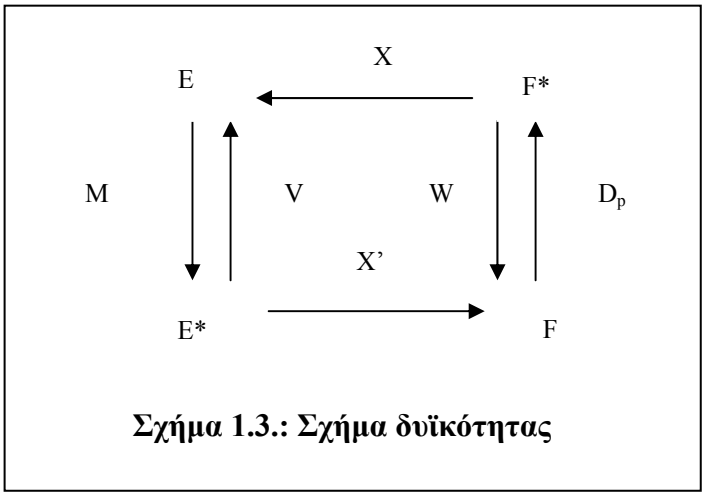
$$I_U = \frac{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i}{\sum_{i=1}^{q} \lambda_i}.$$

Ο πρώτος κύριος άξονας Δu_1 αντιστοιχεί στην μεγαλύτερη ιδιοτιμή λ_1 και ονομάζεται άξονας της μέγιστης έκτασης (maximal extension) (Benzecri, 1992). Ο άξονας αυτός περιγράφει – μέσω της αδράνειας που ερμηνεύει – την πιο χαρακτηριστική τάση διάσπασης μεταξύ των σημείων του νέφους. Ο πρώτος παραγοντικός άξονας αντιπαραθέτει τις ακραίες περιπτώσεις και ο δεύτερος τις ενδιάμεσες καταστάσεις από τις ακραίες (περίπτωση του Guttman, όπως ονομάστηκε από τον Benzecri)(Παπαδημητρίου, 1994). Οι υπόλοιποι άξονες αναφέρονται σε πιο «χαλαρές» καταστάσεις του φαινομένου που περιγράφεται από τις σχέσεις μεταξύ των σημείων του νέφους.

Στην περίπτωση που ενδιαφερόμαστε για το παραγοντικό επίπεδο στο οποίο και επιτυγχάνεται η βέλτιστη αναπαράσταση του νέφους, σπάνια χρησιμοποιούμε περισσότερους των τριών άξονες. Στην περίπτωση αυτή θεωρούμε ότι μεγαλύτερο πλήθος αξόνων καθιστά δύσκολη την ερμηνεία του νέφους και αρκούμαστε στο ποσοστό ερμηνείας που μας παρέχουν οι επιλεγμένοι άξονες.

1.7. ΚΥΡΙΟΙ ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ – ΚΥΡΙΕΣ ΣΥΝΙΣΤΩΣΕΣ

Η αλλαγή του συστήματος συντεταγμένων στον χώρο E, έχει άμεσες επιπτώσεις και στους υπόλοιπους χώρους με τους οποίους ο E συνδέεται: τους E* και F. Τα σημεία των χώρων αυτών μετασχηματίζονται και προσαρμόζονται στον νέο βέλτιστο υπόχωρο W του E. Τα διανύσματα των χώρων αυτών ορίζονται από νέες συντεταγμένες, οι οποίες και ορίζονται από το εσωτερικό γινόμενο το οποίο και εισάγει η εκάστοτε μετρική του χώρου.



Σχήμα 1.3.: Σχήμα δυϊκότητας

Κάθε παραγοντικός άξονας Δu_i συμβολίζει στον E μία νέα μεταβλητή και αντιστοιχεί:

- Στον E*, στον κύριο παράγοντα : $v_i = Mu_i$

Οι κύριοι παράγοντες αντιστοιχούν στα ιδιοδιανύσματα του $M \circ V$ με αντίστοιχες ιδιοτιμές λ_i (Cailliez, 1976). Η διασπορά του κάθε κύριου παράγοντα αντιστοιχεί στην αδράνεια που ερμηνεύει ο κάθε παραγοντικός άξονας και είναι η μέγιστη (σύμφωνα με τον μηχανισμό βελτιστοποίησης της αδράνειας). Η διασπορά αυτή, ισούται με το τετράγωνο της αντίστοιχης ιδιοτιμής: $V(v_i, v_i) = \lambda_i$.

Οι κύριοι παράγοντες είναι μεταξύ τους ασυσχέτιστοι:

$$V(v_i, v_j) = 0 .$$

- Στον F, στην κύρια συνιστώσα (ή απλώς, παράγοντα): $c^i = X' v_i = X' \circ Mu_i$

Οι κύριες συνιστώσες (παράγοντες) συνιστούν αριθμητικές συναρτήσεις, οι οποίες και ορίζονται στο σύνολο των δεικτών του νέφους I. Στην ουσία, μετρούν σε απόλυτη τιμή την απόσταση μεταξύ της προβολής του αντικειμένου i στον άξονα Δu_i και του κέντρου βαρύτητας g.

Οι κύριες συνιστώσες είναι τα ιδιοδιανύσματα του $W \circ D_p$ με αντίστοιχες ιδιοτιμές τις λ_i :

$$W \circ D_p = \lambda_i .$$

Το μέτρο (διακύμανση) των διανυσμάτων c^i είναι, ως προς την μετρική D_p του χώρου F, ίσο με την αντίστοιχη ιδιοτιμή :

$$D_p(c^i, c^i) = \lambda_i .$$

Οι κύριες συνιστώσες είναι μεταξύ τους ασυσχέτιστες :

$$D_p(c^i, c^j) = 0 .$$

Στην περίπτωση που το διάνυσμα j=(1,1,…,1) είναι διάνυσμα του F, έχουμε:

$$D_p(j, c^i) = 0 .$$

Από την σχέση αυτή συμπεραίνουμε ότι οι κύριες συνιστώσες είναι «κεντραρισμένες».

1.8. ΠΑΡΑΓΟΝΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΙ ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ

Η Παραγοντική Ανάλυση και η Ταξινόμηση είναι μέθοδοι οι οποίες συνδέονται σε μεγάλο βαθμό μεταξύ τους. Το κύριο αντικείμενο της Ταξινόμησης, ως κατηγορία μεθόδων, είναι ο διαμερισμός ενός συνόλου σε κλάσεις ισοδυναμίας. Σ' αυτή την παράγραφο θα προσεγγίσουμε την Παραγοντική Ανάλυση από την πλευρά της Ταξινόμησης και θα δείξουμε πως η Παραγοντική Ανάλυση είναι ικανή μέθοδος για την δημιουργία διαμερισμών στο σύνολο I των αντικειμένων.

Το σύνολο των δεικτών J={1,2,…,m} μιας μεταβλητής y, προσδιορίζεται ως το σύνολο των Q={q_j / j=1,2,….,m} των κλάσεων της μεταβλητής. Η μεταβλητή y επιτρέπει την απεικόνιση των i αντικειμένων στο σύνολο Q (Cailliez, 1976).

$$I \xrightarrow{y} Q$$

$$i \xrightarrow{y} y(i) = y_i = q_j$$

Η μεταβλητή y εισάγει την σχέση ισοδυναμίας R_y στο σύνολο I των αντικειμένων :

$$iR_y j \Leftrightarrow \; y_i = y_j = q_j, \; \forall i, j \in I$$

$$iR_y j \Leftrightarrow \quad \text{i και j ανήκουν στην ίδια κλάση ισοδυναμίας } I_j = \{i / i \in I, y_i = q_j\}.$$

Η δυαδική σχέση R_y αντιστοιχεί σε γράφημα (graph) στον $I \times I$ και χαρακτηρίζεται από τις ακόλουθες ιδιότητες:

- Ανακλαστική: $iR_y i, \quad \forall \; i \in I$
- Συμμετρική : $iR_y j \Rightarrow jR_y i, \forall \; i, j \in I$
- Μεταβατική: $iR_y j$ και $jR_y k \; \Rightarrow \; iR_y k, \; \forall \; i, j, k \in I$

Μ' αυτόν τον τρόπο η μεταβλητή y επιτρέπει τον διαμερισμό του συνόλου I σε κλάσεις ισοδυναμίας I_j:

$$\begin{cases} I = \bigcup_{j=1}^{m} I_j \\ I_j \cap I_k = \varnothing, j \neq k \end{cases}$$

Στην γενική περίπτωση που οι q_j κλάσεις της μεταβλητής y δεν είναι διατεταγμένες, αναζητούμε μία νέα αριθμητική μεταβλητή z η οποία και να μας δίνει

τον ίδιο περίπου διαμερισμό του I. Η νέα μεταβλητή z εισάγει έναν καινούργιο διαμερισμό R_z του I, με τις εξής ιδιότητες:

$iR_y j \Leftrightarrow iR_z j$ (ισοδυναμία των R_y και R_z)

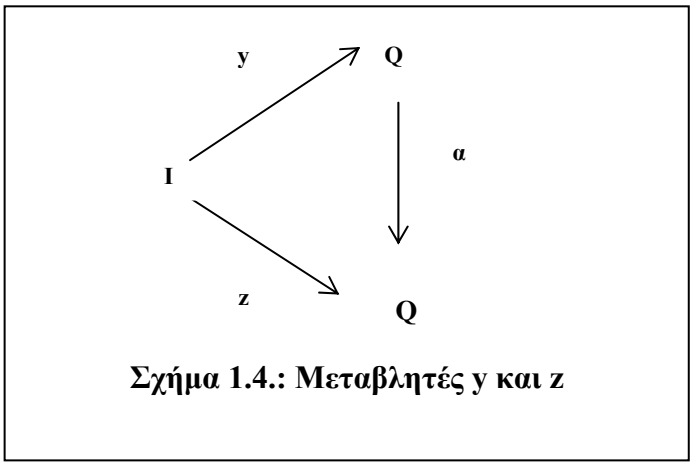
$iR_y j \Rightarrow iR_z j$ («περατότητα» του R_y διαμερισμού στον R_z)

Η μεταβλητή y μπορεί να είναι είτε σταθερή:

$z(i)=c_0$, είτε της μορφής:

$z = \alpha \circ y$

Η α αντιστοιχεί στην απεικόνιση του συνόλου Q (κλάσεις της μεταβλητής y), στο Q' (κλάσεις της μεταβλητής z) (Σχήμα 1.4).



Σχήμα 1.4.: Μεταβλητές y και z

Ο νέος αυτός διαμερισμός R_z ονομάζεται «κεντρικός» διαμερισμός (partition centrale) (Lerman, 1981) και προσδιορίζεται από την απόσταση $d(R_y, R_z)$. Στην γενική μορφή θεωρούμε το σύνολο $\Im R$ των διαμερισμών του συνόλου I, στοιχεία του οποίου είναι η διαμερισμοί R_y και R_z. Η απόσταση $d(R_y, R_z)$ αντιστοιχεί στην συμμετρική διαφορά των γραφημάτων στον $I \times I$, τα οποία γραφήματα αντιστοιχούν στις σχέσεις ισοδυναμίας που περιγράφουν οι παραπάνω διαμερισμοί.

Μία τέτοια απόσταση εισάγει στο σύνολο S των πεπερασμένων οικογενειών των p διαμερισμών την απόσταση δ, η οποία είναι:

$$\delta\left[\left(R_{y1},...R_{yp}\right),\left(R_{z1},...R_{zp}\right)\right]=\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} d\left(R_y, R_z\right).$$

Ο «κεντρικός» διαμερισμός R_z που ικανοποιεί τις ιδιότητες της περατότητας και της ισοδυναμίας με τον διαμερισμό R_y, προκύπτει από την ελαχιστοποίηση της παραπάνω απόστασης δ:

$$\delta=\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} d\left(R_y, R_z\right).$$

Στην γενική περίπτωση, η μετρική δ στην περίπτωση της Παραγοντικής ανάλυσης, ταυτίζεται με την μετρική της αδράνειας. Ο «κεντρικός» διαμερισμός R_z διέρχεται από το κέντρο βαρύτητας του νέφους N(I) και προσδιορίζεται από τους παράγοντες της Παραγοντικής Ανάλυσης. Στην ουσία, οι παράγοντες επιτρέπουν την μεταφορά των δυαδικών σχέσεων που χαρακτηρίζουν ένα σύνολο αντικειμένων (κλάσεις ισοδυναμίας) σε έναν υπόχωρο του I μικρότερων διατάσεων που προσδιορίζεται από αριθμητικές μεταβλητές.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{Ο}

Παραγοντική Ανάλυση των Αντιστοιχιών

2.0. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η Παραγοντική Ανάλυση των Αντιστοιχιών είναι μία στατιστική τεχνική ιδιαίτερα χρήσιμη σε όλους τους σπουδαστές, ερευνητές και επαγγελματίες που συλλέγουν κατηγοριοποιημένα δεδομένα, π.χ. δεδομένα που προέρχονται από κοινωνικές έρευνες. Η μέθοδος αυτή, είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για την περίπτωση που τα παραπάνω δεδομένα δίνονται σε μορφή πίνακα συμπτώσεων αριθμητικών συχνοτήτων και επιτρέπει μέσω των αποτελεσμάτων της την πληρέστερη ερμηνεία και κατανόηση των δεδομένων (Greenacre, 1993).

Η αρχική θεωρητική ιδέα της μεθόδου πρωτοεμφανίστηκε στον χώρο της στατιστικής επιστήμης μέσα από τις εργασίες των Procter - Gamble (1930) καθώς και των Richardson - Kuder (1933). Η πρώτη, στοιχειώδης όμως, μαθηματική διατύπωση έγινε από τον Hirchfeld (1935) και παρουσιάστηκε ολοκληρωμένα από τον Guttman (1941). Ο Nichisato (1980) παρουσίασε την μέχρι τότε πλήρη ιστορική διαδρομή της μεθόδου στην Αγγλοσαξονική Σχολή.

Παρόλα αυτά, η ανάδειξη της μεθόδου ως αξιόπιστου επιστημονικού εργαλείου και η καθιέρωση της ως πρακτικού μέσου ανάλυσης ενός φαινομένου (κοινωνικού, οικονομικού, ψυχολογικού, κ.α.) χρειάστηκε την αρωγή των Γάλλων στατιστικών και συγκεκριμένα του Benzecri. Ο Benzecri ήταν ο πρώτος που κατανόησε την ευελιξία καθώς και την ευρύτητα των επιστημονικών πεδίων που καλύπτει η μέθοδος και κατόρθωσε με την γεωμετρική του προσέγγιση να της προσδώσει την απλότητα και την αρτιότητα που επέτρεψαν την ανάδειξη της. Δίκαια λοιπόν μπορεί να πει κανείς ότι η μέθοδος τη Παραγοντικής Ανάλυσης των

Αντιστοιχιών οφείλει την ανάπτυξη της στον J.-P. Benzecri, ο οποίος και πρώτος της έδωσε την ονομασία αυτή (Analyse Factorielle des Correspondances).

Η εξέλιξη της μεθόδου στην Γαλλία επέτρεψε την ανάδειξη μιας ολόκληρης σχολής: της Γαλλικής Σχολής της Ανάλυσης Δεδομένων. Η σχολή αυτή επέδειξε ένα μεγάλο πλήθος στατιστικών (Bouroche, Diday, Escofier, Jambu, Lebart, Pages, Roux, Tenenhaus, κ.α.) οι οποίοι και βελτίωσαν την μέθοδο της Παραγοντικής Ανάλυσης των Αντιστοιχιών με νέες τεχνικές. Παράλληλα η μέθοδος αξίωσε και πέτυχε διεθνή αναγνώριση με αποτέλεσμα την καθιέρωση και την εξέλιξη αντίστοιχων σχολών της Ανάλυσης Δεδομένων στην Ολλανδία (Jan De Leeuw) και Ιαπωνία (Chikio Hayashi).

Σκοπός της Παραγοντικής Ανάλυσης των Αντιστοιχιών είναι η αναλυτική περιγραφή των πινάκων δεδομένων που αναφέρονται κύρια σε ποιοτικές μεταβλητές, ώστε να καθίσταται εύκολη η ερμηνεία τους και η εξαγωγή συμπερασμάτων χωρίς καμιά a priori υπόθεση ή περιορισμό. Αυτό όμως δεν αποκλείει από την ανάλυση και πίνακες που αναφέρονται σε ποσοτικές μεταβλητές οι οποίες και μπορούν να επεξεργαστούν αφού προηγουμένως κατηγοριοποιηθούν (χωριστούν σε κλάσεις) με την κατάλληλη κατάτμηση.

Η Παραγοντική ανάλυση των Αντιστοιχιών ανήκει στην μεγάλη ομάδα των μεθόδων της Παραγοντικής Ανάλυσης και διακατέχεται από την γενική φιλοσοφία της μεθόδου Ανάλυση σε Κύριες Συνιστώσες. Η καταγωγή της, με αυτόν τον τρόπο της επιτρέπει την περιγραφή του φαινομένου, που περιγράφει ο αρχικός πίνακας δεδομένων, με την βοήθεια ενός μικρότερου αριθμού αριθμητικών μεταβλητών. Παράλληλα την καθιστά αξιόπιστο εργαλείο για την περιγραφή των σχέσεων μεταξύ των σημείων του κάθε νέφους (αντικείμενα – μεταβλητές) μέσω του μετασχηματισμού των συντεταγμένων τους (Κεφάλαιο $1^{ο}$.)

Η υπεροχή της μεθόδου της Παραγοντικής Ανάλυσης των Αντιστοιχιών σε σχέση με τις άλλες μεθόδους της Παραγοντικής Ανάλυσης συνίσταται στην περιγραφή των ποιοτικών σχέσεων μεταξύ των δύο νεφών. Τα δάνεια της μεθόδου από την μέθοδο της Κανονικής Ανάλυσης (Analyse Canonique) και την μέθοδο της Διακριτής Ανάλυσης (Analyse Discrimante) μαζί με έναν εκ νέου ορισμό της αδράνειας του νέφους, επιτρέπουν τη συνολική περιγραφή του φαινομένου που περιγράφει ο αρχικός πίνακας δεδομένων μέσω του προσδιορισμού των σχέσεων μεταξύ όλων των μεταβλητών, των σχέσεων όλων των αντικειμένων καθώς και των σχέσεων που υπάρχουν μεταξύ των αντικειμένων και όλων των μεταβλητών. Για την Παραγοντική Ανάλυση των Αντιστοιχιών ο ρόλος των γραμμών και των στηλών ενός

πίνακα είναι συμμετρικός, με συνέπεια να θεωρείται η ιδανικότερη στατιστική μέθοδος για την επεξεργασία πινάκων συχνοτήτων (σχετικών – απολύτων), διπλής εισόδου, συμπτώσεων, δεικτών καθώς και λογικών πινάκων με στοιχεία 0 και 1.

Η εποπτική παρουσίαση του φαινομένου που περιγράφουν τα αντικείμενα και οι μεταβλητές ενός τέτοιου πίνακα επιτυγχάνεται με την προβολή τους σε - όχι περισσότερα των τριών - επίπεδα γραφήματα. Σκοπός της παρουσίασης αυτής είναι να διατηρηθεί, όσο το δυνατόν περισσότερο, ακέραιη η πληροφορία του πίνακα δεδομένων. Σ' αυτή την περίπτωση ο όρος πληροφορία έχει την ίδια εννοιολογική σημασία με αυτόν της εντροπίας που απαντάται στην Θεωρία της Πληροφορίας του Shannon.

Στο κεφάλαιο αυτό, θα επιχειρήσουμε μία παρουσίαση της μεθόδου με σκοπό των καθορισμό των ιδιαίτερων χαρακτηριστικών της που αναφέρονται στον συσχετισμό των δύο νεφών. Το ύφος της παρουσίασης θα είναι το ίδιο με αυτό που ακολουθήθηκε στο πρώτο κεφάλαιο καθώς θεωρείται ότι η μαθηματική περιγραφή της μεθόδου είναι αναγκαία για την αποσαφήνιση των βασικών αρχών που διαπραγματεύονται στην μέθοδο. Τέλος, θα προσπαθήσουμε να δείξουμε ότι η προσέγγιση της μεθόδου με την γεωμετρική σκέψη του Benzecri την καθιστά ικανό εργαλείο για την αναπαράσταση του συνόλου των σχέσεων μεταξύ δύο συνόλων σε ευκλείδειο χώρο (Diday, 1982).

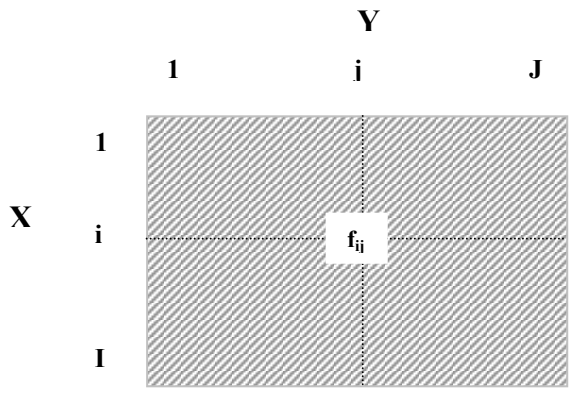
2.1. ΠΙΝΑΚΕΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ

Τα άτομα ενός πληθυσμού μπορούν να ταξινομηθούν με βάση τα χαρακτηριστικά τους. Στην περίπτωση που το χαρακτηριστικό (μεταβλητή) είναι μοναδικό, μία ταξινόμηση μπορεί να είναι είτε διακριτή (δύο κατηγορίες του χαρακτηριστικού) είτε πολλαπλή (παραπάνω κατηγορίες).

Κάθε τέτοια ταξινόμηση οφείλει να είναι εξαντλητική (exhaustive) και αποκλειστική (mutually exclusive) (Everitt, 1977). Η «εξάντληση» αναφέρεται στην εξάντληση όλων των κατηγοριών που απαιτούνται για την κατάταξη των μελών ενός πληθυσμού. Αντίστοιχα η «αποκλειστικότητα» αναφέρεται στην αποκλειστική χρήση μιας κατηγορίας ανά άτομο.

Σε μία τέτοια περίπτωση, ο πληθυσμός (ή πιο συγκεκριμένα το τυχαίο δείγμα του πληθυσμού) n μπορεί να ταξινομηθεί στις κατηγορίες της κάθε μεταβλητής με

μορφή αριθμητικών συχνοτήτων (απολύτων n_{ij} ή σχετικών $f_{ij} = \frac{n_{ij}}{n}$), όπου κάθε αριθμός δηλώνει (σε απόλυτη ή σχετική τιμή) τον αριθμό των ατόμων που ταξινομήθηκαν σε κάθε κατηγορία. Στην περίπτωση που οι μεταβλητές είναι δύο ή περισσότερες αυτή η ταξινόμηση μπορεί να δοθεί με την μορφή ενός πίνακα συχνοτήτων. Στον παρακάτω πίνακα (Σχήμα 2.1.) παρατηρούμε την διδιάστατη ταξινόμηση του δείγματος n ατόμων ως προς δύο χαρακτηριστικά X και Y, όπως αυτή περιγράφεται από έναν διδιάστατο πίνακα σχετικών συχνοτήτων f_{ij}. Η μεταβλητή X αντιστοιχεί στις i γραμμές του πίνακα και προσδιορίζεται από τις p κλάσεις (κατηγορίες) I. Αντίστοιχα η μεταβλητή Y αντιστοιχεί στις j στήλες του πίνακα και προσδιορίζεται από τις q κλάσεις J.



Σχήμα 2.1. Πίνακας συχνοτήτων των μεταβλητών X και Y

Η πιθανότητα μιας παρατήρησης να ανήκει στην i κατηγορία της γραμμής - μεταβλητής καθώς και στην j κατηγορία της στήλης - μεταβλητής είναι: p_{ij}. Η σχέση που συνδέει την f_{ij} σχετική συχνότητα που παρατηρείται στο (i, j) κελί με την παραπάνω πιθανότητα είναι περίπου σχέση ισότητας: $f_{ij} \approx p_{ij}$. Απαραίτητη συνθήκη είναι η ύπαρξη της πολυκανονικής κατανομής των μεταβλητών X και Y (Mood and Graybill,1963). Στην ουσία, ο παραπάνω πίνακας περιγράφει, για αρκετά μεγάλο n, την κοινή κατανομή πιθανότητας των δύο μεταβλητών X και Y.

Σε αντιδιαστολή με την έννοια της κοινής ταξινόμησης των δύο χαρακτηριστικών, εισάγεται η έννοια της ταξινόμησης του δείγματος από τον ένα

χαρακτήρα και προσδιορίζεται ως περιθώρια ταξινόμηση (marginal classification) (Lancaster, 1969)

Η ταξινόμηση των n ατόμων ως προς την μεταβλητή X προσδιορίζεται από τις περιθώριες συχνότητες $f_{i.}$:

$$f_{i.} = \sum_{j=1}^{q} f_{ij} .$$

Το σύνολο των $f_{i.}$ συνιστά την περιθώρια συχνότητα της γραμμής – μεταβλητής f_i.
Αντίστοιχα, η ταξινόμηση των n ατόμων ως προς την μεταβλητή Y προσδιορίζεται από τις περιθώριες συχνότητες $f_{.j}$:

$$f_{.j} = \sum_{i=1}^{p} f_{ij} .$$

Το σύνολο των $f_{.j}$ συνιστά την περιθώρια συχνότητα της στήλης – μεταβλητής f_j.
Η πιθανότητα μιας παρατήρησης να ανήκει αποκλειστικά στην κλάση i της μεταβλητής X είναι p_i και η πιθανότητα της ίδιας παρατήρησης να ανήκει στην j κλάση της μεταβλητής Y είναι $p_{j.}$, αντίστοιχα. Οι πιθανότητες αυτές μπορούν να υπολογιστούν με βάση τους συντελεστές μέγιστης πιθανοφάνειας:

$\hat{p}_i = f_{i.}$ και $\hat{p}_j = f_{.j}$ (Mood and Graybill,1963).

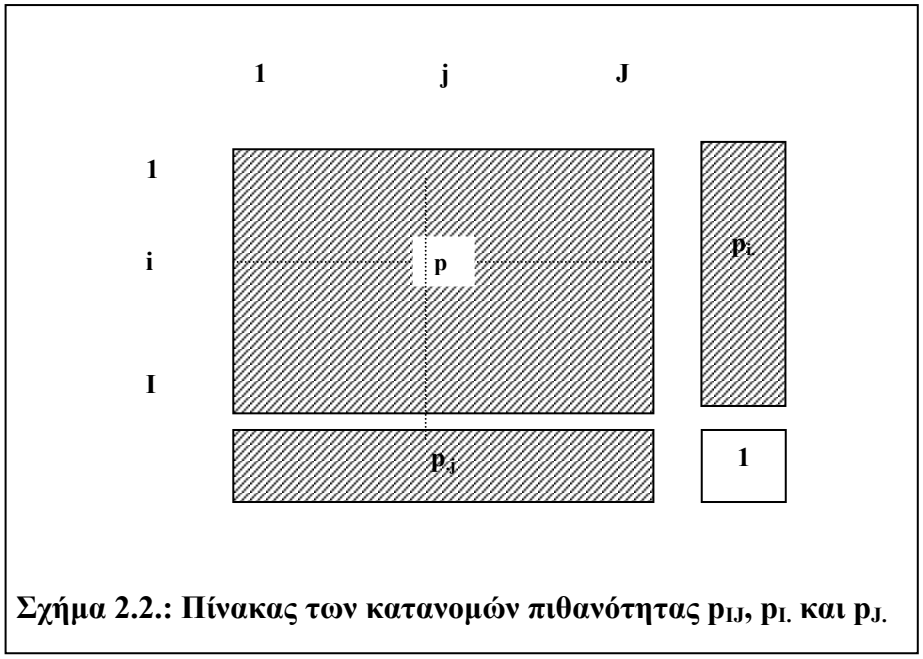
Η παρατήρηση αυτή, μας επιτρέπει να ταυτίσουμε την περιθώρια κατανομή πιθανότητας της μεταβλητής X με την περιθώρια συχνότητα της γραμμής μεταβλητής:

$p_I=f_I$

Αντίστοιχα η περιθώρια κατανομή πιθανότητας της μεταβλητής Y προσδιορίζεται από την περιθώρια συχνότητα της στήλης – μεταβλητής:

$p_J=f_J$

Ανακεφαλαιώνοντας, η πληροφορία που μας παρέχει ένας πίνακας συχνοτήτων δύο μεταβλητών X και Y αναλύεται στην πληροφορία που έχουμε για την περιθώρια κατανομή της μεταβλητής X, την περιθώρια κατανομή πιθανότητας της Y καθώς και της κοινής κατανομής πιθανότητας των X και Y (Σχήμα 2.2).



Σχήμα 2.2.: Πίνακας των κατανομών πιθανότητας p_{IJ}, $p_{I.}$ και $p_{J.}$

2.2. ΧΩΡΟΙ ΚΑΙ ΝΟΜΟΙ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΣΤΗΝ ΠΑΡΑΓΟΝΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΩΝ

Ας θεωρήσουμε το σύνολο I καθώς και το δυναμοσύνολο του P(I). Ονομάζουμε μετρική m την απεικόνιση m ορισμένη στο (I,P(I)):

$P(I) \xrightarrow{m} \Re$.

Η m έχει τις παρακάτω ιδιότητες (Cailliez, 1976):

- $m(\varnothing) = 0$
- $A \cap B = \varnothing \Rightarrow m(A \cup B) = m(A) + m(B)$ (προσθετική ιδιότητα)

Επίσης η μετρική m είναι:

- Φραγμένη: m(A) φραγμένο, $\forall A \in P(I)$
- Μη αρνητική: $m(A) \geq 0$, $\forall A \in P(I)$
- Ομοιόμορφη (uniform): m({i})=C=σταθερό, $\forall i \in I$.

Η μετρική m προσδιορίζεται από τα στοιχεία $m_i = m(\{i\})$.

Η θεωρία των Πιθανοτήτων έχει άμεση σχέση με την θεωρία του μέτρου (measure theory). Ονομάζουμε μέτρο πιθανότητας p, μια θετική μετρική p ορισμένη στο (I, P(I)), η οποία και συνιστά μία απεικόνιση του P(I) στον χώρο των θετικών αριθμών $\Re^+$:

$$P(I) \xrightarrow{p} \Re^+ .$$

Η p έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

- $p(I)=1$
- $A \cap B = \varnothing \Rightarrow p(A \cup B) = p(A) + p(B), \ \forall A, B \in P(I)$

Ο νόμος πιθανότητας ταυτίζεται με το μέτρο πιθανότητας. Ο νόμος πιθανότητας ή κατανομή πιθανότητας p ορίζεται από τα στοιχεία p_i, $\{ i \in I \}$, όπου:

$$p_i = p\{(i)\}, \qquad 0 \le p_i \le 1 \qquad \text{και} \qquad \sum_{i \in I} p_i = 1 .$$

Στην γενική περίπτωση των συνόλων I και P(I), μπορούμε να πούμε ότι μια μετρική m φραγμένη και θετικά ορισμένη στο (I,P(I)) συνδέεται με τον νόμο πιθανότητας p ο οποίος και ορίζεται στο (I,P(I)) ως εξής:

$$p(A) = \frac{m(A)}{m(I)}, \qquad \forall A \in P(I). \qquad \text{(Cailliez, 1976)}$$

Στην περίπτωση του πίνακα συχνοτήτων δύο ποιοτικών μεταβλητών (για τις ανάγκες τις Παραγοντικής Ανάλυσης των Αντιστοιχιών) θεωρούμε αρχικά τα δύο πεπερασμένα σύνολα των κλάσεων των μεταβλητών. Πιο συγκεκριμένα, ονομάζουμε I: το σύνολο των κλάσεων της μεταβλητής X και J: το σύνολο των κλάσεων της μεταβλητής Y. Ο απόλυτος αριθμός του κάθε συνόλου είναι για μεν το I: card(I)=p, για δεν το J: card(J)=q.

Τα σύνολα I, J, $I \times J$ καθώς και το σώμα των αντικειμένων K είναι εφοδιασμένα με τις αντίστοιχες μετρικές (νόμους πιθανότητας):

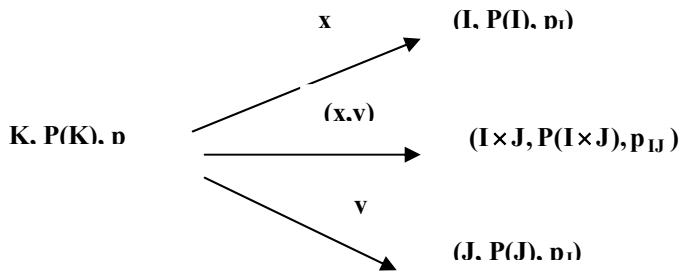
- τον νόμο πιθανότητας p_{IJ}, ο οποίος ορίζεται στο σύνολο $(I \times J, P(I \times J))$ μέσω της σχέσης: $p_{IJ}(\{i, j\}) = p_{ij}, \quad 0 \le p_{ij} \le 1, \ \sum_{(i,j) \in I \times J} p_{ij} = 1$

- τον νόμο πιθανότητας p_I, ο οποίος ορίζεται στο σύνολο $(I, P(I))$ μέσω της σχέσης: $p_I(\{i\}) = p_{i.} = \sum_{j=1}^{q} p_{ij}$, $0 \le p_{i.} \le 1$, $\sum_{i \in I} p_{i.} = 1$

- τον νόμο πιθανότητας p_J, ο οποίος ορίζεται στο σύνολο $(J, P(J))$ μέσω της σχέσης: $p_J(\{j\}) = p_{j.} = \sum_{i=1}^{p} p_{ij}$, $0 \le p_{j.} \le 1$, $\sum_{j \in J} p_{.j} = 1$

- τον νόμο πιθανότητας p, ο οποίος ορίζεται στο σύνολο K των n αντικειμένων μέσω της σχέσης: $P(K) \xrightarrow{p} \Re^+$, $p_k = \frac{1}{n} \quad \forall k \in K$.

Οι παραπάνω σχέσεις περιγράφονται γραφικά από το παρακάτω σχήμα (Σχήμα 2.3.)



Σχήμα 2.3.: Σύνολα και μετρικές πιθανότητας σε πίνακα συχνοτήτων

2.3. ΧΩΡΟΙ ΚΑΙ ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΧΩΡΩΝ ΣΤΗΝ ΠΑΡΑΓΟΝΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΩΝ

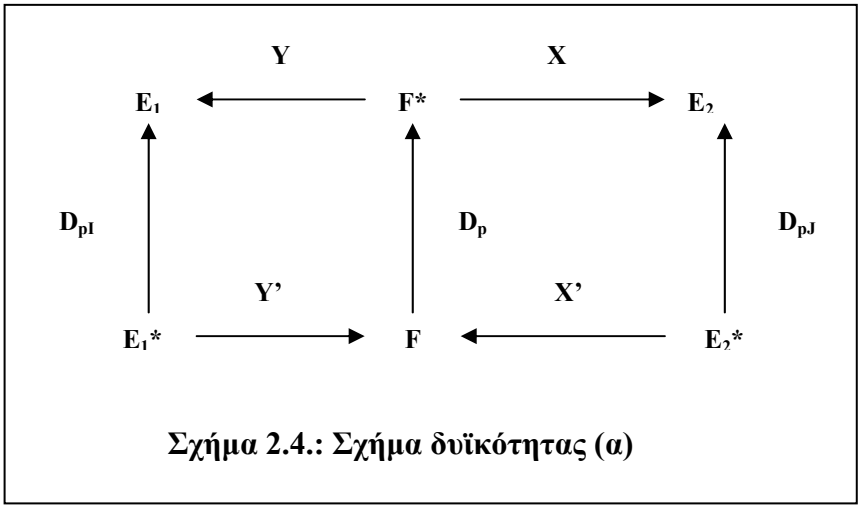
Θεωρούμε αρχικά το διανυσματικό χώρο (σώμα) των αντικειμένων $F=\Re^n$ καθώς και τους διανυσματικούς χώρους $E_1=\Re^p$ και $E_2=\Re^q$. Οι χώροι αυτοί αποτελούν τους χώρους των μετρικών των δύο ποιοτικών μεταβλητών X και Y και αντίστοιχα ορίζονται στα σύνολα I και J, τα οποία και περιγράφουν αντίστοιχα την τάξη του κάθε χώρου.

Ονομάζουμε F*, E_1*, E_2* τους δυϊκούς χώρους (χώρους των συναρτήσεων) των F, E_1 και E_2 αντίστοιχα. Ο χώρος E_1* αντιστοιχεί στον χώρο των δεικτριών

μεταβλητών $\{x_i / i \in I\}$ της μεταβλητής X. Αντίστοιχα ο χώρος E_2* αντιστοιχεί στον χώρο των δεικτριών μεταβλητών $\{y_j / j \in J\}$ της μεταβλητής Y

(Σημείωση: $F \xrightarrow{xi} (0,1) \Rightarrow \begin{cases} x_i(k) = 1, x(k) = q_i \\ x_i(k) = 0, x(k) \neq q_i \end{cases}, k \in F, i \in I$. Όμοια για y_j. (Cailliez, 1976)).

Οι σχέσεις (α) που συνδέουν τους παραπάνω χώρους αντιστοιχούν στις μετρικές D_p, D_{pI}, D_{pJ} καθώς και στις απεικονίσεις X' και Y' και περιγράφονται από το παρακάτω σχήμα (Σχήμα 2.4.).



Σχήμα 2.4.: Σχήμα δυϊκότητας (α)

Οι μετρικές D_p, D_{pI} και D_{pJ} αντιστοιχούν στους νόμους πιθανότητας p_k, p_I και p_J, ενώ οι απεικονίσεις X' και Y' θεωρούνται ως οι αντίστροφες των απεικονίσεων X και Y. Η παραπάνω δυϊκή αναπαράσταση μας επιτρέπει να επαναπροσδιορίσουμε τις μετρικές D_{pI} και D_{pJ} με σύνθεση συναρτήσεων (Cailliez, 1976). Μ' αυτό τον τρόπο η D_{pI} γράφεται:

- $D_{pI} = X \circ D_p \circ X'$

και ορίζει στον E_1* μία τετραγωνική μορφή, η οποία και συνδέεται με τον διαγώνιο πίνακα των περιθώριων πιθανοτήτων $p_{i.}$:

$$\left(XD_pX'\right)_{ij} = \frac{1}{n}\sum_K x_k^i x_k^j = \begin{cases} 0, i \neq j \\ p_{i.}, i = j \end{cases}$$

Αντίστοιχα, η D_{pJ} γράφεται ως:

- $D_{pJ} = Y \circ D_p \circ Y'$

και ορίζει στον E_2* μία τετραγωνική μορφή η οποία και συνδέεται με τον διαγώνιο πίνακα των περιθώριων πιθανοτήτων $p_{.j}$:

$$\left(YD_pY'\right)_{ij} = \frac{1}{n}\sum_K y_k^i y_k^j = \begin{cases} 0, i \neq j \\ p_{.j}, i = j \end{cases}$$

Οι παραπάνω μετρικές συνιστούν ισομορφισμούς μεταξύ των χώρων και επιτρέπουν μέσω των αντίστροφων τους απεικονίσεων την δημιουργία νέων μετρικών. Μ' αυτό τον τρόπο οι σχέσεις (Cailliez, 1976):

- $D_{1/pI} = \left(X \circ D_p \circ X'\right)^{-1} : E_1 \to E_1^*$ και
- $D_{1/pJ} = \left(Y \circ D_p \circ Y'\right)^{-1} : E_2 \to E_2^*$

ορίζουν αντίστοιχα τις μετρικές των χώρων E_1* και E_2*.

Η γραμμική απεικόνιση :

- $P = X \circ D_p \circ Y' : E_2^* \to E_1$

επιτρέπει την μεταφορά ανάμεσα στους χώρους E_2* και E_1και συνδέεται με τον πίνακα των πιθανοτήτων p_{ij}:

$$\left(X \circ D_p \circ Y'\right) = \frac{1}{n}\sum_K x_k^i y_k^j = p_{ij}$$

Αντίστοιχα η γραμμική απεικόνιση P' (ανάστροφη της P):

- $P' = Y \circ D_p \circ Y' : E_1^* \to E_2$

επιτρέπει την μεταφορά ανάμεσα στους χώρους E_1* και E_2 και συνδέεται με τον ανάστροφο πίνακα των πιθανοτήτων p_{ij}.

Τέλος ορίζουμε τις απεικονίσεις (Cailliez, 1976):

- $B_1 = D_{1/pI} \circ P : E_2^* \to E_1^*$ και
- $B_2 = D_{1/pJ} \circ P : E_1^* \to E_2^*$

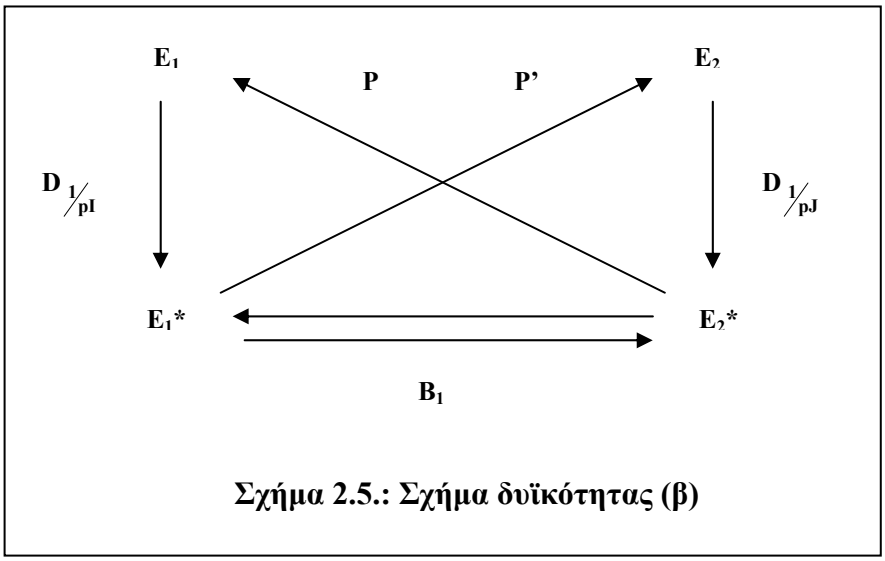
Η B_1 αντιστοιχεί στον νόμο της «υπό συνθήκη» πιθανότητας p_J^i, ο οποίος ορίζεται στο (J, P(J)) και έχει ως στοιχεία τις πιθανότητες:

$$p_j^i = \frac{p_{ij}}{p_{i.}}, i \in I .$$

Η B_2 αντιστοιχεί στον νόμο της «υπό συνθήκη» πιθανότητας p_I^j, ο οποίος ορίζεται στο (I,P(I)) και έχει ως στοιχεία τις πιθανότητες:

$$p_i^j = \frac{p_{ij}}{p_{.j}}, j \in J.$$

Το σύνολο των συγκεκριμένων σχέσεων (β) περιγράφεται στο σχήμα 2.5.



Σχήμα 2.5.: Σχήμα δυϊκότητας (β)

2.4. ΝΕΦΗ ΣΗΜΕΙΩΝ – ΚΕΝΤΡΑ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ ΤΩΝ ΝΕΦΩΝ

Οι προηγούμενες σχέσεις B_1 και B_2 εκφράζουν την «συμμετρική» ιδιότητα του πίνακα συχνοτήτων. Η ιδιότητα αυτή επιτρέπει την περιγραφή της i ($i \in I$) γραμμής στο σύνολο J, και αντιστρόφως. Η παρουσίαση αυτή, παίρνει γραφικά την μορφή νέφους σημείων σε πολυδιάστατο χώρο.

Ονομάζουμε νέφος αντικειμένων N(I) το σύνολο:

$$N(I) = \left\{\left(f_J^i, f_{i.}\right) / i \in I\right\}.$$

Κάθε γραμμή i συνδέεται με το «προφίλ» της f_J^i στο J και αντιστοιχεί σε σημείο του $\Re^q$:

$$f_J^i = \left(f_1^i, ..., f_j^i, ..., f_q^i\right)$$

με συντεταγμένες τις «υπό συνθήκη πιθανότητες»:

$$\left\{p_j^i, p_j^i \geq 0, \sum_j p_j^i = 1 / j \in J\right\}.$$

Το «προφίλ» f_j^i συνιστά την τιμή της απεικόνισης f_J^I - σχέση μετάβασης (transition probabiliste) του συνόλου I στο σύνολο J - και απεικονίζει την γραμμή i στο νόμο πιθανότητας f_J^i του J (Bastin, 1980).

Κάθε γραμμή i συνδέεται επίσης και με το βάρος της $f_{i.}$ το οποίο και εκφράζει αριθμητικά την σημαντικότητα της γραμμής στον χώρο των μεταβλητών.

Στην ουσία, το νέφος N(I) περιγράφει την σταθμισμένη «υπό συνθήκη» κατανομή πιθανότητας των γραμμών του πίνακα στον χώρο των στηλών του.

Το βαρύκεντρο G_J του νέφους N(I), αντιστοιχεί στο σημείο του $\Re^q$:

$$G_J = \sum_{i=1}^{p} f_{i.} f_J^i = f_J$$

αποτελεί την τιμή της μετρικής v_J ορισμένης στο I και εκφράζει τον σταθμισμένο μέσο όρο των «προφίλ» f_J^i.

Ονομάζουμε νέφος μεταβλητών N(J) το σύνολο:

$$N(J) = \left\{ \left(f_I^j, f_{j.} \right) / \; j \in J \right\}$$

Κάθε στήλη j συνδέεται με το «προφίλ» της f_I^J στο I και αντιπροσωπεύει σημείο του $\Re^p$, το οποίο με μορφή συντεταγμένων είναι το εξής:

$$f_I^j = \left(f_1^j, ..., f_j^j, ..., f_p^j \right).$$

Όπως και προηγουμένως, το προφίλ f_I^J εκφράζει τον νόμο πιθανότητας με τον οποίο αντιπροσωπεύεται η στήλη j στο σύνολο I. Το βάρος $f_{.j}$ εκφράζει την στάθμιση αυτής της αντιπροσώπευσης.

Το σημείο G_I του $\Re^p$, αντιστοιχεί στο βαρύκεντρο του νέφους N(J):

$$G_I = \sum_{j=1}^{q} f_{.j} f_I^j = f_I$$

και αποτελεί τον σταθμισμένο μέσο όρο των «προφίλ» f_I^J.

2.5. ΑΠΟΣΤΑΣΕΙΣ ΣΗΜΕΙΩΝ ΓΡΑΜΜΩΝ ΚΑΙ ΣΗΜΕΙΩΝ ΣΤΗΛΩΝ

Συνεχίζοντας την ανάλυση του νέφους N(I), αναφερόμαστε στον χώρο $\Re^q$ και την κανονική του βάση $\left\{ e_j / \; j = 1, ..., q \right\}$. Ο χώρος αυτός είναι εφοδιασμένος με την μετρική q, η οποία (όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως) ορίζεται ως εξής (Lerman, 1981):

$$q(e_j, e_h) = \begin{cases} 0, h \neq j \\ \dfrac{1}{f_{.j}}, h = j \end{cases}$$

Η μετρική q, η οποία ονομάζεται μετρική του X^2, διαφέρει της συνήθους ευκλείδειας και ορίζει την απόσταση μεταξύ δύο γραμμών i και i':

$$d^2(i,i') = \sum_{j=1}^{q} \frac{1}{f_{.j}} \left(\frac{f_{ij}}{f_{i.}} - \frac{f_{i'j}}{f_{i'.}} \right).$$

Η εισαγωγή της μετρικής του X^2 κρίνεται αναγκαία καθώς ικανοποιεί τόσο αλγεβρικούς όσο και στατιστικούς λόγους:

α) Ο αλγεβρικός λόγος προσδιορίζεται από την συνθήκη της «κατανεμημένης ισοδυναμίας» (equivalence distributionnelle), σύμφωνα με την οποία αν δύο γραμμές (ή στήλες) του πίνακα δεδομένων ενωθούν σε μία, δεν αλλάζει η απόσταση μεταξύ των αντίστοιχων κατανομών τους.

β) Ο δεύτερος λόγος έχει σχέση με τον ορισμό της αδράνειας του νέφους και θα αναπτυχθεί σε άλλη παράγραφο.

Αντίστοιχα, ο διανυσματικός χώρος $\Re^p$ του νέφους N(J) είναι εφοδιασμένος με την q* μετρική του X^2, η οποία ως προς την κανονική βάση του χώρου $\{f_i / i = 1,...,p\}$ ορίζεται ως εξής:

$$q^*(f_i, f_{i'}) = \begin{cases} 0, i \neq i' \\ \dfrac{1}{f_{i.}}, i = i' \end{cases}$$

Η απόσταση μεταξύ δύο στηλών j και j' του συνόλου N(J) είναι:

$$d^2(j,j') = \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{f_{i.}} \left(\frac{f_{ij}}{f_{.j}} - \frac{f_{ij'}}{f_{.j'}} \right).$$

2.6. ΧΩΡΟΣ SIMPLEX ΤΩΝ ΝΟΜΩΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

Πριν αρχίσουμε την περιγραφή του χώρου simplex των νόμων πιθανοτήτων, οφείλουμε να διασαφηνίσουμε κάποιες λεπτομέρειες που αφορούν τον συμβολισμό

των χώρων μετρικών και συναρτήσεων. Σε αυτή την παράγραφο , καθώς και στην επόμενη, θα ονομάζουμε E_1, E_2: τους χώρους των συναρτήσεων και E_1*, E_2*: τους χώρους των μετρικών. Αυτή η παρέμβαση βασίζεται στον ορισμό του δυϊκού χώρου ενός χώρου και διευκολύνει στην κατανόηση εννοιών που αφορούν στην αλγεβρική δομή των χώρων.

Θεωρούμε τον νόμο πιθανότητας p, ο οποίος ορίζεται στο σύνολο (I, P(I))και αντιστοιχεί στο διάνυσμα (Cailliez, 1976):

$$p = \sum_{i \in I} p_i e_i^* \in E_1^* .$$

Οι γραμμικές μορφές e_i^* συμβολίζουν στον E_1* τους «κεντροποιημένους» νόμους πιθανότητας οι οποίοι και συνδέουν σε μία ακολουθία στοιχείων του I τις εξής ιδιότητες:

$$p_i \geq 0, \qquad \sum_{i \in I} p_i = 1 .$$

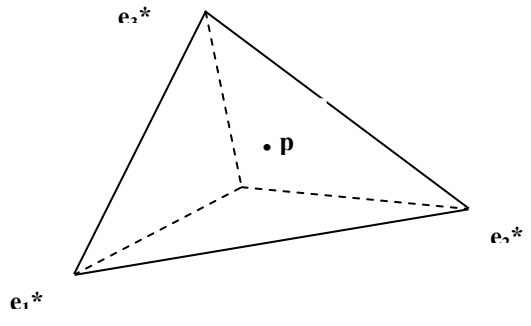
Οι γραμμικές μορφές p συνιστούν «κυρτό γραμμικό συνδυασμό» των e_i^*.

Ο χώρος:

$$S_I = \left\{ p / p = \sum_{i \in I} p_i e_i^*, p_i \geq o, \sum_{i \in I} p_i = 1 \right\} \subset E_1^*$$

ονομάζεται «simplex των νόμων πιθανότητας στο I».

Στην περίπτωση που $E_1^* = \Re^3$, ο χώρος S_I δίνεται από το σχήμα (Σχήμα 2.6.)



Ο S_I αντιστοιχεί στο τρίγωνο (e_1^*, e_2^*, e_3^*)

$e_i^* \in S$

$p \in S$

Σχήμα 2.6.: Ο χώρος S_I

Όπως παρατηρούμε στο παραπάνω σχήμα ο χώρος S_I είναι διδιάστατος, είναι δηλ. κατά μία διάσταση μικρότερος του χώρου $\Re^3$. Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι ο χώρος S_I συνιστά ένα «σύστημα μαζών» με άθροισμα μονάδα $(e_1^* + e_2^* + e_3^* = 1)$.

Αυτή η διαπίστωση μπορεί να γενικευτεί και για χώρους με διάσταση μεγαλύτερη του τρία. Ανάλογα ορίζεται και ο χώρος S_J «simplex των νόμων πιθανότητας στο J».

Το νέφος N(I) είναι υπόχωρος του S_J και αντίστοιχα το νέφος N(J) είναι υπόχωρος του S_I.

2.7. ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΤΟΥ X^2 ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΝΟΜΩΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Στην Παραγοντική Ανάλυση των Αντιστοιχιών επιθυμούμε – κατ' αντίστοιχο τρόπο με την γενική μορφή της Παραγοντικής ανάλυσης – να προσδιορίσουμε έναν αριθμό νέων πραγματικών μεταβλητών, οι οποίες είναι «κεντροποιημένες» και ορίζουν μία νέα ορθοκανονική βάση του νέφους. Παρόλα αυτά, η αναζήτηση των νέων μεταβλητών προϋποθέτει και μία αντίστοιχη έρευνα στον χώρο των μετρικών, καθώς οι δύο παραπάνω χώροι είναι άρρηκτα συνδεδεμένοι με τους μεταξύ τους ισομορφισμούς. Σε αυτή την παράγραφο, θα εμβαθύνουμε σε αυτές τις σχέσεις μεταξύ των χώρων και θα δείξουμε ότι η δημιουργία των νέων μεταβλητών έχει άμεση σχέση με τις διεργασίες που συντελούνται στον χώρο των μετρικών. Ο χώρος αυτός προσδιορίζεται από την μετρική του X^2.

Ο χώρος των μετρικών του συνόλου των αντικειμένων I, χαρακτηρίζεται από το σύνολο των «στοιχειωδών» πιθανοτήτων p_i:

$$p_i \geq 0 \qquad \text{και} \qquad \sum_{i \in I} p_i = 1 .$$

Οι παραπάνω πιθανότητες ορίζουν τον νόμο πιθανότητας p_I, ο οποίος (σύμφωνα με την προηγούμενη παράγραφο) αντιστοιχεί στο διάνυσμα :

$$p = \sum_{i \in I} p_i e_i^* \in S_I \subset E_I \, *$$

Αντίστοιχα ο χώρος E_I των πραγματικών μεταβλητών a των ορισμένων στο σύνολο I, προσδιορίζεται από το διάνυσμα:

$$a = \sum_{i \in I} p_i a_i \in E_I$$

Η απεικόνιση :

$$p(a) = \sum_{i \in I} p_i a_i$$

προσδιορίζει την μέση τιμή της μεταβλητής a και αντιστοιχεί στο κέντρο βαρύτητας του νέφους N(I).

Ο χώρος των μεταβλητών E_1 είναι εφοδιασμένος με την μετρική D_p:

$$\begin{cases} D_p(e_i, e_j) = 0, i \neq j \\ D_p(e_i, e_j) = 1, i = j \end{cases}$$

Αντίστοιχα ο χώρος των μετρικών είναι εφοδιασμένος με την μετρική $D_{1/p}$:

$$\begin{cases} D_{1/p}(e_i, e_j) = 0, i \neq j \\ D_{1/p}(e_i, e_j) = 1, i = j \end{cases}$$

Συνδέοντας τις παραπάνω μετρικές:

$$\left.\begin{matrix} a \in E_1 \\ b \in E_1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow D_{1/p}\left(D_p a, D_p b\right) = D_p(a, b) \qquad \text{(Cailliez,1976)}$$

Ο χώρος των «κεντροποιημένων» μεταβλητών αντιστοιχεί σε υπόχωρο H συμπληρωματικό και D_p- ορθογώνιο στην ευθεία Δ_j. Η ευθεία αυτή παράγεται από το διάνυσμα: $j = \sum_{i \in I} e_i$:

$$E = \Delta_j \oplus H$$
$$H = \left\{a / a \in E, D_p(a, j) = 0\right\}$$

Ο περιορισμός της μετρικής D_p στον υπόχωρο H, ονομάζεται «μετρική της διακύμανσης – συνδιακύμανσης»:

$$a \in H \Rightarrow D_p(a, a) = D_p(a) = \sum_{i \in I} p_i a_i^2 = \text{var}(a)$$

$$\left.\begin{matrix} a \in H \\ b \in H \end{matrix}\right\} \Rightarrow D_p(a, b) = \sum_{i \in I} p_i a_i b_i = \text{cov}(a, b)$$

Η ευθεία Δ_j αντιστοιχεί στον χώρο E_1* στην ευθεία Δ_p, η οποία και παράγεται από τον νόμο πιθανότητας p:

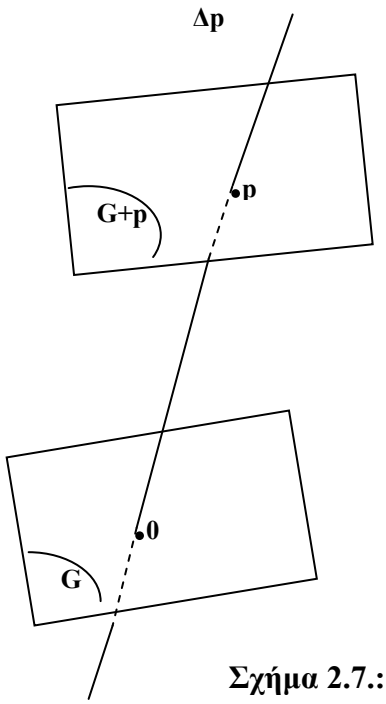
$$p = D_p(j) \Rightarrow \Delta_p = D_p(\Delta_j) = \left\{m / m = \alpha p, \alpha \in \Re\right\}.$$

Το υπερεπίπεδο H των «κεντροποιημένων» μεταβλητών αντιστοιχεί στο υπερεπίπεδο $G \subset E_1$ * των μετρικών «ολικής μάζας» μηδέν:

$$G = D_p(H) = \left\{ m / \sum_{i \in I} m_i = 0 \right\}.$$

$$m \in G \Leftrightarrow D_{1/p}(m, p) = m(j) = \sum_{i \in I} m_i = 0$$

Η ευκλείδια νόρμα της «διακύμανσης –συνδιακύμανσης», η οποία και συνιστά τον περιορισμό της μετρικής D_p στο υπερεπίπεδο H, αντιστοιχεί στην «νόρμα του X^2 με κέντρο p» η οποία και αντιστοιχεί στον περιορισμό της μετρικής $D_{1/p}$ στο υπερεπίπεδο G (Cailliez, 1976) (Σχήμα 2.7).



- Ο χώρος S_I περιέχεται στο υπερεπίπεδο G+p:
  $S_I \subset G + p$
- $q \in S_I \Rightarrow \sum_{i \in I} (q_i - p_i) = 0 \Rightarrow q - p \in G$

Σχήμα 2.7.: «Κεντροποίηση» του χώρου των μετρικών

Η νόρμα του X^2 με κέντρο p που ορίζεται στον χώρο S_I ονομάζεται «απόσταση του X^2 με κέντρο p»:

$$\left.\begin{matrix} q \in S_I \\ r \in S_I \end{matrix}\right\} \Rightarrow d^2_{X^2_p}(q,r) = \|q - r\|^2_{X^2_p} = D_{1/p}(q - r)$$

$$d^2_{X^2_p}(q,r) = \sum_{i \in I} \frac{(q_i - r_i)^2}{p_i}$$

2.8. ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ – ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΤΟΥ PEARSON

Ο K.Pearson (1900) διατύπωσε ένα κριτήριο σύμφωνα με το οποίο μπορούμε να ελέγξουμε την προσαρμογή μιας τυχαίας κατανομής συχνοτήτων σε έναν θεωρητικό νόμο πιθανότητας. Το κριτήριο αυτό έχει το όνομα του Pearson,

ονομάζεται έλεγχος του X^2 και ελέγχει την σύνδεση ή αλλιώς την «στοχαστική ανεξαρτησία» δύο ποιοτικών μεταβλητών x και y.

Πιο συγκεκριμένα θεωρούμε:

- Τον νόμο πιθανότητας p_{IJ} στο $(I \times J, P(I \times J))$, που ορίζεται από τις «στοιχειώδεις» πιθανότητες p_{ij}

τους περιθώριους νόμους πιθανότητας:

- p_I στο σύνολο (I,P(I)), που ορίζεται από τις «στοιχειώδεις» πιθανότητες:
  $p_{i.} = \sum_{j \in J} p_{ij}$
- p_J στο σύνολο (J,P(J)), που ορίζεται από τις «στοιχειώδεις» πιθανότητες:
  $p_{.j} = \sum_{i \in I} p_{ij}$

και τις υποθέσεις:

- H_0= Οι μεταβλητές x και y είναι ανεξάρτητες: $p_{ij} = p_{i.} p_{.j}$ για κάθε ζεύγος $(i, j) \in I \times J$
- H_1: Οι μεταβλητές x και y δεν είναι ανεξάρτητες.

Ξεκινώντας με την παραδοχή της ισχύος της H_0, θεωρούμε τον θεωρητικό νόμο πιθανότητας q_{IJ} στο $(I \times J, P(I \times J))$, που ορίζεται από τις «στοιχειώδεις» πιθανότητες $q_{ij} = p_{i.} p_{.j}$, $(i, j) \in I \times J$.

Στην περίπτωση που οι παραπάνω κατανομές δίνονται σε μορφή διδιάστατου πίνακα απολύτων συχνοτήτων, ελέγχουμε την ποσότητα:

$$X^2 = \sum_{(i,j) \in I \times J} \frac{\left(n_{ij} - \frac{n_{i.} n_{.j}}{n} \right)^2}{\frac{n_{i.} n.j}{n}}$$

Εξετάζουμε την τιμή της παραπάνω ποσότητας με βάση τους πίνακες της κατανομής του X^2 για (p-1)(q-1) βαθμούς ελευθερίας. Αν η πιθανότητα που υπολογίζουμε από τους πίνακες είναι πολύ μικρή τότε καταρρίπτεται η υπόθεση της ανεξαρτησίας των μεταβλητών. Στην αντίθετη περίπτωση, όταν η πιθανότητα που προσδιορίζουμε από τους πίνακες της X^2 κατανομής είναι πολύ μεγάλη τότε είμαστε βέβαιοι ότι επιλέξαμε

τον κατάλληλο θεωρητικό νόμο για να προσαρμόσουμε στα δεδομένα του φαινομένου που μελετούμε.

Το στατιστικό X^2, όπως αναπτύχθηκε παραπάνω δεν είναι ανεξάρτητο του μεγέθους n του δείγματος. Σε αυτή την περίπτωση είναι προτιμότερη η επιλογή ενός άλλου κριτηρίου ανεξάρτητο του μεγέθους. Το κριτήριο αυτό ονομάζεται κριτήριο ϕ^2 (Pearson, 1904) και προκύπτει από το στατιστικό X^2, αν αντικαταστήσουμε σ' αυτό τις απόλυτες συχνότητες με τις αντίστοιχες σχετικές συχνότητες (ή πιθανότητες):

$$\phi^2 = \sum_{(i,j)\in I\times J} \frac{(p_{ij} - p_{i.}p_{.j})^2}{p_{i.}p_{.j}}.$$

Αν θεωρήσουμε ότι ο νόμος πιθανότητας p_π αντιστοιχεί στις παρατηρηθείσες πιθανότητες p_{ij} και ο θεωρητικός νόμος p_θ της στοχαστικής ανεξαρτησίας αντιστοιχεί στο γινόμενο $p_{i.}p_{.j}$, τότε η παραπάνω ποσότητα γίνεται:

$$\phi^2 = \sum \frac{(p_\pi - p_\vartheta)^2}{p_\vartheta}$$

Η μέγιστη τιμή του ϕ^2 είναι 1 και στην περίπτωση αυτή εμφανίζεται απόλυτη σύνδεση μεταξύ των δύο χαρακτηριστικών.

Το ϕ^2 του Pearson έχει άμεση σχέση με την μετρική του X^2 που αναπτύχθηκε στην προηγούμενη παράγραφο. Πιο συγκεκριμένα, αν θεωρήσουμε τους νόμους πιθανότητας p_{ij} και q_{ij}:

$$\phi^2 = d^2_{\chi^2_{qIJ}}(p_{IJ}, q_{IJ}) = \sum_{(i,j)\in I\times J} \frac{(p_{ij} - p_{i.}p_{.j})^2}{p_{i.}p_{.j}}.$$

Όπως παρατηρούμε η ποσότητα ϕ^2 είναι ίση με το τετράγωνο της απόστασης του X^2 με κέντρο q_{IJ} των κατανομών p_{IJ} και q_{IJ} (Cailliez,1976).

$\phi^2 = 0 \Rightarrow p_{ij} = p_{i.}p_{.j}$ για κάθε ζεύγος $(i, j) \in I \times J$.

2.9. ΑΔΡΑΝΕΙΑ ΝΕΦΟΥΣ

Η αδράνεια του νέφους N(I) ως προς το κέντρο μάζας f_J ορίζεται από την ποσότητα:

$$I\left(N(I),f_J\right)=\sum_{i=1}^{p}f_i d^2\left(f_J^i,f_J\right)=\sum_{i=1}^{p}f_i\sum_{j=1}^{q}\left(\frac{1}{f_j}\left(\frac{f_{ij}}{f_i}-f_j\right)^2\right)\Rightarrow$$

$$I\left(N(I),f_J\right)=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\frac{\left(f_{ij}-f_i f_j\right)^2}{f_i f_j}=\frac{X^2}{n}=\phi^2$$

Αντίστοιχα, η αδράνεια νέφους N(J) ως προς το κέντρο μάζας f_I ορίζεται από την ποσότητα:

$$I\left(N(J),f_I\right)=\sum_{j=1}^{q}f_j d^2\left(f_I^j,f_I\right)=\sum_{j=1}^{q}f_j\sum_{i=1}^{p}\left(\frac{1}{f_i}\left(\frac{f_{ij}}{f_j}-f_i\right)^2\right)\Rightarrow$$

$$I\left(N(J),f_I\right)=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\frac{\left(f_{ij}-f_i f_j\right)^2}{f_i f_j}=\frac{X^2}{n}=\phi^2$$

Όπως προκύπτει από τις παραπάνω σχέσεις, οι δύο αδράνειες ταυτίζονται. Επίσης κάθε μία από αυτές τις ποσότητες ισούται με την ποσότητα ϕ^2 (Παπαδημητρίου, 1994), με την οποία μετράμε την σχέση εξάρτησης των ποιοτικών μεταβλητών x και y. Αυτή η διαπίστωση είναι ιδιαίτερα σημαντική, γιατί η έννοια αδράνεια νέφους εκτός από δείκτη μέτρησης των σχέσεων που παρατηρούνται μεταξύ των στοιχείων ενός νέφους (Κεφάλαιο 1^o) αποτελεί επίσης και δείκτη μέτρησης των σχέσεων που παρατηρούνται μεταξύ των δύο νεφών που χαρακτηρίζουν ένα πίνακα συχνοτήτων.

2.10. ΑΔΡΑΝΕΙΑ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑ

Η έννοια της πληροφορίας απαντάται συχνά στην επιστήμη της Στατιστικής, και συνιστά έναν τεχνικό όρο, ο οποίος έχει όμως πολλές και διαφορετικές ερμηνείες. Σε αυτήν την παράγραφο θα παραθέσουμε την άποψη του J.P. Benzecri (1973,1992), σύμφωνα με την οποία η πληροφορία (information) ενός πίνακα συχνοτήτων, όπως αυτή ερμηνεύεται από την σκέψη των Shannon, Brillouin, Kolmogorov, αντιστοιχεί στην ποσότητα της αδράνειας νέφους. Η παρουσίαση που θα ακολουθήσει είναι ενδεικτική και αποσκοπεί στην περιγραφή της παραπάνω θέσης.

Στην «Θεωρία της πληροφορίας» (information theory) του Shannon η έννοια της πληροφορίας είναι ταυτόσημη με αυτή της εντροπίας. Πιο συγκεκριμένα, ας

υποθέσουμε ότι ένα σύστημα πληροφορίας περιγράφεται από μία κατανομή πιθανοτήτων (έστω: $f_I, i \in I$) ορισμένη σε ένα πεπερασμένο σύνολο (έστω I). Θεωρούμε την πραγματική συνάρτηση H ορισμένη σε ένα σύνολο κλάσεων ισοδυναμίας A με τις εξής ιδιότητες (Krantz, 1971):

- $H(p) \geq 0$
- H, συνεχής
- $H(p \circ q) = H(p) + H(q)$

Η στατιστική εντροπία $H_1(p)$ ορίζεται από την σχέση:

$$H_1(p) = -\sum_I p_i \log p_i$$

Η παραπάνω ποσότητα αντιστοιχεί στην πληροφορία $IN(f_I)$ πους μας παρέχει ένα πείραμα πιθανοτήτων, αν υποθέσουμε ότι:

a) το σύνολο I είναι το σύνολο των 2^n αποτελεσμάτων h

b) καθένα από τα αποτελέσματα h, έχει την ίδια πιθανότητα εμφάνισης $f_i = \frac{1}{2^n}$

Τότε η αδράνεια $IN(f_I)$ ορίζεται ως εξής:

$$IN(f_I) = -\sum_I f_i \log_2 f_i .$$

Στην περίπτωση που το αποτέλεσμα h ορίζεται από το ζεύγος (i, j) δύο ανεξαρτήτων μεταβλητών i και j ($f_{ij} = f_i f_j$), τότε η πληροφορία που μας παρέχεται από το h(i, j) αντιστοιχεί στο άθροισμα της πληροφορίας που μας παρέχουν τα i και j.

$$-\sum \{f_{ij} \log_2 f_{ij} / i \in I, j \in J\} = -\sum \{f_i \log_2 f_i / i \in I\} - \sum \{f_j \log_2 f_j / j \in J\} \Rightarrow$$

$$IN(f_{IJ}) = IN(f_I) + IN(f_J) .$$

2.11. ΚΑΝΟΝΙΚΕΣ Η «ΚΑΝΟΝΙΚΟΠΟΙΗΜΕΝΕΣ» ΜΟΡΦΕΣ ΤΩΝ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Θεωρούμε δύο μέτρα πιθανότητας μ και ν τα οποία και είναι ορισμένα στον ίδιο μετρικό χώρο B. Ο χώρος B είναι διαμερισμένος σε κλάσεις ισοδυναμίας M_{ij}, τέτοιες ώστε:

$$B = \cup_j M_{ij}, \qquad M_{ij} \cap M_{ik} = \varnothing$$

Το ϕ^2 του Pearson ως δείκτης της εγγύτητας των παραπάνω κατανομών μπορεί να ορισθεί πιο γενικά ως εξής (Lancaster, 1969):

$$\phi^2(0) + 1 = \left[\nu(B)\right]^2 \Big/ \mu(B) = 1 \qquad \text{ή}$$

$$\phi^2(i) + 1 = \sum_j \frac{\left[\nu(M_{ij})\right]^2}{\mu(M_{ij})} = \sum_j \left[\frac{\nu(M_{ij})}{\mu(M_{ij})}\right]^2 \mu(M_{ij})$$

Ο ορισμός αυτός ερμηνεύει το ϕ^2 ως φραγμένο (bounded) αλλά και ως μη-φραγμένο (infinite) στην περίπτωση που $\mu(M_{ij})$=0.

Στην πρώτη περίπτωση η μετρική ν ονομάζεται ϕ^2-φραγμένη σε σχέση με την μ. Αν μάλιστα οι μετρικές αυτές είναι και συνεχείς τότε συνιστούν ένα ζεύγος ομογενών (homogenus) μετρικών, σύμφωνα με την θεωρία της πληροφορίας (Kullback,1977).

Ένας άλλος ορισμός που μπορεί να δοθεί στο ϕ^2, βασίζεται στον δείκτη $\Omega = \frac{d_\nu}{d_\mu}$ του Radon –Nikodym της μετρικής μ ως προς την μετρική ν (Lancaster, 1969):

$$\phi^2 + 1 = \int \frac{(d_\nu)^2}{d_\mu} = \int \left(\frac{d_\nu}{d_\mu}\right)^2 d_\mu = \int \Omega^2 d_\mu$$

Εάν η μετρική ν είναι ϕ^2-φραγμένη σε σχέση με την μ, τότε το Ω του Radon – Nikodym μπορεί να αναλυθεί σε σειρά οι όροι της οποίας συνιστούν ένα ορθοκανονικό σύνολο της μ και επιτρέπουν στην μετρική ν να γραφεί σε κανονική μορφή ως εξής:

$$d_\nu \equiv \Omega(x) d_\mu = \left(1 + \phi\left(\xi^1\right)\right) d_\mu,$$

όπου ξ^1 είναι ο πρώτος όρος του ορθοκανονικού συνόλου.

Στην περίπτωση των διακριτών μεταβλητών τον πίνακα συχνοτήτων $[f_{ij}]$ της διακριτής κατανομής $p \times q$ σημείων, θεωρούμε τον πίνακα B $(p \times q)$ με γενικό στοιχείο:

$$b_{ij} = \frac{f_{ij}}{\sqrt{f_{i.} f_{.j}}}$$

Τότε υπάρχουν ορθογώνιοι πίνακες M και N με στοιχεία της πρώτης στήλης $\sqrt{f_{i.}}$ και $\sqrt{f_{.j}}$ αντίστοιχα, ώστε ο πίνακας M'BN να γραφεί σε κανονική μορφή:

$$M'BN = C = \left[\mathrm{diag}\left(1, \rho_1, ..., \rho_{p-1}\right), 0_{p,q-p}\right]$$

Το ϕ^2 μπορεί να γραφεί:

$$\phi^2 = \sum_{i=1}^{p-1} \rho_i^2$$

Οι αριθμοί ρ^i ονομάζονται κανονικές συσχετίσεις και αντιστοιχούν στην μέγιστη συσχέτιση που μπορεί να παρατηρηθεί μεταξύ των δύο κανονικών μεταβλητών, οι οποίες και δίνονται με την μορφή ορθοκανονικών συνόλων ορισμένων στους χώρους των περιθώριων κατανομών των X και Y του πίνακα συχνοτήτων. Τα σύνολα αυτά είναι:

$$\xi^i = \sum_{k=1} \alpha_{ik} x^k \qquad \sum_k \alpha_{ik}^2 = 1$$

$$n^i = \sum_{k=1} b_{ik} x^k \qquad \sum_k b_{ik}^2 = 1.$$

2.12. ΠΑΡΑΓΟΝΤΙΚΟΙ ΑΞΟΝΕΣ

Τα δύο νέφη N(I) και N(J) αντιστοιχούν σε δύο αναπαραστάσεις του ίδιου πίνακα. Η πρώτη γίνεται μέσω των προφίλ – γραμμών και η δεύτερη μέσω των προφίλ – στηλών. Οι δύο αυτές αναπαραστάσεις δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, συνδέονται όμως με όρους δυϊκότητας (Escofier, 1990). Ο παραπάνω χαρακτηρισμός θεωρείται θεμελιώδης για την Παραγοντική Ανάλυση (και κατ' επέκταση για την Παραγοντική Ανάλυση των Αντιστοιχιών) και εκφράζεται από το γεγονός ότι οι δύο αναλύσεις έχουν την ίδια ολική αδράνεια, την ίδια διάσταση και το ίδιο μοίρασμα της αδράνειας στους παραγοντικούς άξονες. Με βάση αυτή την θεώρηση, η ανάλυση του νέφους N(I) ερμηνεύει και την αντίστοιχη ανάλυση του νέφους N(J).

Ο πίνακας SOM_J^J του αυτομορφισμού $\sigma \circ m$ του νέφους N(I) χαρακτηρίζεται από τους τανυστές σ_{JJ} και m^{JJ} (Bastin, 1980):

$$\sigma_{jj'} = \sum \left\{ f_i \left(f_j^i - f_j \right) \left(f_{j'}^i - f_{j'} \right) / i \in I \right\} = \sum \left\{ f_i f_j^i f_{j'}^i / i \in I \right\} - f_j f_{j'}$$

$$m^{jj'} = \begin{cases} \frac{1}{f_j}, j = j' \\ 0, j \neq j' \end{cases}$$

$$SOM_j^{j'} = \sum \left\{ \sigma_{jj''} m^{j''j'} / j'' \in J \right\}$$

$$= \frac{\left(\sum \left\{ f_i f_j^i f_{j'}^i / i \in I \right\} - f_j f_{j'} \right)}{f_{j'}} = \sum \left\{ f_j^i f_i^{j'} / i \in I \right\} - f_j$$

$$= \sum \frac{f_{jj} f_{jj'}}{f_i f_{j'}} - f_j$$

Στην περίπτωση του νέφους N(J) ο παραπάνω πίνακας είναι:

$$SOM_i^{i'} = \sum \left\{ f_i^j f_j^{i'} / j \in J \right\} - f_i$$

Οι δύο πίνακες $SOM_j^{j'}$ και $SOM_i^{i'}$ είναι της ίδιας τάξης r, η οποία αντιστοιχεί στην μικρότερη διάσταση του πίνακα συχνοτήτων μειωμένη κατά ένα:

r=p-1 (p<q) ή r=q-1 (q<p).

Η διαγωνιοποίηση του πίνακα $SOM_j^{j'}$ εκφράζεται μέσω των ιδιοτιμών λ_α και των αντίστοιχων ιδιοδιανυσμάτων $u_{\alpha J}$ {α=1,…,r}. Οι ιδιοτιμές λ_α είναι μικρότερες ή ίσες της μονάδας. Η ιδιοτιμή λ_α=1 ονομάζεται τετριμμένη (trivial) και δεν υπολογίζεται στην ανάλυση γιατί στην ουσία αντιστοιχεί στον άξονα που μεταφέρει την αρχή των αξόνων στο κέντρο βαρύτητας του νέφους. Οι υπόλοιπες ιδιοτιμές λ_α {α=1,…,r}, δίνονται σε φθίνουσα σειρά:

$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_\alpha < \ldots < \lambda_r$

η οποία αντιστοιχεί και στην σειρά διάταξης των παραγοντικών αξόνων, δηλ. η μεγαλύτερη ιδιοτιμή αντιστοιχεί στον 1ο παραγοντικό άξονα, κ.ο.κ..

Οι παραγοντικοί άξονες $\Delta u_{\alpha j}$ του νέφους N(I) αντιστοιχούν στα κανονικοποιημένα ιδιοδιανύσματα $\frac{u_{\alpha j}}{f_j}$ (μέτρου: $\left\| \frac{u_{\alpha j}}{f_j} \right\|^2 = 1$), διέρχονται από το κέντρο μάζας του f_J και ορίζουν την ορθοκανονική βάση του βέλτιστου υπόχωρου. Η αδράνεια που ερμηνεύει ο κάθε άξονας Δu_α περιγράφεται από την αντίστοιχη ιδιοτιμή λ_α. Η αδράνεια εκφράζει την ποιότητα αναπαράστασης του νέφους στον κάθε παραγοντικό άξονα και είναι μέγιστη. Η ολική αδράνεια του συνόλου των παραγοντικών αξόνων $I_{o\lambda}$ αντιστοιχεί στην αδράνεια του νέφους N(I) και περιγράφεται από το άθροισμα των ιδιοτιμών λ_α:

$$I_{o\lambda} = I(N(I)) = \sum_{\alpha=1}^{r} \lambda_\alpha$$

Η συμμετοχή του κάθε παραγοντικού άξονα στην ερμηνεία της ποσότητας $I_{o\lambda}$ εκφράζεται με το ποσοστό:

$$I_\alpha = \frac{\lambda_\alpha}{I_{o\lambda}}$$

Στην περίπτωση που αναφερόμαστε σε συγκεκριμένο γραμμικό συνδυασμό παραγοντικών αξόνων $U=\{ \Delta u_{1j},\ldots, \Delta u_{\mu j}/m<r\}$, τότε το αντίστοιχο ποσοστό γίνεται:

$$I_U = \frac{\sum_{i=1}^{m} \lambda_\alpha}{I_{o\lambda}}$$

Στην πράξη υπάρχουν το πολύ m παραγοντικοί άξονες με ερμηνεύσιμη αδράνεια διάφορη του μηδενός (Παπαδημητρίου, 1994).

Οι παραγοντικοί άξονες $\Delta u_{\alpha J}$ αντιπροσωπεύουν στο χώρο «simplex» S_J τις συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας $\varphi^J = \frac{u_j}{f_j}$ με τις εξής ιδιότητες (Benzecri, 1992):

- Μέση τιμή: $\sum \left\{ f_j \phi^j / j \in J \right\} = \sum \left\{ f_j \left(\frac{u_j}{f_j} \right) / j \in J \right\} = 0$
- Διακύμανση: $\sum \left\{ \left(\phi^j \right)^2 f_j \right\} = 1$

Οι συναρτήσεις πιθανότητας φ^J ονομάζονται κύριοι παράγοντες ή κανονικοί παράγοντες (δάνειο από την Κανονική Ανάλυση) και συνιστούν την νέα ορθοκανονική βάση του χώρου «simplex» S_J. Η παρατήρηση αυτή είναι σε άμεση συμφωνία με τις βασικές αρχές της θεωρίας του ϕ^2 (που αναπτύχθηκε σε προηγούμενη παράγραφο) και επιτρέπει την περιγραφή της διακριτής κατανομής f_J (και της f_J^i) από ένα πεπερασμένο αριθμό ανεξάρτητων και «κανονικοποιημένων» συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας. Η νέα αυτή θεώρηση του χώρου S_J δικαιολογείται και με όρους της Θεωρίας της Πληροφορίας καθόσον από όλες τις κατανομές πιθανότητας, μόνο η κανονική κατανομή (και κατ' επέκταση η «κανονικοποιημένη») παρουσιάζει την μέγιστη εντροπία (αδράνεια) (Κουνιάς, 1991).

Ανάλογα ορίζονται και οι παραγοντικοί άξονες $\Delta u_{\alpha i}$ του νέφους N(J), οι οποίοι και αντιστοιχούν στα κανονικοποιημένα ιδιοδιανύσματα $\frac{u_{\alpha i}}{f_i}$ (μέτρου: $\left\| \frac{u_{\alpha i}}{f_i} \right\|^2 = 1$), διέρχονται από το κέντρο μάζας του f_I και ορίζουν την ορθοκανονική βάση του βέλτιστου υπόχωρου. Αντίστοιχα οι παραπάνω άξονες $\Delta u_{\alpha i}$ ορίζουν την ορθοκανονική βάση του χώρου «simplex» S_I, ο οποίος και προσδιορίζεται από ένα σύστημα ανεξάρτητων και «κανονικοποιημένων» συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας ψ^I, με τις εξής ιδιότητες:

- Μέση τιμή: $\sum \left\{ f_i \psi^i / i \in I \right\} = \sum \left\{ f_i \left(\frac{u_i}{f_i} \right) / i \in I \right\} = 0$
- Διακύμανση: $\sum \left\{ \left(\psi^i \right)^2 f_i \right\} = 1$

Η συσχέτιση μεταξύ του κανονικού παράγοντα φ^α και της κανονικού παράγοντα ψ^α είναι μέγιστη για κάθε παραγοντικό άξονα α. Η συσχέτιση αυτή ονομάζεται κανονική συσχέτιση (canonical correlation) και αντιστοιχεί στην τετραγωνική ρίζα $\left(\sqrt{\lambda_\alpha} \right)$ της αντίστοιχης ιδιοτιμής. Η παρατήρηση αυτή συμπίπτει με την γενική αρχή της Ανάλυσης σε Κύριες Συνιστώσες, όπως αυτή διατυπώθηκε από τον Hotelling (1930).

Οι φ^α και ψ^α είναι συναρτήσεις ορισμένες αντίστοιχα στα σύνολα και I και J και ονομάζονται «πυκνότητες» των παραγοντικών αξόνων $\Delta u_{\alpha j}$ και $\Delta u_{\alpha i}$ (Benzecri, 1992).

2.13. ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ

Το νέφος N(I) των κατανομών των προφίλ-γραμμών f_J^i στον χώρο S_J και το νέφος N(J) των κατανομών των προφίλ-στηλών f_I^j στον χώρο S_I, προσδιορίζονται με βάση τις συντεταγμένες τους στους δύο υπόχωρους που ορίζουν οι παραγοντικοί άξονες των νεφών. Οι συντεταγμένες των προφίλ f_J^i του νέφους N(I) στον παραγοντικό άξονα Δu_α συνιστούν τον παράγοντα F_α, ο οποίος και ερμηνεύεται ως συνεχής τυχαία μεταβλητή που προσδιορίζεται από τον «κανονικοποιημένο» νόμο πιθανότητας νόμο πιθανότητας φ^α στο S_J:

$$F_\alpha(i) = \sum_{j=1}^{r} \frac{u_{\alpha j}}{f_{.j}} \frac{f_{ij}}{f_{i.}} = \sum_{j=1}^{r} \phi^\alpha \frac{f_{ij}}{f_{i.}}$$

Οι παράγοντες είναι κεντροποιημένοι (μέση τιμή ίση με μηδέν) και η διακύμανση τους είναι ίση με λ_α:

$\overline{F}_\alpha(i) = 0$ και $Var(F_\alpha) = \lambda_\alpha$

Επίσης οι παράγοντες δεν είναι συσχετισμένοι μεταξύ τους:

$Cov(F_\kappa, F_\mu) = 0$

Αντίστοιχα ορίζονται οι παράγοντες G_α του νέφους N(J), ως συναρτήσεις ορισμένες στο J με στοιχεία τις συντεταγμένες των προφίλ f_I^j στους παραγοντικούς άξονες Δu_α. Οι παράγοντες G_α ερμηνεύονται ως συνεχείς τυχαίες μεταβλητές που χαρακτηρίζονται από τις «κανονικοποιημένες» κατανομές πιθανότητας ψ^α στο S_I:

$$G_\alpha(j) = \sum_{j=1}^{r} \frac{u_{\alpha i}}{f_{i.}} \frac{f_{ij}}{f_{.j}} = \sum_{j=1}^{r} \psi^\alpha \frac{f_{ij}}{f_{.j}}$$

Οι παράγοντες G_α είναι κεντροποιημένοι με διακύμανση ίση με λ_α και είναι ασυσχέτιστοι μεταξύ τους.

$\overline{G}_\alpha(j) = 0$, $Var(G_\alpha) = \lambda_\alpha$ και $Cov(G_\kappa, G_\mu) = 0$.

2.14. ΣΧΕΣΕΙΣ ΣΥΝΔΕΣΗΣ ΤΩΝ ΠΑΡΑΓΟΝΤΩΝ ΣΤΑ ΔΥΟ ΣΥΝΟΛΑ: ΣΧΕΣΗ ΜΕΤΑΒΑΣΗ ΚΑΙ ΣΧΕΣΗ ΑΝΑΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ

Οι όροι «παράγοντας» και «κανονικός παράγοντας» συνιστούν δύο διαφορετικές εκφράσεις περιγραφής του ίδιου φαινομένου σε διαφορετικούς χώρους. Για παράδειγμα, η περιγραφή του αντικειμένου i ενός πίνακα δεδομένων εκφράζεται στον χώρο S_I από τους κανονικούς παράγοντες ψ^α, ενώ στο νέφος N(J) το ίδιο αντικείμενο i περιγράφεται από τον παράγοντα $F_\alpha(i)$. Αντίστοιχα, η μεταβλητή j περιγράφεται στον χώρο S_J από τους κανονικούς παράγοντες φ^α και στο νέφος N(I) από τους παράγοντες $G_\alpha(j)$. Οι παραπάνω θέσεις συνδέονται μεταξύ τους με το σύστημα των εξισώσεων:

$$F_\alpha(i) = \sqrt{\lambda_\alpha}\psi^\alpha \qquad \text{και}$$

$$G_\alpha(j) = \sqrt{\lambda_\alpha}\phi^\alpha$$

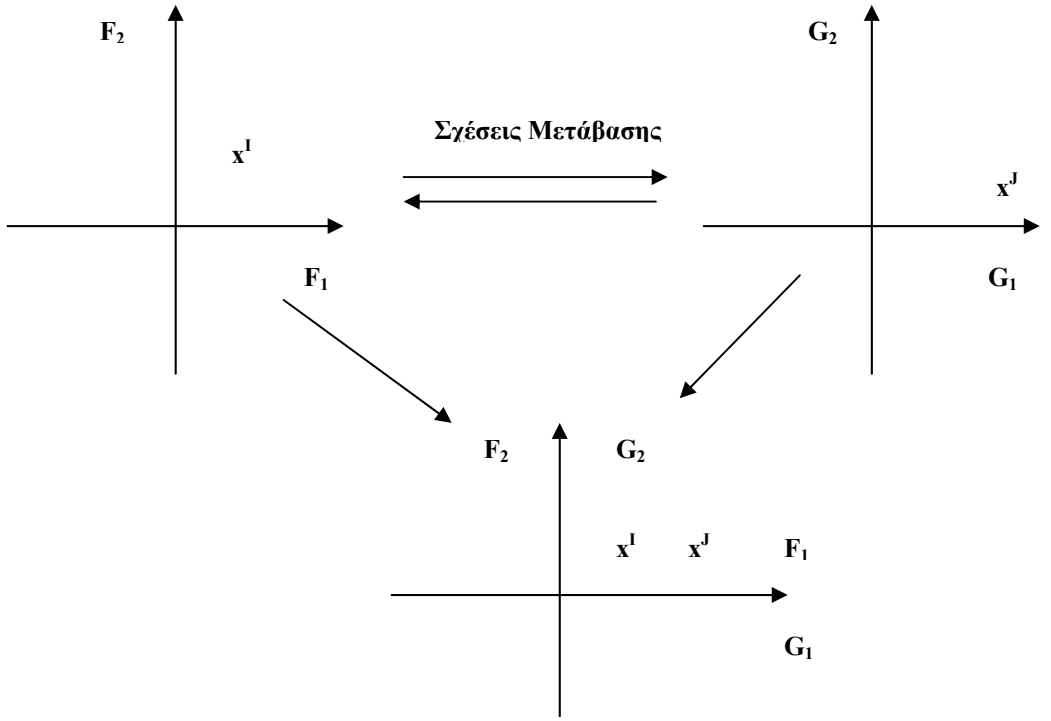
Ο Creenacre (1993) αναφέρεται στους παράγοντες ως «θέσεις των προφίλ» (profile positions) και αντίστοιχα στους κανονικούς παράγοντες ως «θέσεις των κορυφών» (vertex positions). Σ' αυτή την περίπτωση ο συντελεστής $\sqrt{\lambda_\alpha}$ ερμηνεύεται ως βαθμωτός παράγοντας (scaling factor) και δηλώνει την αλλαγή κλίμακας που λαμβάνει χώρα κατά την μεταφορά στους παραπάνω χώρους.

Οι παραπάνω σχέσεις μπορούν να συντμηθούν και να ορίσουν μία νέα κατηγορία σχέσεων οι οποίες με ορολογία πιθανοτήτων ονομάζονται σχέσεις μετάβασης (transition formula). Οι σχέσεις αυτές επιτρέπουν την σύνδεση των παραγόντων F_α του συνόλου I και G_α του συνόλου J και αναδεικνύουν τον συμμετρικό ρόλο των γραμμών I και των στηλών J στην ανάλυση (Benzecri, 1992):

$$F_\alpha(i) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_\alpha}}\sum_{j=1}^{q}\frac{f_{ij}}{f_{i.}}G_\alpha(j) \qquad \text{και}$$

$$G_\alpha(j) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_\alpha}}\sum_{i=1}^{p}\frac{f_{ij}}{f_{.j}}F_\alpha(i).$$

Οι σχέσεις αυτές διέπονται από την λεγόμενη βαρυκεντρική αρχή (barycentic principle). Σύμφωνα με αυτή την θέση κάθε παράγοντας F_α αντιστοιχεί (εκτός του συντελεστή $1/\sqrt{\lambda_\alpha}$) στον σταθμισμένο μέσο των παραγόντων G_α, με βάρη τα προφίλ $\left\{f_J^i / j \in J\right\}$. Αντίστοιχα, κάθε παράγοντας G_α αντιστοιχεί (εκτός του συντελεστή $1/\sqrt{\lambda_\alpha}$) στον σταθμισμένο μέσο των παραγόντων F_α, με βάρη τα προφίλ $\left\{f_I^j / i \in I\right\}$. Οι σχέσεις μετάβασης επιτρέπουν την ταυτόχρονη παρουσίαση των παραγόντων F_α και G_α σε ένα ή περισσότερα παραγοντικά επίπεδα (Σχήμα 2.8).



Σχήμα 2.8.: Σχέσεις Μετάβασης

Οι δύο σχέσεις μετάβασης από τους παράγοντες F_α στους παράγοντες G_α, μας οδηγούν στην διατύπωση της σχέσης ανακατασκευής (reconstitution formula):

$$f_{ij} = f_{i.} f_{.j} \left(1 + \sum_{\alpha=1}^{r} \frac{1}{\sqrt{\lambda_\alpha}} F_\alpha(i) G_\alpha(j) \right).$$

Η σχέση αυτή επαναπροσδιορίζει τα δεδομένα (συχνότητες f_{ij}) από τους παράγοντες $F_\alpha(i)$ και $G_\alpha(j)$. Επειδή όμως η διακυμάνσεις των $F_\alpha(i)$ και $G_\alpha(j)$ τείνουν στην χαρακτηριστική τιμή λ_α, ο όρος $\frac{1}{\sqrt{\lambda_\alpha}} F_\alpha(i) G_\alpha(j)$ τείνει στο $\sqrt{\lambda_\alpha}$.

Παρατηρώντας την σχέση επαναπροσδιορισμού των δεδομένων, διαπιστώνουμε για τις προσεγγίσεις των γραμμών i και των στηλών j επί της γραφικής παράστασης που παρουσιάζεται στο παραγοντικό επίπεδο τα παρακάτω (Παπαδημητρίου, 1994):

- Δύο σημεία M_i και N_j που αντιστοιχούν στην γραμμή i και στην στήλη j και βρίσκονται μακρυά από την αρχή των αξόνων αλλά το ένα πλησίον του άλλου, θα πρέπει να παρουσιάζουν υψηλή συχνότητα f_{ij} στον πίνακα δεδομένων.

- Δύο σημεία M_i και N_j που βρίσκονται μακρυά από την αρχή των αξόνων και αντιπαρατίθενται επί του παραγοντικού επιπέδου θα πρέπει να παρουσιάζουν χαμηλή συχνότητα f_{ij} στον πίνακα δεδομένων.
- Οι μικρές χαρακτηριστικές τιμές λ_α, δηλώνουν πολύ χαμηλή την σχέση ανεξαρτησίας μεταξύ των γραμμών και των στηλών επί του αντίστοιχου παραγοντικού άξονα.

2.15. ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΩΝ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

Για την ερμηνεία των αποτελεσμάτων της Παραγοντικής Ανάλυσης των Αντιστοιχιών χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε ένα σύνολο δεικτών (Escofier, 1990).

1. Το ποσοστό αδράνειας I_α, το οποίο όπως αναφέρθηκε σε προηγούμενη παράγραφο αντιστοιχεί στο ποσοστό της αδράνειας που ερμηνεύει ο κάθε παραγοντικός άξονας Δu_α.
2. Η συνεισφορά (Contribution) του αντικειμένου i στον άξονα α εκφράζει το ποσοστό συμμετοχής του i στο μέρος της αδράνειας που εξηγεί ο άξονας α:

$$CTR_\alpha(i) = \frac{f_i F_\alpha(i)^2}{\lambda_\alpha}$$

Ο δείκτης αυτός, δείχνει ποια είναι τα σημεία που είναι κυρίως υπεύθυνα για την δημιουργία του παραγοντικού άξονα. Το άθροισμα των CTR_α για όλα τα σημεία είναι 1 (100%):

$$\sum_{\alpha=1}^{r} CTR_\alpha(i) = 1.$$

3. Η σχετική συνεισφορά του άξονα α στο σημείο i, εκφράζει μια μορφή συσχέτισης του σημείου i με τον παραγοντικό άξονα τάξης α. Αυτή εκφράζεται με την ποσότητα COR, που είναι ίση με το τετράγωνο του συνημίτονου της γωνίας ω που σχηματίζει ο άξονας με την ευθεία που ενώνει το σημείο i με το κέντρο βάρους του νέφους:

$$Cor_\alpha(i) = \frac{F_\alpha^2(i)}{r^2(i)} = \cos^2\omega, \qquad \text{όπου:}$$

$F_\alpha(i)$: η προβολή του i στον άξονα α.

r(i): η απόσταση του i από το κέντρο βάρους

Μια μεγάλη τιμή του $COR_\alpha(i)$ μεταφράζεται σε μια μικρή γωνία ω, δηλαδή το πλησιάζει i τον άξονα α, ή λέμε ότι είναι υψηλά συσχετισμένο με τον άξονα αυτό. Επίσης ο δείκτης $COR_\alpha(i)$ εκφράζει και το ποσοστό της αδράνειας του σημείου i που ερμηνεύεται από τον παραγοντικό άξονα α.

4. Για κάθε σημείο , και για το πλήθος των πρώτων παραγοντικών αξόνων, (συνήθως 2 ή 3) ο δείκτης QLT, είναι ίσος με το άθροισμα των COR για τους άξονες αυτούς. Ο δείκτης αυτός εκφράζει την ποιότητα αναπαράστασης του σημείου i στο σύστημα των πρώτων παραγοντικών αξόνων. Όπως είναι φυσικό, για το σύνολο όλων των παραγοντικών αξόνων, έχουμε: QLT=1 (100%).

Ο δείκτης CTR βοηθά στην αναζήτηση των σημείων που έχουν μεγάλη συμμετοχή στην δημιουργία των παραγοντικών αξόνων. Ο δείκτης COR βοηθά στον εντοπισμό των σημείων που παρουσιάζουν την καλύτερη αναπαράσταση από έναν παραγοντικό άξονα. Στις περισσότερες περιπτώσεις, σημεία με υψηλή τιμή CTR έχουν και υψηλή τιμή COR. Μπορεί όμως να συμβεί να υπάρχουν σημεία με χαμηλή τιμή CTR και υψηλή τιμή COR για κάποιο παραγοντικό άξονα. Τα σημεία αυτά παρόλο που δεν συμμετέχουν στην κατασκευή του παραγοντικού άξονα, ερμηνεύονται πολύ καλά απ' αυτόν. Ακόμη μπορεί να υπάρχουν σημεία με υψηλή τιμή CTR και χαμηλή τιμή COR για κάποιο παραγοντικό άξονα. Τα σημεία αυτά συνεισφέρουν στην δημιουργία του άξονα, αλλά η χαμηλή τιμή του COR εξηγείται από το γεγονός ότι υπάρχουν και άλλοι παραγοντικοί άξονες με τους οποίους συσχετίζονται τα σημεία και για την κατασκευή των οποίων συνεισφέρουν.

Ανάλογα ορίζονται και η απόλυτη συνεισφορά και σχετική συνεισφορά της μεταβλητής j στον παραγοντικό άξονα α:

$$CTR_\alpha(j) = \frac{f_j F_\alpha(j)^2}{\lambda_\alpha} \qquad \text{και} \qquad Cor_\alpha(j) = \frac{F_\alpha^2(j)}{r^2(j)} = \cos^2\omega .$$

2.16. ΕΙΔΗ ΠΑΡΑΓΟΝΤΩΝ

Οι δείκτες που αναφέρθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο προσδιορίζουν την βάση πάνω στην οποία στηρίζεται η ερμηνεία των αποτελεσμάτων μιας ανάλυσης. Παρόλα αυτά το σημαντικότερο μέσο πάνω στο οποίο μπορεί να στηριχθεί ένας αναλυτής δεδομένων, είναι η εμπειρία του και μόνο αυτή. Η παρατήρηση αυτή είναι χαρακτηριστική και θεμελιώνει τον ρόλο του ανθρώπινου παράγοντα στην ανάλυση αντιπαρατίθοντας στην μηχανική διαδικασία της μεθόδου την υποκειμενική ερμηνεία των αποτελεσμάτων. Παρόλα αυτά, η ερμηνεία των παραγόντων-μεταβλητών (και κατ' επέκταση των παραγοντικών αξόνων) στην περίπτωση της Παραγοντικής Ανάλυσης των Αντιστοιχιών μπορεί να ταξινομηθεί (με όρους εμπειρίας) σε πέντε κατηγορίες (Escofier, 1990).

1. Ο παράγοντας ερμηνεύεται από συγκεκριμένα σημεία τα οποία έχουν μεγάλη συμμετοχή στην αδράνεια του άξονα, αλλά βρίσκονται σε πλήρη ασυμφωνία με τα υπόλοιπα σημεία τα οποία και προβάλλονται σε αυτόν.

2. Ο παράγοντας ονομάζεται παράγοντας αντίθεσης και δηλώνει μέσω των συντεταγμένων του την αντιπαράθεση των ακραίων καταστάσεων του φαινομένου. Η ιδιότητα αυτή του παράγοντα ονομάζεται «διχοτομητική».

3. Ο παράγοντας δηλώνει την παρουσία μιας ομάδας σημείων, η οποία ομάδα συνήθως καταλαμβάνει την κεντρική ζώνη στον άξονα. Το σύνολο των σημείων αυτών αντιπαρατίθεται μάλλον ασύμμετρα, με τα υπόλοιπα σημεία

4. Ο παράγοντας αντιστοιχεί σε έναν διαμερισμό του συνόλου των γραμμών (ή των στηλών) σε κλάσεις. Η κατάσταση αυτή παρατηρείται στην περίπτωση που η μέγιστη ιδιοτιμή πλησιάζει την μονάδα, $\lambda_1 \approx 1$. Τότε μπορεί να υπάρχει ένας διαμερισμός του I και του J, ώστε κάθε κλάση του I να συνδέεται με μία κλάση του J και αντιστρόφως. Η κατάσταση αυτή ονομάζεται κατάσταση «ακραίας εξάρτησης» των δύο ποιοτικών μεταβλητών και επιτρέπει των διαμερισμό των δύο συνόλων σε ίσο αριθμό κλάσεων. Στην

περίπτωση αυτή οι συντεταγμένες των στοιχείων στις κλάσεις είναι ίδιες με τις συντεταγμένες τους στον παραγοντικό άξονα.

5. Ο παράγοντας αντιστοιχεί σε μεταβλητή διαφορετική των προβαλλόμενων και υποδηλώνει την σχέση σύνδεσης μεταξύ αυτών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^{Ο}

Μέτρηση

3.0. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η παρουσία της μέτρησης έχει θεμελιώδη ρόλο σε κάθε επιστημονική διαδικασία. Η μέτρηση συνιστά τον συνδετικό κρίκο ανάμεσα στην επιστημονική θεώρηση και στην εμπειρική της διατύπωση και επιβεβαιώνει την αξιοπιστία των συμπερασμάτων της θεωρίας. Πιο συγκεκριμένα, χωρίς την παρουσία πρακτικής εφαρμογής, η προτεινόμενη θεωρία δεν υπόκειται σε καμιά επιστημονική αξιολόγηση.

Η μέτρηση εφαρμόζεται σε κάθε πτυχή της καθημερινής ζωής του ανθρώπου και για αυτόν τον λόγο κανένας επιστημονικός τομέας δεν μπορεί να καρπωθεί την αποκλειστικότητα της. Η συνεχώς επεκτεινόμενη χρήση της μέτρησης στην επιστήμη και στην φιλοσοφία δεν επέτρεψε την διατύπωση ενός ακριβούς προσδιορισμού του όρου «μέτρηση», παρά μιας πλειάδας αυτών που προήλθαν από την σκέψη του κάθε διανοητή. Οι πιο χαρακτηριστικοί ορισμοί της μέτρησης αναφέρονται στους: Russell(1938), Campbell (1938) και Stevens (1951). Σύμφωνα με τον τελευταίο ως «μέτρηση ονομάζουμε την αντιστοίχιση αριθμών σε αντικείμενα ή γεγονότα σύμφωνα με κάποιου είδους κανόνες…». Ο παραπάνω ορισμός μεταφέρει την έννοια της μέτρησης στα αντικείμενα καθώς και στις αντίστοιχες ιδιότητες τους. Η πιο κοινή μορφή μέτρησης αντικειμένων παρουσιάζεται με τους όρους της ταξινόμησης (classification) ή αλλιώς ταυτοποίησης (identification) (Chankong, 1983). Για παράδειγμα, ο αριθμός της φανέλας ενός παίχτη μιας ομάδας ποδοσφαίρου είναι χαρακτηριστικό παράδειγμα της ταυτοποίησης. Στο ίδιο επίσης παράδειγμα, το ύψος, το βάρος καθώς και άλλες φυσικές ιδιότητες του κάθε παίχτη αναφέρονται στην μέτρηση των ιδιοτήτων των αντικειμένων (παιχτών).

Ο μαθηματικός ορισμός της μέτρησης βασίζεται στην έννοια της δυαδικής σχέσης. Υπάρχουν διάφορα είδη δυαδικών σχέσεων που χαρακτηρίζονται από συγκεκριμένες ιδιότητες. Στο κεφάλαιο αυτό θα κάνουμε μια αρχική αναφορά στο θέμα της σχέσης προτίμησης, το οποίο και έχει βαρύνουσα θέση στην θεματολογία της Πολυκριτήριας Ανάλυσης. Τέλος θα επιχειρήσουμε και μια προσέγγιση μεταξύ των συγγενών μεθόδων της Παραγοντικής Ανάλυσης των Αντιστοιχιών και της Ταξινόμησης κατ' αύξουσα Ιεραρχία. Η προσέγγιση αυτή θα γίνει στην βάση των σχέσεων ισοδυναμίας.

3.1. ΔΥΑΔΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

Θεωρούμε τα σύνολα I και J. Ονομάζουμε δυαδική σχέση R μεταξύ των συνόλων I και J, κάθε σύνολο R των διατεταγμένων ζευγών (i,j), όπου:

$$R = \{(i, j) / i \in I, j \in J\}.$$

Το σύνολο R είναι υποσύνολο του καρτεσιανού γινομένου $I \times J$:

$$R \subset I \times J.$$

Στην περίπτωση που τα σύνολα I και J ταυτίζονται (I= J), η R ονομάζεται δυαδική σχέση στο I, ή αλλιώς γράφημα (graph) στο I.

Η παράσταση $(i, j) \in R$, δηλώνει ότι τα στοιχεία i και j συνδέονται μεταξύ τους με την δυαδική σχέση R. Συνηθίζεται όμως η παραπάνω θέση να προσδιορίζεται ως: iRj.

Η δυαδική σχέση R μεταξύ των συνόλων I και J, επιτρέπει την αντιστοιχία (απεικόνιση) του $i \in I$ με το μέρος του J το οποίο και συνιστούν τα στοιχεία του $j \in J$: iRj. Στην περίπτωση αυτή, το σύνολο των δυαδικών σχέσεων μεταξύ των I και J, αντιστοιχεί στο σύνολο των απεικονίσεων του I στο δυναμοσύνολο P(J) των τμημάτων του J.

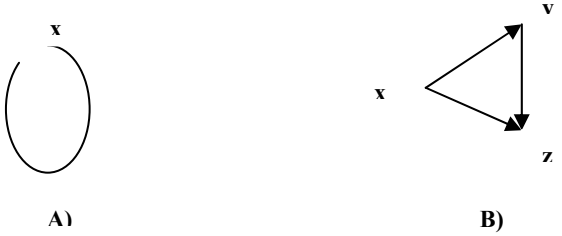
3.2. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΕΙΔΗ ΤΩΝ ΔΥΑΔΙΚΩΝ ΣΧΕΣΕΩΝ

Έστω R μία δυαδική σχέση σε ένα σύνολο I. Η R ονομάζεται:

- *Ανακλαστική*: $iRi, \quad \forall i \in I$
- *Μη-ανακλαστική*: $i\not{R}i, \quad \forall i \in I$
- Συμμετρική: $iRj \Rightarrow jRi, \quad \forall i, j \in I$
- *Ασυμμετρική*: $iRj \Rightarrow j\not{R}i, \quad \forall i, j \in I$
- *Αντισυμμετρική*: $\left.\begin{matrix} iRj \\ jRi \end{matrix}\right\} \Rightarrow i = j, \quad \forall i, j \in I$
- *Μεταβατική*: $\left.\begin{matrix} iRj \\ jRk \end{matrix}\right\} \Rightarrow iRk, \quad \forall i, j, k \in I$
- *Αρνητικά Μεταβατική*: $\left.\begin{matrix} i\not{R}j \\ j\not{R}k \end{matrix}\right\} \Rightarrow i\not{R}k, \ \forall i, j, k \in I$
- *Συνδεδεμένη (connected) ή πλήρης (complete)*: (iRj) ή $(jRi), \quad \forall i, j \in I$
- *Μερική*: (iRj) ή $(jRi), \quad \forall i, j \in I.$
- *Ασθενώς συνδεδεμένη (weakly connected)*: $i \neq j \Rightarrow (iRj)$ ή $(jRi), \quad \forall i, j \in I.$

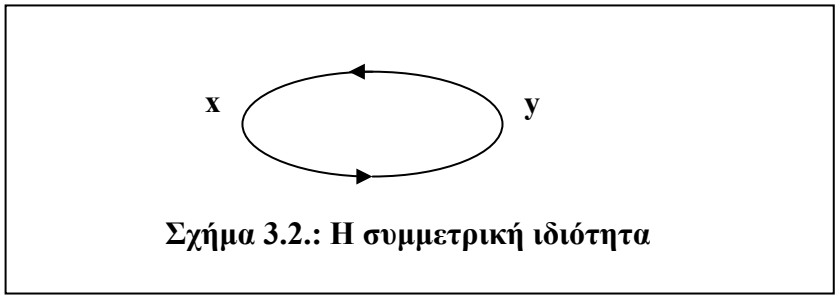
Οι δυαδικές σχέσεις, οι οποίες είτε έχουν, είτε υποτίθεται, ότι έχουν συγκεκριμένες ιδιότητες, έχουν και συγκεκριμένα ονόματα. Οι πιο σημαντικές δυαδικές σχέσεις με τις οποίες και θα ασχοληθούμε στο κεφάλαιο αυτό είναι οι σχέσεις της προδιάταξης, της διάταξης και της ισοδυναμίας (Cailliez, 1976), (Fishburn, 1970) (Bertier, 1975).

Η προδιάταξη (preordre) είναι δυαδική σχέση η οποία και χαρακτηρίζεται από την ανακλαστική και μεταβατική ιδιότητα . Το παρακάτω σχήμα (Σχήμα 3.1.) περιγράφει τις δύο αυτές ιδιότητες σε μορφή γραφήματος. Στην περίπτωση που η προδιάταξη αναφέρεται στο σύνολο των ζευγών του I, ονομάζεται ολική προδιάταξη (preordonnance).



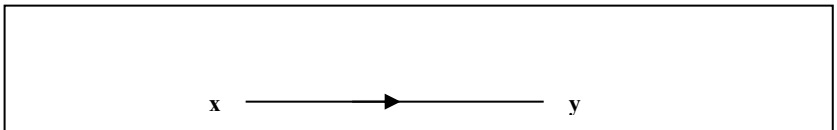
Σχήμα 3.1.: Η ανακλαστική (α) και η μεταβατική (β) ιδιότητα

Η σχέση ισοδυναμίας (equivalence) είναι μία δυαδική σχέση ανακλαστική, μεταβατική και συμμετρική ή αλλιώς μια συμμετρική προδιάταξη (Σχήμα 3.2.). Η σχέση της ισότητας «=» του συνόλου των πραγματικών αριθμών, είναι μία σχέση ισοδυναμίας. Μία ισοδυναμία εισάγει σε ένα σύνολο έναν φυσικό διαμερισμό σε κλάσεις μη κενών και μη τεμνόμενων υποσυνόλων, κατά τέτοιο τρόπο ώστε δύο στοιχεία του αρχικού συνόλου να ανήκουν στην ίδια κλάση εάν και μόνο εάν είναι ισοδύναμα. Αυτού του είδους οι κλάσεις ονομάζονται κλάσεις ισοδυναμίας. Στην περίπτωση, που έχουμε την σχέση ισοδυναμίας R σε ένα σύνολο I, τότε το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας που προσδιορίζονται από την R, είναι το I/R.



Σχήμα 3.2.: Η συμμετρική ιδιότητα

Η διάταξη αντίστοιχα, είναι δυαδική σχέση η οποία και χαρακτηρίζεται από την ανακλαστική, μεταβατική και αντισυμμετρική ιδιότητα, είναι δηλ. μία αντισυμμετρική προδιάταξη (Σχήμα 3.3.).



Σχήμα 3.3.: Η αντισυμμετρική ιδιότητα

Η διάταξη ταυτίζεται με τις έννοιες του «περιέχεται» και του «μικρότερου ή ίσου από». Η σχέση της διάταξης διακρίνεται στις επιμέρους σχέσεις της ασθενής (weak)και αυστηρής (strict)διάταξης.

Η ασθενής διάταξη (weak order) είναι ασυμμετρική και αρνητικά μεταβατική. Παράδειγμα τέτοιας διάταξης είναι η διάταξη «<» στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. Αντίστοιχα η αυστηρή διάταξη (strict order) είναι μία ασθενώς συνδεδεμένη

ασθενής διάταξη. Η σχέση διάταξης διακρίνεται επίσης σε μερική και ολική σχέση διάταξης ανάλογα με την ισχύ της σχέσης στο σύνολο I.

Στην περίπτωση που η δυαδική σχέση R είναι μία σχέση προδιάταξης ή διάταξης συνηθίζεται να χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $x \underset{R}{\leq} y$, ή πιο απλά $x \leq y$.

Οι τρεις παραπάνω δυαδικές σχέσεις (προδιάταξης R, ισοδυναμίας ρ και διάταξης r) συνδέονται μεταξύ τους με το παρακάτω ευθύ άθροισμα που δηλώνει τον «θεμελιώδη μετασχηματισμό μιας σχέσης προδιάταξης» (Bertier, 1975):

$$R = \rho \oplus r$$

Η ισοδυναμία ρ αντιστοιχεί στο συμμετρικό και μεταβατικό τμήμα της R και αντίστοιχα η διάταξη r δηλώνει το αντισυμμετρικό της τμήμα. Με άλλα λόγια, η τυχόν σχέση προδιάταξης R που μπορεί να παρατηρηθεί μεταξύ των στοιχείων ενός συνόλου I μπορεί να ερμηνευθεί ως σχέση διάταξης r μεταξύ των αντιπροσώπων των διαφόρων κλάσεων ισοδυναμίας που παράγονται από την ρ. Ας ονομάσουμε ως I/ρ το σύνολο των κλάσεων X,Y,… ισοδυναμίας που δημιουργεί η σχέση ρ στο I και ας θεωρήσουμε την σχέση r μεταξύ των κλάσεων με τις εξής ιδιότητες:

$$XrY \Leftrightarrow \exists x \in X \text{ και } \exists y \in Y : xRy$$

Η σχέση r είναι συγχρόνως ανακλαστική, μεταβατική και αντισυμμετρική και επομένως συνιστά μία σχέση διάταξης στο σύνολο I/ρ.

3.3. ΔΙΑΤΕΤΑΓΜΕΝΑ ΣΥΝΟΛΑ

Ονομάζουμε διατεταγμένο σύνολο την αλγεβρική δομή $\langle I, \leq \rangle$, όπου I είναι το σύνολο εφοδιασμένο με την σχέση διάταξης «$\leq$».

Η λειτουργία της σχέσης διάταξης είναι χαρακτηριστική, καθώς θεωρείται ότι η σχέση αυτή βάζει κάποια από τα στοιχεία του I στην σειρά. Πιο συγκεκριμένα, η παρατήρηση $x \leq y$, δηλώνει ότι με την παρούσα σχέση διάταξης , το x ονομάζεται προηγούμενο ή ίσο του y και αντίστοιχα το y ονομάζεται επόμενο ή ίσο του x.

Στην περίπτωση που η προτεινόμενη σχέση διάταξης «$\leq$» τακτοποιεί όλα τα στοιχεία του συνόλου I στην σειρά (περίπτωση ολικής διάταξης), τότε το σύνολο I ονομάζεται αλυσίδα.

Έστω $\langle I, \leq \rangle$ ένα διατεταγμένο σύνολο $x \in I$. Το x καλείται ελάχιστο στοιχείο του I αν δεν έχει προηγούμενα στοιχεία, δηλ.:

$$\nexists y \in I : y \leq x .$$

Αντίστοιχα το x καλείται μέγιστο στοιχείο του I αν δεν έχει επόμενα στοιχεία:

$$\nexists y \in I : x \leq y .$$

Το x καλείται πρώτο στοιχείο του I αν είναι προηγούμενο ή ίσο με όλα τα στοιχεία του I:

$$\forall y \in I : x \leq y .$$

Τέλος το x καλείται τελευταίο στοιχείο του I αν είναι επόμενο ή ίσο με όλα τα στοιχεία του:

$$\forall y \in I : y \leq x .$$

Οι επόμενοι δύο ορισμοί αναφέρονται σε υποσύνολα διατεταγμένων συνόλων. Έστω $\langle I, \leq \rangle$ ένα διατεταγμένο σύνολο και K μη κενό υποσύνολο του. Το $x \in I$ ονομάζεται άνω φράγμα του K, αν είναι επόμενο ή ίσο όλων των στοιχείων του K, δηλ. αν:

$$\forall y \in K : y \leq x .$$

Αντίστοιχα το $x \in I$ ονομάζεται κάτω φράγμα του K, αν είναι προηγούμενο ή ίσο όλων των στοιχείων του K:

$$\forall y \in K : x \leq y .$$

Τέλος το $x \in I$ ονομάζεται άνω πέρας του K (supK), αν είναι το πρώτο στοιχείο του συνόλου των άνω φραγμάτων του K:

- $\forall y \in K : y \leq x$
- $\forall z \in K :$ z άνω φράγμα του K $\Rightarrow x \leq z$.

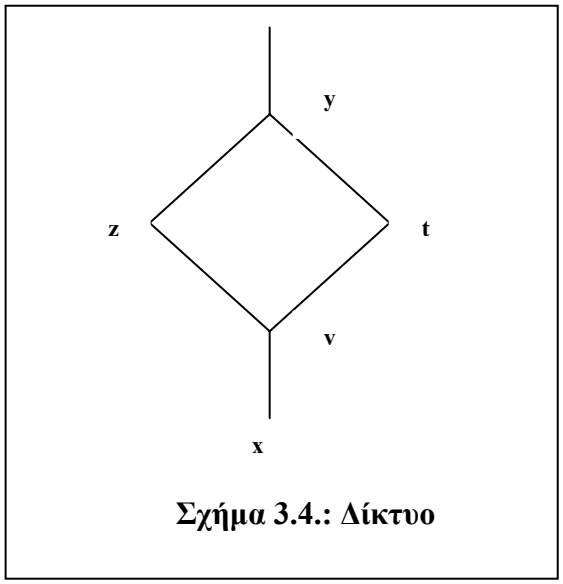
Το $x \in I$ ονομάζεται κάτω πέρας του K (infK) αν είναι το τελευταίο στοιχείο του συνόλου των κάτω φραγμάτων του K:

- $\forall y \in K : x \leq y$
- $\forall z \in K :$ z κάτω φράγμα του K $\Rightarrow z \leq x$.

Χαρακτηριστική περίπτωση διατεταγμένου συνόλου είναι η αλγεβρική δομή του δικτύου (ή συνδέσμου – lattice) (Κάλφα, 1995). Σύμφωνα με τον υπάρχοντα

ορισμό, ένα διατεταγμένο σύνολο $\langle I, \leq \rangle$ ονομάζεται δίκτυο αν για οποιαδήποτε $x \in I$ και $y \in I$, υπάρχουν τα $\inf\{x,y\}$ και $\sup\{x,y\}$.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα δικτύου δίνεται στο παρακάτω στο παρακάτω σχήμα (Σχήμα 3.4.) μέσω του διαγράμματος Hasse:



Σχήμα 3.4.: Δίκτυο

Στην περίπτωση του δικτύου, οι έννοιες του άνω πέρατος και του κάτω πέρατος αντιστοιχούν στις έννοιες της «ένωσης» και της «τομής» οι οποίες και προσδιορίζονται με τα σύμβολα «$\vee$» και «$\wedge$» αντίστοιχα. Δηλ.:

$$x \vee y = \sup\{x, y\}$$
$$x \wedge y = \inf\{x, y\}$$

Χαρακτηριστικά παραδείγματα δικτύων είναι τα ακόλουθα:

- Το δυναμοσύνολο P(I) των υποσυνόλων ενός συνόλου I, μερικά διατεταγμένων ως προς την σχέση του εγκλεισμού «$\subset$» :

$$\forall A, B \in I \Rightarrow \begin{cases} \sup\{A, B\} = A \cup B \\ \inf\{A, B\} = A \cap B \end{cases}$$

- Το σύνολο A(F,n) όλων των υποχώρων του n-διάστατου χώρου ορισμένων σε επίπεδο F.
- Το σύνολο Π_n των κλάσεων ισοδυναμίας ενός συνόλου n αντικειμένων. Στην περίπτωση που έχουμε δύο κλάσεις ισοδυναμίας (π.χ. τις ρ και τ), η σχέση μερικής διάταξης $\rho \leq \tau$ με την οποία είναι εφοδιασμένο το δίκτυο Π_n, δηλώνει ότι η ισοδυναμία xρy συνεπάγεται την ισοδυναμία xτy, ή αλλιώς ότι

ο διαμερισμός π(ρ) αποτελεί το «απόσταγμα» (refinement) του διαμερισμού π(τ) (Birkhoff, 1973). Στο δίκτυο Π_n, ή τομή $\rho \wedge \tau$ έχει ως κλάσεις ισοδυναμίας τις τομές $R_i \cap T_j$ ($\rho \to R_i$ και $\tau \to T_j$) εάν και μόνο εάν xρy και xτy. Αντίστοιχα η ένωση $\rho \vee \tau$ αναφέρεται στην τομή όλων των κλάσεων ισοδυναμίας που περιέχουν και τις δύο σχέσεις ρ και τ.

3.4. ΣΧΕΣΕΙΣ ΠΡΟΤΙΜΗΣΗΣ – Η ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΜΕΤΡΗΣΗΣ ΣΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΠΟΦΑΣΗΣ

Η θεωρία της μέτρησης έχει άμεση εφαρμογή στα προβλήματα απόφασης και ιδιαίτερα στο σημείο που αφορά τον προσδιορισμό και τον μετασχηματισμό μιας σχέσης προτίμησης. Στην αρωγή (υποστήριξη) αποφάσεων η σχέση προτίμησης είναι θεμελιώδους σημασίας. Όταν κάποιος εκφράζει την προτίμηση του ως προς δύο στοιχεία x και y ενός συνόλου X, δηλώνει δηλ. ότι προτιμά το x έναντι του y, στην ουσία εισάγει μία σχέση προτίμησης. Η σχέση αυτή μπορεί να αναπαρασταθεί με το μοντέλο της δυαδικής σχέσης και αντίστοιχα να προσδιορισθεί ως σχέση προδιάταξης, διάταξης κ.ο.κ.

Η παράγραφος αυτή αποτελεί μια εισαγωγή στο θέμα που διαπραγματεύονται τα επόμενα κεφάλαια (4^o και 5^o) της Πολυκριτήριας Ανάλυσης, στο θέμα δηλ. της αρωγής των αποφάσεων. Πιο συγκεκριμένα, στην παράγραφο αυτή θα αναφερθούμε σε συγκεκριμένες θέσεις οι οποίες και αναφέρονται από τον Vasnick (1990) ως «θέσεις της θεωρίας της μέτρησης στην αρωγή αποφάσεων». Λόγω του εισαγωγικού χαρακτήρα της παραγράφου, θα αρκεστούμε σε μία απλή αναφορά των όρων της Πολυκριτήριας Ανάλυσης – όπου είναι δυνατόν, να τους συναντήσουμε- χωρίς περαιτέρω επεξηγήσεις. Άλλωστε, όπως προαναφέρθηκε, η παράγραφος αυτή διαπραγματεύεται μόνο το θέμα των σχέσεων προτίμησης και πιο συγκεκριμένα το κομμάτι του που προσδιορίζεται από την θεωρία της μέτρησης.

Το πρώτο πράγμα που έχουμε να κάνουμε όταν αντιμετωπίζουμε ένα πρόβλημα αρωγής απόφασης, αναφέρεται στην δόμηση του προβλήματος και πιο συγκεκριμένα στην κατασκευή ενός μοντέλου το οποίο και θα μας επιτρέψει – με μία συγκεκριμένη μεταχείριση- σε εξαγωγή απόφασης. Η μεταχείριση αυτή εξαρτάται τόσο από την επιλογή του μοντέλου όσο και από την πληροφορία που μας παρέχει ο

D.M. (decision maker). Καθώς το σύνολο των μεθόδων της αρωγής αποφάσεων βασίζεται στην θεώρηση του συνόλου των πραγματικών αριθμών, είναι σημαντικό, έχοντας ένα σύνολο X και κάποια πληροφορία γι' αυτό, να γνωρίζουμε:

1. Πότε μπορούμε να συνδέσουμε σε κάθε $x \in X$ έναν πραγματικό αριθμό μ(x), έτσι ώστε η αντιστοίχιση αυτή να μας επιτρέψει την αναπαράσταση της πληροφορίας που περιέχεται στο σύνολο X (πρόβλημα αναπαράστασης – representation problem).
2. Τι είδους μαθηματικό υπολογισμοί μπορούν να γίνουν με αυτούς τους αριθμούς, ώστε οι θέσεις που θα προκύψουν να είναι «πλήρεις σημαντικότητας» (problem of meaningfulness).

Οι παραπάνω θέσεις αποτελούν αντικείμενο της θεωρίας της μέτρησης. Στην περίπτωση αυτή, ο αριθμός μ(x) ονομάζεται μέτρηση του x και η απεικόνιση:

$$\mu : X \longrightarrow \Re ,$$

ονομάζεται (αριθμητική) κλίμακα μέτρησης.

Το μοντέλο της δυαδικής σχέσης με το οποίο προσεγγίζουμε μία σχέση προτίμησης P, συνηγορεί στην παρουσία μιας συνάρτησης $\mu : X \longrightarrow \Re$, η οποία και θα αντιστοιχεί στην σχέση προτίμησης xPy την σχέση αριθμητικής διάταξης μ(x)>μ(y), $\forall x, y \in X$. Η ύπαρξη μιας τέτοιας συνάρτησης αποτελεί το αντικείμενου του πρώτου προβληματισμού (θέση 1) της εφαρμογής της θεωρίας της μέτρησης στα προβλήματα απόφασης και κατοχυρώνεται από την παρουσία των δύο παρακάτω θεωρημάτων (Roberts, 1979):

Θεώρημα 3.1. (Cantor): Έστω ένα πεπερασμένο ή απλώς αριθμήσιμο σύνολο X, εφοδιασμένο με μία σχέση προτίμησης P. Υπάρχει τότε, μία πραγματική συνάρτηση μ στο X, τέτοια ώστε:

$$\forall x, y \in X : \quad xPy \quad \text{εάν} \quad \mu(x)>\mu(y),$$

εάν η P είναι ασυμμετρική και αρνητικά μεταβατική.

Αν υποθέσουμε ότι η P είναι μία ασυμμετρική δυαδική σχέση στο X, τότε η P είναι αρνητικά μεταβατική εάν και μόνο εάν:

- Η P είναι μεταβατική και
- Υπάρχει μεταβατική σχέση I, ορισμένη στο X, τέτοια ώστε:

  $\forall x, y \in X:$ xIy εάν xPy και yPP.

Όταν η P είναι σχέση προτίμησης τότε η I ονομάζεται σχέση αδιαφορίας της προτίμησης. Στην περίπτωση αυτή η P χαρακτηρίζεται ως «αυστηρά ασθενής διάταξης» ή διαφορετικά – σε περίπτωση πληρότητας – ως «αυστηρή διάταξη» ή «γραμμική διάταξη».

Το θεώρημα αυτό επικυρώνει τον «θεμελιώδη μετασχηματισμό μιας σχέσης προδιάταξης», με την σχέση αδιαφορίας της προτίμησης I να αντιστοιχεί στην σχέση ισοδυναμίας και την σχέση προτίμησης P να αντιστοιχεί στην σχέση αυστηρής διάταξης στο σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας X/I.

Θεώρημα 3.2.: Έστω ένα πεπερασμένο ή απλώς αριθμήσιμο σύνολο X, εφοδιασμένο με μία σχέση προτίμησης P. Υπάρχει τότε, μία πραγματική συνάρτηση μ στο X, τέτοια ώστε:

$\forall x, y \in X:$ xPy εάν $\mu(x) > \mu(y)$ και $x \neq y$ εάν $\mu(x) \neq \mu(y)$,

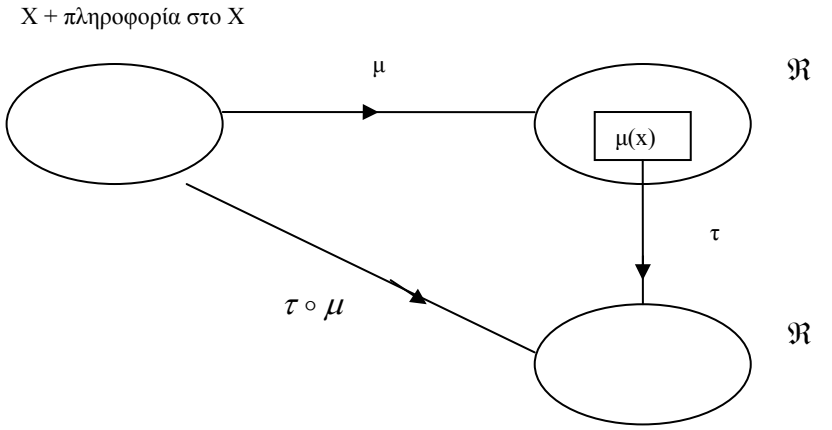
εάν η P είναι αυστηρή διάταξη.

Τα παραπάνω θεωρήματα δίνουν τις απαραίτητες συνθήκες σύμφωνα με τις οποίες η πληροφορία που περιέχεται σε ένα σύνολο X, μπορεί να εκφραστεί – μέσω του μοντέλου της δυαδικής σχέσης P- με πραγματικές αριθμητικές συναρτήσεις.

Η δεύτερη θέση της εφαρμογής της θεωρίας της μέτρησης στα προβλήματα απόφασης (πρόβλημα «πληρότητας της σημαντικότητας») αναφέρεται στην σημαντικότητα μιας κλίμακας μέτρησης και συγκεκριμένα στην δυνατότητα να διατηρηθεί η ουσία της κλίμακας (η αλήθεια ή το ψέμα της) όταν αυτή αντικατασταθεί από μία άλλη κλίμακα που επίσης αναπαριστά την ίδια πληροφορία. Η θέση αυτή προσεγγίζεται από την αναφορά στην μοναδικότητα της κλίμακας, όπως αυτή προσδιορίζεται από την έννοια του παραδεκτού μετασχηματισμού (admissible transformation) της κλίμακας.

Ορισμός 3.1.: Έστω σύνολο X με κάποια πληροφορία η οποία και μας δίνεται με την μορφή της κλίμακας μ. Επίσης, έστω συνάρτηση $\tau : \mu(x) \longrightarrow \Re$, η οποία απεικονίζει την μ, δηλ. το σύνολο $\mu(x) = \{\mu(x) / x \in X\}$, στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. Η σύνθεση $\tau \circ \mu$ (Σχήμα 3.5.) είναι πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο X, τέτοια ώστε:

$$\tau \circ \mu : X \longrightarrow \Re, \qquad x \longrightarrow (\tau \circ \mu)(x) = \tau(\mu(x))$$



Σχήμα 3.5.: Ο παραδεκτός μετασχηματισμός της κλίμακας μ

Όταν η σύνθεση $\tau \circ \mu$ αναπαριστά την πληροφορία του X, τότε η απεικόνιση τ ονομάζεται παραδεκτός μετασχηματισμός της μ.

Το σύνολο όλων των παραδεκτών μετασχηματισμών μιας κλίμακας μ, περιγράφεται από το σύνολο: $\{\tau \circ \mu /$ τα παραδεκτός μετασχηματισμός της μ$\}$, το σύνολο δηλ. που περιλαμβάνει όλες τις κλίμακες μέτρησης που αναπαριστούν την ίδια πληροφορία με την μ. Αν η κλίμακα μ παράγει ένα τέτοιο σύνολο τότε ονομάζεται ομαλή (regular). Το σύνολο των παραδεκτών μετασχηματισμών μιας κλίμακας μ, προσδιορίζει την μοναδικότητα της κλίμακας και καθορίζει τον τρόπο χρήσης της. Στην περίπτωση που αφορά τα προβλήματα απόφασης, περιοριζόμαστε σε τρία χαρακτηριστικά είδη κλίμακας:

Τακτική (ordinal) κλίμακα: Η κλίμακα μ ονομάζεται τακτική όταν το σύνολο των παραδεκτών μετασχηματισμών της αναφέρονται σε συναρτήσεις της μορφής:

$$\tau : \mu(x) \longrightarrow \Re : \forall r_1, r_2 \in \mu(x) : r_1 > r_2 \text{ εάν } \tau(r_1) > \tau(r_2).$$

Η τακτική κλίμακα μ είναι μοναδική σε κάθε αυστηρά αύξοντα θετικό γραμμικό μετασχηματισμό. Τυπικό παράδειγμα τέτοιας κλίμακας είναι η κλίμακα που μας παρέχει η συνάρτηση τιμής.

Κλίμακα διαστήματος (interval): Στην περίπτωση της κλίμακας διαστήματος μ, το σύνολο των παραδεκτών μετασχηματισμών είναι της μορφής:

$$\tau : \mu(x) \longrightarrow \Re : \tau(r)=\alpha r+\beta, \qquad \alpha, \beta \in \Re, \qquad \alpha>0.$$

Η τακτική κλίμακα μ είναι μοναδική σε κάθε θετικό γραμμικό μετασχηματισμό. Τυπικό παράδειγμα τέτοιας κλίμακας είναι η κλίμακα που μας παρέχει η συνάρτηση αναμενόμενης χρησιμότητας.

Κλίμακα αναλογίας (ratio): Η κλίμακας αναλογίας μ περιγράφεται από σύνολο παραδεκτών μετασχηματισμών της μορφής:

$$\tau : \mu(x) \longrightarrow \Re : \tau(r)=\alpha r \qquad \alpha \in \Re, \qquad \alpha>0.$$

Η κλίμακα αυτή είναι μοναδική σε μετασχηματισμό ομοιότητας. Στην περίπτωση των προβλημάτων απόφασης η κλίμακα αυτή συνεπάγεται την παρουσία ενός σημείου ισορροπίας Ο και διαπραγματεύεται την έννοια της διαφοράς προτίμησης.

3.5. ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ

Η ταξινόμηση, όπως αναφέρθηκε στην εισαγωγή, αποτελεί μία ιδιαίτερα σημαντική μέθοδο μέτρησης ενός πληθυσμού ατόμων. Αντικειμενικός σκοπός της ταξινόμησης είναι να επιτευχθεί διαμελισμός του συνόλου των ατόμων (παρατηρήσεων) σε συγκεκριμένες ομογενείς ομάδες (τάξεις, κλάσεις), ως προς το σύνολο των μεταβλητών, κάθε μία εκ των οποίων να διαφέρει ουσιαστικά από τις άλλες. Ο διαμελισμός αυτός διασφαλίζει μία οπτική, συνοπτική και δομημένη εικόνα του φαινομένου (πίνακα δεδομένων) που αναλύεται. Οι ενδεικτικές τάξεις (κλάσεις) της ταξινόμησης βοηθούν στον ορισμό συναρτήσεων αποφάσεων και επιτρέπουν την απόδοση της κάθε κλάσης από ένα αντιπροσωπευτικό (πραγματικό ή θεωρητικό) αντικείμενο (Παπαδημητρίου, 1994). Αν εξετάσουμε την διαδικασία της ταξινόμησης

από την πλευρά της θεωρίας της μέτρησης, όπως αυτή αναπτύχθηκε σε αυτό το κεφάλαιο, θα μπορούσαμε να πούμε ότι η ταξινόμηση των ατόμων ενός πληθυσμού συνδέεται άμεσα με την κατασκευή σχέσεων ισοδυναμίας σε ένα σύνολο ατόμων ή με την αντικατάσταση των υπαρχόντων ισοδυναμιών από άλλες πιο ισχυρές και περισσότερο περιεκτικές (περίπτωση πίνακα συχνοτήτων).

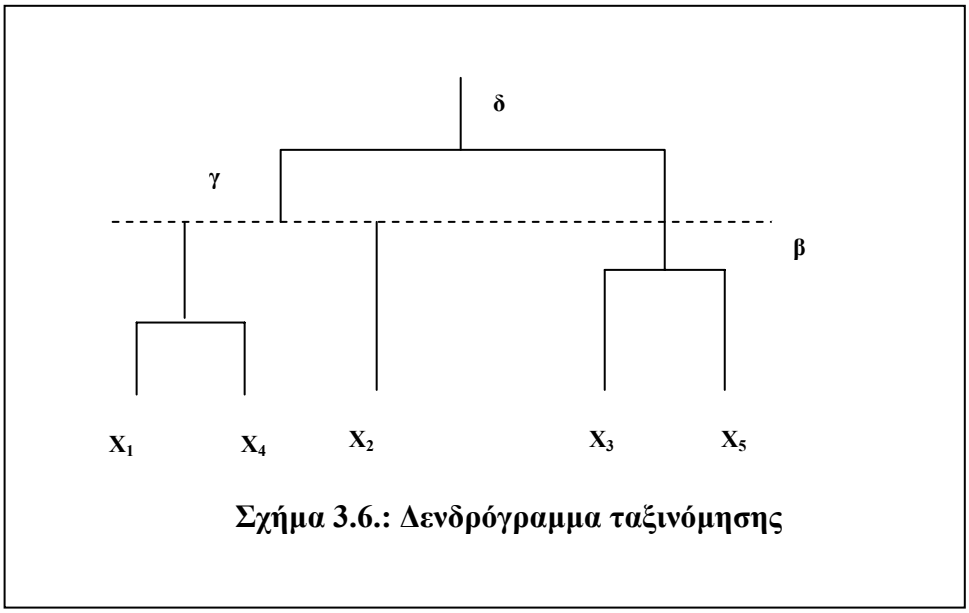
Η ταξινόμηση βασίστηκε αρχικά στην παρατήρηση, καθόσον η ομαδοποίηση ομοίων πραγμάτων συνιστά καθαρά ανθρώπινη διαδικασία. Η αξιωματική της διατύπωση πρωτοεμφανίστηκε στις θεωρίες του Πλάτωνα και του Αριστοτέλη (Φλώρου, 1997) και συνεχίστηκε στις εργασίες των φυσιολόγων του 18^{ου} αιώνα. Ένα πανόραμα των μεθόδων της ταξινόμησης μπορεί να αναζητηθεί στο άρθρο του Bock (1994). Η ταξινόμηση (αυτόματη ταξινόμηση) αποτελεί ένα σημαντικό κλάδο των μεθόδων της Ανάλυσης Δεδομένων καθώς πλήθος συγγραμμάτων (Benzecri (1975), Gailliez-Pages (1976), Jambu-Lembeaux (1978), Lerman (1981), Diday (1982), Roux (1985)), αναλύουν και αναπτύσσουν πληθώρα μεθόδων ταξινόμησης. Η ταξινόμηση ως αντιπροσωπευτική μέθοδος της Ανάλυσης Δεδομένων «τακτοποιεί» τον πληθυσμό σε μη προκαθορισμένες ομάδες σε αντίθεση με την κατάταξη που βασίζεται σε συγκεκριμένες προδιαγραφές ομάδων. Η έννοια του «a priori» συνιστά την ειδοποιό διαφορά αυτών, των κατά τα άλλα ομοίων, διαδικασιών.

Στην παράγραφο αυτή θα προσεγγίσουμε τις μεθόδους της ταξινόμησης από την πλευρά της θεωρίας της μέτρησης. Θα σταθούμε ιδιαίτερα στην μέθοδο της ταξινόμησης κατ' αύξουσα ιεραρχία (Classification Assendante Hierarchique – C.A.H.) και θα προσπαθήσουμε μέσω της χρήσης της μετρικής της αδράνειας να αναζητήσουμε σχέσεις ανάμεσα στην μέθοδο αυτή και την μέθοδο της Παραγοντικής Ανάλυσης των Αντιστοιχιών. Η συσχέτιση των δύο μεθόδων δεν θα σταματήσει σε αυτό το σημείο καθώς θα επιχειρήσουμε να αναδείξουμε τις σχέσεις ισοδυναμίας που εμφανίζονται σε ένα νέφος (αντικειμένων - μεταβλητών) μετά την εφαρμογή σε αυτό μιας Παραγοντικής Ανάλυσης των Αντιστοιχιών.

3.5.1. Ταξινόμηση κατ' αύξουσα ιεραρχία

Με την μέθοδο της ταξινόμησης κατ' αύξουσα ιεραρχία επιχειρείται η περιγραφή του φαινομένου που αντιστοιχεί στον πίνακα δεδομένων, μέσα από μία σειρά διαμελισμών οι οποίοι και καταχωρούν το σύνολο των παρατηρήσεων σε

ομογενείς ομάδες, ως προς το σύνολο των μεταβλητών. Οι διαμελισμοί αυτοί λαμβάνονται με μία ιεραρχία, με την έννοια ότι πέραν των αρχικών διαμελισμών που δηλώνει το σύνολο των μεταβλητών (Κεφάλαιο $1^{ο}$), οι επόμενοι διαμελισμοί παράγονται από τους αρχικούς κ.ο.κ. Όσο περισσότερο απομακρυνόμαστε από το τον αρχικό διαμελισμό, τόσο η περιγραφή των ομάδων γίνεται πιο λεπτομερής. Η ιεράρχηση παρουσιάζεται σε ένα δενδρόγραμμα (Σχήμα 3.6.), όπου οι κόμβοι α, β, γ, δ συμβολίζουν τις υποδιαιρέσεις του πληθυσμού (σύνολο αρχικών μεταβλητών) $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$:



Σχήμα 3.6.: Δενδρόγραμμα ταξινόμησης

Το επίπεδο του κάθε κόμβου δείχνει τον βαθμό ομοιότητας των παρατηρήσεων, δηλ. τα αντικείμενα X_1 και X_4 μοιάζουν περισσότερο μεταξύ τους απ' ότι τα X_3 και X_5. Αν κόψουμε το δενδρόγραμμα μεταξύ των κόμβων β και γ, επιτυγχάνεται ένας διαμελισμός σε τρεις ομάδες (X_1, X_4), (X_2), (X_3, X_5). Μεταβάλλοντας το επίπεδο τομής του δενδρογράμματος επιτυγχάνεται διαφορετικός διαμελισμός. Όσο πιο κοντά προς τον αρχικό κόμβο (κορυφή) είναι η τομή, τόσο λιγότερες κλάσεις παρατηρήσεων προκύπτουν, οι οποίες είναι και λιγότερο ομογενείς καθώς η κάθε μια τους περιλαμβάνει περισσότερο αριθμό παρατηρήσεων (Παπαδημητρίου, 1994).

Ο αλγόριθμος κατασκευής της ιεράρχησης αντιστοιχεί σε διαδοχικές συνενώσεις των αρχικών αντικειμένων σε ομάδες και κατόπιν των ομάδων μεταξύ τους, μέχρι τον αρχικό κόμβο που περιλαμβάνει το σύνολο τους. Ως κριτήριο

ομαδοποίησης θεωρείται η ελάττωση της συνεκτικότητας, δηλ. η αύξηση της εσωτερικής αδράνειας που παρατηρείται κατά την συνένωση των κλάσεων.

Η ταξινόμηση των παρατηρήσεων που πραγματοποιείται με αυτόν τον τρόπο, χρησιμοποιεί ως βασικό κριτήριο το κριτήριο της ολικής αδράνειας του νέφους των παρατηρήσεων και συγκεκριμένα τον μετασχηματισμό του σε δύο επιμέρους ροπές (moments) αδράνειας, σύμφωνα με το θεώρημα του Huyghens. Πιο συγκεκριμένα (Lerman, 1981), θεωρούμε το νέφος των παρατηρήσεων:

$$N(I)=\{(M_i,\mu_i) / i \in I\},$$

όπου η ποσότητα μ_i αντιστοιχεί στην μάζα του αντικειμένου (ή ομάδας αντικειμένων) M_i. Σύμφωνα με την πάγια τακτική των μεθόδων της Ανάλυσης Δεδομένων, το νέφος των παρατηρήσεων τοποθετείται σε διανυσματικό χώρο E, ο οποίος είναι εφοδιασμένος με την ευκλείδεια μετρική q. Αν θεωρήσουμε ότι το νέφος των παρατηρήσεων είναι διαμελισμένο σε k κλάσεις, τότε η ολική αδράνεια του νέφους σύμφωνα με το θεώρημα του Huyghens, μας δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\Im M = \sum_{i\in I} \mu_i \left\| M_i - G \right\|^2 = \sum_{1\le h\le k} \left\{ \sum_{i\in I_h} \mu_i \left\| M_i - G \right\|^2 \right\} + \sum_{1\le h\le k} v_h \left\| G_h - G \right\|^2 .$$

Οι ποσότητες:

$$v_h = \sum_{i\in I_h} \mu_i \ , \quad \text{καθώς και}$$

$$G_h = \frac{1}{v_h} \sum_{i\in I_h} \mu_i M_i$$

περιγράφουν αντίστοιχα, την μάζα καθώς και το κέντρο μάζας της I_h κλάσης αντικειμένων.

Η παρατήρηση αυτή μας επιτρέπει να ορίσουμε την συνολική μάζα μ και το κέντρο μάζας G του νέφους των αντικειμένων ως εξής:

$$\mu = \sum_{1\le h\le k} v_h \qquad \text{και} \qquad G = \frac{1}{\mu} \sum_{1\le h\le k} v_h G_h \ .$$

Η ροπή αδράνειας της κλάσης I_h είναι:

$$\Im M_h = \sum_{i\in I_h} \mu_i \left\| M_i - G_h \right\|^2$$

και αναπαριστά την συνεκτικότητα (cohesion) της h κλάσης.

Αντίστοιχα, η ποσότητα:

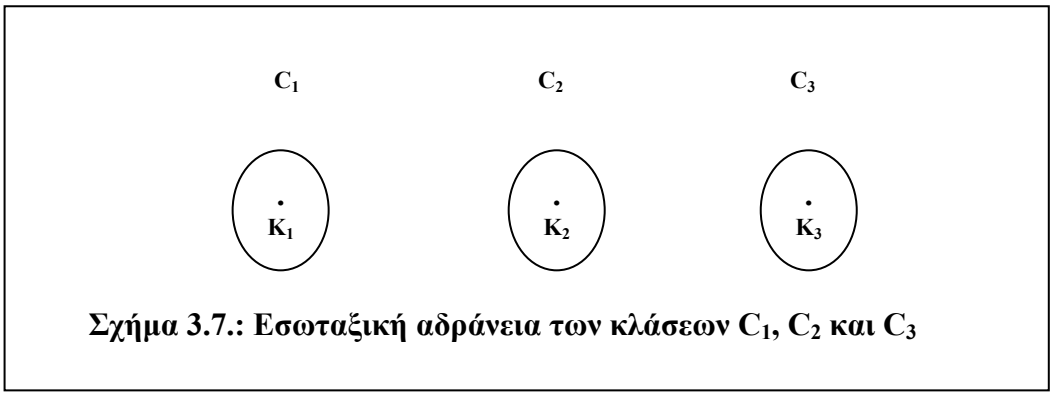
$$\Im \ell_h = \sum_{i\in I_h} v_h \left\| G_h - G \ \right\|^2$$

εκφράζει την ροπή αδράνειας του κέντρου μάζας G_h της h κλάσης ως προς το κέντρο μάζας G του νέφους και ορίζει την αντιδιαστολή (distinction) της h κλάσης, ως προς το σύνολο των ομάδων.

Ο προσδιορισμός των δύο επιμέρους ροπών αδράνειας μας επιτρέπει να ξαναγράψουμε την συνολική εξίσωση αδράνειας του νέφους N(I) ως εξής:

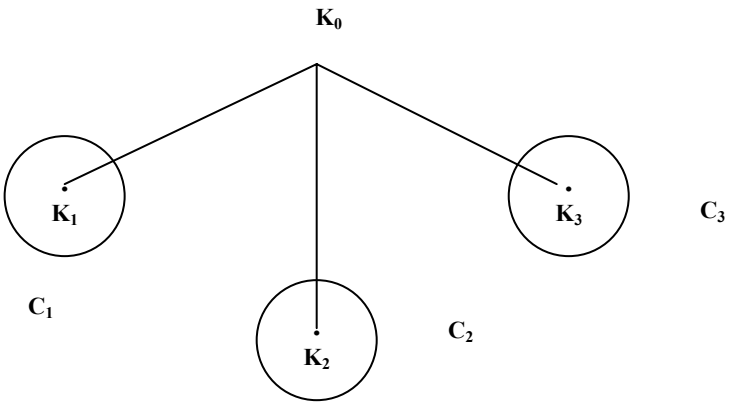
$$\Im M = \sum_{1\le h\le k} \Im M_h + \sum_{1\le h\le k} \Im \ell_h \ .$$

Ο πρώτος όρος του παραπάνω αθροίσματος ονομάζεται εσωταξική αδράνεια και ορίζεται ως το άθροισμα των αδρανειών όλων των επιμέρους κλάσεων που χαρακτηρίζουν το επίπεδο για το οποίο μελετάμε την ταξινόμηση (Σχήμα 3.7.). Χαρακτηριστικό της εσωτερικής αδράνειας είναι ότι, όσο πιο μικρή είναι αυτή τόσο μεγαλύτερη είναι η συνεκτικότητα των κλάσεων .



Σχήμα 3.7.: Εσωταξική αδράνεια των κλάσεων C_1, C_2 και C_3

Αντίστοιχα, ο δεύτερος όρος του παραπάνω αθροίσματος ονομάζεται διαταξική αδράνεια και ορίζεται ως η αδράνεια των κέντρων μάζας των επιμέρους κλάσεων ως προς το κέντρο μάζας του συνολικού νέφους (Σχήμα 3.8.:). Χαρακτηριστικό της διαταξικής αδράνειας είναι ότι, όσο μεγαλύτερη είναι αυτή τόσο πιο διαχωρισμένες είναι μεταξύ τους οι κλάσεις. Η διαταξική αδράνεια, λοιπόν, φανερώνει την διασπορά των κέντρων μάζας των κλάσεων ως προς το κέντρο μάζας του νέφους (Παπαδημητρίου, 1994).



Σχήμα 3.8.: Διαταξική αδράνεια των κλάσεων C_1, C_2 και C_3

Όσο ελαττώνεται η εσωταξική αδράνεια και αυξάνει η διαταξική, τόσο καλύτερος είναι ο διαμελισμός που επιτυγχάνεται με την C.A.H.. Ο ιδανικότερος λοιπόν, διαμελισμός δίνεται από την ελαχιστοποίηση της εσωτερικής αδράνειας και την μεγιστοποίηση της εξωτερικής.

3.5.2. Ταξινόμηση και Παραγοντική Ανάλυση των Αντιστοιχιών

Η χρήση της εξίσωσης της αδράνειας σε μία ταξινόμηση καθιστά την διαδικασία της ταξινόμησης άμεσα συγκρίσιμη με αυτήν της Παραγοντικής Ανάλυσης, αν θεωρηθεί ότι ο κάθε παραγοντικός άξονας εκφράζει μία ομάδα (κλάση ισοδυναμίας). Η σύγκριση των δύο παραπάνω μεθόδων ως προς το κριτήριο της αδράνειας μπορεί να παρατηρηθεί στο άρθρο του N.Howard (1979) (Lerman, 1981), ο οποίος εξετάζοντας την μέθοδο της ταξινόμησης και την μέθοδο της Ανάλυσης σε Κύριες Συνιστώσες παρατήρησε τα εξής:

« Έστω $\{\alpha_r / 1 \le r \le p\}$ μία ακολουθία των p πρώτων παραγοντικών (μοναδιαίων) αξόνων μιας παραγοντικής ανάλυσης στο νέφος N(I) καθώς και ένας διαμερισμός $\{I_h / 1 \le h \le k\}$ του συνόλου I σε k μη κενές κλάσεις. Αν ζητηθεί να συγκρίνουμε την αδράνεια του νέφους που προβάλλεται στους παραγοντικούς άξονες καθώς και την αδράνεια που απορρέει από μια ταξινόμηση τότε αρκεί να συγκρίνουμε τις ποσότητες:

$$F = \sum_{1\le r\le p}\left\{\sum_{1\le h\le k}\left\{\sum_{i\in I_h}\mu_i\left[q(\alpha_r, M_i - G_h)\right]^2\right\}\right\} \qquad \text{και}$$

$$C = \sum_{r>p}\sum_{1\le h\le k} v_h\left[q(\alpha_r, G_h - G)\right]^2 .»$$

Η παραπάνω πρόταση, μας επιτρέπει να συσχετίσουμε άμεσα την ταξινόμηση με την μέθοδο της Παραγοντικής Ανάλυσης των αντιστοιχιών σε πίνακες συχνοτήτων, σύμφωνα με το παρακάτω θεώρημα (Lerman, 1981).

Θεώρημα 3.3.: Θεωρούμε τον πίνακα συχνοτήτων $I\times J$, διαστάσεων $n\times m$. Η Παραγοντική Ανάλυση Αντιστοιχιών διάστασης p (p παραγοντικοί άξονες) του I ως προς J είναι ισοδύναμη με την ταξινόμηση του J σε p μη κενές κλάσεις. Απαραίτητη προϋπόθεση (συνθήκη κανονικοποίησης) για την αντιστοίχιση των παραπάνω μεθόδων είναι η ακόλουθη:

$$(\forall r = 1,...,p),(J_r \neq 0); \alpha_{rj} = \begin{cases} 0, j \notin J_r \\ \dfrac{p_{.j}}{\sqrt{p(J_r)}} \end{cases},$$

όπου ο αριθμός α_{rj} αντιστοιχεί στην j συντεταγμένη του α_r παραγοντικού άξονα ως προς την κανονική βάση του χώρου.

Με άλλα λόγια, μια Παραγοντική Ανάλυση Αντιστοιχιών στο σύνολο των αντικειμένων, οδηγεί σε μία εκ νέου ομαδοποίηση του συνόλου των μεταβλητών η οποία και εκφράζεται από την αντιστοιχία παραγοντικού άξονα – κλάση μεταβλητής.

Το παραπάνω συμπέρασμα, σε συνδυασμό με την συμμετρία γραμμών στηλών σε μία Παραγοντική Ανάλυση Αντιστοιχιών και την ιδιότητα της κατανεμημένης ισοδυναμίας, αρκεί για να προσδιορίσουμε μία φανερή ομοιότητα μεταξύ αυτής της μεθόδου και της μεθόδου της ταξινόμησης. Άλλωστε η ουσία παραμένει η ίδια, καθώς και στις δύο μεθόδους αντικαθιστούμε αντικείμενα με ομάδες αντικειμένων και μεταβλητές με ομάδες μεταβλητών (Lebart, 1994). Η

ομοιότητα των δύο μεθόδων καθιστά απαραίτητη την συμπληρωματική χρήση των δύο μεθόδων κατά την διαδικασία της ανάλυσης ενός πίνακα και επιτρέπει την παραγοντική ερμηνεία των αποτελεσμάτων μιας ταξινόμησης (πρόγραμμα Facor) (Παπαδημητρίου, 1994).

Σε μερικές μάλιστα περιπτώσεις, η χρήση ενός σταθμισμένου κριτηρίου Ward (Ward 1963, Jambu 1978) αντιστοιχεί κάθε ιδιοτιμή μιας Παραγοντικής Ανάλυσης Αντιστοιχιών σε ένα και μόνο κόμβο μιας ιεραρχικής ταξινόμησης. Στην γενική όμως περίπτωση, ισχύει ο αφορισμός του Lerman (1981) σύμφωνα με τον οποίο η εξίσωση της Παραγοντικής Ανάλυσης Αντιστοιχιών έχει καθαρά επιχειρησιακό ρόλο και σε καμία περίπτωση δεν παράγει μία ιεραρχική ταξινόμηση.

3.6. ΔΙΑΜΕΡΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΕΣ

Στην προηγούμενη παράγραφο, διαπιστώσαμε την άμεση σχέση μιας κλάσης ισοδυναμίας (διαμερισμού) με τον παραγοντικό άξονα. Στο συμπέρασμα αυτό καταλήξαμε μέσω της διεξοδικής ανάλυσης της διαδικασίας μιας ταξινόμησης κατ' αύξουσα ιεραρχία και της άμεσης σύνδεσης αυτής με την μέθοδο της Παραγοντικής Ανάλυσης των Αντιστοιχιών. Στην παράγραφο αυτή, θα επιμείνουμε στην απόδειξη της παραπάνω παρατήρησης, χωρίς να αναζητήσουμε την επικύρωση της πρότασης σε άλλη παραπλήσια μέθοδο, παρά μόνο με βασικό εργαλείο την μαθηματική γλώσσα του Benzecri (1976).

Θεωρούμε τα δύο πεπερασμένα σύνολα I και J, καθώς και την αντιστοιχία p_{IJ} στο $I \times J$. Ονομάζουμε S, τον συμπληρωματικό χώρο των p_{IJ}: $S = \{(i, j) / i \in I, j \in J; p_{ij} \neq 0\}$, καθώς και L_2^{IJ}: τον διανυσματικό χώρο των συναρτήσεων στον S.

Ο υπόχωρος των παραγόντων (συναρτήσεων) που συνδέονται με την τετριμμένη ιδιοτιμή (λ_0=1), αντιστοιχεί στην τομή $L_2^I \cap L_2^J$ των συναρτήσεων στο S. Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε ότι ένας παράγοντας (φ^I,φ^J) ορίζεται ως το ζεύγος δύο συναρτήσεων ορισμένων αντίστοιχα στα σύνολα I και J, τότε μία συνάρτηση φ^s στο S ορίζεται ως εξής:

$$\forall s = (i, j) \in S : \qquad \varphi^s = \varphi^I = \varphi^J$$

Σε σχέση με τα σύνολα I και J, ορίζουμε το σύνολο H:

$$H = I \cup J, \qquad I \cap J = \varnothing,$$

καθώς και τους παράγοντες φ^H. Στο σύνολο αυτό, ορίζουμε με την σειρά της την σχέση ισοδυναμίας Q, σύμφωνα με την σχέση :

$Q(h) = Q(h')$: η h κλάση ισοδυναμίας ταυτίζεται με την h' κλάση.

Η συνθήκη αυτή, σε συνδυασμό με την σχέση:

$$\forall s = (i, j) \in S : \qquad Q(i)=Q(j),$$

ερμηνεύει την ταυτότητα των παραπάνω κλάσεων, με την ύπαρξη ακολουθίας στοιχείων i και j $((i, j) \in S)$για τα οποία Q(i)=Q(j).

Οι διαφορετικές κλάσεις q που ορίζει η σχέση ισοδυναμίας Q στο H, συνιστούν το σύνολο Q, π.χ. η κλάση ισοδυναμίας του στοιχείου $h \in H$, είναι η Q(h)= $q \in Q$. Η τομή $L_2^I \cap L_2^J$ ορίζει στον $\Re^q$ τον διανυσματικό χώρο των πραγματικών συναρτήσεων στο Q. Για παράδειγμα, ένα διάνυσμα του $L_2^I \cap L_2^J$, περιγράφεται από το ζεύγος (φ^I,φ^J), το οποίο με την σειρά του προσδιορίζει την συνάρτηση φ^H, η οποία και παραμένει σταθερή ως προς το σύνολο των κλάσεων $q \in Q$. Αντίστροφα, μια συνάρτηση ορισμένη στο Q, ορίζει μια συνάρτηση στο H η οποία και αντιστοιχεί στο ζεύγος (φ^I,φ^J).

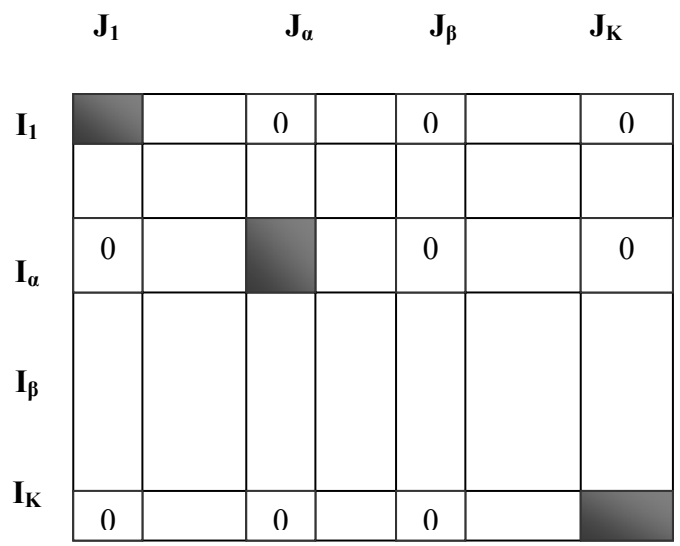
Η σχέση ισοδυναμίας Q δημιουργεί με την σειρά της, δύο διαμερισμούς των συνόλων I και J, τους I_q και J_q αντίστοιχα:

$$\forall q \in Q : \qquad I_q = \{i / i \in I; Q(i) = q\} \qquad J_q = \{j / j \in J; Q(j) = q\}.$$

Η ένωση του καρτεσιανού γινομένου των νέων αυτών διαμερισμών συνιστά υποσύνολο του S:

$$S \subset \cup\{I_q \times J_q / q \in Q\} \subset I \times J.$$

Η σύνδεση των κλάσεων ισοδυναμίας q με το γινόμενο $I \times J$, επιτρέπει την παρουσίαση των διαμερισμών I_q και J_q στην μορφή των block πίνακα. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε τον πίνακα της αντιστοιχίας p_{IJ} καθώς και τον αντίστοιχο διαμερισμό του σε διαγώνια blocks, όχι όλα μηδέν. Ο διαμερισμός αυτός εισάγει δύο επιπλέον διαμερισμούς στα σύνολα I και J, με δείκτες από το ίδιο σύνολο K: $\{I_k / k \in K\}, \{J_k / k \in K\}$, για τους οποίους ισχύει: $S \subset \cup\{I_k \times J_k / k \in K\} \subset I \times J$ (Σχήμα 3.9).



Σχήμα 3.9.: Διαμερισμός του πίνακα αντιστοιχιών σε "μέγιστα τετράγωνα" ως προς την τετριμμένη ιδιοτιμή λ_0=1

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^{Ο}

Πολυκριτήρια Ανάλυση Ι

4.0. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ο καθένας μας, στην καθημερινότητα του, έχει να αντιμετωπίσει πληθώρα από αποφάσεις οι οποίες είτε αφορούν πράγματα που πρέπει να γίνουν είτε πράγματα που δεν πρέπει να γίνουν είτε πράγματα που πρέπει να γίνουν κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες. Η εξαγωγή των αποφάσεων συνιστά μία συγκεκριμένη λειτουργία, η οποία άρχισε να διαμορφώνεται ως φιλοσοφικό αντικείμενο από τα πανάρχαια χρόνια. Η ικανότητα του ανθρώπου να αναπαριστά το κάθε φαινόμενο ως αφηρημένη έννοια καθώς και η επιδεξιότητα του να τα αξιολογεί υποθετικά και αφαιρετικά, είναι στοιχεία αλληλένδετα με την διαδικασία της εξαγωγής μιας απόφασης. Πράγματι, οι άνθρωποι σκέφτονται πριν ενεργήσουν και σχεδιάζουν πριν πραγματοποιήσουν. Η δραστηριότητα η οποία και αποσκοπεί στην διευκρίνιση της συμπεριφοράς ενός συνόλου ατόμων που συμμετέχουν στην εξαγωγή μιας απόφασης είναι γνωστή ως αρωγή απόφασης (decision aiding). Πιο συγκεκριμένα (Roy, 1996), ως αρωγή απόφασης ονομάζουμε την ενέργεια ενός ατόμου, το οποίο και επιχειρεί μέσω της χρήσης συγκεκριμένων μοντέλων να δομήσει την απόφαση μέσα από ένα σύνολο ερωτήσεων και στην συνέχεια να οργανώσει τα συμπεράσματα του σε τέτοιο βαθμό ώστε αυτά να συμφωνούν με τις προτιμήσεις του ενδιαφερομένου καθώς και με το σύστημα τιμής του (value system).

Τα τελευταία χρόνια, η έρευνα που λαμβάνει χώρα στα επιστημονικά πεδία της Επιχειρησιακής Έρευνας (Operational Research) και της Ανάλυσης Αποφάσεων (Decision Analysis) κινείται προς την κατεύθυνση του decision aiding. Το γεγονός αυτό σε συνδυασμό με τον αυξανόμενο αριθμό προβλημάτων που αναφέρονται σε παραπάνω του ενός κριτήρια ευνόησε την ανάπτυξη της Πολυκριτήριας Ανάλυσης. Η

Πολυκριτήρια Ανάλυση (analyse multicritere) η οποία και διακρίνεται στην Γαλλική Σχολή της Πολυκριτήριας αρωγής Αποφάσεων) «multiple criteria decision – aid (MCDA» και στην Αγγλοσαξονική Σχολή της Πολυκριτήριας εξαγωγής Αποφάσεων «multiple criteria decision making (MCDM)», έχει ως αντικείμενο την παροχή εργαλείων τα οποία και θα επιτρέψουν την επίλυση ενός προβλήματος απόφασης στο οποίο πολλές – και συχνά ανταγωνιστικές – θέσεις (points of view) πρέπει να ληφθούν υπόψη. Η παραπάνω διατύπωση του πολυκριτήριου προβλήματος απόφασης καταρρίπτει την έννοια του μοντέλου της «καλύτερης απόφασης» το οποίο και απαντάται στις κλασικές μεθόδους της Επιχειρησιακής Έρευνας και του Γραμμικού Προγραμματισμού. Στην Πολυκριτήρια Ανάλυση, η «καλύτερη απόφαση» απλά δεν υπάρχει. Η παραδοχή αυτή αιτιολογεί συγχρόνως και τον προσδιορισμό των μεθόδων: ως μέθοδοι αρωγής (aiding). Πιο συγκεκριμένα (Roy, 1990), «η επίλυση ενός πολυκριτήριου προβλήματος δεν συνίσταται στην εύρεση κάποιας κρυμμένης αλήθειας παρά στην βοήθεια που παρέχεται στον ενδιαφερόμενο να αξιοποιήσει τα δεδομένα του και να κινηθεί προς μία λύση». Η λύση αυτή είναι περισσότερο συμβιβαστική και εξαρτάται από διάφορους παράγοντες που αφορούν είτε την προσωπικότητα του ενδιαφερομένου είτε τις συνθήκες κάτω από τις οποίες διεξάγεται η διαδικασία είτε τη μέθοδο που εφαρμόζεται.

Η ανάπτυξη της Πολυκριτήριας Ανάλυσης βασίστηκε σε πραγματικά (real-life) προβλήματα. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την εμφάνιση πληθώρας μεθόδων οι οποίες δεν βασίζονται σε κοινό θεωρητικό πλαίσιο. Οι ειδικοί των πολυκριτήριων μεθόδων, διαίρεσαν το σύνολο των μεθόδων σε τρεις μεγάλες οικογένειες οι οποίες αρκετές φορές συσχετίζονται μεταξύ τους (Vincke, 1992):

1) Πολυκριτήρια θεωρία χρησιμότητας (Multiple attribute utility theory)
2) Μέθοδοι Υπεροχής(Outranking methods)
3) Μέθοδοι Αμοιβαίας Επίδρασης (Interactive methods)

Η πρώτη οικογένεια μεθόδων είναι Αμερικάνικης έμπνευσης και αποτελεί το αντικείμενο μελέτης αυτού του κεφαλαίου. Οι μέθοδοι αυτοί αποβλέπουν στην σύνθεση των διαφόρων θέσεων που απαντώνται σε ένα πολυκριτήριο πρόβλημα σε μία μοναδική συνάρτηση η οποία και πρέπει να μεγιστοποιηθεί. Η δεύτερη οικογένεια μεθόδων (Γαλλικής έμπνευσης) αναφέρεται στην κατασκευή της σχέσεως υπεροχής (outranking relation) η οποία και αντικατοπτρίζει πλήρως τις προτιμήσεις

του ενδιαφερομένου και την συνολική τους πληροφορία. Η δεύτερη ομάδα μεθόδων αποτελεί το αντικείμενο του επόμενου κεφαλαίου. Τέλος η κατηγορία των μεθόδων αλληλεπίδρασης ανήκουν στο πεδίο του πολυαντικειμενικού μαθηματικού προγραμματισμού (multi objective mathematical programming) και συνίστανται στην διαδοχή βημάτων υπολογισμού (κατασκευή συμβιβαστικών λύσεων) και βημάτων διαλόγου (εμπλουτισμός των προτιμήσεων του ενδιαφερομένου).

Στο κεφάλαιο αυτό, θα μελετήσουμε κατά αρχήν την οργάνωση ενός προβλήματος απόφασης και συγκεκριμένα ενός πολυκριτήριου προβλήματος απόφασης. Το βασικό αντικείμενο όμως του κεφαλαίου είναι η κατηγορία των μεθόδων της Θεωρίας Χρησιμότητας (Utility Theory) την οποία και θα προσπαθήσουμε να προσεγγίσουμε θεωρητικά και περιεκτικά στο σύνολο των μεθόδων. Πιο συγκεκριμένα, θα αναφερθούμε στη Θεωρία Τιμής (Value theory, Cardinal Utility Theory, Deterministic Utility theory) που αφορά προβλήματα με σταθερό περιβάλλον απόφασης καθώς και στη Θεωρία της Αναμενόμενης Χρησιμότητας (Expected utility theory) που αναφέρεται σε προβλήματα με ασαφές περιβάλλον απόφασης. Τέλος, θα αναφερθούμε και στη θεωρία της κοινωνικής επιλογής (social choice), η οποία συνιστά ουσιαστικά, επέκταση της θεωρίας της Χρησιμότητας στα ομαδικά προβλήματα αποφάσεων.

4.1. ΤΟ ΠΟΛΥΚΡΙΤΗΡΙΟ ΜΟΝΤΕΛΟ

Σύμφωνα με τον ορισμό του Roy (1996), ένα μοντέλο αντιμετωπίζεται ως «σχήμα» (διαγράμματα, μαθηματικές εξισώσεις ή οτιδήποτε μπορεί να έχει συμβολικό χαρακτήρα) το οποίο μέσω μία συγκεκριμένης οικογένειας ερωτήσεων μπορεί να θεωρηθεί ως αναπαράσταση μιας τάξης φαινομένων η οποία και απομακρύνεται από τον παρατηρητή και από το ευρύτερο περιβάλλον με σκοπό τη περαιτέρω έρευνα και επικοινωνία.

Ένα μοντέλο οφείλει να εκφράζει μια αντικειμενική άποψη της πραγματικότητας που επιδιώκουμε να εξετάσουμε. Η αντικειμενικότητα του προτεινόμενου μοντέλου αξιολογείται μόνο από ένα συγκεκριμένο κοινό και οφείλει να ικανοποιεί τις ακόλουθες παραμέτρους:

- Την αμερόληπτη και αβίαστη αναπαράσταση της παρούσας τάξεως φαινομένων και των αντίστοιχων ερωτήσεων τους

- Τη δημιουργία ενός αμερόληπτου και αβίαστου οχήματος το οποίο και να εξυπηρετεί την περαιτέρω έρευνα και επικοινωνία

Η αντικειμενικότητα στη διαδικασία «αρωγής αποφάσεων» αντιμετωπίζει σημαντικές τεχνικές δυσκολίες. Αυτές οι δυσκολίες οφείλονται στο γεγονός ότι οι αποφάσεις λαμβάνονται από ανθρώπους για ανθρώπους οι οποίοι σε αντίθεση από τις μηχανές διακρίνονται για τις ψυχολογικές και συναισθηματικές εκφάνσεις που προσδίδουν σε ένα πρόβλημα απόφασης. Σε αυτό το σημείο οφείλουμε να αναφέρουμε τη ρήση του Tremolieres (1975), ο οποίος αναφέρει ότι «κάθε προσπάθεια ανάδειξης της γνώσης σε αντικειμενική γνώση έχει ως αποτέλεσμα την παράλειψη των υπολοίπων πληροφοριών που σχετίζονται με την ανθρώπινη συμπεριφορά. Οι πληροφορίες αυτές οφείλουν να συμμετέχουν στο τελικό στάδιο της εξαγωγής της απόφασης, εκτός και αν το αποτέλεσμα μιας τέτοιας διαδικασίας προορίζεται για ρομπότ και όχι για ανθρώπους».

4.2. Ο ΑΝΘΡΩΠΙΝΟΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΑΣ

Ο ανθρώπινος παράγοντας έχει και πρέπει να έχει καθοριστική συμμετοχή σε όλα τα στάδια ενός προβλήματος απόφασης. Αυτό φαίνεται λογικό, αν σκεφτεί κανείς ότι ένα τέτοιο πρόβλημα οργανώνεται από ανθρώπους, αναλύεται από ανθρώπους και απευθύνεται σε ανθρώπους. Ποιοι είναι όμως όλοι αυτοί οι άνθρωποι;

Ο πιο σημαντικός ανθρώπινος παράγοντας αναφέρεται στην ιδιότητα του «αποφασίζων» ή αλλιώς decision maker. Θα συμφωνήσουμε από δω και στο εξής, να αναφερόμαστε στη ιδιότητα του «αποφασίζων» με την συντομογραφία του αγγλικού όρου, ως D.M.. Σε κάθε πρόβλημα απόφασης ερχόμαστε αντιμέτωποι με πραγματικά αντικείμενα (factual elements) καθώς και με αντικείμενα τιμής (value elements) (Chankong, 1983). Τα πραγματικά αντικείμενα είναι αποτέλεσμα επιστημονικής αξιολόγησης και μπορούν να οδηγήσουν με ανάλογη επιστημονική προσέγγιση στην παραγωγή και άλλων – αντίστοιχα αξιόπιστων – στοιχείων. Από την άλλη πλευρά τα

αντικείμενα τιμής αψηφούν την παραπάνω αξιολόγηση που βασίζεται σε επιστημονικές μεθόδους. Το σύνολο των αντικειμένων «τιμής» με τις αντίστοιχες πηγές τους προσδιορίζεται ως σύστημα τιμής (value system). Η κρίση (judgment), η οποία και αναφέρεται συχνά στην απόδοση μιας απόφασης είναι το πιο συνηθισμένο αντικείμενο τιμής που απαντάται σε μια διαδικασία επίλυσης προβλήματος απόφασης. Το παραπάνω σύστημα (value system) έχει άμεση σχέση με την ιδιότητα του D.M. Ο Churcman (1968) αναφέρει ότι « ως D.M. προσδιορίζεται το άτομο που έχει την δυνατότητα (ευθύνη, εξουσία) να αλλάξει το σύστημα». Πιο συγκεκριμένα η ιδιότητα του D.M. αναφέρεται σε ένα άτομο (ή μια ομάδα ατόμων) το οποίο και μπορεί να εκφράσει τη τελική κρίση η οποία μπορεί να οδηγήσει αρχικά σε μια ιεράρχηση των εναλλακτικών αποφάσεων και τελικά στην εξεύρεση της «καλύτερης» λύσης.

Στην γενική μορφή του πολυκριτήριου αντικειμενικού προγραμματισμού, ο D.M. μαζί με άλλους ανθρώπους και μηχανές συνιστούν μία νέα οντότητα η οποία και ονομάζεται μονάδα D.M. (decision maker unit). Κύρια χαρακτηριστικά αυτής της μονάδας είναι:

- Η παραλαβή της αρχικής πληροφορίας
- Δημιουργία νέας πληροφορίας
- Αντιστοίχιση της πληροφορίας σε γνώση
- Εξαγωγή της απόφασης.

Σε αυτή την μονάδα, ιδιαίτερο ρόλο παίζει ο ανθρώπινος παράγοντας ο οποίος και αναφέρεται ως αναλυτής (analyst) (Roy, 1996). Στον ρόλο αυτό συναντάμε συνήθως άτομα τα οποία κατέχουν μία ιδιαίτερη εξειδίκευση (αναλυτές συστημάτων, οικονομολόγους, στατιστικούς, κ.α.). Ανάμεσα σε άλλα πράγματα, ο αναλυτής οφείλει να ξεκαθαρίσει το σύστημα «τιμής» που υπάρχει στο μυαλό του D.M. Αυτό επιτυγχάνεται με την μορφή ενός συνόλου ερωταποκρίσεων που αναπτύσσεται ανάμεσα στα δύο πρόσωπα. Ο αναλυτής ρωτάει και ο D.M. απαντά. Οι απαντήσεις αυτές βοηθούν τον αναλυτή να δομήσει το πρόβλημα, να αξιολογήσει τα δεδομένα και να διαλέξει μια μεθοδολογική προσέγγιση.

Τέλος, ο τρίτος ανθρώπινος παράγοντας που συναντάμε σε ένα πρόβλημα απόφασης είναι αυτός του πελάτη (client) (Roy, 1996). Ο πελάτης εμφανίζεται σε

ρόλο ενδιάμεσο μεταξύ του D.M. και του αναλυτή – αν τα δύο πρόσωπα είναι διαφορετικά. Επίσης κάποιες φορές, ο πελάτης μπορεί να παίξει τον ρόλο του αναλυτή.

4.3. ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ: ALTERNATIVES, ATTRIBUTES, EVALUATORS

Ο πρώτος επιστημονικός τομέας ο οποίος και θεμελίωσε ένα μοντέλο απόφασης είναι ο τομέας της Στατιστικής και συγκεκριμένα το πεδίο το οποίο αναφέρεται ως Ανάλυση Αποφάσεων (Elementary Decision Analysis). Η ανάλυση αποφάσεων ασχολείται με συγκεκριμένους τύπους προβλημάτων, τα οποία και έχουν τα εξής χαρακτηριστικά:

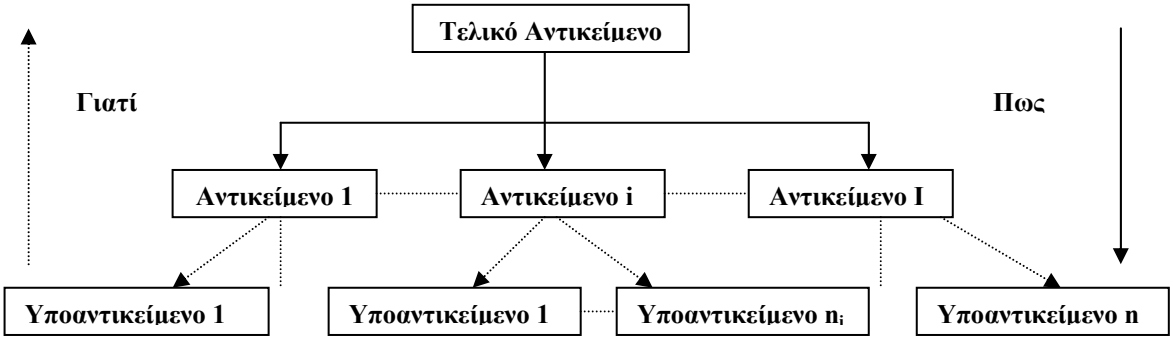
- Ένα προκαθορισμένο και περατωμένο σύνολο εναλλακτικών ενεργειών
- Μία και μόνο μία αντικειμενική συνάρτηση η οποία και πρέπει να μεγιστοποιηθεί
- Αβέβαιο περιβάλλον απόφασης

Αναφορά σε ένα τέτοιο μοντέλο απόφασης μπορούμε να βρούμε στον Sage(1977).

Στις μέρες μας, οι δύο προαναφερθείσες σχολές της Πολυκριτήριας ανάλυσης (Αγγλοσαξονική, Γαλλική), παρά τις όποιες διαφορές τους, χρησιμοποιούν σαν βάση για την εφαρμογή των μεθόδων τους το ίδιο μοντέλο: το μοντέλο A.A.E. (Alternatives, Attributes, Evaluators)(Vasnick, 1990). Οι παραπάνω όροι αναφέρονται αντίστοιχα στις εναλλακτικές αποφάσεις ή ενέργειες (Alternatives), στις ιδιότητες των εναλλακτικών (Attributes) και στους εκτιμητές τους (Evaluators).

Ως εναλλακτική απόφαση ορίζεται κάθε απόφαση η οποία μπορεί να πραγματοποιηθεί (feasible). Οι εναλλακτικές αποφάσεις συγκροτούν το σύνολο A. Στην γενικότερη περίπτωση του πολυκριτήριου προβλήματος, ο όρος εναλλακτική τείνει να αντικασταθεί από τον όρο αντικείμενο (objective) (Keeney and Raiffa, 1976). Ο όρος αντικείμενο εκφράζει την γενικότερη θέση του D.M. και υποδεικνύει τις κατευθύνσεις που πρέπει να ακολουθηθούν. Τα αντικείμενα αντιπροσωπεύουν τις επιθυμίες του D.M., άσχετα αν αυτές μπορούν να πραγματοποιηθούν ή όχι. Υπό αυτή την προοπτική, ο όρος αντικείμενο θεωρείται συμπληρωματικός του όρου

εναλλακτική. Τα αντικείμενα δηλώνουν τους στόχους που πρέπει να ικανοποιηθούν και αποτελούν το μέτρο με το οποίο αξιολογούμε μία δεδομένη εναλλακτική. Ένα καλώς ορισμένο σύνολο αντικειμένων οφείλει να έχει μία ιεραρχική δομή (Σχήμα 4.1.):



Σχήμα 4.1.: Τυπική Ιεραρχική δομή των αντικειμένων

Ένα αντικείμενο είναι λειτουργικό αν μπορεί να πραγματοποιηθεί στην πράξη. Για να μπορεί να γίνει αυτό, πρέπει να ορισθεί το σύνολο των ιδιοτήτων του κάθε αντικειμένου. Με τον όρο ιδιότητα ονομάζουμε μία μετρήσιμη ποσότητα, η τιμή της οποίας αναπαριστά το βαθμό πραγμάτωσης του αντικειμένου (ή της εναλλακτικής). Στην περίπτωση που η τιμή της ιδιότητας είναι πραγματικός αριθμός, η ιδιότητα ονομάζεται ποσοτική. Σε διαφορετική περίπτωση η ιδιότητα ονομάζεται ποιοτική. Μια ιδιότητα πρέπει να είναι περιεκτική και μετρήσιμη.

Το σύνολο των ιδιοτήτων που συνδέονται με μία εναλλακτική είναι της μορφής $\{X_1, X_2,\ldots, X_m\}$και αποτελείται από δύο τουλάχιστον στοιχεία που δηλώνουν και τα διαφορετικά επίπεδα της προτεινόμενης κατεύθυνσης. Σύμφωνα με τους Keeney και Raiffa (1976), το παραπάνω σύνολο πρέπει να έχει πέντε συγκεκριμένα χαρακτηριστικά:

- Πληρότητα
- Λειτουργικότητα
- Αποσυντιθετικότητα
- Ελάχιστο μέγεθος
- Μη Πλεονασμός

Ένα σύνολο ιδιοτήτων ονομάζεται πλήρες όταν καλύπτει όλες τις πτυχές ενός πολυκριτήριου προβλήματος. Επίσης το σύνολο αυτό ονομάζεται λειτουργικό, όταν μπορεί να χρησιμοποιηθεί με κατάλληλο τρόπο σε περαιτέρω ανάλυση. Το τρίτο χαρακτηριστικό, αναφέρεται στην ικανότητα του συνόλου να διαχωρίσει το πρόβλημα απόφασης σε τμήματα. Τέλος, ο μη- πλεονασμός και το ελάχιστο μέγεθος αναφέρονται στην απλότητα και την ακρίβεια που χαρακτηρίζουν ένα σύνολο ιδιοτήτων ως προς το θέμα του καθορισμού των παραμέτρων ενός προβλήματος απόφασης.

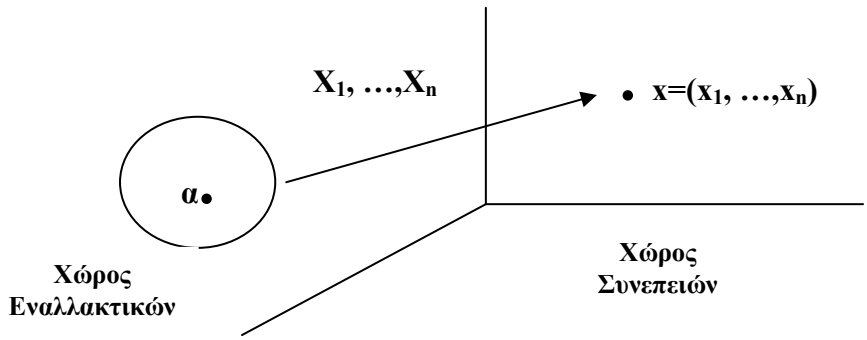
Ο τελευταίος όρος του μοντέλου Α.Α.Ε. αναφέρεται στο σύνολο (ε_1, ε_2, …, ε_m) των εκτιμητών. Ένας εκτιμητής ε_i ορίζεται ως συνάρτηση:

$$\varepsilon_i : A \rightarrow \Im P(X_i) - \varnothing$$

η οποία συνδέει κάθε εναλλακτική α με το μη- κενό σύνολο των X_i και συνιστά την εκτίμηση της α ως προς την κατεύθυνση που εκφράζει το σύνολο των ιδιοτήτων.

4.4. ΤΟ ΠΟΛΥΚΡΙΤΗΡΙΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΙΜΗΣ

Σύμφωνα με το μοντέλο που αναπτύχθηκε στην προηγούμενη παράγραφο, θεωρούμε την πραγματοποιήσιμη εναλλακτική α καθώς και το αντίστοιχο σύνολο των εναλλακτικών Α. Σε κάθε ενέργεια α συνδέουμε τους n δείκτες τιμής: $X_1(\alpha)$, …, $X_n(\alpha)$. Οι n εκτιμητές X_1, X_2, …, X_n λειτουργούν ως συνάρτηση με την οποία αντιστοιχούμε την εναλλακτική α σε σημείο στο n-διάστατο χώρο των τιμών της. Ο χώρος αυτός ονομάζεται και χώρος των συνεπειών (consequence space) (Σχήμα 4.2.). Σ' αυτό το σημείο οφείλουμε να σημειώσουμε - και μόνο για αυτό το κεφάλαιο - ότι οι όροι ιδιότητα και εκτιμητής θα θεωρηθούν από δω και στο εξής παραπλήσιοι (Keeney and Raiffa, 1976).



Σχήμα 4.2.: Αντιστοίχιση των εναλλακτικών σε συνέπειες

Οι διάφορες ιδιότητες X_i είναι δυνατόν να εκφράζονται σε διαφορετικές μονάδες μέτρησης. Αυτή η παρατήρηση καθιστά αδύνατη την σύγκριση των μεγεθών x_i στον n-διάστατο χώρο.

Το πρόβλημα που αντιμετωπίζει ο D.M. συνίσταται στην επιλογή της κατάλληλης εναλλακτικής α από το σύνολο Α, η οποία και θα αποδώσει ένα ικανοποιητικό σ' αυτόν αποτέλεσμα, με την μορφή των $X_1(\alpha)$, …, $X_n(\alpha)$. Για να γίνει αυτό είναι αναγκαία, σε πρώτο στάδιο, η κατασκευή ενός νέου δείκτη ο οποίος και θα συνδέσει τους ήδη υπάρχοντες δείκτες $X_1(\alpha)$, …, $X_n(\alpha)$ σε έναν βαθμωτό δείκτη προτίμησης ή τιμής. Ο δείκτης αυτός προσεγγίζεται από μία βαθμωτή συνάρτηση u, η οποία ορίζεται στον χώρο των συνεπειών με την εξής ιδιότητα:

$$u(x_1, x_2, ..., x_n) \geq u(x_1', x_2', ..., x_n') \Leftrightarrow (x_1, x_2, ..., x_n) \underset{\sim}{\succ} (x_1', x_2', ..., x_n'),$$

όπου το σύμβολο $\underset{\sim}{\succ}$ διαβάζεται ως «προτιμότερο ή αδιάφορο του». Η συνάρτηση u ονομάζεται συνάρτηση τιμής (value function). Η ίδια συνάρτηση απαντάται στην βιβλιογραφία και με άλλα ονόματα, όπως: βαθμωτή συνάρτηση χρησιμότητας (ordinal utility function), συνάρτηση προτίμησης (preference function), συνάρτηση αξίας (worth function) ή απλά συνάρτηση χρησιμότητας (utility function).

Αφότου κατασκευαστεί η δεδομένη συνάρτηση, ο D.M. επιλέγει την εναλλακτική που μεγιστοποιεί την u. Καθώς η συνάρτηση τιμής λειτουργεί συνθετικά, επιτρέπει την σύγκριση των ιδιοτήτων, χωρίς επιπλέον αναφορά στις κλίμακες τους.

Η κατασκευή της συνάρτησης τιμής απαιτεί τη συνεργασία μεταξύ του αναλυτή και του D.M. Ο αναλυτής οφείλει να υποβάλει στον D.M. καλώς διατυπωμένες ερωτήσεις έτσι ώστε οι απαντήσεις που θα αποδοθούν να του επιτρέψουν την κατασκευή της άγνωστης συνάρτησης u.

4.5. ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ ΟΠΟΥ ΔΕΝ ΑΠΑΙΤΕΙΤΑΙ Η ΤΥΠΟΠΟΙΗΣΗ ΤΩΝ ΠΡΟΤΙΜΗΣΕΩΝ

Το κύριο θέμα αυτού του κεφαλαίου αναφέρεται στην δόμηση και την κατασκευή της συνάρτησης τιμής ή απλώς μιας συνάρτησης f με την εξής ιδιότητα:

$$u(x_1, x_2, ..., x_n) = f\left[u_1(x_1), u_2(x_2), ...u_n(x_3)\right],$$

όπου οι ποσότητες $u_i(x_i)$ αναφέρονται στις τιμές για κάθε ιδιότητα X_i.
Στην πράξη όμως, αρκετές φορές, μία τέτοια διαδικασία είναι ανώφελη καθώς υπάρχουν και άλλοι απλούστεροι τρόποι για την εξαγωγή της βέλτιστης λύσης, σύμφωνα πάντα με τις προτιμήσεις του D.M. Οι τρόποι αυτοί αναφέρονται στην εύρεση των κατάλληλων εναλλακτικών οι οποίες έχουν κάποια ιδιαίτερα χαρακτηριστικά. Συγκεκριμένα, αναφερόμαστε στην περίπτωση της σχέσης κυριαρχίας (dominance relation) και της ικανής (efficient) εναλλακτικής. Οι επεξηγήσεις των παραπάνω εννοιών δίνονται με την μορφή των ορισμών (1 και 2).

Ορισμός 1: Έστω α και β δύο εναλλακτικές ενέργειες του συνόλου A, οι οποίες προσδιορίζονται από τα διανύσματα: $x=(x_1,\ldots,x_n)$ και $x'=(x_1',...,x_n')$ αντίστοιχα. Ονομάζουμε την α κυρίαρχη της β, όταν ισχύουν:

- $x_i \underset{\sim}{\succ} x_i' \quad \forall i,$ και

- $x_i \succ x_i^{'}$ για κάποια i.

Ορισμός 2: Η εναλλακτική α ονομάζεται ικανή αν δεν υπάρχει άλλη εναλλακτική του συνόλου Α που να κυριαρχεί σ' αυτή.

Το σύνολο των ικανών εναλλακτικών ονομάζεται «σύνολο των βέλτιστων λύσεων Pareto». Σ' αυτό το σύνολο θα αναζητηθούν και οι εναλλακτικές που ικανοποιούν τις απαιτήσεις του D.M.. Η εξερεύνηση του συνόλου Pareto επιτυγχάνεται μέσω της εισαγωγής γραμμικών σταθμισμένων μεταβλητών ή τεχνητών περιορισμών.

4.6. Η ΣΧΕΣΗ ΔΙΑΤΑΞΗΣ ΤΗΣ ΠΡΟΤΙΜΗΣΗΣ

Στην Θεωρία της Χρησιμότητας (Utility theory), η δημιουργία της συνάρτησης τιμής u, απαιτεί αρχικά την εξερεύνηση της δομής των προτιμήσεων του D.M., καθώς και την κατασκευή της σχέσης διάταξης των προτιμήσεων (preference order). Η θεμελίωση της συγκεκριμένη σχέσης διάταξης, θα μας επιτρέψει στην συνέχεια, να κατατάξουμε τις εναλλακτικές αποφάσεις με τρόπο που να αντανακλά πραγματικά τις προτιμήσεις του D.M.

Η έννοια της σχέσης διάταξης της προτίμησης (ή απλά της σχέσης προτίμησης) θεωρείται επέκταση της έννοιας της σχέσης διάταξης, που αναπτύχθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Πιο συγκεκριμένα η σχέση προτίμησης αντιμετωπίζεται ως σχέση διάταξης που εμφανίζεται σε ένα πρόβλημα απόφασης. Ανάλογα λοιπόν, η σχέση προτίμησης ορίζεται ως δυαδική σχέση και έχει τις βασικές ιδιότητες μιας σχέσης διάταξης. Όσον αφορά τώρα τον συμβολισμό μιας τέτοιας σχέσης, σ' αυτό το κεφάλαιο θα χρησιμοποιήσουμε αρχικά το σύμβολο «$\succ$» με σκοπό να δηλώσουμε την αυστηρή σχέση προτίμησης (strict preference): «είναι προτιμότερη της», καθώς και το σύμβολο «~» που αντιστοιχεί στη σχέση αδιαφορίας προτίμησης (indifference): « δεν μας ενδιαφέρει να προτιμηθεί από την» και τέλος το σύμβολο «$\underset{\sim}{\succ}$» το οποίο εκφράζει τη σχέση προτίμησης – αδιαφορίας προτίμησης (weak preference): «είναι τουλάχιστον τόσο καλή όσο ».

Η πληθώρα των σχέσεων προτίμησης που εμφανίζονται στα προβλήματα απόφασης καθιστά αναγκαία την υιοθέτηση μιας εκ των σχέσεων αυτών ως βασικής και των υπολοίπων ως παραγώγων αυτής. Για παράδειγμα θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε την σχέση προτίμησης – αδιαφορίας προτίμησης ως βασική και στην συνέχεια να ορίσουμε τις υπόλοιπες δύο σχέσεις ως εξής (Chankong, 1983):

1. Δεν μας ενδιαφέρει να προτιμήσουμε την A από την B, εάν και μόνο εάν η A είναι τουλάχιστον τόσο καλή όσο η B και αντίστοιχα η B είναι τουλάχιστον τόσο καλή όσο η A:

   $$A \sim B \Leftrightarrow A \underset{\sim}{\succ} B \text{ και } B \underset{\sim}{\succ} A$$

2. Η A είναι προτιμότερη της B εάν και μόνο εάν η A είναι τουλάχιστον τόσο καλή όσο η B και η B δεν είναι τουλάχιστον τόσο καλή όσο η A:

   $$A \succ B \Leftrightarrow A \underset{\sim}{\succ} B \text{ και όχι } B \underset{\sim}{\succ} A .$$

Η παραπάνω ιεράρχηση των σχέσεων προτίμησης δεν είναι μοναδική καθώς ο Fishburn (1970) προτείνει την χρήση της αυστηρής προτίμησης ως βασική σχέση και των υπολοίπων σχέσεων ως παράγωγα αυτής.

Η ύπαρξη μιας σχέσης προτίμησης είναι μια απαραίτητη προϋπόθεση που πρέπει να συνοδεύει ένα πρόβλημα απόφασης. Αλλά ακόμα και στην περίπτωση που δεν μπορεί να στηριχθεί η παραπάνω υπόθεση οφείλουμε, με άμεσο ή έμμεσο τρόπο, να κατασκευάσουμε μία τέτοια σχέση. Η κατασκευή της ζητούμενης σχέσης αποτελεί πρόβλημα μέτρησης και συγκεκριμένα πρόβλημα μέτρησης της προτίμησης.

Η παρουσία μιας σχέσης προτίμησης εγγυάται το γεγονός ότι οι προτιμήσεις μπορούν να μετρηθούν, έστω και μόνο σε μια κλίμακα. Οι διαβαθμίσεις μιας τέτοιας κλίμακας έχουν άμεση σχέση με τις ιδιότητες της σχέσης διάταξης της προτίμησης που παρέχει την συγκεκριμένη κλίμακα. Οι ιδιότητες αυτές έχουν άμεση σχέση με την μέθοδο της μέτρησης που πρόκειται να χρησιμοποιηθεί και ορίζονται ανάλογα με τις ιδιότητες των σχέσεων διάταξης.

4.7. Η ΣΧΕΣΗ ΔΙΑΤΑΞΗΣ

Θεωρούμε το σύνολο των εναλλακτικών αποφάσεων Α και τα στοιχεία του a,b και c. Εάν η R συνιστά μία δυαδική σχέση τότε αυτή ονομάζεται:

3. Μεταβατική, εάν: aRb και bRc $\Rightarrow$ aRc
4. Ανακλαστική, εάν: aRa
5. Μη-ανακλαστική, εάν: a$\not$Ra
6. Συμμετρική, εάν: aRb $\Rightarrow$ bRa
7. Ασυμμετρική, εάν: aRb $\Rightarrow$ b$\not$Ra
8. Αντισυμμετρική, εάν: aRb και bRa $\Rightarrow$ a=b
9. Συνδεδεμένη ή πλήρης, εάν: aRb και (ή) bRa $\forall(a,b) \in A^2$.

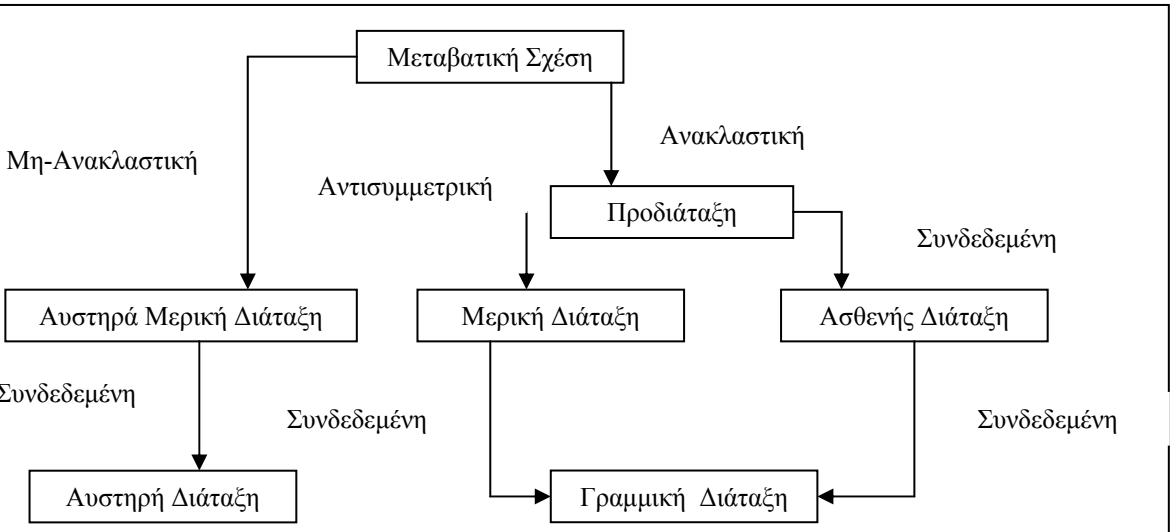
Η χαρακτηριστική ιδιότητα που προσδιορίζει μία δυαδική σχέση ως σχέση διάταξης, είναι η μεταβατική. Η προσθήκη και των υπολοίπων ιδιοτήτων στην σχέση διάταξης απλά αυξάνουν την βαθμό διάταξης που παρέχει η σχέση. Αν και οι σχέσεις διάταξης αποτέλεσαν το αντικείμενο του προηγούμενο κεφαλαίου, παρόλα αυτά θα αναφερθούμε στις σημαντικότερες από αυτές καθώς και στις ιδιότητες τους.

Μία μεταβατική σχέση R ονομάζεται:

- *Προδιάταξη* (preorder ή quasi-order), αν είναι και ανακλαστική
- *Ασθενής διάταξη* (weak order), αν είναι ανακλαστική και συνδεδεμένη
- *Μερική Διάταξη* (partial order), αν είναι αντισυμμετρική και ανακλαστική
- *Γραμμική διάταξη* (linear order), αν είναι αντισυμμετρική, ανακλαστική και συνδεδεμένη
- *Αυστηρή μερική διάταξη* (strict partial order), αν είναι μη-ανακλαστική και
- *Αυστηρή διάταξη* (strict order), αν είναι μη-ανακλαστική και συνδεδεμένη

Η μερική διάταξη είναι αντισυμμετρική προδιάταξη ενώ αντίστοιχα η ασθενής διάταξη είναι συνδεδεμένη προδιάταξη και η αυστηρή διάταξη είναι συνδεδεμένη αυστηρά μερική διάταξη. Η γραμμική διάταξη μπορεί να χαρακτηρισθεί είτε ως συνδεδεμένη μερική διάταξη ή αντισυμμετρική ασθενής διάταξη. Οι σχέσεις της

ασθενούς διάταξης, αυστηρής διάταξης και γραμμικής διάταξης απαιτείται να είναι συνδεδεμένες, καθώς η συγκεκριμένη ιδιότητα επιτρέπει την σύγκριση όλων των εναλλακτικών του συνόλου Α. Στο παρακάτω σχήμα (Σχήμα 4.3.) περιγράφονται οι αυτοί οι συσχετισμοί και προσδιορίζεται ιεραρχικά το «σθένος» της κάθε σχέσης διάταξης.



Σχήμα 4.3.: Ιεραρχία των σχέσεων διάταξης

4.8. Η ΘΕΩΡΙΑ ΤΙΜΗΣ

Η θεωρία Τιμής αφορά προβλήματα απόφασης που αναφέρονται σε σταθερό (certain) περιβάλλον απόφασης και εφαρμόζεται σε κάθε σύνολο εναλλακτικών ενεργειών ανεξαρτήτου μεγέθους (πεπερασμένο ή άπειρο).

4.8.1. Η ύπαρξη της Συνάρτησης Τιμής

Θεωρούμε το σύνολο των εναλλακτικών Χ, το οποίο είναι εφοδιασμένο με την σχέση ασθενούς διάταξης «$\succsim$». Η σχέση αυτή εισάγει έναν διαμερισμό του συνόλου Χ σε κλάσεις αδιαφορίας σύμφωνα με την συνθήκη ότι δύο εναλλακτικές a και b ανήκουν στην ίδια κλάση αδιαφορίας αν και μόνο αν ισχύει:

$a \underset{\sim}{\succ} b$ και $b \underset{\sim}{\succ} a$ (Δεν μας ενδιαφέρει να προτιμηθεί το από a το b).

Η αρχική υπόθεση της ασθενούς διάταξης «$\underset{\sim}{\succ}$» μας επιτρέπει να θεωρήσουμε τη σχέση αδιαφορίας της προτίμησης «~» ως σχέση ισοδυναμίας καθώς και αυτή χαρακτηρίζεται από την ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική ιδιότητα.
Ο διαμερισμός του συνόλου X σε n κλάσεις αδιαφορίας (ισοδυναμίας) X_i (i=1,2,..,n) επιτρέπει την ένα προς ένα αντιστοίχιση των κλάσεων με το σύνολο των φυσικών αριθμών:

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} X_i \longrightarrow N^n$$

Η σχέση ασθενούς διάταξης «$\underset{\sim}{\succ}$» στο σύνολο X ορίζεται ως ένωση των σχέσεων ισοδυναμίας «~» και αυστηρής διάταξης «$\succ$». Στην περίπτωση που η σχέση «$\underset{\sim}{\succ}$» είναι και συνδεδεμένη, τότε το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας είναι εφοδιασμένο με την σχέση αυστηρής διάταξης «$\succ$», σύμφωνα με την οποία (Fishburn, 1970):

$$X_i \succ X_j \Leftrightarrow a \succ b, \qquad \forall a \in X_i, b \in X_j, \qquad i \neq j.$$

Η ύπαρξη της σχέσης της αυστηρής διάταξης «>» στο σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας X/~ του συνόλου X, θεμελιώνει την ύπαρξη της συνάρτησης τιμής στο σύνολο X, όπως φαίνεται από το παρακάτω θεώρημα (Fishburn, 1970):

Θεώρημα 4.1.: Εάν το σύνολο X είναι εφοδιασμένο με την σχέση ασθενούς διάταξης «$\underset{\sim}{\succ}$» και το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας X/~ του συνόλου X είναι αριθμήσιμο, τότε υπάρχει πραγματική συνάρτηση u ορισμένη στο X, τέτοια ώστε για κάθε $a,b \in X$:

$a \underset{\sim}{\succ} b \Leftrightarrow u(a) \geq u(b)$ (4.1) ή πιο συγκεκριμένα:

$a \succ b \Leftrightarrow u(a) > u(b)$ (4.2 α) και

$a \sim b \Leftrightarrow u(a) = u(b)$ (4.2 β)

Η συνάρτηση τιμής δεν είναι μοναδική. Όπως φαίνεται και από το παρακάτω θεώρημα (Chankong, 1983), κάθε αύξων μονότονος μετασχηματισμός της ήδη

υπάρχουσας συνάρτησης τιμής μπορεί να οδηγήσει στην κατασκευή μιας νέας συνάρτησης τιμής.

Θεώρημα 4.2.: Έστω u μια συνάρτηση τιμής ορισμένη στο X, το οποίο είναι εφοδιασμένο με την σχέση «$\underset{\sim}{\succ}$». Αν η u ικανοποιεί τις συνθήκες (4.2 α) και (4.2 β), και υπάρχει αύξων, μονότονος, πραγματικός μετασχηματισμός V της u, τέτοιος ώστε:

$$V(u_1) > V(u_2) \Leftrightarrow u_1 > u_2 \quad \text{και}$$
$$V(u_1) = V(u_2) \Leftrightarrow u_1 = u_2 .$$

Τότε, για κάθε $a, b \in X$ ισχύει:

$$a \underset{\sim}{\succ} b \Leftrightarrow V^*(a) \geq V^*(b), \text{ όπου:}$$
$$V^*(a) = V[u(a)].$$

Η Θεωρία Τιμής έχει άμεση εφαρμογή και στην περίπτωση που το σύνολο X είναι υποσύνολο του n-διάστατου χώρου $\Re^n$ (Fishburn, 1970).

Θεώρημα 4.3.: Έστω το σύνολο X ($X \subset \Re^n$) εφοδιασμένο με την σχέση ασθενούς διάταξης «$\underset{\sim}{\succ}$». Ας υποθέσουμε ότι:

1. $a \geq b \Rightarrow a \succ b, \qquad \forall a, b \in X, \qquad$ και
2. Για κάθε $a, b, c \in X$ με a>b>c, υπάρχει $\lambda \in (0,1)$, τέτοιο ώστε: $b \sim \lambda a + (1-\lambda)c$.

Τότε υπάρχει πραγματική συνάρτηση u ορισμένη στο X, τέτοια ώστε $\forall a, b \in X$,

$$a \succ b \Leftrightarrow u(a) > u(b) \qquad \text{και}$$
$$a \sim b \Leftrightarrow u(a) = u(b)$$

Η πρώτη συνθήκη του παραπάνω θεωρήματος, είναι γνωστή ως συνθήκη της μονοτονίας και δηλώνει το γεγονός ότι όταν αυξηθεί η τιμή μιας ιδιότητας, χωρίς να υπάρξει ανάλογη μείωση στις τιμές των άλλων ιδιοτήτων, τότε και η προτίμηση αυξάνει. Αντίστοιχα η δεύτερη συνθήκη είναι γνωστή ως η Αρχιμήδεια συνθήκη στον χώρο των προτιμήσεων και θεμελιώνει την ύπαρξη της συνάρτησης u. Η συνθήκη αυτή δηλώνει ότι: αν η εναλλακτική b βρίσκεται μεταξύ των a και c σε κατάσταση αυστηρής διάταξης, τότε υπάρχει κυρτός συνδυασμός των a και c που είναι αδιάφορος του b.

4.8.2. Αθροιστικές Συναρτήσεις Τιμής

Η Θεωρία της Χρησιμότητας, συνιστά την απλούστερη και πλέον παραδοσιακή προσέγγιση ενός προβλήματος απόφασης (traditional mono-criterion approach) (Roy, 1990). Πιο συγκεκριμένα, η θεμελίωση της συνάρτησης τιμής λειτουργεί ως βάση για την εξαγωγή απόφασης σε απλό ή πολυκριτήριο πρόβλημα. Στην δεύτερη περίπτωση, η πολυπλοκότητα ενός πολυκριτηρίου προβλήματος θέτει σημαντικές δυσκολίες (μεγάλος όγκος εργασίας) στην κατασκευή της πολυδιάστατης συνάρτησης τιμής. Ο απλούστερος τρόπος για να αποφευχθούν οι δυσκολίες που προκύπτουν από το πολυδιάστατο του προβλήματος, έχει να κάνει με την μείωση της παραπάνω διάστασης. Η λύση αυτή συνεπάγεται την ομαδοποίηση των ιδιοτήτων σε μικρότερες υποομάδες, κάθε μία από τις οποίες μπορεί να θεωρηθεί ανεξάρτητη. Στην ιδανική περίπτωση, μπορούμε να αντιστοιχίσουμε μία συνάρτηση τιμής σε κάθε τέτοια υποομάδα, έτσι ώστε τα αναμενόμενα αποτελέσματα να μπορέσουν να αποδοθούν σε μορφή αθροίσματος. Στην περίπτωση αυτή, εισάγεται μία νέα ολική (global) σχέση προτίμησης, η οποία έχει αθροιστική (additional) δομή.

Πιο συγκεκριμένα, ονομάζουμε ως X_1, X_2, …, X_n τα ονόματα και τα σύνολα των πιθανών τιμών των n ιδιοτήτων καθώς και ως $X = X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ το σύνολο των εναλλακτικών. Ο καρτεσιανός ορισμός του συνόλου των εναλλακτικών X μας επιτρέπει να προσδιορίζουμε κάθε εναλλακτική $x \in X$ με το αντίστοιχο n-διάστατο διάνυσμα:

$x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$,

όπου οι $x_1,x_2,\ldots,x_n$ αποτελούν τις τιμές της εναλλακτικής x ως προς τις αντίστοιχες ιδιότητες $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Στην περίπτωση που οι σχέσεις προτίμησης (μερική - ολική) επιτρέπουν την εισαγωγή συναρτήσεων τιμής (είναι δηλ. πλήρεις προδιατάξεις), τότε η ολική σχέση προτίμησης έχει αθροιστική δομή, εάν και μόνο εάν υπάρχει συνάρτηση u(x) που μπορεί να γραφεί:

$$u(x)=u_1(x_1)+u_2(x_2)+\ldots+u_n(x_n), \qquad (\alpha)$$

ή εναλλακτικά:

$$u(x)=\lambda_1 u_1(x_1)+\lambda_2 u_2(x_2)+\ldots+\lambda_n u_n(x_n), \quad (\beta)$$

Στην γενικότερη περίπτωση της αθροιστικής συνάρτησης τιμής, οι συναρτήσεις $u_i \ / 1 \le i \le n$, αντιστοιχούν στις επιμέρους συναρτήσεις τιμής για κάθε ιδιότητα. Οι συναρτήσεις αυτές είναι αυστηρά αύξουσες και επιτρέπουν τον επαναπροσδιορισμό των ιδιοτήτων σε ίδια κλίμακα, έτσι ώστε να αποφευχθούν προβλήματα που έχουν σχέση με τις μονάδες μέτρησης. Η δεύτερη περίπτωση αθροιστικής συνάρτησης αντιστοιχεί στην περίπτωση του σταθμισμένου μέσου και απαιτεί την εισαγωγή των βαθμωτών σταθερών λ_i ($\lambda_i>0$) με μοναδιαίο άθροισμα: $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.

Η περίπτωση της ανεξαρτησίας των ιδιοτήτων που αναφέρθηκε αρχικά, προσδιορίζεται από τη συνθήκη της ανεξαρτησίας προτίμησης (preferential independence), όπως αυτή μας δίνεται από τον παρακάτω ορισμό (Chankong, 1983).

Ορισμός 4.1.: Έστω $\Omega=\{X_1,X_2,\ldots,X_n\}$ το σύνολο των ιδιοτήτων και Θ, $\overline{\Theta}$ ένα μη κενό υποσύνολο του Ω και το αντίστοιχο συμπληρωματικό του. Ονομάζουμε X_Θ και $X_{\overline{\Theta}}$ τα καρτεσιανά γινόμενα των συνόλων ως προς Θ και $\overline{\Theta}$ αντίστοιχα. Κάθε εναλλακτική $x \in X$ προσδιορίζεται από το ζεύγος $(x_\Theta, x_{\overline{\Theta}})$ των τιμών της ως προς τα σύνολα X_Θ και $X_{\overline{\Theta}}$. Το υποσύνολο των ιδιοτήτων Θ ονομάζεται ανεξάρτητο της

προτίμησης του συμπληρωματικού του $\overline{\Theta}$, εάν και μόνο εάν υπάρχει εναλλακτική $x_{\overline{\Theta}}^{0}$ τέτοια ώστε:

$$\left(x'_{\Theta}, x_{\overline{\Theta}}^{0}\right) \geq \left(x''_{\Theta}, x_{\overline{\Theta}}^{0}\right) \Rightarrow \left(x'_{\Theta}, x_{\overline{\Theta}}\right) \geq \left(x''_{\Theta}, x_{\overline{\Theta}}\right), \quad \forall x_{\overline{\Theta}} \in X_{\overline{\Theta}}.$$

Ο Vincke (1992) μας δίνει ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα της ανεξαρτησίας προτίμησης που αφορά το σύνολο τεσσάρων εναλλακτικών a,b,c,d. Πιο συγκεκριμένα το σύνολο Θ είναι ανεξάρτητο του συνόλου $\overline{\Theta}$, εάν:

$$\left.\begin{array}{l} X_j(a) = X_j(b), \forall j \in \overline{\Theta} \\ X_j(c) = X_j(d), \forall j \in \overline{\Theta} \\ X_j(a) = X_j(c), \forall j \in \Theta \\ X_j(b) = X_j(d), \forall j \in \Theta \end{array}\right\} \Rightarrow aPb \Leftrightarrow cPd,$$

όπου η P είναι η ολική σχέση προτίμησης ως προς όλα τα κριτήρια.

Με άλλα λόγια, το υποσύνολο των ιδιοτήτων Θ ονομάζεται ανεξάρτητο της προτίμησης του συμπληρωματικού του $\overline{\Theta}$, εάν οι προτιμήσεις των εναλλακτικών -όπως αυτές προσδιορίζονται μέσω των εκτιμητών τους- σύμφωνα με το Θ- δεν εξαρτώνται από τις αντίστοιχες προτιμήσεις που αφορούν το υποσύνολο $\overline{\Theta}$.

Στην περίπτωση της ανεξαρτησίας προτίμησης, υπάρχουν φορές που ναι μεν υποσύνολο Θ είναι ανεξάρτητο της προτίμησης του συμπληρωματικού του $\overline{\Theta}$, αλλά δεν μπορούμε πάντα να ισχυριστούμε και το αντίστροφο. Η παρατήρηση αυτή απαιτεί την εισαγωγή μιας αυστηρότερης συνθήκης που θεμελιώνει την ύπαρξη της αθροιστικής συνάρτησης τιμής, της συνθήκης της αμοιβαίας ανεξαρτησίας προτίμησης.

Ορισμός 4.1.: Το σύνολο των ιδιοτήτων Ω ονομάζεται αμοιβαία ανεξάρτητο προτίμησης (mutually preferentially independent), εάν κάθε μη κενό υποσύνολο του Θ είναι ανεξάρτητο προτίμησης του συμπληρωματικού του $\overline{\Theta}$.

4.8.3. Άλλα Μοντέλα

Η απλούστερη και πρακτικότερη παρουσίαση της συνολικής προτίμησης ενός πολυκριτήριου προβλήματος μας δίνεται με την μορφή της αθροιστικής συνάρτησης. Παρόλα αυτά υπάρχει πληθώρα προβλημάτων απόφασης όπου για την εξαγωγή της συνολικής προτίμησης απαιτείται η χρήση άλλων μοντέλων τιμής.

Τέτοια μοντέλα είναι:

1. το πολλαπλασιαστικό (multiplicative):
   $u[u_1(x_1),...,u_n(x_n)] = ku_1(x_1)u_2(x_2)...u_n(x_n)$

2. το πολυωνυμικό (polynomial):
   $u[u_1(x_1),...,u_n(x_n)] = kx_1^{\alpha 1}x_2^{\alpha 2}...x_n^{\alpha n}$, όπου α_i μη-αρνητικοί ακέραιοι

3. το μοντέλο της μερικής άθροισης (partial additive):
   $u[u_1(x_1),...,u_n(x_n)] = [k_1u_1(x_1) + ... + k_{n-2}u_{n-2}(x_{n-2})]u_{n-1}(x_{n-1})u_n(x_n)$

καθώς και πλήθος άλλων.

Το πολλαπλασιαστικό μοντέλο προκύπτει από το αθροιστικό μοντέλο, ενώ δεν μπορούμε να πούμε ότι το ίδιο ισχύει και για τα υπόλοιπα. Το τρίτο μοντέλο, το μοντέλο της μερικής άθροισης, λαμβάνει υπόψη το οποιοδήποτε είδος εξάρτησης, που μπορεί να παρατηρηθεί μεταξύ των διαφόρων ιδιοτήτων.

4.9. ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΑΝΑΜΕΝΟΜΕΝΗΣ ΧΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑΣ

Μία εναλλακτική ενέργεια είναι καλύτερη ή χειρότερη από μία άλλη ή αντίστοιχα μία εναλλακτική είναι καλή ή κακή σύμφωνα με κάποιες νόρμες. Η σύγκριση των παραπάνω εννοιών – οι οποίες έχουν μία γενικότερη ερμηνεία – πρέπει να γίνει με βάση συγκεκριμένο σύστημα αναφοράς, το οποίο και επιτρέπει την διαφοροποίηση τους. Η πρακτικότερη μορφή ενός τέτοιου συστήματος επιτυγχάνεται με την αναγωγή των εναλλακτικών στο αριθμητικό σύστημα των συνεπειών. Η

έννοια της συνέπειας (consequence) αντιστοιχεί στην μορφή του αποτελέσματος (outcome) ή της πληρωμής (payoff) και επιτυγχάνει την σύγκριση των εναλλακτικών μέσω των αντίστοιχων αριθμών τους.

Σε προηγούμενη παράγραφο έχουμε αναφερθεί ξανά στις συνέπειες των εναλλακτικών καθώς και στον αντίστοιχο χώρο τους (consequence space). Οι ανάγκες όμως της συγκεκριμένης παραγράφου, επιβάλλουν τον προσδιορισμό της έννοιας αυτής πέραν του επιπέδου της αναφοράς. Πιο συγκεκριμένα, ονομάζουμε συνέπεια της εναλλακτικής α, κάθε αποτέλεσμα το οποίο μπορεί να αλληλεπιδράσει με τα αντικείμενα, την στρατηγική ή το σύστημα τιμής του ανθρώπινου παράγοντα που αναμιγνύεται στην διαδικασία απόφασης και μπορεί παράλληλα να λειτουργήσει ως βασικό στοιχείο για την κατασκευή ή την αλλαγή των προτιμήσεων (Roy, 1996).

Τα προβλήματα απόφασης που αντιμετωπίστηκαν με την θεωρία της τιμής, είχαν ως απαραίτητη προϋπόθεση την ύπαρξη ενός βέβαιου και με ακρίβεια προσδιορισμένου, αποτελέσματος της εναλλακτικής. Παρόλα αυτά, υπάρχει και ένας εξίσου μεγάλος αριθμός προβλημάτων απόφασης, για τα οποία η εύρεση της βέλτιστης λύση δεν περιορίζεται απλά στην επιλογή της εναλλακτικής αλλά εξαρτάται και από την εισαγωγή των πιθανών θέσεων - κατευθύνσεων (states of nature) που αφορούν το περιβάλλον της απόφασης και οι οποίες πρέπει να ληφθούν υπόψη. Η έννοια της κατεύθυνσης του περιβάλλοντος απόφασης αναφέρεται σε προβλήματα όπου η συνέπεια μιας εναλλακτικής δεν προσδιορίζεται από ένα συγκεκριμένο αριθμό παρά από ένα σύνολο αριθμών που αποδίδονται με την μορφή του νέφους των συνεπειών (consequence cloud) (Roy, 1996). Σ' αυτό το νέφος, μια συγκεκριμένη θέση αντικαθίσταται από ένα σύνολο θέσεων, το οποίο και δύναται να συμπεριληφθεί στην διατύπωση του πολυκριτήριου προβλήματος απόφασης. Το είδος αυτών των προβλημάτων αναφέρεται ως πρόβλημα απόφασης υπό αβεβαιότητα (under uncertainty) και η επίλυση του απαιτεί την εισαγωγή της πολυκριτήριας θεωρίας της Χρησιμότητας. Στην ειδική περίπτωση όπου οι πιθανές θέσεις είναι δυνατόν να προβλεφθούν με την χρήση των πιθανοτήτων, έχουμε να κάνουμε με πρόβλημα σε περιβάλλον κινδύνου (under risk).

Η εισαγωγή της έννοιας της κατεύθυνσης του περιβάλλοντος απόφασης επιφέρει και μία ανάλογη τροποποίηση στο πολυκριτήριο μοντέλο Α.Α.Ε. Μ' αυτόν τον τρόπο, πέρα από τα τετριμμένα: εναλλακτικές, ιδιότητες και εκτιμητές των

εναλλακτικών, το μοντέλο που αναφέρεται σε προβλήματα απόφασης υπό αβεβαιότητα, περιλαμβάνει επίσης:

- Ένα σύνολο θέσεων S, όπου η θέση αντιστοιχεί σε μία πιθανή έκβαση του περιβάλλοντος απόφασης, επί της οποίας αφενός δεν έχουμε κανέναν έλεγχο και αφετέρου η επιρροή της είναι καταλυτική για το αποτέλεσμα της εναλλακτικής.
- Ένα σύνολο X των συνεπειών. Εάν το περιβάλλον απόφασης κινηθεί προς την κατεύθυνση s, τότε το αποτέλεσμα της εναλλακτικής α μας δίνεται με την μορφή x, ή αλλιώς x(α,s). Μ' αυτόν τον τρόπο η συνέπεια x ορίζεται συναρτησιακά ως εξής:

$$x : A \times S \longrightarrow X .$$

4.9.1. Η ύπαρξη της συνάρτησης Αναμενόμενης Χρησιμότητας

Η θεωρία της αναμενόμενης χρησιμότητας (expected utility) ασχολείται με προβλήματα απόφασης σε ασαφές περιβάλλον ή πιο συγκεκριμένα με προβλήματα απόφασης σε περιβάλλον κινδύνου. Οι βασικές προϋποθέσεις που απαιτούνται για την εφαρμογή της, είναι:

1) Οι πιθανές κατευθύνσεις του πολυκριτήριου προβλήματος είναι δυνατόν να ορισθούν με την χρήση κατανομών πιθανοτήτων
2) Υπάρχει μία σχέση προτίμησης στο σύνολο των εναλλακτικών A

Στην συνέχεια, οφείλουμε να εξετάσουμε τις συνθήκες για τις οποίες η προτεινόμενη σχέση διάταξης μπορεί να αναπαρασταθεί μέσω μίας αριθμητικής συνάρτησης U, τέτοιας ώστε:

$$\alpha_1 \underset{\sim}{\succ} \alpha_2 \Leftrightarrow U(\alpha_1) \geq U(\alpha_2)$$

Η θεωρία της αναμενόμενης χρησιμότητας θεμελιώθηκε στην αρχή που διατύπωσε ο Daniel Bernoulli στις αρχές του 18^{ου} αιώνα (1738).

Αρχή Bernoulli: Εάν ο εμπλεκόμενος σε μία διαδικασία απόφασης έχει να επιλέξει μεταξύ ενός συνόλου εναλλακτικών (με χαρακτηριστικά κινδύνου), γνωρίζοντας ότι το αποτέλεσμα μιας εναλλακτικής εξαρτάται από την αλληλεπίδραση της με μία πιθανή θέση του περιβάλλοντος απόφασης, η οποία εκφράζεται από μία γνωστή ή υπολογίσιμη κατανομή πιθανότητας, τότε πρέπει να διαλέξει την εναλλακτική η οποία αποδίδει την μεγαλύτερη αναμενόμενη προτίμηση σε σχέση με το σύνολο των συνεπειών.

Η συνθήκη αυτή υπονοεί την ύπαρξη της αριθμητικής συνάρτησης αναμενόμενης χρησιμότητας. Η διατύπωση της στην μαθηματική γλώσσα γίνεται ως εξής:
Έστω p(s) η κατανομή πιθανότητας της θέσης s, εάν αυτή είναι διακριτή, ή αλλιώς η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της s, εάν αυτή είναι συνεχής. Ορίζουμε την συνάρτηση u(x) [u(α,s)] ως τυχαία μεταβλητή. Στην περίπτωση που η p(s) μπορεί να υπολογιστεί, τότε σύμφωνα με την αρχή του Bernoulli, ως «καλύτερη» εναλλακτική ορίζεται η εναλλακτική α* η οποία μεγιστοποιεί την ποσότητα u(α,s),

$$E(\alpha^*) = \max_{\alpha \in A} \sum_{s \in S} p(s)u(\alpha, s) \text{ (διακριτή)} \qquad \text{και}$$

$$E(\alpha^*) = \max_{\alpha \in A} \int_{s \in S} p(s)u(\alpha, s)ds \text{ (συνεχής).}$$

Αντίστοιχα η συνάρτηση αναμενόμενης χρησιμότητας U(α) της εναλλακτικής α είναι η:

$$U(\alpha) = \begin{cases} \sum_{s \in S} p(s)u(\alpha, s) \\ \int_{s \in S} p(s)u(\alpha, s)ds \end{cases}$$

Η ύπαρξη της αναμενόμενης χρησιμότητας θεμελιώνεται αξιωματικά με πλήθος θεωρημάτων (Fishburn, 1970), με πιο σημαντικό το θεώρημα χρησιμότητας του von Neumann – Morgenstern (1980). Η διατύπωση όμως του συγκεκριμένου

θεωρήματος εισάγει μία νέα ορολογία, την οποία και πρέπει αρχικά να αποσαφηνίσουμε.

Θεωρούμε τις πιθανές συνέπειες x και y καθώς και τον αριθμό $\alpha \in [0,1]$. Ονομάζουμε ως μηχανισμό αλλαγής (αx, (1-α)y) την ανάμειξη (mixture) πιθανοτήτων (λοταρία ή παιγνίδι) των x και y. Πιο συγκεκριμένα, εάν θεωρήσουμε τις πιθανές συνέπειες $x^1,\ldots,x^n$ του X και τον πραγματικό αριθμό $\alpha_i \in [0,1]$ ($\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$), τότε ονομάζουμε το σύνολο $(\alpha_1 x^1,\ldots \alpha_n x^n)$ ως ανάμειξη πιθανοτήτων. Μία εναλλακτική ενέργεια α , η οποία εμφανίζεται να παίρνει την τιμή x^i με πιθανότητα α_i, ονομάζεται ενδεχόμενο κινδύνου (risky prospect) (Chankong, 1983). Αντίστοιχα η εναλλακτική α με ανάμειξη πιθανότητας $(0x^1,\ldots,1x^i,\ldots,0x^n)$, ονομάζεται βέβαιο ενδεχόμενο (sure prospect). Το σύνολο όλων των πιθανών αναμείξεων πιθανότητας των στοιχείων του X, συμβολίζεται ως $\tilde{X}$.

Κάθε συνέπεια $x \in X$, αντιστοιχεί σε ένα βέβαιο ενδεχόμενο στο $\tilde{X}$. Αντίστοιχα κάθε εναλλακτική ενέργεια α του A, μπορεί να ειδωθεί ως ενδεχόμενο κινδύνου. Με βάση αυτήν την παρατήρηση μπορούμε να θεωρήσουμε το σύνολο A ως υποσύνολο του $\tilde{X}$. Η παραδοχή αυτή μας επιτρέπει την επέκταση της σχέσης προτίμησης «$\underset{\sim}{\succ}$», που μπορεί να παρατηρηθεί στο A, και στο σύνολο $\tilde{X}$. Μ' αυτόν τον τρόπο μπορούμε να κατασκευάσουμε μία συνάρτηση αναμενόμενης χρησιμότητας U στο $\tilde{X}$, η οποία με την σειρά της μας επιτρέπει την κατάταξη των ενδεχομένων κινδύνου του $\tilde{X}$, με το ίδιο τρόπο με τον οποίο κατατάσσουμε τα στοιχεία του A. Αυτή άλλωστε είναι και η βασική αρχή που θεμελιώνει την θεωρία του von Neumann – Morgenstern.

Θεώρημα 4.4. (von Neumann – Morgenstern): Έστω $\tilde{X}$ το σύνολο των πιθανών ενδεχομένων του συνόλου X και μία σχέση προτίμησης «$\underset{\sim}{\succ}$» ορισμένη στο $\tilde{X}$. Η σχέση «$\underset{\sim}{\succ}$», ικανοποιεί το ακόλουθο σύστημα αξιωμάτων ($\forall \tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{X}$):

1) Η «$\underset{\sim}{\succ}$» είναι σχέση ασθενούς διάταξης στο $\tilde{X}$
2) Εάν $\tilde{x} \succ \tilde{y} \Rightarrow (\alpha\tilde{x}, (1-\alpha)\tilde{y}) \succ \tilde{y}$, $\forall \alpha \in (0,1)$

3) Εάν $\tilde{x} \succ \tilde{y} \succ \tilde{z}$, τότε υπάρχει $\alpha_1, \alpha_2 \in (0,1)$ ώστε: $(\alpha_1 \tilde{x}, (1-\alpha_1)\tilde{z}) \succ \tilde{y} \succ (\alpha_2 \tilde{x}, (1-\alpha_2)\tilde{z})$

4) $(\alpha\tilde{x}, (1-\alpha)\tilde{y}) = ((1-\alpha)\tilde{x}, \alpha\tilde{y}),\ \forall \alpha \in (0,1)$

5) Εάν $\tilde{w} = (\alpha\tilde{x}, (1-\alpha)\tilde{y})$, τότε: $(\beta\tilde{w}, (1-\beta)\tilde{y}) = (\alpha\beta\tilde{x}, (1-\alpha\beta)\tilde{y})$

εάν και μόνο εάν υπάρχει πραγματική συνάρτηση U, ορισμένη στο $\tilde{X}$, τέτοια ώστε $(\forall \tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{X})$:

$$\tilde{x} \underset{\sim}{\succ} \tilde{y} \Leftrightarrow U(\tilde{x}) \geq U(\tilde{y}) \qquad (1) \qquad \text{και}$$

$$U(\alpha\tilde{x}, (1-\alpha)\tilde{y}) = \alpha U(\tilde{x}) + (1-\alpha)U(\tilde{y}), \qquad (2) \qquad \forall \alpha \in (0,1)$$

Πιο συγκεκριμένα, εάν υπάρχει και άλλη πραγματική συνάρτηση U' στο $\tilde{X}$, τότε η νέα συνάρτηση ικανοποιεί τις συνθήκες (1) και (2), εάν και μόνο εάν:

$$U'(\tilde{x}) = \lambda U(\tilde{x}) + \mu, \qquad \lambda, \mu \in \Re, \lambda > 0 .$$

Η ύπαρξη της αριθμητικής συνάρτησης U, με τις ιδιότητες (1) και (2), μας επιτρέπει να κατασκευάσουμε στην συνέχεια τόσο την υπό συνθήκη συνάρτηση χρησιμότητας u στο X, όσο και την συνάρτηση αναμενόμενης χρησιμότητας στο $\tilde{X}$. Τέλος, η δήλωση ότι οι συναρτήσεις U και u είναι μοναδικές σε θετικό γραμμικό μετασχηματισμό, τοποθετεί την έννοια της μέτρησης που εισάγει η U σε κλίμακα διαστήματος ή άλλη υψηλότερη κλίμακα.

4.9.2. Αθροιστικές συναρτήσεις χρησιμότητας

Η αθροιστική δομή, συνιστά την απλούστερη (από πρακτικής άποψης) αλλά συγχρόνως και την πιο περιοριστική (από θεωρητικής πλευράς) μορφή σύνθεσης.

Θεωρώντας το σύνολο των συνεπειών X_i και το αντίστοιχο σύνολο των ενδεχομένων $\tilde{X}_i$, ορίζουμε ως τυπικό στοιχείο του $\tilde{X}_i$, το στοιχείο:

$$\tilde{x}_i(p_i) = \{(x_i, p_i(x_i)) / x_i \in X_i\},$$

όπου η ποσότητα $p_i(x_i)$ εκφράζει την περιθώρια κατανομή πιθανότητας της x_i συνέπειας.

Στην περίπτωση που το σύνολο X εκφράζεται με την μορφή του καρτεσιανού γινομένου: $X = X_1 \times ... \times X_n$ και οι ποσότητες u_i και U_i εκφράζουν αντίστοιχα την υπό συνθήκη συνάρτησης χρησιμότητας και την συνάρτηση αναμενόμενης χρησιμότητας στα σύνολα X_i και $\tilde{X}_i$, ορίζουμε την συνάρτηση αναμενόμενης χρησιμότητας στο σύνολο $\tilde{X}$ ως εξής:

$$U\left(\tilde{x}(p)\right) = \sum U_i(\tilde{x}_i) = \sum E_{pi}\left(u_i(x_i)\right)$$

4.10. ΑΜΕΣΟΙ ΤΡΟΠΟΙ ΓΙΑ ΤΗΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΗΣ ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Οι άμεσοι τρόποι που αφορούν την κατασκευή της συνολικής συνάρτησης (τιμής) χρησιμότητας u, αναφέρονται στον προσδιορισμό των επιμέρους συναρτήσεων u_j. Ένα πανόραμα 24 μεθόδων υπολογισμού των u_j μπορεί να βρεθεί στον Fishburn (1967). Οι τρόποι αυτοί κατηγοριοπούνται σε διάφορες ομάδες στις οποίες λαμβάνονται κατά κύριο λόγο υπόψη, οι εξής παράγοντες:

- Η χρήση η όχι των πιθανοτήτων
- Το είδος των ερωτήσεων του αναλυτή προς τον D.M.
- Η αντιστοίχιση της κατασκευής των u_j, σε μία και μόνο θέση ή σε συνδυασμό θέσεων.

Στην παράγραφο αυτή, θα υιοθετήσουμε την πρόταση του Vincke (1992), ο οποίος και μας δίνει έξι χαρακτηριστικά παραδείγματα των παραπάνω περιπτώσεων. Σ' αυτό το σημείο, οφείλουμε να διευκρινίσουμε ότι η κάθε ιδιότητα X_j αντιστοιχεί σε ένα πλήρως διατεταγμένο σύνολο $\{x_j,\ldots,y_j\}$, όπου οι τιμές x_j και y_j αντιστοιχούν στην χειρότερη και καλύτερη κλάση του X_j. Το αθροιστικό μοντέλο μπορεί να γραφεί:

$$U(\alpha) = \sum U_j(x_j^{\alpha}), \quad \text{όπου: } x_j^{\alpha} = X_j(\alpha)$$

1η Μέθοδος: Ζητάμε από τον D.M. να ορίσει την κλάση z_j, την οποία και θεωρεί ως την ενδιάμεση των x_j και y_j, καθώς και την κλάση v_j (ενδιάμεση των x_j και z_j) και την κλάση w_j (ενδιάμεση των z_j και y_j). Με την προϋπόθεση ότι το X_j είναι απειροσύνολο, συνεχίζουμε τον διάλογο και παίρνουμε:

$$\begin{cases} U(z_j) = \frac{1}{2}\left[U(x_j) + U(y_j)\right] \\ U(v_j) = \frac{1}{2}\left[U(x_j) + U(z_j)\right] \\ U(w_j) = \frac{1}{2}\left[U(z_j) + U(y_j)\right] \\ \ldots\ldots \end{cases}$$

2η Μέθοδος: Ζητάμε από τον D.M. να ορίσει την κλάση z_j, έτσι ώστε να μπορούμε να την προσδιορίσουμε ακριβώς καθώς και να προσδιορίσουμε την κλάση x_j με πιθανότητα $1/2$ και την κλάση y_j με πιθανότητα $1/2$. Τότε παίρνουμε την:

$$U(z_j) = \frac{1}{2}\left[U(x_j) + U(y_j)\right]$$

και συνεχίζουμε με (x_j,z_j) και (z_j,y_j),… Το σύνολο X_j είναι απειροσύνολο.

3η Μέθοδος: Ζητάμε από τον D.M. να ορίσει την κλάση z_j, έτσι ώστε να μπορούμε να την προσδιορίσουμε ακριβώς καθώς και να προσδιορίσουμε την κλάση x_j με πιθανότητα p και την κλάση y_j με πιθανότητα 1-p, για διάφορες τιμές του p.Τότε παίρνουμε την:

$$U_j(z_j(p)) = pU_j(x_j) + (1-p)U_j(y_j), \qquad \forall p$$

Όμοια, το σύνολο X_j είναι απειροσύνολο.

4η Μέθοδος: Ζητάμε από τον D.M. να υπολογίσει την πιθανότητα $p(z_j)$ για κάθε πιθανή κλάση z_j, έτσι ώστε να προσδιορίσουμε το z_j καθώς και τα x_j με πιθανότητα $p(z_j)$ και y_j με πιθανότητα $1-p(z_j)$. Τότε:

$$U(z_j) = p(z_j)U_j(x_j) + \left[1 - p(z_j)\right]U_j(y_j).$$

Η μέθοδος εφαρμόζεται σε κάθε σύνολο X_j, πεπερασμένο ή μη.

5η Μέθοδος: Ζητάμε από τον D.M. να κατατάξει τα στοιχεία του X_j καθώς και τα διαστήματα μεταξύ των στοιχείων. Στην συνέχεια, με βάση αυτές τις κατατάξεις,

προσδιορίζουμε τις διάφορες θέσεις με την βοήθεια αριθμητικών τιμών (τα διαστήματα αναπαριστώνται με διαφορές των τιμών). Η μέθοδος εφαρμόζεται σε πεπερασμένο σύνολο X_j.

6η Μέθοδος: Η μέθοδος αυτή προϋποθέτει ότι η συνάρτηση U_i αντιπροσωπεύει την i θέση (point of view) του πολυκριτήριου προβλήματος. Έστω w_i μία αριθμητική κλάση του X_i. Ζητάμε από τον D.M να προσδιορίσει για κάθε κλάση z_j, την κλάση t_i στο X_i, έτσι ώστε:

- να προσδιορίσουμε το x_j για την j θέση και το w_i για την i θέση
- να προσδιορίσουμε το z_j για την j θέση και το t_i για την i θέση

Τότε έχουμε:

$$U_j(z_j) = U_j(x_j) + U_i(w_i) - U_i(t_i).$$

Η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται σε κάθε σύνολο X_j, με την προϋπόθεση ότι το X_i είναι απειροσύνολο.

4.11. Η ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΚΟΙΝΩΝΙΚΗΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ

Η θεωρία της κοινωνικής επιλογής (theory of social choice) συνιστά μία ιδιαίτερη πτυχή της Αγγλοσαξονικής σχολής η οποία και προσεγγίζει το πρόβλημα της αρωγής στην απόφαση όχι πλέον από την πλευρά που αφορά ένα και μόνο ενδιαφερόμενο αλλά από την πλευρά που αφορά ομάδες και σύνολα ατόμων. Η θεωρία αυτή αντικατοπτρίζει, σε μαθηματικό επίπεδο, την βασική αρχή της θεωρίας της Δημοκρατίας (Democratic theory) σύμφωνα με την οποία οι αποφάσεις που αφορούν θέματα κοινωνικής επιλογής και αναφέρονται στο σύνολο των ατόμων μιας κοινωνίας πρέπει να λαμβάνονται με βάση τις επιθυμίες και τις προτιμήσεις των ατόμων αυτών (Fishburn, 1973). Σαν συνέπεια αυτής της προσέγγισης, οι εμπνευστές της θεωρίας της κοινωνικής επιλογής [Arrow (1963), Murakami (1966), Sen (1970)] διαμόρφωσαν μία θεωρία που εξερευνά τις σχέσεις μεταξύ των προτιμήσεων ενός συνόλου ατόμων, βασιζόμενοι σε δημοκρατικά ιδεώδη. Η σύνδεση αυτή γίνεται ιδιαίτερα εμφανής όταν οι προς εξέταση σχέσεις αντιμετωπίζονται με όρους πλειοψηφίας (απλής ή σταθμισμένης), ολιγαρχίας ή διδακτορίας.

Στην παράγραφο αυτή θα προσπαθήσουμε να προσεγγίσουμε την θεωρία της κοινωνικής επιλογής, βασιζόμενοι κυρίως στις θέσεις του Peter .C. Fishburn (1973). Πιο συγκεκριμένα, θα αναφερθούμε αρχικά στο γενικό θέμα των συναρτήσεων επιλογής και στην συνέχεια θα προσδιορίσουμε τις συναρτήσεις αυτές σε σχέση με τα σύνολα των εναλλακτικών που περιέχουν αφενός δύο στοιχεία και αφετέρου περισσότερα των δύο στοιχείων. Τέλος, θα αναφερθούμε στις αθροιστικές συναρτήσεις κοινωνικής επιλογής καθώς και στις συναρτήσεις αυτές που αναφέρονται σε λοταρίες.

4.11.1. Οι συναρτήσεις κοινωνικής επιλογής

Στην γενική περίπτωση, η θεωρία της κοινωνικής επιλογής εφαρμόζεται σε σύνολα ή ομάδες τα οποία και αντιπροσωπεύουν ένα πεπερασμένο αριθμό n ατόμων (ή ψηφοφόρων)(n: θετικός ακέραιος αριθμός). Η ταξινόμηση των συνόλων αυτών σε σχέση με τα γενικότερα χαρακτηριστικά των ατόμων που συμμετέχουν σ' αυτά, μπορεί να είναι ατελείωτη. Για παράδειγμα, μπορεί να υπάρχουν σύνολα που να αναφέρονται είτε σε μία οικογένεια, είτε σε ένα εθνικό κοινοβούλιο, είτε σε ένα θρησκευτικό συμβούλιο, είτε σε ένα εργατικό σωματείο κ.ο.κ.. Τέλος, σε κάποιες περιπτώσεις τα σύνολα αυτά μπορεί να εμφανίζουν κάποια αναγνωρίσιμα υποσύνολα ή απλώς να είναι διαμορφωμένα σε μια ιεραρχία επιπέδων.

Το γενικό πλαίσιο μιας διαδικασίας κοινωνικής επιλογής χαρακτηρίζεται από το σύνολο των n ατόμων καθώς και από ένα σύνολο X των εναλλακτικών αποφάσεων. Η κοινωνική επιλογή συνίσταται στην επιλογή μιας εκ των παραπάνω εναλλακτικών και στην αντίστοιχη απόρριψη των υπολοίπων. Η διαδικασία αυτή δεν θέτει συγκεκριμένους περιορισμούς σε σχέση με την δομή των προτιμήσεων των ατόμων και την διαμόρφωση του συνόλου X.

Η κατασκευή μιας συνάρτησης κοινωνικής επιλογής σχετίζεται άμεσα με την ύπαρξη των συνόλων επιλογής (choice sets). Πιο συγκεκριμένα, αν θεωρήσουμε ότι το σύνολο Y αντιστοιχεί στο υποσύνολο των πραγματοποιήσιμων εναλλακτικών του X και ότι το σύνολο D εκφράζει το σύνολο δεδομένων των προτιμήσεων των n ατόμων, τότε ονομάζουμε ως σύνολο επιλογής: το σύνολο $F(Y, D) \subseteq Y$. Το σύνολο αυτό, μπορεί να ειδωθεί κατά κάποιο τρόπο, ως το σύνολο των «καλύτερων

κοινωνικά» εναλλακτικών του συνόλου Υ, Για τις διάφορες παραλλαγές των συνόλων Υ και D, έχουμε και διαφορετικούς σχηματισμούς των συνόλων επιλογής. Η συλλογή όλων αυτών των σχηματισμών συνιστά την συνάρτηση κοινωνικής επιλογής.

Ορισμός 4.4.: Ονομάζουμε συνάρτηση κοινωνικής επιλογής την συνάρτηση $F : \Im X \times \Im D \longrightarrow P(X)$, όπου το Χ είναι ένα μη κενό σύνολο, το $\Im X$ είναι ένα μη κενό σύνολο των μη κενών υποσυνόλων του Χ, το P(X) είναι το δυναμοσύνολο του Χ $(P(X \approx \Im X))$ και τέλος $(\forall (Y, D) \in F(Y, D))$ το σύνολο $F(Y, D) \in P(X)$ είναι αντίστοιχα ένα μη κενό υποσύνολο του Χ.

Καθένα από τα σύνολα του παραπάνω ορισμού έχει μία ιδιαίτερη ερμηνεία. Κατ' αυτό τον τρόπο, ορίζουμε ως $\Im X$ το σύνολο των υποσυνόλων του Χ τα οποία και προσδιορίζονται από πραγματοποιήσιμες εναλλακτικές. Αντίστοιχα το $\Im D$ αντιστοιχεί στο σύνολο των προφίλ των προτιμήσεων των n ατόμων, με το κάθε στοιχείο του: $D \in \Im D$ να αποτελεί μια n-άδα μερικών αυστηρών διατάξεων - όπου η κάθε διάταξη αναφέρεται σε ένα και μόνο άτομο στην ομάδα. Τέλος το σύνολο $F(Y, D) \in P(X)$ (με $\varnothing \subset F(Y, D) \subseteq Y$) αντιστοιχεί στο τελικό σύνολο επιλογής.

4.11.2. Συναρτήσεις επιλογής με δύο εναλλακτικές

Μία ιδιαίτερη κατηγορία συναρτήσεων κοινωνικής επιλογής, είναι οι συναρτήσεις που αναφέρονται σε σύνολο δύο εναλλακτικών. Με άλλα λόγια, προσπαθούμε στην συγκεκριμένη περίπτωση, να επιλέξουμε μια εκ των δύο εναλλακτικών x, y ενός συνόλου $X = \{x, y\}$.

Αρχικά θεωρούμε το σύνολο των n ατόμων της ομάδας που συμμετέχει στην επιλογή καθώς και τους αριθμούς: i=1,2,…,n που αντιστοιχούν στους δείκτες της ομάδας. Στη συνέχεια ορίζουμε την μεταβλητή D_i, η οποία και αντιπροσωπεύει την πιθανή προτίμηση του i ατόμου στο Χ. Η μεταβλητή αυτή έχει τις παρακάτω τιμές:

- $D_i = 1 \Leftrightarrow$ το i άτομο προτιμά την x έναντι της y
- $D_i = 0 \Leftrightarrow$ το i άτομο είναι αδιάφορο στην προτίμηση του μεταξύ των x και y

- D_i=-1 $\Leftrightarrow$ το i άτομο προτιμά την y έναντι της x.

Το σύνολο $\Im D = \{1,0,-1\}^n$, ονομάζεται το σύνολο των προφίλ προτίμησης όλων των ατόμων.

Η συνάρτηση $F : \Im D \longrightarrow \{1,0,-1\}$ αντιστοιχεί μια κοινωνική επιλογή $F(D) \in \{1,0,-1\}$ σε κάθε προφίλ προτίμησης $D \in \Im D$. Η κοινωνική επιλογή F(D) έχει τις παρακάτω τιμές:

- F(D)= 1 $\Leftrightarrow$ η x συνιστά την κοινωνική επιλογή στο D
- F(D)= 0 $\Leftrightarrow$ οι x και y ισοψηφούν στο D
- F(D)= -1 $\Leftrightarrow$ η y συνιστά την κοινωνική επιλογή στο D.

4.11.3. Συναρτήσεις επιλογής με παραπάνω των δύο εναλλακτικών

Στην περίπτωση που το σύνολο των εναλλακτικών X περιέχει περισσότερα των δύο στοιχεία, η διαδικασία της επιλογής μεταξύ αυτών, προσεγγίζεται από το γενικότερη έννοια της δυαδικής σχέσης. Η εισαγωγή της δυαδικής σχέσης επισημαίνεται στο σύνολο $\Im D$, όπου $\Im D$: το σύνολο των n-άδων $D=(>_1,\ldots,>_n)$ των αυστηρών μερικών διατάξεων στο X. Η δυαδική σχέση $>_i$ είναι μια σχέση προτίμησης για το i άτομο. Οι σχέσεις της προτίμησης καθώς και της προτίμησης-αδιαφορίας προτίμησης που ορίζονται από την $>_i$, συμβολίζονται ως $\sim_i$ και $\geq_i$ αντίστοιχα.

Οι δυαδικές κοινωνικές επιλογές, αντιστοιχούν σε υποσύνολα δύο στοιχείων του X. Αυτό σημαίνει ότι, για δεδομένο D, το δυαδικό μέρος του F αντιστοιχεί στον περιορισμό του F στα υποσύνολα του X που δεν περιλαμβάνουν περισσότερα από δύο στοιχεία. Αυτός ο περιορισμός ορίζει μία δυαδική ασυμμετρική σχέση F_D στο X, ως εξής:

$$xF_D y \Leftrightarrow x \neq y \qquad \text{και} \qquad F(\{x,y\},D) = \{x\}$$

Το δυαδικό μέρος μιας συνάρτησης κοινωνικής επιλογής $F:\Im X\times\Im D\longrightarrow\Im X$, περιγράφεται πλήρως από την οικογένεια των δεικτών $\{F_D : D\in\Im D\}$ των δυαδικών σχέσεων F_D στο X. Με βάση τις δυαδικές σχέσεις της αυστηρής απλής πλειοψηφίας P_D, της απλής πλειοψηφίας R_D και της ισοψηφίας I_D. Ο νόμος απόφασης της απλής πλειοψηφίας για δυαδικές σχέσεις, προσδιορίζεται από την ασυμμετρική σχέση P_D:

$$xP_Dy \Leftrightarrow \#\{i : x\succ_i y\} > \#\{i : y\succ_i x\}, \qquad \forall x,y\in X.$$

Αντίστοιχα, οι νόμοι της απλής πλειοψηφίας και της ισοψηφίας, προσδιορίζονται από τις δυαδικές σχέσεις R_D και I_D:

$$xR_Dy \Leftrightarrow \#\{i : x\succ_i y\} \geq \#\{i : y\succ_i x\}, \qquad \forall x,y\in X$$
$$xI_Dy \Leftrightarrow \#\{i : x\succ_i y\} = \#\{i : y\succ_i x\}, \qquad \forall x,y\in X$$

Χρησιμοποιώντας τις δυαδικές σχέσεις P_D και R_D, μπορούμε να ορίσουμε συναρτήσεις P και R στο $\Im X\times\Im D$, ως εξής:

$$P(Y,D) = \{x : x\in Y, xP_Dy, \forall y\in Y-\{x\}\} \qquad \text{και}$$
$$P(Y,D) = \{x : x\in Y, xR_Dy, \forall y\in Y\} = \{x : x\in Y, yP_Dx, \nexists y\in Y\}$$

Στην περίπτωση που F_D=P_D ($\forall D\in\Im D$), τότε η συνάρτηση κοινωνικής επιλογής $F:\Im X\times\Im D\longrightarrow\Im X$ συμφωνεί με τον νόμο της αυστηρά απλής πλειοψηφίας. Η πιο σημαντική πρόταση που δηλώνει ότι μια εναλλακτική, η οποία υπερέχει με αυστηρή απλή πλειοψηφία έναντι όλων των άλλων, οφείλει να αποτελεί την κοινωνική επιλογή, ονομάζεται κριτήριο του Condorcet (1785) και δίνεται σε τρεις διαφορετικές εκδοχές:

Ορισμός: Μια συνάρτηση κοινωνικής επιλογής $F:\Im X\times\Im D\longrightarrow\Im X$ ικανοποιεί τις:

1) Ασθενή συνθήκη Condorcet
2) Συνθήκη Condorcet

3) Ισχυρή συνθήκη Condorcet

εάν και μόνο εάν, $\forall(Y,D) \in \Im X \times \Im D$,

1) F(Y,D)=P(Y,D) οποτεδήποτε $P(Y,D) \neq \varnothing$
2) $F(Y,D) \subseteq R(Y,D)$ οποτεδήποτε $R(Y,D) \neq \varnothing$
3) F(Y,D)=R(Y,D) οποτεδήποτε $R(Y,D) \neq \varnothing$

4.11.4. Συνθήκες για κοινωνική επιλογή

Μια συνάρτηση επιλογής περιγράφεται από την συνάρτηση $\Im X \longrightarrow P(X)$. Σύμφωνα με προηγούμενη αναφορά, οι συναρτήσεις κοινωνικής επιλογής συνιστούν συστήματα συναρτήσεων επιλογής, καθώς η $F : \Im X \times \Im D \longrightarrow \Im X$ μπορεί να ειδωθεί ως το σύνολο των συναρτήσεων επιλογής F(.,D). Παρόλα αυτά, το σύνολο αυτό δεν συμπεριλαμβάνει κάθε συνάρτηση επιλογής, παρά μόνο αυτές που ικανοποιούν κάποιες συγκεκριμένες συνθήκες. Οι συνθήκες αυτές, δίνονται συγκεντρωμένες στο παρακάτω θεώρημα που είναι γνωστό ως το θεώρημα του αδυνάτου (impossibility theorem) του Arrow (1950):

Θεώρημα: Έστω ότι η συνάρτηση $F : \Im X \times \Im D \longrightarrow \Im X$, είναι μια συνάρτηση κοινωνικής επιλογής τέτοια ώστε:

C1. Ο n είναι θετικός ακέραιος
C2. $\#X \geq 3$ και το $\Im X$ περιέχει κάθε υποσύνολο δύο στοιχείων του X
C3. Το $\Im D$ είναι το σύνολο των n-άδων των ασθενών διατάξεων στο X

Τότε τουλάχιστον μία από τις παρακάτω συνθήκες είναι λάθος:

C4. Η F_D στο X είναι ασθενή διάταξη $\forall D \in \Im D$
C5. Εάν $x, y \in X$, $D \in \Im D$ και $x >>_D y$ τότε $xF_D y$
C6. Εάν $x, y \in X, x \neq y$, $D, D' \in \Im D$ και εάν η D στο {x,y} ισούται με την D' στο {x,y}, τότε η F_D στο {x,y} ισούται $F_{D'}$ στο {x,y}
C7. Δεν υπάρχει $i \in \{1,...,n\}$ τέτοιο ώστε: $(x, y \in X, D \in \Im D, x \succ_i y) \Rightarrow xF_D y$

Αναφορικά με το σύνολο των εφτά παραπάνω συνθηκών, μπορούμε να πούμε ότι η συνθήκη C5 αντιστοιχεί στην δυαδική ομοφωνία, η C6 στην δυαδική εκδοχή της ανεξαρτησίας από μη πραγματοποιήσιμες μεταβλητές και τέλος η C7 κατοχυρώνει την ανυπαρξία δικτάτορα.

4.11.5. Αθροιστικές συναρτήσεις κοινωνικής επιλογής

Μια ιδιαίτερη κατηγορία συναρτήσεων κοινωνικής επιλογής, αντιπροσωπεύουν οι αθροιστικές συναρτήσεις κοινωνικής επιλογής. Μια τέτοια συνάρτηση είναι ικανή να εισάγει αριθμητικές τιμές σε οποιοδήποτε υποσύνολο $(Y, D) \in \Im X \times \Im D$, κατά τέτοιο τρόπο ώστε οι αριθμοί αυτοί να προσδιορίζουν πλήρως τις διατάξεις των ατομικών προτιμήσεων στο D. Από αυτή την άποψη, οι αθροιστικές συναρτήσεις κοινωνικής επιλογής, συνιστούν μια επέκταση των αθροιστικών συναρτήσεων τιμής σε ομάδες των n ατόμων.

Ορισμός: Έστω ότι το σύνολο X είναι πεπερασμένο και το σύνολο $\Im D$ αντιπροσωπεύει το σύνολο των n-άδων των αυστηρά μερικών διατάξεων στο X. Τότε η συνάρτηση $F : \Im X \times \Im D \longrightarrow \Im X$ ονομάζεται αθροιστική συνάρτηση κοινωνικής επιλογής, εάν και μόνο εάν είναι ήδη συνάρτηση κοινωνικής επιλογής και για κάθε $i \in \{1,...,n\}$, υπάρχει πραγματική συνάρτηση u_i στο $X \times \Im X \times \Im D$ τέτοια ώστε, $\forall i \in \{1,...,n\}$ και $x, y \in X$ και $(Y, D) \in \Im X \times \Im D$:

$$x \succ_i y \Rightarrow u_i(x, Y, D) > u_i(y, Y, D)$$
$$x \approx_i y \Rightarrow u_i(x, Y, D) = u_i(y, Y, D)$$

και

$$F(Y, D) = \left\{ x : x \in Y, \sum_{i=1}^{n} u_i(x, Y, D) \geq \sum_{i=1}^{n} u_i(y, Y, D), \forall y \in Y \right\}$$

Βασική προϋπόθεση για την ύπαρξη μιας αθροιστικής συνάρτησης κοινωνικής επιλογής, είναι η επικύρωση της συνθήκης της ομοφωνίας, δηλ.: $\forall\ x, y \in X$ και $\forall\ (Y, D) \in \Im X \times \Im D$,

1) $y \approx_i x, \forall i$ και $x \in F(Y,D) \Rightarrow y \in F(Y,D)$

2) $y \underset{\sim i}{\succ} x, \forall i$ και $y >_i x$, για κάποια $i \Rightarrow x \notin F(Y,D)$

Η πρώτη συνθήκη (1) ονομάζεται συνθήκη της απλής ομοφωνίας, ενώ αντίστοιχα η δεύτερη (2) ονομάζεται συνθήκη αυστηρής ομοφωνίας. Το σύνολο αυτών των δύο συνθηκών απαιτεί την ομόφωνη επικύρωση του συνόλου των ατόμων στην προτεινόμενη διάταξη που μας παρέχει η αθροιστική συνάρτηση κοινωνικής επιλογής.

4.11.6. Λοταρίες για κοινωνικές εναλλακτικές

Μια λοταρία για κοινωνικές εναλλακτικές, μπορεί να εννοηθεί ως η διαδικασία όπου κάποιος επιλέγει μια κοινωνική μεταβλητή «τυχαία», σύμφωνα δηλ. με την κατανομή της πιθανότητας που συνδέεται με αυτή. Η λοταρία αντιπροσωπεύει αυτήν ακριβώς την απλή κατανομή πιθανότητας. Μια τέτοια διαδικασία περιγράφεται αρχικά από το σύνολο επιλογής, το οποίο περιέχει αρκετές εναλλακτικές και από το οποίο επιβάλλεται να εξάγουμε την τελική επιλογή. Η επιλογή αυτή πρέπει να γίνει με τυχαίο τρόπο και σύμφωνα με τις προτιμήσεις των ατόμων. Η απόδοση τιμών πιθανότητας στις εναλλακτικές εισάγει μια εναλλακτική στο αρχικό σύνολο, η οποία και προσδιορίζεται από τις τιμές αυτές. Η τελική επιλογή αναζητείται στο διευρυμένο σύνολο των εναλλακτικών, με την ίδια διαδικασία απόδοσης τιμών πιθανότητας.

Για να γίνουμε ποιο σαφείς, οφείλουμε να θεσπίσουμε κάποια ορολογία. Πιο συγκεκριμένα, ονομάζουμε Α το σύνολο των πραγματοποιήσιμων εναλλακτικών και θεωρούμε το υποσύνολο του Β. Στο σύνολο Α, ορίζουμε μια απλή κατανομή πιθανότητας σύμφωνα με την συνάρτηση $x : A \longrightarrow Re$, με τις γνωστές ιδιότητες της πιθανότητας:

$$x(\alpha) \geq 0 \qquad \text{και} \qquad \sum_A x(\alpha) = 1$$

Ονομάζουμε Χ: το σύνολο των απλών κατανομών πιθανότητας στο Α. Το σύνολο αυτό, είναι κλειστό σε κάθε κυρτό γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων του. Για παράδειγμα, εάν $x, y \in X$ και $0 \leq \lambda \leq 1$, τότε η συνάρτηση $g : A \longrightarrow Re$, με:

$$(\lambda x + (1-\lambda)y)(\alpha) = \lambda x(\alpha) + (1-\lambda)y(\alpha),$$

είναι επίσης στοιχείο του Χ.

Αν υποθέσουμε ότι το σύνολο B αντιστοιχεί στο βασικό σύνολο πραγματοποιήσιμων εναλλακτικών, τότε η κατανομή πιθανότητας που συνδέεται με αυτό, είναι:

$$Y = Y(B) = \left\{ x : x \in X, \sum_{B} x(\alpha) = 1 \right\}.$$

Το αντίστοιχο δυναμοσύνολο του X, είναι: $\Im X = \{Y(B)$:το B είναι το βασικό σύνολο πραγματοποιήσιμων εναλλακτικών του A$\}$. Ανάλογα ορίζουμε το σύνολο $\Im D$ των n-άδων αυστηρά μερικών διατάξεων καθώς και την συνάρτηση κοινωνικής επιλογής: $F : \Im X \times \Im D \longrightarrow \Im X$.

Η επιλογή της κοινωνικής μεταβλητής βασίζεται στην θεωρία των παιγνίων, όπως αυτή αναπτύχθηκε από τους von Neumann και Morgenstern (1980). Από αυτή την άποψη, η παράγραφος αυτή συμφωνεί πλήρως με την γενική αρχή της κατασκευής αθροιστικών συναρτήσεων αναμενόμενης χρησιμότητας. Προς επικύρωση αυτής της παρατήρησης παραθέτουμε τον παρακάτω θεώρημα:

Ορισμός: Μια διάταξη προτίμησης «$\succ$» στο X, ικανοποιεί το ισχυρό αξίωμα ατόμου (strong individual axiom) εάν και μόνο εάν, $\forall x, y, z \in X$ και $\lambda \in (0,1)$:

1. Η «$\succ$» στο X είναι ασθενής διάταξη
2. $x \succ y \Rightarrow \lambda x + (1-\lambda)z \succ \lambda y + (1-\lambda)z$
3. $x \succ y \;\&\; y \succ z \Rightarrow \alpha x + (1-\alpha)z \succ y$ και $y \succ \beta x + (1-\beta)z$ για κάποια $\alpha, \beta \in (0,1)$

Θεώρημα: Υποθέτοντας ότι η «$\succ$» στο X ικανοποιεί τον παραπάνω ορισμό. Τότε υπάρχει πραγματική συνάρτηση $u : A \longrightarrow Re$ τέτοια ώστε, $\forall x, y \in X$:

$$x \succ y \Leftrightarrow \sum_{A} x(\alpha)u(\alpha) > \sum y(\alpha)u(\alpha).$$

Στην περίπτωση που εμφανιστεί και άλλη συνάρτηση $u' : A \longrightarrow Re$ με τα ίδια χαρακτηριστικά, τότε υπάρχει πραγματικός αριθμός r>0: $u'(\alpha) = ru(\alpha) + s, \forall \alpha \in A.$

Η συνάρτηση u ονομάζεται συνάρτηση χρησιμότητας και το αντίστοιχο άθροισμα: $\sum_{A} x(\alpha)u(\alpha)$ αντιστοιχεί στην αναμενόμενη χρησιμότητα της κατανομής πιθανότητας x. Με βάση το παραπάνω συμπέρασμα, λέμε ότι μια κατανομή

προτιμάται έναντι άλλης, εάν και μόνο εάν αυτή παρουσιάζει την μεγαλύτερη αναμενόμενη χρησιμότητα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^{Ο}

Πολυκριτήρια Ανάλυση ΙΙ

5.0. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η θεωρία των σχέσεων υπεροχής, αποτελεί το δεύτερο μεγάλο ρεύμα στον χώρο της Πολυκριτήριας Ανάλυσης. Η θεωρία αυτή είναι γαλλικής έμπνευσης και βασίστηκε στις εργασίες του B.Roy. Σύμφωνα με το σκεπτικό του θεμελιωτή της, η θεωρία αυτή διαπραγματεύεται την εισαγωγή μιας ασθενέστερης σχέσης, της σχέσης υπεροχής, στα προβλήματα απόφασης. Η σχέση αυτή εισάγει μια νέα παράμετρο προτίμησης, πέραν της ασθενούς προτίμησης, της ισχυρής προτίμησης και της αδιαφορίας της προτίμησης. Η παράμετρος αυτή αναφέρεται στην περίπτωση που δεν μπορούν να συγκριθούν οι προτιμήσεις, και καλύπτει το θέμα πληρότητας στα προβλήματα απόφασης.

Η θεωρία των σχέσεων υπεροχής κατατάσσεται στην ομάδα των μεθόδων μη-κυρτής βελτιστοποίησης και προτείνει έναν τρόπο επίλυσης των προβλημάτων απόφασης που βασίζεται εξ ολοκλήρου στην θεωρία των γραφημάτων. Αν θεωρήσουμε, ότι οι μέθοδοι της θεωρίας της Χρησιμότητας εισάγουν, μέσω των γραμμικών διατάξεων που υποστηρίζουν, έναν γραμμικό τρόπο επίλυσης των πολυκριτήριων προβλημάτων, μπορούμε να πούμε ότι η θεωρία των σχέσεων υπεροχής επιλέγει την μη-γραμμική επίλυση.

Σ' αυτό το κεφάλαιο θα αναπτύξουμε το θεωρητικό υπόβαθρο των σχέσεων υπεροχής. Επίσης θα αναφερθούμε και στην μεθοδολογία της οικογένειας ELECTRE, η οποία και θεωρείται ο κύριος αντιπρόσωπος της θεωρίας αυτής.

5.1. ΤΟ ΠΟΛΥΚΡΙΤΗΡΙΟ ΜΟΝΤΕΛΟ

Η θεωρία των σχέσεων υπεροχής διατηρεί σε γενικές γραμμές το πολυκριτήριο μοντέλο Α.Α.Ε. που προτάθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο και το οποίο αφορά ιδιαίτερα τις μεθόδους της Πολυκριτήριας Θεωρίας Χρησιμότητας. Η διαφοροποίηση των δύο σχολών ως προς το πολυκριτήριο μοντέλο εφαρμογής τους, συνίσταται σε έναν διαφορετικό προσδιορισμό, εκ μέρους της ομάδας των μεθόδων των σχέσεων υπεροχής, των όρων του προτεινόμενου μοντέλου Α.Α.Ε. Μ' αυτόν τον τρόπο, το τρίπτυχο: Εναλλακτικές (Alternatives), Ιδιότητες (Attributes), Εκτιμητές (Evaluators), μετασχηματίζεται στο αντίστοιχο τρίπτυχο: Πραγματοποιήσιμες Ενέργειες (Potential Actions), Κριτήρια (Criteria) και Παραστάσεις(Performances) (Roy, 1990). Ο μετασχηματισμός αυτός αφήνει αναλλοίωτη την δομή του αρχικού μοντέλου, αλλά κρίνεται απαραίτητος για την θεμελίωση της θεωρίας των σχέσεων υπεροχής.

Σύμφωνα με τον Roy, (1996) «ως ενέργεια α, ορίζεται κάθε πιθανή συμμετοχή στην διαδικασία απόφασης η οποία συνιστά μία δεδομένη θέση και η οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως σημείο εφαρμογής της διαδικασίας αρωγής απόφασης». Οι ενέργειες διακρίνονται σε πραγματικές ή θεωρητικές καθώς και σε ρεαλιστικές ή μη-ρεαλιστικές. Η πρώτη κατάταξη των ενεργειών αφορά την θέση που αντιπροσωπεύει μία ενέργεια στην διαδικασία απόφασης, διαπραγματεύεται δηλ. το γεγονός αν η ενέργεια αντιπροσωπεύει ένα πραγματικό γεγονός ή αν απλά αντιπροσωπεύει μία ιδεολογική θέση. Η δεύτερη κατάταξη των ενεργειών αναφέρεται στην δυνατότητα τους να πραγματοποιηθούν, γι' αυτό και διακρίνονται σε αυτές που έχουν αυτή την δυνατότητα και σε αυτές που δεν την έχουν. Η προτεινόμενη διαφοροποίηση των ενεργειών, σε σχέση με τις προαναφερθείσες ιδιότητες τους, επιτρέπει τον προσδιορισμό της έννοιας της πραγματοποιήσιμης ενέργειας. Ονομάζεται πραγματοποιήσιμη ενέργεια (Roy, 1996) «κάθε πραγματική ή υποθετική ενέργεια ή οποία κρίνεται ρεαλιστική, από έναν τουλάχιστον των παραγόντων μιας διαδικασίας απόφασης, ή απλά εκτιμάται ως τέτοια από τον αναλυτή. Το σύνολο των πραγματοποιήσιμων ενεργειών ονομάζεται σύνολο Α». Σ' αυτήν την φάση, το σύνολο Α των πραγματοποιήσιμων ενεργειών ταυτίζεται με το σύνολο Α των εναλλακτικών.

Το σύνολο Α μπορεί να ορισθεί είτε εκ των προτέρων είτε κατά την διάρκεια της διαδικασίας αρωγής απόφασης. Στην πρώτη περίπτωση το σύνολο των ενεργειών

ονομάζεται «σταβλισμένο» (stable) ενώ αντίστοιχα στην δεύτερη περίπτωση ονομάζεται «εξελικτικό» (evolutive). Τέλος το σύνολο Α μπορεί να ονομαστεί «σφαιρικό» (globalized) αν κάθε αντικείμενο του αποκλείει οποιοδήποτε άλλο και τεμαχισμένο (fragmented) στην περίπτωση που τα αποτελέσματα μιας διαδικασίας απόφασης αναφέρονται σε συνδυασμούς των αντικειμένων του Α (Vincke, 1992).

Ο δεύτερος όρος του πολυκριτήριου μοντέλου της θεωρίας των σχέσεων υπεροχής αναφέρεται στην έννοια του κριτηρίου. Οι έννοιες κριτήριο και ιδιότητα κατέχουν τον ίδιο ρόλο επιχειρησιακά, με μόνη διαφορά τον ακριβέστερο προσδιορισμό της πρώτης έναντι της δεύτερης.

Σύμφωνα με τον Vincke (1992), το κριτήριο ορίζεται «ως μία συνάρτηση g ορισμένη στο σύνολο Α και η οποία παίρνει τις τιμές της σε ένα ολικά διατεταγμένο σύνολο. Η συνάρτηση αυτή αναπαριστά τις προτιμήσεις του D.M. σύμφωνα με κάποια συγκεκριμένη θέση του». Ο Roy (1996) αναφέρεται στο κριτήριο σαν εργαλείο το οποίο και επιτρέπει την σύγκριση των εναλλακτικών σύμφωνα με κάποια συγκεκριμένη θέση ή κάποιον άξονα σημαντικότητας (significance axe). Τέλος ο Bouyssou (1990) προτείνει έναν συνδυασμό των παραπάνω ορισμών και καθορίζει το κριτήριο «ως πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο σύνολο Α των εναλλακτικών, κατά τέτοιο τρόπο ώστε να επιτρέπει την σύγκριση των εναλλακτικών α και b – ως προς μία συγκεκριμένη θέση j – μέσω της χρήσης των αριθμών $g_j(\alpha)$ και $g_j(b)$». Οι αριθμοί αυτοί συνιστούν τους εκτιμητές των εναλλακτικών α και b υπό την προοπτική του κριτηρίου g_j και ονομάζονται αντίστοιχα παραστάσεις των εναλλακτικών α και b. Η σύγκριση των παραπάνω αριθμών μέσω της σχέσης $g_j(\alpha) \geq g_j(b)$ μας επιτρέπει να θεωρήσουμε την εναλλακτική α τουλάχιστον τόσο καλή όσο η b, υπό την προοπτική της θέσης j.

Στην περίπτωση της πολυκριτήριας προσέγγισης ενός προβλήματος απόφασης, ο αναλυτής οφείλει να κατασκευάσει έναν αριθμό κριτηρίων χρησιμοποιώντας διάφορες θέσεις. Αυτές οι θέσεις αντιπροσωπεύουν διαφορετικούς άξονες, επί των οποίων οι διάφοροι παράγοντες μιας διαδικασίας απόφασης κρίνουν, μετασχηματίζουν και διαμορφώνουν τις προτιμήσεις τους. Οι συγκρίσεις που απορρέουν από τα κριτήρια αυτά, προσδιορίζονται ως μερικές προτιμήσεις (partial preferences), δηλ. προτιμήσεις που αφορούν αποκλειστικά την θέση που διαπραγματεύεται το προτεινόμενο κριτήριο.

Η σύγκριση δύο εναλλακτικών α και b αναφέρεται στο σύνολο των n μερικών τους προτιμήσεων, όπως αυτές προσδιορίζονται από τα διανύσματα $g(\alpha)=[g_1(\alpha),\ldots,g_n(\alpha)]$ και $g(b)=[g_1(b),\ldots,g_n(b)]$. Για να μιλήσουμε με τοπογραφικούς όρους, τα παραπάνω διανύσματα αντιπροσωπεύουν τους χάρτες των περιοχών, όπως αυτές προσδιορίζονται από τις εναλλακτικές. Η σύγκριση των εναλλακτικών αναφέρεται σε σύγκριση των περιοχών, αλλά πρακτικά επιτυγχάνεται μέσω των αντίστοιχων χαρτών τους (Roy, 1990). Η σημαντική προσέγγιση των δύο παραπάνω εννοιών (χάρτης - περιοχής) είναι απαραίτητη προϋπόθεση για την ικανοποιητική προσέγγιση όλων των παραμέτρων ενός προβλήματος απόφασης. Η διαδικασία προσέγγισης αντιμετωπίζεται σαν το πρόβλημα κατασκευής μιας συνεπούς οικογένειας (consistent family) F των n κριτηρίων g_j, η οποία πρέπει να αντιπροσωπεύει το σύνολο των θέσεων που εμφανίζονται σε συγκεκριμένο πρόβλημα απόφασης. Από άποψη δομής, το παραπάνω πρόβλημα ταυτίζεται με το πρόβλημα καθορισμού των μεταβλητών σε μία στατιστική έρευνα, η πιο συγκεκριμένα σε μία έρευνα που πρόκειται να εφαρμοσθούν οι μέθοδοι της Ανάλυσης Δεδομένων.

Μία συνεπής οικογένεια F των n κριτηρίων g_j. προσδιορίζεται από ένα σύνολο πέντε ιδιοτήτων. Οι δύο πρώτες από αυτές, αναφέρονται στον όρο οικογένεια, ενώ αντίστοιχα οι υπόλοιπες αναφέρονται στον χαρακτηρισμό «συνεπής». Οι ιδιότητες αυτές, προσδιορίζουν ότι η F πρέπει να είναι (Bouyssou, 1990):

- *Αναγνώσιμη* (legible)

Η οικογένεια πρέπει να περιέχει ένα σημαντικά μικρό αριθμό κριτηρίων, ο οποίος και θα επιτρέπει την εύκολη διαχείριση τους από τον αναλυτή.

- *Λειτουργική* (operational)

Η οικογένεια πρέπει να συνιστά μία βάση για την εφαρμογή μιας διαδικασίας απόφασης και αυτή η βάση πρέπει να έχει την έγκριση του συνόλου των παραγόντων.

- *Εξαντλητική* (exhaustive)

Η οικογένεια πρέπει να περιέχει κάθε σημαντική θέση

- *Μονότονη* (monotonic)

Οι μερικές προτιμήσεις, όπως αυτές προσδιορίζονται από κάθε κριτήριο, οφείλουν να είναι συνεπείς με την συνολική προτίμηση για κάθε εναλλακτική. Η συνθήκη αυτή καθιστά απαγορευτική την διαφοροποίηση της σύγκρισης των εναλλακτικών σε μερικό και συνολικό επίπεδο. Δηλ., εάν μία εναλλακτική α κριθεί ότι είναι καλύτερη της b στο σύνολο των κριτηρίων, τότε η α κρίνεται «τόσο καλή όσο και» η b σε κάθε κριτήριο ξεχωριστά

- *Ελάχιστη* (minimal)

Η οικογένεια δεν πρέπει να συμπεριλαμβάνει μη χρήσιμα κριτήρια.

5.2. ΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΠΡΟΤΙΜΗΣΕΩΝ

Στην παράγραφο αυτή, επανερχόμαστε στο θέμα της προτίμησης. Πιο συγκεκριμένα, θα επεκτείνουμε τα συμπεράσματα μας ως προς τα είδη των προτιμήσεων που εμφανίζονται σε προβλήματα απόφασης και θα ορίσουμε συγκεκριμένους συνδυασμούς αυτών, που υποδεικνύουν συγκεκριμένες δομές της κρίσης του D.M.. Οι παρατηρήσεις αυτές συμπληρώνουν την έννοια της προτίμησης, όπως αυτή εμφανίστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, και συνιστούν μία πρώτη αναφορά στο θέμα της σχέσης υπεροχής. Τέλος , θα προχωρήσουμε και σε μία κατάταξη των κριτηρίων ανάλογα με την δομή προτίμησης που αυτά εκφράζουν.

5.2.1. Δομή προτιμήσεων

Το πρόβλημα σύγκρισης δύο εναλλακτικών α και b, με το οποίο έρχεται σε επαφή κάθε παράγοντας της διαδικασίας απόφασης, ταξινομείται σε τέσσερις επιμέρους καταστάσεις (Roy, 1996):

- *κατάσταση αδιαφορίας* - όπου υπάρχει μόνο μία δυνατότητα: οι α και b να έχουν την ίδια τιμή
- *κατάσταση αυστηρής προτίμησης* – όπου υπάρχουν δύο δυνατότητες: είτε η α να προτιμάται αυστηρά της b, είτε η b να προτιμάται αυστηρά της α

- *κατάσταση ασθενούς προτίμησης* – όπου υπάρχουν δύο δυνατότητες: είτε η α να προτιμάται ασθενώς της b, είτε η b να προτιμάται ασθενώς της α
- *κατάσταση μη-συγκρισιμότητας (incomparability)* - όπου υπάρχει μόνο μία δυνατότητα: οι α και b δεν συγκρίνονται.

Οι τρεις πρώτες καταστάσεις προτίμησης παρουσιάστηκαν εκτενέστερα στο προηγούμενο κεφάλαιο. Η τελευταία από αυτές (η κατάσταση της μη-συγκρισιμότητας), συνιστά την νέα κατάσταση προτίμησης, που είναι δυνατόν να παρατηρηθεί σε πληθώρα προβλημάτων απόφασης. Η κατάσταση αυτή σχετίζεται άμεσα με την θεμελίωση των σχέσεων υπεροχής.

Αν θελήσουμε, να παρουσιάσουμε τις παραπάνω καταστάσεις, με την βοήθεια των δυαδικών σχέσεων (παρουσία – απουσία ιδιότητας), σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα (Πίνακας 5.1.).

Πίνακας 5.1.: Οι τέσσερις βασικές καταστάσεις προτίμησης

Κατάσταση	Ορισμός	Δυαδικές Σχέσεις (Ιδιότητες)
Αδιαφορία	Αντιστοιχεί στην ύπαρξη σημαντικών λόγων που δικαιολογούν μία ισοδυναμία μεταξύ δύο ενεργειών	I: ανακλαστική και συμμετρική
Αυστηρή Προτίμηση	Αντιστοιχεί στην ύπαρξη σημαντικών λόγων που δικαιολογούν αυστηρή προτίμηση, προς όφελος της μιας εκ των δύο ενεργειών	P: ασυμμετρική
Ασθενής Προτίμηση	Αντιστοιχεί στην ύπαρξη σημαντικών λόγων που δικαιολογούν αυστηρή προτίμηση, προς όφελος της μιας εκ των δύο ενεργειών, αλλά συγχρόνως δεν δικαιολογούν αυστηρή προτίμηση, προς όφελος της άλλης καθώς και ισοδυναμίας μεταξύ των δύο	Q: ασυμμετρική
Μη-συγκρισιμότητα	Αντιστοιχεί στην απουσία σημαντικών λόγων που δικαιολογούν την ύπαρξη κάποιας εκ των άνω τριών καταστάσεων	R: συμμετρική

Οι τέσσερις παραπάνω δυαδικές σχέσεις {I, P, Q, R}, ορισμένες σε ένα σύνολο εναλλακτικών Α, ορίζουν ένα βασικό σύστημα σχέσεων προτίμησης για έναν παράγοντα στο Α, εάν:

- Αναπαριστούν πράγματι τις προτιμήσεις του παράγοντα σύμφωνα με τους ορισμούς και τις ιδιότητες του Πίνακα 5.1

- Είναι εξαντλητικές

- Είναι αμοιβαία αποκλειστικές

Σ' αυτό το σημείο, οφείλουμε να παραθέσουμε και την άποψη του Vincke (1992), ο οποίος θεωρεί ότι μόνο οι τρείς δυαδικές σχέσεις {I, P, R}είναι αρκετές για να θεμελιώσουν ένα βασικό σύστημα σχέσεων προτίμησης.

Οι τέσσερις βασικές δυαδικές σχέσεις {I, P, Q, R}, αντιπροσωπεύουν το σύνολο των σχέσεων προτίμησης που εμφανίζονται σε ένα πρόβλημα απόφασης. Στην πράξη όμως, μπορεί και οποιοσδήποτε συνδυασμός των παραπάνω σχέσεων να δομήσει ένα μοντέλο προτίμησης. Ο Roy (1996), διακρίνει πέντε από αυτούς τους πιθανούς συνδυασμούς, οι οποίοι είναι ιδιαίτερα σημαντικοί. Οι συνδυασμοί αυτοί, ορίζουν ένα ενωμένο (consolidated) σύστημα προτίμησης και οι δυαδικές σχέσεις που συνδέονται με αυτούς ονομάζονται ενωμένες σχέσεις (Πίνακας 5.2.).

Πίνακας 5.2.: Οι ενωμένες σχέσεις και οι αντίστοιχες καταστάσεις προτίμησης μεταξύ των εναλλακτικών a και b

Κατάσταση	Ορισμός	Δυαδικές Σχέσεις (Ιδιότητες)
Μη-συγκρισιμότητα	Αντιστοιχεί στην ύπαρξη σημαντικών λόγων που δικαιολογούν την απουσία ύπαρξης σχέσης αυστηρής και ασθενούς προτίμησης , χωρίς να επιτρέπει την όποια διαφοροποίηση τους	~: α~b ⇔ αIb ή αRb
Προτίμηση	Αντιστοιχεί στην ύπαρξη σημαντικών λόγων που δικαιολογούν αυστηρή ή ασθενή προτίμηση, προς όφελος της μιας εκ των δύο ενεργειών, χωρίς να επιτρέπει την όποια διαφοροποίηση τους	>: α>b ⇔ αPb ή αQb
J- Προτίμηση	Αντιστοιχεί στην ύπαρξη σημαντικών λόγων που δικαιολογούν ασθενή προτίμηση, προς όφελος της μιας εκ των δύο ενεργειών ή αδιαφορίας, χωρίς να επιτρέπει την όποια διαφοροποίηση τους	J: αJb ⇔ αQb ή αIb
K- Προτίμηση	Αντιστοιχεί στην ύπαρξη σημαντικών λόγων που δικαιολογούν αυστηρή προτίμηση, προς όφελος της μιας εκ των δύο ενεργειών ή αδιαφορίας, χωρίς να επιτρέπει την όποια διαφοροποίηση τους	K: αKb ⇔ αPb ή αRb
Υπεροχή	Αντιστοιχεί στην ύπαρξη σημαντικών λόγων που δικαιολογούν προτίμηση ή J-προτίμηση, προς όφελος της μιας εκ των δύο ενεργειών ή αδιαφορίας, χωρίς να επιτρέπει την όποια διαφοροποίηση μεταξύ των καταστάσεων της αυστηρής προτίμησης, ασθενούς προτίμησης και ισοδυναμίας	S: αSb ⇔ αPb ή αQb ή αIb

Η τελευταία σχέση, η σχέση υπεροχής, είναι ιδιαίτερης σημασίας και η παράσταση αSb ερμηνεύεται ως « η α είναι τουλάχιστον τόσο καλή όσο η b». Η σχέση αυτή καλύπτει το σύνολο των τεσσάρων βασικών σχέσεων {I, P, Q, R} και μπορεί να ορίσει από μόνη της – ή και με την συμμετοχή των I, R- ένα σύστημα βασικών σχέσεων προτίμησης. Με άλλα λόγια, η S είναι η ασθενέστερη δυαδική σχέση αλλά συγχρόνως μπορεί να ερμηνεύσει το σύνολο των προτιμήσεων του D.M.

5.2.2. Κατώφλια

Η παραδοσιακή προσέγγιση ενός προβλήματος απόφαση βασίζεται στην μεγιστοποίηση κάποιας συνάρτησης g, ορισμένης στο σύνολο των εναλλακτικών A. Το μοντέλο αυτό υποθέτει ότι οι προτιμήσεις του D.M. ακολουθούν μία σχέση ασθενούς διάταξης Q ($P \cup I$):

$$\alpha P b \Leftrightarrow g(\alpha) > g(b)$$
$$\alpha I b \Leftrightarrow g(\alpha) = g(b)$$

Η μεγιστοποίηση της συνάρτησης Q οδηγεί σε ολική διάταξη αυτών των προτιμήσεων.

Ο Luce (1951), διατύπωσε το ακόλουθο παράδειγμα: έστω T_i μια ποσότητα τσαγιού η οποία περιέχει i milligrams ζάχαρης. Αν προσθέσουμε ένα ακόμα milligram ζάχαρης στην παραπάνω ποσότητα, είναι δυνατόν να εκφράσουμε μία αυστηρή προτίμηση μεταξύ των δύο ποσοτήτων T_i και T_{i+1}, με την έννοια ότι συγκρίνουμε μία κούπα με πολύ ζάχαρη και μία με καθόλου ($T_N P T_0$ ή $T_0 P T_N$); Η απάντηση είναι όχι.

Το παράδειγμα αυτό διατυπώνει με υποδειγματικό τρόπο, το πρόβλημα της μεταβατικότητας της σχέσης αδιαφορίας της προτίμησης, που μπορεί να απαντηθεί σε προβλήματα απόφασης που ακολουθούν το παραδοσιακό μοντέλο προτίμησης. Η επίλυση του προβλήματος αυτού, επιβάλλει τον μετασχηματισμού του παραδοσιακού μοντέλου σε μοντέλου κατωφλιού (threshold). Με την εισαγωγή ενός θετικού κατωφλιού q, το μοντέλο γίνεται: $\forall \alpha, b \in A$:

$$\alpha P b \Leftrightarrow g(\alpha) > g(b) + q$$
$$\alpha I b \Leftrightarrow |g(\alpha) - g(b)| \le q$$

Μία δομή προτίμησης η οποία αναπαριστάται από το μοντέλο κατωφλιού, ονομάζεται δομή ημιδιάταξης (semiorder).

Το παραπάνω μοντέλο μπορεί να τροποποιηθεί και να συμπεριλάβει την περίπτωση όπου το προτεινόμενο κατώφλι αδιαφορίας έχει την μορφή μεταβλητής, δηλ. $\forall \alpha, b \in A$:

$$\alpha P b \Leftrightarrow g(\alpha) > g(b) + q(g(b))$$
$$\alpha I b \Leftrightarrow \begin{cases} g(\alpha) \le g(b) + q(g(b)) \\ g(b) \le g(\alpha) + q(g(\alpha)) \end{cases}$$

Το παραπάνω μοντέλο ονομάζεται «μοντέλο κατωφλιού μεταβλητής» και εμπεριέχει και την απλή περίπτωση του «μοντέλου κατωφλιού», αρκεί η συνάρτηση κατωφλιού q να υπακούει στην ακόλουθη συνθήκη συνέπειας «consistency condition»: δηλ. $\forall \alpha, b \in A$:

$$g(\alpha) > g(b) \Rightarrow g(\alpha) + q(g(\alpha)) \geq g(b) + q(g(b)) \ .$$

Η δομή προτίμησης που αντιστοιχεί στο «μοντέλο κατωφλιού μεταβλητής» ονομάζεται δομή διάταξης διαστήματος (interval order).

Η παρουσία του κατωφλιού αδιαφορίας δεν είναι η μόνη περίπτωση κατωφλιού καθώς εκτός της περίπτωση της αδιαφορίας υπάρχει και η περίπτωση της τιμής. Σ' αυτήν την περίπτωση, ο D.M. διστάζει μεταξύ δύο διαφορετικών – μερικές φορές και διαμετρικά αντίθετων- απαντήσεων που αφορούν την απόδοση της τιμής για μία εναλλακτική. Η παρατήρηση αυτή οδηγεί στην κατασκευή ενός μοντέλου που θα λαμβάνει υπόψη τόσο ένα κατώφλι αδιαφορίας όσο και ένα κατώφλι προτίμησης. Το πρώτο κατώφλι q ξεκαθαρίζει το πότε ο D.M. θεωρεί ότι οι δύο εναλλακτικές α και b είναι ίσες ως προς την τιμή, και το δεύτερο κατώφλι p προσδιορίζει επακριβώς το πότε η μία είναι προτιμότερη της άλλης. Αυτό το μοντέλο ονομάζεται «μοντέλο του διπλού κατωφλιού», και δίνεται από τον παρακάτω σχηματισμό: $\forall \alpha, b \in A$:

$$\alpha P b \Leftrightarrow g(\alpha) > g(b) + p(g(b))$$
$$\alpha Q b \Leftrightarrow g(b) + p(g(b)) \geq g(\alpha) > g(b) + q(g(b)),$$
$$\alpha I b \Leftrightarrow \begin{cases} g(b) + q(g(b)) \geq g(\alpha) \\ g(\alpha) + q(g(\alpha)) \geq g(b) \end{cases}$$

Το παραπάνω μοντέλο αναπαριστά μια δομή ψευδοδιάταξης (pseudo-order) προτίμησης, αν ισχύει η συνθήκη:

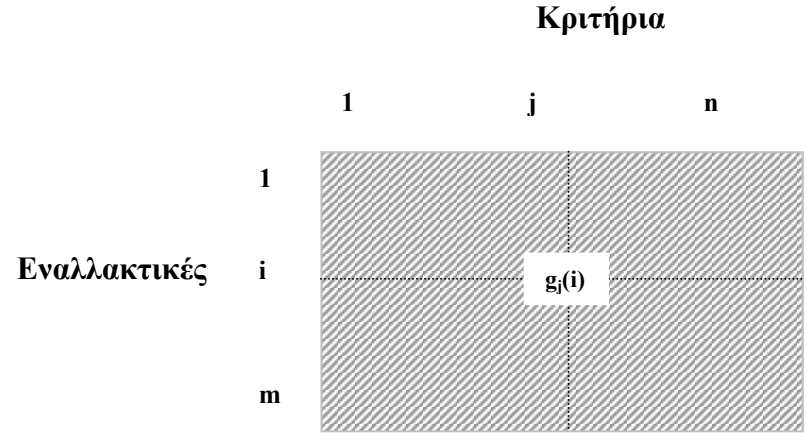
$$\begin{aligned} g(\alpha) > g(b) \quad &\Leftrightarrow g(\alpha) + q(g(\alpha)) > g(b) + q(g(b)) \\ &\Leftrightarrow g(\alpha) + p(g(\alpha)) > g(b) + p(g(b)) \end{aligned}$$

5.2.3. Είδη κριτηρίων – Πολυκριτήριος πίνακας

Στην προηγούμενη παράγραφο, ένας από τους ορισμούς που δόθηκε στην έννοια του κριτηρίου, περιγράφει το κριτήριο g ως πραγματική συνάρτηση που αντιπροσωπεύει πλήρως την δομή των προτιμήσεων του D.M.. Ο καθορισμός της αναφερόμενης δομής, που έγινε σ' αυτήν την παράγραφο διαμορφώνει τις παρακάτω κατηγορίες κριτηρίων:

- *Αληθινό κριτήριο* – αν η προτεινόμενη δομή είναι δομή ολικής προδιάταξης
- *Ημικριτήριο* - αν η προτεινόμενη δομή είναι δομή ημιδιάταξης
- *Κριτήριο διαστήματος* - αν η προτεινόμενη δομή είναι δομή διάταξης διαστήματος
- *Ψευδοκριτήριο* - αν η προτεινόμενη δομή είναι δομή ψευδοδιάταξης.

Το σύνολο των τιμών των m εναλλακτικών ως προς τα n κριτήρια μπορεί να δοθεί με την μορφή ενός πίνακα $(m \times n)$, όπου οι m γραμμές αντιστοιχούν στις εναλλακτικές και οι n στήλες αντιστοιχούν στα κριτήρια. Η διασταύρωση της i γραμμής με την j στήλη περιγράφει την εκτίμηση $g_j(i)$ της i εναλλακτικής από το j κριτήριο. Ο πίνακας αυτός ονομάζεται πολυκριτήριος (Σχήμα 5.1.).



Σχήμα 5.1. Πολυκριτήριος πίνακας

5.3. ΣΧΕΣΕΙΣ ΥΠΕΡΟΧΗΣ

Η πρώτη αναφορά στην σχέση υπεροχής, την παρουσιάζει σαν ασθενή δυαδική σχέση η οποία είναι ικανή να αναπαραστήσει το σύνολο των προτιμήσεων του D.M. Ο ακριβής προσδιορισμός της σχέσης υπεροχής ανήκει στον Roy (1974), ο οποίος και θεωρείται ο θεμελιωτής της συγκεκριμένης θεωρίας:

Ορισμός 5.1.: Ονομάζουμε σχέση υπεροχής, την δυαδική σχέση S ορισμένη στο σύνολο των εναλλακτικών A. Η παράσταση αSb εκφράζει την βεβαιότητα ύπαρξης σημαντικών λόγων που στηρίζουν την παρατήρηση ότι « η εναλλακτική α είναι τουλάχιστον τόσο καλή όσο η b εναλλακτική» και ταυτόχρονα δηλώνει την απουσία αντίστοιχων λόγων που αντιτίθενται στην παραπάνω παρατήρηση. Οι θέσεις αυτές βασίζονται στην γενικότερη πληροφορία που έχουμε για τις προτιμήσεις του D.M..

Η σχέση υπεροχής μπορεί αρχικά, να εντοπισθεί σε μία συγκεκριμένη θέση που υποδεικνύεται από ένα κριτήριο. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε το κριτήριο g_j και ας συνδέσουμε σ' αυτό την περιορισμένη (restricted) σχέση υπεροχής S_j. Η παράσταση $\alpha S_j b$ δηλώνει ότι « υπό την προοπτική του κριτηρίου g_j, η εναλλακτική α είναι τουλάχιστον τόσο καλή όσο η b». Η ισχύ της παραπάνω εκδοχής αξιολογείται στο επίπεδο των εκτιμητών $g_j(\alpha)$ και $g_j(b)$, δηλ.:

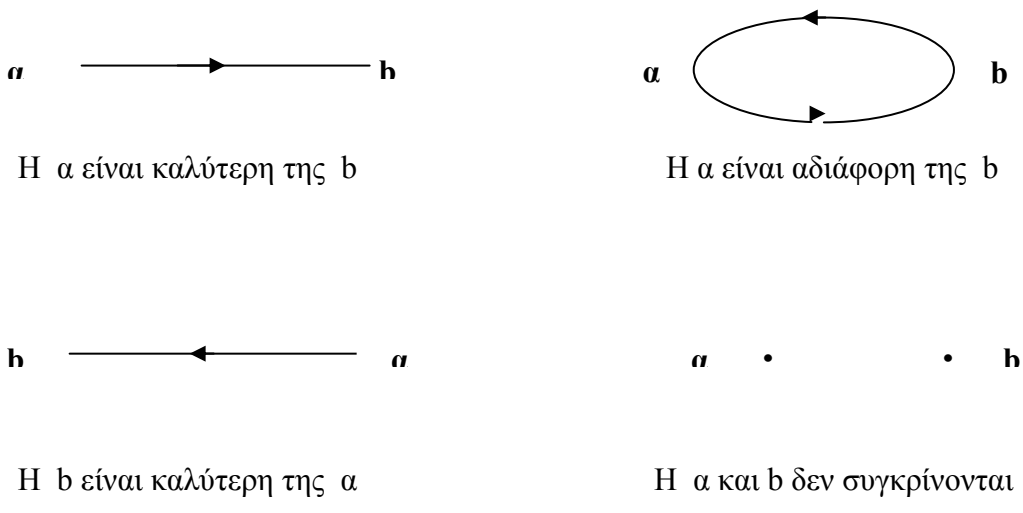
$$\alpha S_j b \qquad \text{εάν} \qquad g_j(\alpha) \geq g_j(b).$$

Στην περίπτωση που έχουμε να κάνουμε με το σύνολο των θέσεων, όπως αυτές υποδεικνύονται από το σύνολο των κριτηρίων, η αντίστοιχη σχέση υπεροχής S ονομάζεται περιεκτική (comprehensive) σχέση υπεροχής. Σ' αυτήν την περίπτωση, η αξιολόγηση της ισχύος της παράστασης αSb, απαιτεί την εισαγωγή ισχυρών συνθηκών –πέραν του επιπέδου του κριτηρίου- που να πιστοποιούν την παρατήρηση ότι « η εναλλακτική α είναι τουλάχιστον τόσο καλή όσο η b εναλλακτική».

Ο προσδιορισμός της σχέσης υπεροχής S ως περιεκτική σχέση υπεροχής, καθώς και η παρατήρηση ότι η S εκφράζει το σύνολο των θέσεων ενός

πολυκριτήριου προβλήματος – σε αντίθεση με την περιορισμένη σχέση S_j- προσάπτουν στην S τρεις σημαντικές ιδιότητες.

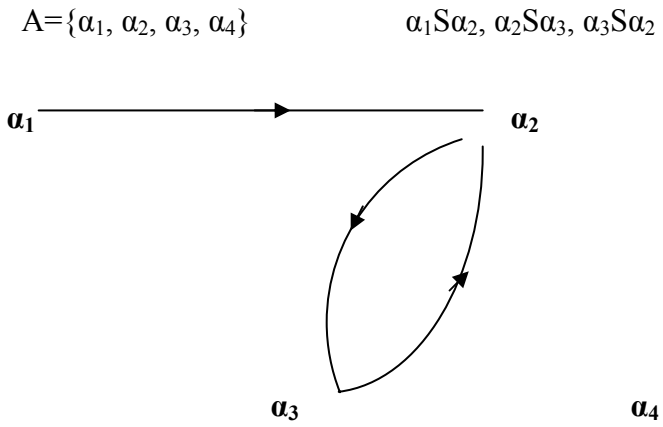
1η Ιδιότητα: Η S είναι μία δυαδική σχέση που χαρακτηρίζεται απόλυτα από την ανακλαστική ιδιότητα: $\alpha S \alpha \ \forall \alpha \in A$. Η S δεν χρειάζεται απαραίτητα να είναι και μεταβατική. Αυτή η διαπίστωση, οδηγεί -στην περίπτωση της σύγκρισης των δύο εναλλακτικών α και b ($b \neq \alpha$) - στην ύπαρξη τεσσάρων διαφορετικών ερμηνειών της σχέσης S. Το σύνολο αυτών των καταστάσεων περιγράφεται γραφικά στο παρακάτω σχήμα (Σχήμα 5.2.).



Σχήμα 5.2.: Οι τέσσερις καταστάσεις που εμφανίζονται στην σύγκριση των εναλλακτικών α και b

Η γραφική αναπαράσταση της δυαδικής σχέσης S μπορεί να επεκταθεί και στην περίπτωση που το πλήθος των υπό σύγκριση εναλλακτικών είναι μεγαλύτερο του δύο (Σχήμα 5.3.). Όπως ήδη έχει αναφερθεί, μία δυαδική σχέση μπορεί να εκφρασθεί με μία ισοδύναμη μαθηματική αναπαράσταση την οποία και ονομάζουμε γράφημα (κατευθυνόμενο ή μη-κατευθυνόμενο). Το κατευθυνόμενο γράφημα G αποτελείται από μία συλλογή σημείων (κορυφές) καθώς και μία συλλογή κατευθυνόμενων γραμμών (τόξα) που συνδέουν τα σημεία μεταξύ τους. Το γράφημα G προσδιορίζεται από το ζεύγος (X, U), όπου X ονομάζουμε το σύνολο των

σημείων και U ονομάζουμε το σύνολο των γραμμών. Μία τέτοια αναπαράσταση μας δίνει το πλεονέκτημα μιας συνοπτικής και καθόλα περιεκτικής οπτικοποίησης του μοντέλου προτίμησης. Η χρήση των γραφημάτων στην θεωρία των σχέσεων υπεροχής συνεπάγεται και τον αντίστοιχο δανεισμό θεμάτων που αναφέρονται στην θεωρία γραφημάτων (Graph Theory) και τα οποία αποτελούν ένα απαραίτητο και χρήσιμο εργαλείο το οποίο το εφαρμόζουμε στην κατασκευή καθώς και εξερεύνηση των παραπάνω σχέσεων.



Σχήμα 5.3.: Γραφική αναπαράσταση της σχέσης υπεροχής S

2η Ιδιότητα: Η σχέση υπεροχής αποτελεί «επέκταση» της σχέσης κυριαρχίας. Πιο συγκεκριμένα θεωρούμε την σχέση κυριαρχίας Δ_F:

$$\alpha \, \Delta_F \, b \quad \text{εάν} \quad g_j(\alpha) \geq g_j(b), \ \forall j \in F$$

Η επέκταση της Δ_F στην S, δίνεται από το ακόλουθο παράδειγμα. Θεωρούμε τις εναλλακτικές α, α' και b, b'. Τότε εάν:

$$\alpha' S \alpha \quad \text{και} \quad \alpha \, \Delta_F \, b \Rightarrow \quad \alpha' S \, b,$$
$$b' \, \Delta_F \, \alpha' \quad \text{και} \quad \alpha' S \alpha \Rightarrow \quad b' \, S \alpha$$

Ουσιαστικά, σε κάθε περίπτωση ισχύει: $\alpha\ \Delta_F b \Rightarrow\ \alpha S\, b$.

3η Ιδιότητα: Η ιδιότητα αυτή (όπως και η προηγούμενη) συνδέει τις περιορισμένες σχέσεις υπεροχής με την περιεκτική σχέση υπεροχής. Θεωρούμε τις εναλλακτικές α, α'. Τότε εάν:

$$g_j(\alpha') = g_j(\alpha)\ \text{ή αλλιώς}\ \alpha' I_j \alpha\ ,\ \forall j \neq k\,, \quad \text{τότε}\ \alpha' S\, \alpha\ \text{εάν}\ \alpha' S_k\, \alpha$$

Οι δύο παραπάνω ιδιότητες μπορούν να συγχωνευθούν σε μία τελική (Roy – Bouyssou, 1987):

$$\alpha' S_j \alpha,\ \forall j \in F\ \Rightarrow \alpha' S \alpha\,.$$

5.4. ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΩΝ ΣΧΕΣΕΩΝ ΥΠΕΡΟΧΗΣ

Η επικύρωση της παράστασης αSb, δεν τεκμηριώνεται στο επίπεδο των εκτιμητών $g_j(\alpha)$ και $g_j(b)$. Στην πραγματικότητα απαιτείται ένας σημαντικός αριθμός συνθηκών που πρέπει να εκπληρωθούν, προκειμένου να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι «η εναλλακτική α είναι καλύτερη της b». Οι συνθήκες αυτές προσδιορίζονται από συγκεκριμένους παράγοντες. Οι πιο σημαντικοί από αυτούς είναι οι ακόλουθοι τέσσερις:

- Ο βαθμός σημαντικότητας των κριτηρίων που λαμβάνονται υπόψη.
- Η φύση βασικών θεμάτων όπως: συμφωνία (concordance), ασυμφωνία, (discordance), βαθμός αντικατάστασης (substitution rate), ένταση προτίμησης, …
- Η εσωτερική πληροφορία των κριτηρίων
- Η ισχύς των απαιτούμενων δικαιολογητικών

Ο πρώτος παράγοντας αναφέρεται στην ύπαρξη των κατωφλιών p_j και q_j. Αντίστοιχα ο τρίτος παράγοντας αναφέρεται στην ύπαρξη δύο νέων χαρακτηριστικών που συνδέονται με το κάθε κριτήριο g_j: τον συντελεστή σημαντικότητας του

κριτηρίου k_j καθώς και το κατώφλι αρνησικυρίας του (veto) v_j. Το σύνολο των χαρακτηριστικών αυτών μαζί με τα αντίστοιχα που αφορούν τον δεύτερο παράγοντα, θα συζητηθούν παρακάτω.

Ο τέταρτος παράγοντας αναφέρεται στην ύπαρξη ενός ελάχιστου δείκτη ισχύος, ο οποίος και θα σηματοδοτεί την κοινή βάση πάνω στην οποία θα γίνεται η σύγκριση της ισχύος των συνθηκών που επικυρώνουν την παράσταση αSb. Η καθιέρωση ενός τέτοιου δείκτη, συνεπάγεται την ύπαρξη δύο διαφορετικών μοντέλων: Τύπου Ι και Τύπου ΙΙ.

Στο μοντέλο Τύπου Ι, υιοθετούμε ένα σύνολο r ($r \geq 1$) σχέσεων υπεροχής με σκοπό να τυποποιήσουμε τις προτιμήσεις του D.M.:

$$S_1 \subset S_2 \subset ... \subset S_r$$

Η αύξηση του δείκτη που προσδιορίζει την σχέση υπεροχής στην παραπάνω ακολουθία από το 1 έως το r, αντιστοιχεί σε μία ανάλογη μείωση των δικαιολογητικών που απαιτούνται για την επικύρωση της παράστασης αSb.

Το μοντέλο Τύπου ΙΙ, απαιτεί την εισαγωγή μιας ασαφούς (fuzzy) σχέσεως υπεροχής. Αυτό συνεπάγεται την σύνδεση με κάθε διατεταγμένο ζεύγος (α, b) ενός πραγματικού αριθμού σ(α, b) ($0 \leq \sigma(\alpha, b) \leq 1$), ο οποίος και θα χαρακτηρίζει την ζητούμενη ισχύ. Ο δείκτης αυτός ονομάζεται δείκτης αξιοπιστίας της παράστασης αSb.

Σαν μία πρώτη αναφορά στο θέμα των μεθόδων ELECTRE και σε σχέση με τα προηγούμενα, μπορούμε να πούμε ότι οι μέθοδοι Ι, ΙΙ, Is και IV αντιστοιχούν στο μοντέλο προτίμησης Τύπου Ι ενώ αντίστοιχα οι μέθοδοι ΙΙΙ και Α αντιστοιχούν στο μοντέλο Τύπου ΙΙ.

5.4.1. Θέματα συμφωνίας και ασυμφωνίας

Το κριτήριο j λέμε ότι βρίσκεται σε συμφωνία με την παράσταση αSb, εάν και μόνο εάν $\alpha S_j b$.

Αν συνδυάσουμε την έννοια της περιορισμένης σχέσης υπεροχής S_j με το κατώφλι αδιαφορίας q_j, μπορούμε να πούμε ότι το κριτήριο j βρίσκεται σε συμφωνία με την παράσταση αSb, εάν:

$$g_j(\alpha) \geq g_j(b) - q_j .$$

Το υποσύνολο των κριτηρίων της F που βρίσκονται σε συμφωνία με την παράσταση αSb, συνιστά μία συμμαχία συμφωνίας (concordant coalition). Την συμφωνία αυτή την συμβολίζουμε ως C(αSb).

Αντίστοιχα, λέμε ότι το κριτήριο j βρίσκεται σε ασυμφωνία με την παράσταση αSb, εάν και μόνο εάν $bP_j\alpha$. Σύμφωνα με το μοντέλο του ψευδοκριτήριου, έχουμε:

$$bP_j\alpha \quad \text{εάν} \quad g_j(b)>g_j(\alpha)+p_j$$

Με άλλα λόγια η ύπαρξη ασυμφωνίας του j κριτηρίου ως προς την παράσταση αSb, ισοδυναμεί με την ύπαρξη αυστηρής προτίμησης της b εναλλακτικής έναντι της α – υπό την προοπτική του j κριτηρίου πάντα, η οποία και μεταφράζεται σε μεγάλη τιμή της παράστασης $g_j(b)-g_j(\alpha)$.

Το υποσύνολο των κριτηρίων της F που βρίσκονται σε ασυμφωνία με την παράσταση αSb, συνιστά μία συμμαχία ασυμφωνίας (discordant coalition). Την συμφωνία αυτή την συμβολίζουμε ως C(bPα).

Σύμφωνα με τους παραπάνω ορισμούς, έχουμε:

$$C(\alpha Sb) \cap C(\alpha Pb) = \varnothing \qquad \text{και} \qquad C(\alpha Sb) \cup C(\alpha Pb) \subset F$$

Αυτό σημαίνει, ότι μπορούμε πάντα να έχουμε την περίπτωση:

$$C(\alpha Sb) \cup C(\alpha Pb) \neq F$$

Η ανισότητα αυτή ισχύει μόνο όταν εμφανιστεί ένα τουλάχιστον κριτήριο j, το οποίο να βρίσκεται συγχρόνως σε συμφωνία και ασυμφωνία με την παράσταση αSb, δηλ. εάν:

$$g_j(b) - p_j \leq g_j(\alpha) < g_j(b) - q_j \qquad (p_j>q_j)$$

Το υποσύνολο της F που ικανοποιεί την παραπάνω συνθήκη συμβολίζεται ως C(bQα) και δηλώνει την ύπαρξη σχέση ασθενούς προτίμησης Q_j μεταξύ των α και b εναλλακτικών για κάποιο αριθμό κριτηρίων. Στην πράξη βέβαια το υποσύνολο C(bQα) είναι κενό. Αυτό όμως δεν μας απαγορεύει να συνδέουμε σε κάθε διατεταγμένο ζεύγος (α, b), τον ακόλουθο διαμερισμό της F στα υποσύνολα:

C(αSb), C(bPα) και C(bQα).

5.4.2. Δείκτες συμφωνίας και ασυμφωνίας

Στο προηγούμενο κεφάλαιο αναφερθήκαμε στην ύπαρξη των βαρών που επιτρέπουν την σύνθεση του συνόλου των κριτηρίων (ιδιοτήτων) σε ένα μοναδικό κριτήριο (περίπτωση σταθμισμένου μέσου). Τα βάρη, είναι πραγματικοί αριθμοί και αποτελούν ενδεικτικό της σημαντικότητας του κάθε κριτηρίου που λαμβάνει μέρος σε μια διαδικασία αρωγής απόφασης. Ανάλογα λοιπόν και οι μέθοδοι υπεροχής (πιο συγκεκριμένα οι μέθοδοι ELECTRE) κάνουν χρήση αντίστοιχων χαρακτηριστικών με σκοπό να εκφράσουν την βαρύτητα του κάθε κριτηρίου. Τα χαρακτηριστικά αυτά αναφέρονται ως:

- Συντελεστής σημαντικότητας k_j (≥ 0) και
- Κατώφλι αρνησικυρίας v_j $(\geq p_j)$

Τα χαρακτηριστικά αυτά παίζουν ιδιαίτερο ρόλο στον καθορισμό των δεικτών συμφωνίας και ασυμφωνίας, όπως φαίνεται παρακάτω:

(α) Δείκτης συμφωνίας:

Ο δείκτης συμφωνίας c(α, b) χαρακτηρίζει την ισχύ των επιχειρημάτων που υποστηρίζουν την αλήθεια της παράστασης αSb. Ο δείκτης αυτός εμφανίζεται ως το άθροισμα των δύο επιμέρους δεικτών $c_1(α, b)$ και $c_2(α, b)$, οι οποίο αντίστοιχα αντιστοιχούν στα επιχειρήματα που εξάγονται από τις συμμαχίες C(αSb) και C(bQα). Πιο συγκεκριμένα:

$c(α, b)= c_1(α, b)+ c_2(α, b)$, όπου:

$$c_1(\alpha, b) = \frac{1}{k} \sum_{j \in C(\alpha Sb)} k_j \,, \quad \text{με } k = \sum_{j \in F} k_j \quad \text{και}$$

$$c_2(\alpha, b) = \frac{1}{k} \sum_{j \in C(\alpha Qb)} \phi_j k_j \,, \text{ με } \phi_j = \frac{p_j + g_j(\alpha) - g_j(b)}{p_j - q_j}$$

Σύμφωνα με το ορισμό, ισχύουν επίσης και τα ακόλουθα:

$$0 \le c(\alpha, b) \le 1$$

$$c(\alpha, b) = 0 \quad \text{εάν} \quad C(bP\alpha) = F \quad \text{και}$$

$$c(\alpha, b) = 1 \quad \text{εάν} \quad C(\alpha Sb) = F$$

Ο λόγος k_j/k εκφράζει την σχετική ισχύ του κάθε κριτηρίου g_j, όταν αυτό είναι σε συμφωνία με την παράσταση αSb. Ο αριθμός k_j μπορεί να ειδωθεί ως ο αριθμός των ψηφοφόρων που υποστηρίζουν την j θέση σε μία διαδικασία ψηφοφορίας. Εάν $j \in C(\alpha Sb)$, τότε το σύνολο των k_j ψηφοφόρων συνδράμει στο c(α, b). Αντίστοιχα η συμμετοχή αυτή είναι κενή εάν $j \in C(bP\alpha)$. Στην περίπτωση που $j \in C(bQ\alpha)$, υπάρχει μόνο ένα κλάσμα ϕ_j που συμμετέχει στο c(α, b). το κλάσμα αυτό αυξάνει από το 0 προς το 1 ανάλογα με την αύξηση του $g_j(\alpha)$ από το $g_j(\alpha)$-p_j προς το $g_j(\alpha)$-q_j. Με άλλα λόγια, όσο περισσότερος δισταγμός εμφανίζεται ως προς την επιλογή της κατάστασης αδιαφορίας $\alpha I_j b$, τόσο περισσότερος αριθμός ψηφοφόρων $\phi_j k_j$ στηρίζουν παράσταση αSb.

(β) Αποτέλεσμα αρνησικυρίας και δείκτης ασυμφωνίας:

Οποιοδήποτε κριτήριο της συμμαχίας ασυμφωνίας αντιδρά στην ιδέα της αποδοχής του ισχυρισμού αSb. Ο βαθμός αντίδρασης του δεν είναι πάντα σταθερός παρά ποικίλει ανάλογα με το κριτήριο. Ο βαθμός αυτός εκφράζεται με το κατώφλι αρνησικυρίας v_j, το οποίο και αναφέρεται αποκλειστικά στο κριτήριο g_j. Η παράσταση:

$$g_j(b) - g_j(\alpha) > v_j$$

είναι απαγορευτική για την υιοθέτηση του ισχυρισμού αSb από το κριτήριο g_j, ανεξάρτητα της γνώμης των υπολοίπων κριτηρίων για αυτόν.

Το κατώφλι αρνησικυρίας στηρίζεται στην αρχή του «όλα ή τίποτα» και είναι ικανό να ορίσει αρκετές απλές (crisp) σχέσεις υπεροχής. Στην περίπτωση όμως της ασαφούς σχέσης υπεροχής (μοντέλο Τύπου ΙΙ), προτείνεται η εισαγωγή ενός νέου δείκτη, ο οποίος θα δηλώνει την ισχύ της αντίδρασης στον ισχυρισμό αSb σε κλίμακα [0,…,1] με βάση την θέση της διαφοράς $g_j(b)$-$g_j(\alpha)$ στο διάστημα $[p_j, v_j]$. Ο δείκτης αυτός ονομάζεται δείκτης ασυμφωνίας $d_j(\alpha, b)$ του κριτηρίου g_j και είναι:

$$d_j(\alpha,b)=\begin{cases}0, g_j(b)-g_j(\alpha)\le p_j\\ \dfrac{g_j(b)-g_j(\alpha)-p_j}{v_j-p_j}, p_j<g_j(b)-g_j(\alpha)\le v_j\\ 1, g_j(b)-g_j(\alpha)>v_j\end{cases}$$

Κλείνοντας, οφείλουμε να αναφέρουμε δύο σημαντικές διαπιστώσεις ως προς την σημαντικότητα ενός κριτηρίου. Η πρώτη από αυτές, επισημαίνει το γεγονός ότι η σημαντικότητα του κριτηρίου g_j είναι τόσο μεγάλη όσο πιο μικρή είναι η διαφορά μεταξύ των δεικτών v_j και p_j . Η δεύτερη διαπίστωση αναφέρεται στην σημαντικότητα που εκφράζεται από ένα κατώφλι αρνησικυρίας v_j (θέμα ασυμφωνίας) καθώς και από ένα συντελεστή σημαντικότητας (θέμα συμφωνίας). Οι δύο αυτές περιπτώσεις δεν σχετίζονται μεταξύ τους.

5.5. ΟΙ ΜΕΘΟΔΟΙ ELECTRE

Οι μέθοδοι της Πολυκριτήριας Θεωρίας Χρησιμότητας επιδιώκουν την μοντελοποίηση των προτιμήσεων του D.M. μέσα από συναρτήσεις τιμής (ή χρησιμότητας). Υπάρχει όμως και άλλη κατηγορία μεθόδων, η οποία επιτυγχάνει την παραπάνω μοντελοποίηση μέσα από συστήματα δυαδικών σχέσεων. Οι μέθοδοι αυτοί ονομάζονται μέθοδοι υπεροχής (Outranking Methods).

Οι μέθοδοι ELECTRE αποτελούν την πρώτη και σημαντικότερη κατηγορία μεθόδων, η οποία βασίστηκε στο μοντέλο των σχέσεων υπεροχής. Το σύνολο των μεθόδων αυτής της κατηγορίας φέρνει το όνομα του B.Roy, ο οποίος εξάλλου είναι

και ο εμπνευστής της θεωρίας των σχέσεων υπεροχής. Πιο συγκεκριμένα, αναφερόμαστε στις μεθόδους ELECTRE I (Roy, 1968), ELECTRE II (Roy and Bertier, 1971,1973), ELECTRE III (Roy, 1978), ELECTRE IV (Hugonnard and Roy, 1982), ELECTRE Is (Roy and Skalka, 1984), ELECTRE A (Moscarola and Roy, 1977) (Roy, 1981). Η κατάταξη αυτή (και αναφερόμαστε ιδιαίτερα στην μέθοδο ELECTRE A) αφορά, όχι τόσο την παρουσίαση των μεθόδων αλλά περισσότερο την εφαρμογή τους.

Η κοινή ονομασία των παραπάνω μεθόδων, τις περιγράφει αρχικά ως σειριακές μεθόδους ελάττωσης. Ο Bertier (1975) τις κατατάσσει στις αλγεβρικές μεθόδους – για να τις διαφοροποιήσει από τις «γεωμετρικές» μεθόδους της ανάλυσης δεδομένων. Ουσιαστικά όμως, πρόκειται για μεθόδους που επιτυγχάνουν την σύνθεση των μερικών διατάξεων – όπως αυτές εισάγονται από τα διατεταγμένα κριτήρια.

Η δημιουργία της κάθε μεθόδου αναλύεται σε δύο στάδια: στο στάδιο κατασκευής της σχέσεως υπεροχής και στο στάδιο εξερεύνησης. Σ' αυτή την παράγραφο θα αναφερθούμε στο πρώτο στάδιο και θα εξετάσουμε συγκεκριμένες μεθόδους ως προς τις διαφορές τους στα θέματα συμφωνίας και ασυμφωνίας.

5.5.1. Η μέθοδος ELECTRE Is

Στην μέθοδο της ELECTRE Is, η ισχύ της παράστασης αSb απαιτεί την ικανοποίηση των δύο παρακάτω συνθηκών:

- $c(\alpha, b) \geq s$, $\quad 1/2 < s \leq s^*$, $\qquad$ όπου: $s^* = 1 - \frac{1}{k} \min_{j \in F} k_j$
- $g_j(\alpha) + v_j \geq g_j(b) + q_j w(s,c)$, $\qquad$ όπου: $w(s,c) = \frac{1 - c(\alpha, b) - k_j / k}{1 - s - k_j / k}$

Η πρώτη συνθήκη (συμμαχία συμφωνίας) αναφέρει ότι η τιμή του δείκτη συμφωνίας c(α,b) πρέπει να είναι σημαντικά υψηλή, προκειμένω να νομιμοποιηθεί ο ισχυρισμός της αSb. Η παράμετρος s θέτει το κάτω όριο του δείκτη και ονομάζεται επίπεδο συμφωνίας (concordance level). Η συνθήκη αυτή καθιστά απαραίτητη την συμμετοχή μιας ισχυρής συμμαχίας κριτηρίων προς όφελος της αSb (s>1/2). Στην περίπτωση που $s > s^*$, οι δύο παραπάνω συνθήκες παραμένουν σε ισχύ απλώς η

προτεινόμενη σχέση υπεροχής ερμηνεύεται σαν σχέση κυριαρχίας. Στην πράξη η παράμετρος αυτή παίρνει τιμές μεταξύ του 3/5 και 4/5.

Η δεύτερη συνθήκη αναφέρει το γεγονός ότι το δικαίωμα της αρνησικυρίας δεν χαρακτηρίζει το κάθε κριτήριο. Ο συντελεστής w(s,c) χρησιμοποιείται για να διαμορφώσει το αποτέλεσμα της αρνησικυρίας (ενισχυτικά ή μη), όπως αυτό συζητήθηκε στην προηγούμενη παράγραφο:

$w(s,1-k_j/k)=o$: όχι ενίσχυση

$w(s,s)=1$: μέγιστη ενίσχυση

5.5.2. Η μέθοδος ELECTRE III

Η σχέση υπεροχής που χρησιμοποιείται στην μέθοδο ELECTRE III είναι του Τύπου ΙΙ, είναι δηλ. μια ασαφής δυαδική σχέση. Ο δείκτης αξιοπιστίας σ(α, b) που χαρακτηρίζει την σχέση αυτή σχετίζεται άμεσα με τον δείκτη συμφωνίας c(α ,b). Η συσχέτιση των παραπάνω δεικτών λαμβάνει χώρα στο θέμα του δείκτη ασυμφωνίας $d_j(\alpha,b)$ καθώς μπορούν να υπάρχουν κριτήρια ασυμφωνίας με $d_j(\alpha,b) > c(\alpha, b)$. Η απουσία τέτοιων κριτηρίων ταυτίζει τους παραπάνω δείκτες: $\sigma(\alpha, b) = c(\alpha ,b)$. Στην αντίθετη περίπτωση, η τιμή του δείκτη αξιοπιστίας είναι αντιστρόφως ανάλογη του αριθμού εμφάνισης τέτοιων κριτηρίων. Η ελάττωση αυτή γίνεται ολική όταν ο δείκτης ασυμφωνίας $d_j(\alpha,b)$ πλησιάζει την μονάδα. Πιο συγκεκριμένα:

$$\sigma(\alpha,b) = c(\alpha,b) \prod_{j \in Dc(\alpha,b)} \frac{1-d_j(\alpha,b)}{1-c(\alpha,b)}, \qquad \text{όπου:}$$

$D_c(\alpha ,b)=\{j/\ j \in F , d_j(\alpha,b) > c(\alpha, b)\}$

5.5.3. Άλλες μέθοδοι ELECTRE

Οι δύο παραπάνω μέθοδοι (ELECTRE Is και ELECTRE III) θεωρούνται αντίστοιχη εξέλιξη των δύο πρώτων μεθόδων της οικογένειας ELECTRE: ELECTRE I και ELECTRE II. Αναφορικά σημειώνουμε ότι η μέθοδος ELECTRE I είναι η πρώτη πολυκριτήρια μέθοδος που απαντάται στον χώρο των σχέσεων υπεροχής. Η μόνη διαφορά μεταξύ των μεθόδων ELECTRE I και ELECTRE Is, έγκειται στην

δυνατότητα χρήσης και ψευδοκριτήριων από την δεύτερη. Αντίστοιχα, η μέθοδος ELECTRE II είναι η πρώτη μέθοδος στην οποία έκανε την εμφάνιση του ο δείκτης αξιοπιστίας. Στην μέθοδο αυτή λαμβάνονται υπόψη δύο μοντέλα προτίμησης, όπου το πρώτο είναι σχετικά φτωχό σε πληροφορία αλλά αρκετά ισχυρό και το δεύτερο εμφανίζεται πιο πλούσιο αλλά και λιγότερο ανθεκτικό.

Η μέθοδος ELECTRE IV εφαρμόζεται σε περιπτώσεις όπου δεν γίνεται χρήση των συντελεστών σημαντικότητας k_j. Αυτό όμως, δεν σημαίνει ότι δεν υπάρχουν καθόλου βάρη. Η μέθοδος αυτή εισάγει μια ακολουθία πέντε «φωλιασμένων» σχέσεων υπεροχής:

$$S^1 \subset S^2 \subset S^3 \subset S^4 \subset S^5$$

Κάθε τέτοια σχέση S^i , ορίζεται άμεσα με την αναφορά στα θέματα συμφωνίας και ασυμφωνίας.

5.6. ΚΑΤΑΤΑΞΗ ΤΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ ELECTRE

Η χρήση ενός πολυκριτήριου μοντέλου προτίμησης (ακόμα και στην περίπτωση του απλού κριτηρίου g(α)), βασίζεται πάντοτε στο είδος του πολυκριτήριου προβλήματος, επί του οποίου θέλουμε να εφαρμοστεί. Ο Roy (1996), διατύπωσε τρεις βασικές καταστάσεις του πολυκριτήριου προβλήματος: τις P.α, P.β, P.γ . Συνοπτικά μπορούμε να ορίσουμε τις καταστάσεις αυτές, λέγοντας ότι η διαδικασία αρωγής απόφασης κινείται προς την κατεύθυνση:

P.α: Επιλογή ενός υποσυνόλου, όσον το δυνατό περισσότερο περιορισμένου, το οποίο και περιέχει τις περισσότερο ικανοποιητικές εναλλακτικές. Στην περίπτωση αυτή, προσπαθούμε να απομονώσουμε το μικρότερο υποσύνολο $A_0 \subset A$, το οποίο είναι ικανό να δικαιολογήσει την απουσία των υπολοίπων εναλλακτικών $\alpha \in A_0 / A$.

P.β: Σύνδεση της κάθε εναλλακτικής σε προκαθορισμένες κατηγορίες

P.γ: Κατάταξη των εναλλακτικών σύμφωνα με την φθίνουσα τάξη προτίμησης. Στην περίπτωση αυτή προσπαθούμε να κατασκευάσουμε μία μερική (ή ολική) σχέση διάταξης, όσο πλουσιότερη γίνεται, στο υποσύνολο A_0 των πιο ικανοποιητικών εναλλακτικών.

Σε σχέση με τις παραπάνω προβληματικές μπορούμε να επιδιώξουμε μία κατάταξη των μεθόδων της οικογένειας ELECTRE. Πιο συγκεκριμένα:

Ρ.α: Μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι μέθοδοι ELECTRE I και ELECTRE Is. Η πρώτη από αυτές χρησιμοποιείται μόνο όταν είναι απολύτως απαραίτητο να δουλέψουμε με μία πολύ απλή μέθοδο και ισχύει: $p_j = q_j = 0, \forall j \in F.$

Ρ.β: Δεν υπάρχει ενδεικτική μέθοδος.

Ρ.γ: Μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι μέθοδοι ELECTRE II, ELECTRE III και ELECTRE IV. Η πρώτη θεωρείται κατάλληλη στην περίπτωση που $p_j = q_j = 0, \forall j \in F.$ Αντίστοιχα η τελευταία μπορεί να επιλεχθεί στην περίπτωση που δεν είναι απαραίτητη η παρουσία των συντελεστών σημαντικότητας k_j.

Η παραπάνω κατάταξη, μαζί με κάποιες άλλες, μπορεί να παρατηρηθεί στον παρακάτω πίνακα (Πίνακας 5.3.):

Πίνακας 5.3.: Κύρια χαρακτηριστικά των μεθόδων ELECTRE

Μέθοδος ELECTRE	**I**	**Is**	**II**	**III**	**IV**	**A**
Πιθανότητα χρήσης των κατωφλιών αδιαφορίας και προτίμησης	Όχι	Ναι	Όχι	Ναι	Ναι	Ναι
Αναγκαιότητα ποσοτικοποίησης της σχετικής σημαντικότητας των κριτηρίων	Ναι	Ναι	Ναι	Ναι	Όχι	Ναι
Αριθμός και φύση των σχέσεων υπεροχής	1	1	2	1 ασαφής	5	1 ασαφής
Κατάσταση προβλήματος	α	α	γ	γ	γ	β
Τελικά αποτελέσματα	Ένας πυρήνας	Ένας πυρήνας	Μερική προδιάταξη	Μερική προδιάταξη	Μερική προδιάταξη	Σύνδεση με προκαθορισμέ-νες κατηγορίες

5.7. ΕΞΕΡΕΥΝΗΣΗ ΤΩΝ ΣΧΕΣΕΩΝ ΥΠΕΡΟΧΗΣ

Η εισαγωγή των τριών προβληματικών είναι θεμελιώδους σημασίας για την διευθέτηση ενός πολυκριτήριου προβλήματος. Αυτό σημαίνει, ότι η μοντελοποίηση των προτιμήσεων του D.M. πρέπει πάντα να προσεγγίζει μία προβληματική. Η παρατήρηση αυτή, δηλώνει την άμεση εξάρτηση του προτεινόμενου μοντέλου από την κατεύθυνση που του υποδεικνύει η προβληματική. Η ανάδειξη αυτής της κατεύθυνσης συνεπάγεται, στο σύνολο των περιπτώσεων, την εξερεύνηση του μοντέλου προτίμησης.

Το αρχικό μοντέλο, που σχεδιάζεται να αναπαραστήσει τις προτιμήσεις του D.M., δεν απαιτείται να οδηγεί είτε στην κατασκευή ενός διαμερισμού του A, είτε στην κατασκευή μιας προδιάταξης στο A, είτε τέλος στην επιλογή του υποσυνόλου A_0 των πιο ικανοποιητικών ενεργειών. Παρόλα αυτά, το μοντέλο που στηρίζεται στην κατασκευή μιας συνάρτησης τιμής, μας παρέχει μία ισχυρή συνέπεια ανάμεσα στα αποτελέσματα του και τα αρχικά δεδομένα. Αυτό μας επιτρέπει, μια άμεση εξερεύνηση της συνάρτησης τιμής, δηλ. μια άμεση επέμβαση στην συνάρτηση αυτή, με σκοπό να οδηγηθούμε σε συγκεκριμένη κατεύθυνση προβληματικής.

Στην περίπτωση των σχέσεων υπεροχής, τα πράγματα δεν είναι τόσο απλά, καθώς προκύπτουν αρκετά πρακτικά ζητήματα που πρέπει να επιλυθούν. Η εξερεύνηση μιας σχέσης υπεροχής, γίνεται πάντα μέσα από την εξερεύνηση του αντίστοιχου γραφήματος της. Η διαδικασία που ακολουθείται εξαρτάται πάντοτε από την προβληματική που εισάγουμε (την μέθοδο ELECTRE που χρησιμοποιούμε). Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε αποκλειστικά με την πρώτη περίπτωση προβληματικής, η οποία αφορά τις μεθόδους ELECTRE I και ELECTRE Is. Τόσο αυτή η περίπτωση, όσο και οι υπόλοιπες δύο, παρουσιάζονται εκτενέστερα στο άρθρο του Vanderpooten (1990).

Η διαδικασία εξερεύνησης της σχέσης υπεροχής, στο πλαίσιο της πρώτης προβληματικής, πρέπει να σχεδιασθεί με τέτοιο τρόπο ώστε να οδηγήσει στην ανεύρεση του υποσυνόλου A_0, με τις παρακάτω ιδιότητες:

1. Το A_0 πρέπει να περιέχει τις πιο ικανοποιητικές εναλλακτικές
2. Η $|A_0|$ πρέπει να είναι όσο το δυνατόν μικρή.

Η επιλογή ενός τέτοιου υποσυνόλου συνεπάγεται την άμεση διαγραφή των υπολοίπων εναλλακτικών:

3. $\forall b \in A \setminus A_0, \exists a \in A_0 : aSb$

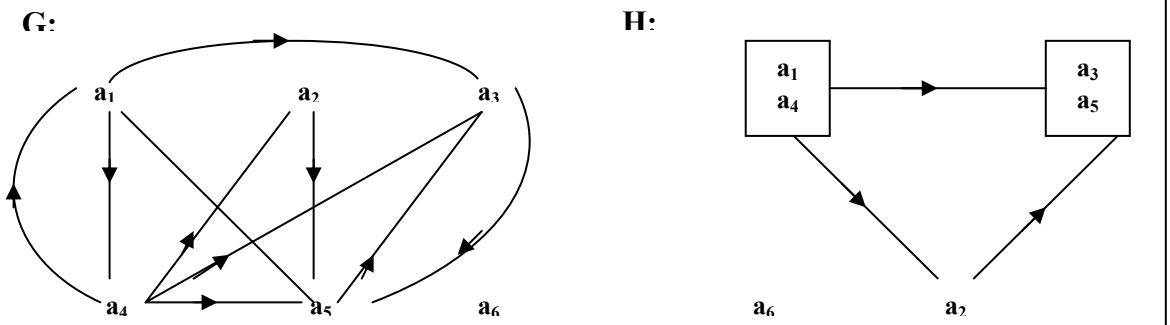
Κάθε τέτοιο υποσύνολο θεωρείται ότι κυριαρχεί (ή υπερέχει) του συνόλου Α. Στην θεωρία των Γραφημάτων, ένα τέτοιο υποσύνολο ονομάζεται κυρίαρχο (dominating subset) και χαρακτηρίζεται από την ιδιότητα (3) της εξωτερικής σταθερότητας (external stability).

Η προτεινόμενη εξερεύνηση διακρίνεται σε δύο περιπτώσεις, την μεταβατική και την γενική:

Μεταβατική περίπτωση: Σ' αυτή την περίπτωση η σχέση υπεροχής S είναι εφοδιασμένη με την μεταβατική ιδιότητα. Αυτό συνεπάγεται ένα διαμερισμό του Α σε κλάσεις ισοδυναμίας C_i, οι οποίες περιέχουν αδιάφορες μεταξύ τους εναλλακτικές. Στην γλώσσα των γραφημάτων κάθε τέτοια κλάση, αντιστοιχεί σε ένα ολικό και συμμετρικό υπογράφημα το οποίο ονομάζεται κλάση αδιαφορίας (indifference clique). Αντικαθιστώντας κάθε τέτοια κλάση από μία κορυφή και συγχρόνως συνδέοντας τις τελικές κορυφές μεταξύ τους σύμφωνα με τα αρχικά τόξα του U, παίρνουμε το μειωμένο γράφημα H=(C,V). Το σύνολο C αντιστοιχεί στο σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας:

$$(C_i, C_j) \in V \quad \text{εάν} \qquad (a_i, a_j) \in U \text{ , για κάποιο } a_i \in C_i \text{ και κάποιο } a_j \in C_j .$$

Το τελικό γράφημα αναπαριστά πλήρως το μοντέλο προτίμησης. Οι κλάσεις περιέχουν τις πιο ικανοποιητικές ενέργειες, οι οποίες και δεν κυριαρχούνται από καμία άλλη εναλλακτική. Μπορούμε να ορίσουμε το υποσύνολο A_0, επιλέγοντας μία εναλλακτική από κάθε κλάση, χωρίς άλλους περιορισμούς. Στο παρακάτω σχήμα (Σχήμα 5.4.) το βέλτιστο υποσύνολο αντιστοιχεί σε δύο ισοδύναμα $A_0=\{a_1,a_6\}$ ή $A_0=\{a_4,a_6\}$.



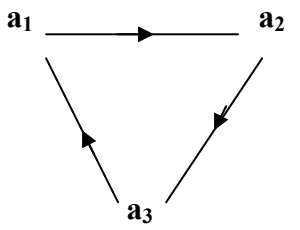
Σχήμα 5.4.: Η μεταβατική περίπτωση – Αρχικό και Μειωμένο γράφημα

Γενική περίπτωση: Στην γενική περίπτωση, η S δεν χρειάζεται να είναι μεταβατική. Αυτό, σε συνδυασμό με την ύπαρξη κυκλωμάτων (ανακλαστική σχέση), επιβάλει έναν εκ νέου προσδιορισμό του ελάχιστου κυρίαρχου υποσυνόλου A_0**.** Οφείλουμε δηλαδή να προσδιορίσουμε το ελάχιστο S-κυρίαρχο υποσύνολο του οποίου τα στοιχεία (εναλλακτικές) είναι μη-συγκρίσιμα:

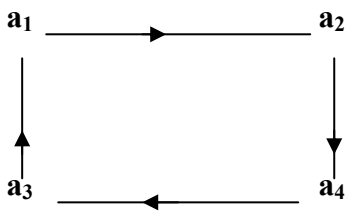
4. $\forall a, a' \in A_0$: δεν ισχύει (aSa') και $(a'Sa)$.

Στην θεωρία Γραφημάτων, το υποσύνολο που χαρακτηρίζεται από την παραπάνω ιδιότητα ονομάζεται ανεξάρτητο υποσύνολο. Αν συγχρόνως, αυτό το υποσύνολο είναι και κυρίαρχο, τότε ονομάζεται πυρήνας (kernel). Η χρήση του πυρήνα στην θεωρία των σχέσεων υπεροχής, εισάγεται για πρώτη φορά στην μέθοδο ELECTRE I.

Η εισαγωγή της έννοιας του πυρήνα στην θεωρία των σχέσεων υπεροχής, μπορεί να συνεισφέρει στην εξερεύνηση των μη-μεταβατικών σχέσεων, αλλά ταυτόχρονα εισάγει και νέα προβλήματα. Για παράδειγμα, μπορούν να παρατηρηθούν περιπτώσεις εξερεύνησης όπου δεν εμφανίζεται πυρήνας, ή εμφανίζονται περισσότεροι του ενός πυρήνες (Σχήμα 5.5.).



Ανυπαρξία πυρήνα



Δύο πυρήνες: $\{a_1,a_4\}$ και $\{a_2,a_3\}$

Σχήμα 5.5.: Παραδείγματα γραφημάτων που αντιστοιχούν σε κανέναν ή παραπάνω του ενός πυρήνες

Η ύπαρξη των παραπάνω προβλημάτων, έχει άμεση σχέση με την παρουσία κυκλωμάτων στο γράφημα της σχέσης υπεροχής. Η θεωρία των γραφημάτων στηρίζει την άποψη αυτή, με το παρακάτω θεώρημα:

Εάν το γράφημα G δεν έχει κυκλώματα, τότε υπάρχει ένας μοναδικός πυρήνας.

Με αυτή την παρατήρηση, συμπεραίνουμε ότι η εξερεύνηση μιας σχέσης υπεροχής (στην γενική κατάσταση) έχει να κάνει με την εξαφάνιση των κυκλωμάτων. Η διαδικασία αυτή, η οποία και περιγράφεται στην μέθοδο ELECTRE Is, είναι η εξής:

Θεωρούμε στο γράφημα G, τις εναλλακτικές οι οποίες και ανήκουν στο μέγιστο κύκλωμα (ένα κύκλωμα που δεν περιέχεται σε άλλο κύκλωμα) και δεν συνιστούν μία κλάση αδιαφορίας. Τότε υπάρχουν δύο περιπτώσεις:

- Εάν οι παραπάνω εναλλακτικές θεωρηθούν αμοιβαία αδιάφορες, τότε μπορούν να συμπεριληφθούν σε μια κλάση αδιαφορίας.
- Διαφορετικά, καταλύουμε το κύκλωμα με το να καταργήσουμε τα τόξα που χαρακτηρίζονται από ελάχιστη αξιοπιστία υπεροχής.

Η πρώτη περίπτωση, μετασχηματίζει το γράφημα G=(A,U) στο γράφημα $G'=(A,U')$ όπου το κάθε κύκλωμα περιγράφεται από μία κλάση αδιαφορίας. Είναι πιθανό, να γενικεύσουμε τον διαμερισμό του A και να ορίσουμε κλάσεις ισοδυναμίας C_i, οι οποίες με την σειρά τους μετασχηματίζουν το γράφημα G' στο μειωμένο γράφημα $H'=(C,V')$. Σ' αυτήν την περίπτωση όμως, δεν είναι απαραίτητο να ικανοποιούνται όλες οι κατευθύνσεις υπεροχής που δηλώνονται με τα τόξα του H'. Η κατάργηση των λιγότερο αξιόπιστων τόξων υπεροχής μετασχηματίζει το H' στο τελικό γράφημα $H''=(C,V'')$ (με $V''\subset V$). Το τελικό γράφημα δεν είναι απαραίτητα μεταβατικό, δεν περιέχει όμως κανένα κύκλωμα και θεωρείται ότι προσεγγίζει αρκετά πειστικά το μοντέλο προτίμησης. Η διαδικασία εξερεύνησης τελειώνει με την ανεύρεση του πυρήνα του H''.

Στην πράξη όμως, η αναζήτηση των «καλύτερων» εναλλακτικών επιβάλει μία πιο εκλεπτυσμένη ανάλυση του πυρήνα. Η ανάλυση συνίσταται σε μία επαναληπτική επεξεργασία των παραμέτρων $(p_j,\hat{c},\hat{d})$ (όπου: τα όρια $\hat{c},\hat{d}$ των c και d αντίστοιχα), η οποία και συμπληρώνεται με έλεγχο ευρωστίας (robustness) των αποτελεσμάτων (Vincke, 1992). Ο Roy (1996) τέλος, θέτει όρια σε αυτή την επεξεργασία δηλώνοντας ότι η επιλογή των παραμέτρων δεν πρέπει να γίνεται αυθαίρετα, παρά πάντοτε συνδυαστικά και με βάση την ειδική φύση του κάθε πολυκριτήριου προβλήματος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6^{Ο}

Πολυκριτήρια υποστήριξη αποφάσεων με την βοήθεια της Παραγοντικής Ανάλυσης των Αντιστοιχιών

6.0. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στα προηγούμενα κεφάλαια αναφερθήκαμε και αναλύσαμε, σε όσο το δυνατόν μεγαλύτερο βαθμό, δύο διαφορετικά επιστημονικά πεδία: της Παραγοντικής Ανάλυσης (Ανάλυσης Δεδομένων) και της Πολυκριτήριας Ανάλυσης. Το πρώτο από αυτά, ασχολείται με την στατιστική επεξεργασία μεγάλου αριθμού πινάκων δεδομένων – τα οποία αναφέρονται σε στατιστικές μετρήσεις ή μετρήσεις που μπορούν να θεωρηθούν στατιστικές – και αναδεικνύει περιγραφικά το σύνολο της πληροφορίας που μπορούμε να αντλήσουμε από τα αρχικά δεδομένα. Το δεύτερο πεδίο αντίστοιχα, διαπραγματεύεται προβλήματα απόφασης που αφορούν ένα σημαντικό αριθμό εναλλακτικών αποφάσεων σε σχέση με μια οικογένεια κριτηρίων και μας παρέχει μέσω συνθετικών διαδικασιών τα κατάλληλα εργαλεία για την επιλογή της «καλύτερης» συμβιβαστικά, λύσης.

Με μια πρώτη ματιά, μπορεί να θεωρηθεί ότι τα παραπάνω δύο πεδία δεν σχετίζονται άμεσα. Η ισχύς αυτής της τοποθέτησης επιβεβαιώνεται από παρατηρήσεις που έχουν να κάνουν όχι τόσο με την ουσία τον μεθόδων παρά με την εικόνα τους, δηλ. τον τρόπο που αυτές παρουσιάζονται. Κατ' αυτό τον τρόπο, το σύνολο των μεθόδων της Πολυκριτήριας Ανάλυσης (Πολυκριτήρια θεωρία Χρησιμότητας, Θεωρία των σχέσεων υπεροχής) αντιμετωπίζονται ως αλγεβρικές μέθοδοι, ενώ αντίστοιχα το σύνολο των μεθόδων της Παραγοντικής Ανάλυσης διέπεται από τον περιγραφικό προσδιορισμό που προσδίδουν μέσω των αναλύσεων στο αρχικό πίνακα δεδομένων. Η προσέγγιση αυτή, κατά την γνώμη μας,

υποβαθμίζει τις μεθόδους της Παραγοντικής Ανάλυσης και καθιστά οποιοδήποτε προσπάθεια συγκερασμού των δύο αυτών πεδίων μειονεκτική για την Ανάλυση δεδομένων. Χαρακτηριστικά παραδείγματα, που διέπονται από την φιλοσοφία της παραπάνω προσέγγισης και τον συμπληρωματικό (βοηθητικό) ρόλο της Παραγοντικής Ανάλυσης στην πολυκριτήρια μεθοδολογία, μπορούμε να αναζητήσουμε στις εργασίες των Ματσατσίνη (1995), Σίσκου (1995,1999) και Brans – Mareschal (1990).

Υπάρχει όμως και η άλλη άποψη, η οποία και υποστηρίζει ότι τα παραπάνω πεδία όχι μόνο σχετίζονται άμεσα αλλά μπορούν να συμμετάσχουν ισόποσα σε μια διαδικασία απόφασης. Πιο συγκεκριμένα, η συσχέτιση των δύο αυτών πεδίων εντοπίζεται στον τρόπο με τον οποίο τα αποτελέσματα μιας Παραγοντικής Ανάλυσης – ειδικότερα μιας Παραγοντικής Ανάλυσης Αντιστοιχιών – μπορούν να ερμηνευθούν αρχικά και κατόπιν να χρησιμοποιηθούν στην πολυκριτήρια μεθοδολογία. Η προσέγγιση αυτή αναδεικνύει τον αλγεβρικό χαρακτήρα των μεθόδων της Παραγοντικής Ανάλυσης και επαναπροσδιορίζει το πρόβλημα απόφασης από την στατιστική του πλευρά. Ο Birkhoff (1973) ορίζει ως «θεμελιώδες πρόβλημα δομής της άλγεβρας, την ανάλυση ενός δεδομένου αλγεβρικού συστήματος σε απλούστερα μέρη (components) τα οποία και επιτρέπουν την ανακατασκευή του συστήματος μέσω της σύνθεσης αυτών». Αν μη τι άλλο – και πέρα των παρατηρήσεων του 2^{ου} Κεφαλαίου, η μέθοδος της Παραγοντικής Ανάλυσης των Αντιστοιχιών βασίστηκε σ' αυτόν ακριβώς τον προβληματισμό.

Με βάση την τελευταία τοποθέτηση, το πολυκριτήριο πρόβλημα που τίθεται σ' αυτό το κεφάλαιο είναι το πρόβλημα της ομαδικής αρωγής απόφασης (group decision making), το οποίο και περιγράφεται ως εξής: Πως μπορούμε με βάση τα δεδομένα ενός αρχικού συνόλου n πολυκριτήριων πινάκων να επιλέξουμε το υποσύνολο των «καλύτερων εναλλακτικών» ως προς μια οικογένεια q κριτηρίων. Η επίλυση του προβλήματος αυτού, απαιτεί την συνδυαστική χρήση της μεθόδου της Παραγοντικής Ανάλυσης των Αντιστοιχιών καθώς και του μεγαλύτερου μέρους της πολυκριτήριας μεθοδολογίας και συνοψίζεται στα παρακάτω βήματα.

1. Στατιστική επεξεργασία του αρχικού συνόλου των n πολυκριτήριων πινάκων, με σκοπό να οδηγηθούμε σε έναν τελικό πίνακα ο οποίος και θα διατηρεί ανέπαφη την πληροφορία του αρχικού συνόλου πινάκων. Στον πίνακα αυτό εφαρμόζουμε την μέθοδο της Παραγοντικής Ανάλυσης των Αντιστοιχιών.

2. Πολυκριτήρια προσέγγιση της μεθόδου της Παραγοντικής Ανάλυσης των Αντιστοιχιών με βάση τις γενικότερες αρχές της θεωρίας της Κοινωνικής Επιλογής. Η προσέγγιση αυτή απαιτεί μια επιπλέον αναφορά στην θεωρία της Τιμής καθώς και στην μέθοδο της Παραγοντικής Ανάλυσης των Αντιστοιχιών.

3. Δημιουργία ενός νέου πίνακα, στον οποίο περιέχεται συγκεντρωμένη, σε μορφή διάταξης εναλλακτικών αποφάσεων, η πληροφορία που μας παρέχει το σύνολο των n πολυκριτήριων ατόμων ως προς το σύνολο των q κριτηρίων. Τον πίνακα αυτό, τον ονομάζουμε πολυκριτήριο πίνακα του συνόλου και σ' αυτόν εφαρμόζουμε την πολυκριτήρια μέθοδο των σχέσεων υπεροχής , ELECTRE Is.

Κατ' αυτό τον τρόπο, η συνεισφορά της Παραγοντικής Ανάλυσης Αντιστοιχιών στην θεματολογία της Πολυκριτήριας Ανάλυσης είναι ουσιαστική και δημιουργεί τις απαραίτητες συνθήκες για την δημιουργία ενός εργαλείου ομαδικής αρωγής αποφάσεων. Η συνεισφορά όμως αυτών των δύο ξεχωριστών επιστημονικών πεδίων είναι αμοιβαία και ισότιμη. Αν λοιπόν, αντιστρέψουμε την κατεύθυνση της συνεισφοράς, η εφαρμογή της Πολυκριτήριας Ανάλυσης επίσης συνεισφέρει στην Παραγοντική Ανάλυση των Αντιστοιχιών καθώς επιτρέπει την σύνθεση των παραγοντικών αξόνων, ως προς τις παρατηρούμενες διατάξεις τους.

6.1 ΠΟΛΥΚΡΙΤΗΡΙΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ

Θεωρούμε αρχικά, ένα συγκεκριμένο πολυκριτήριο πρόβλημα απόφασης που αναφέρεται σε σταθερό περιβάλλον απόφασης. Μ' αυτή την αναφορά, δηλώνουμε κατηγορηματικά την άρνηση μας για την υιοθέτηση οποιονδήποτε σεναρίων και επικεντρωνόμαστε σε ένα πεπερασμένο σύνολο $A=\{\alpha_i / i=1,\ldots p\}$ p αναγνωρίσιμων εναλλακτικών ενεργειών. Το σύνολο αυτό, μαζί με την συνεπή οικογένεια $G=\{g_j / j=1,\ldots q\}$ q κριτηρίων συνιστούν τις βάσεις πάνω στις οποίες καλείται ο κάθε μετέχων στο πρόβλημα απόφασης, για παράδειγμα ένας D.M., να πάρει θέση. Η θέση αυτή αντιστοιχεί στην προτίμηση p_{ij} που δείχνει ο ενδιαφερόμενος ως προς την κάθε α_i

εναλλακτική υπό την προοπτική του κάθε κριτηρίου g_j της οικογένειας G. Το σύνολο αυτών των θέσεων, το ταξινομούμε σε έναν πίνακα Π.

Ο πίνακας Π, ονομάζεται πολυκριτήριος πίνακας και είναι διαστάσεων $p \times q$. Κάθε στήλη του πίνακα εκφράζει σε μορφή διάταξης, την προτίμηση του ενδιαφερομένου ως προς το σύνολο των εναλλακτικών Α, υπό την προοπτική του κάθε κριτηρίου g_j (Σχήμα 6.1.). Καθώς τα κριτήρια δίνονται διαχωρισμένα σε κλάσεις, η προτίμηση p_{ij} που αποδίδει ο κάθε ενδιαφερόμενος στην α_i εναλλακτική υποδεικνύει μια κατάταξη της εναλλακτικής στην k κλάση του j κριτηρίου. Το σύνολο των κλάσεων του κάθε κριτηρίου δίνεται είτε σε αριθμητική μορφή ({1,2,3,4}) είτε σε ποιοτική ({Κακή, Μέτρια, Καλή, Άριστη}). Σε κάθε περίπτωση, το σύνολο των κλάσεων θεωρείται διατεταγμένο.

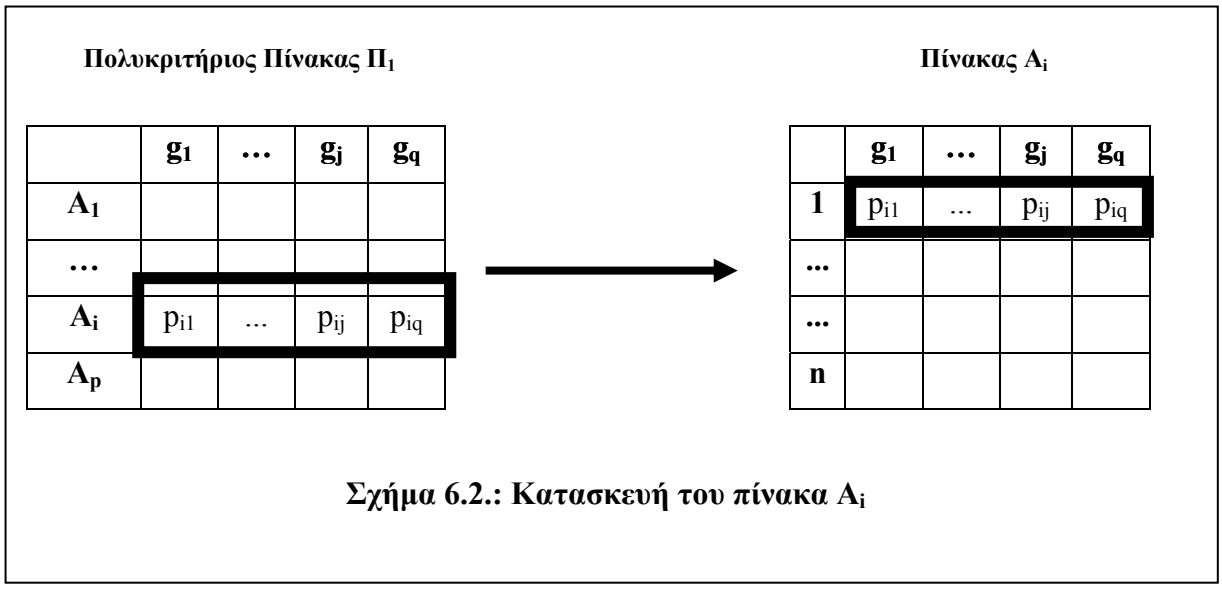
Από στατιστικής πλευράς, ο πίνακα Π περιγράφεται ως πίνακας μετρήσεων δύο μεταβλητών (εναλλακτικές, κριτήρια). Ο Diday (1982), χαρακτηρίζει έναν στατιστικό πίνακα με χαρακτηριστικά προτίμησης, ως πίνακα προτιμήσεων, συνδέοντας μ' αυτόν τον τρόπο την πολυκριτήρια λειτουργία του με την στατιστική του φύση.

		ΚΡΙΤΗΡΙΑ			
		Κριτήριο 1	**Κριτήριο 2**	**…**	**Κριτήριο q**
ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΕΣ	**Εναλλακτική 1**	3="Καλή"	…	…	…
	Εναλλακτική 1	2="Μέτρια"	…	…	…
	…	…	…	…	…
	Εναλλακτική p	1=" Κακή"	…	…	…

Σχήμα 6.1.: Πολυκριτήριος πίνακας Π

Στην περίπτωση που μας ενδιαφέρουν οι προτιμήσεις ενός συνόλου n ατόμων, στην βάση του ίδιου συνόλου εναλλακτικών και της ίδιας οικογένειας κριτηρίων, θεωρούμε ένα σύνολο n πολυκριτήριων πινάκων $\{\Pi_s / s=1,2,\ldots,n\}$. Από αυτούς τους αρχικούς πίνακες, δημιουργούμε στη συνέχεια ένα πίνακα $A_i / i=1,2,\ldots,p$, για κάθε εναλλακτική. Αυτό επιτυγχάνεται, αν συνδέσουμε τις n γραμμές των πινάκων Π_s, που αναφέρονται σε μια εναλλακτική α_i, σε ένα νέο πίνακα A_i,

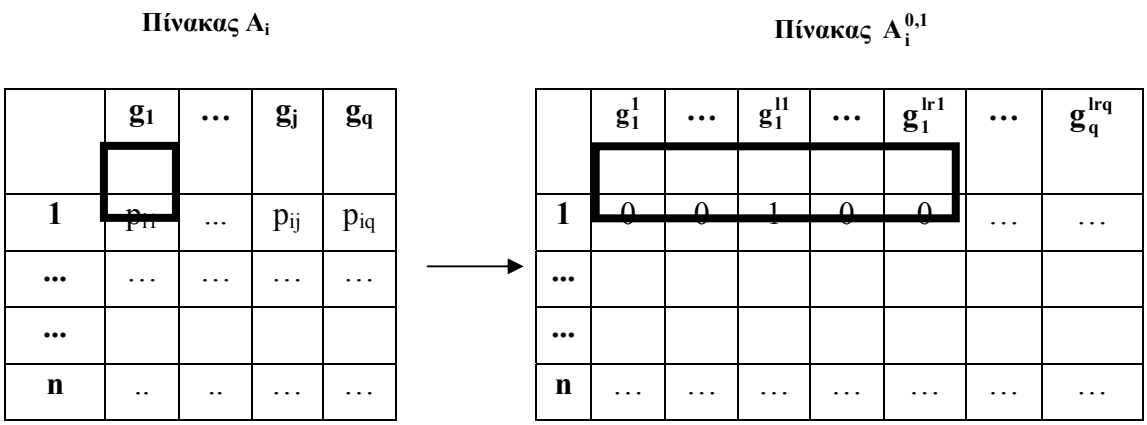
διαστάσεων $n \times q$ (Σχήμα 6.2.). Κάθε στήλη j του πίνακα A_i, μας ενημερώνει για το είδος της προτίμησης που εκφράζει στην εναλλακτική α_i ένα σύνολο n ατόμων, υπό την προοπτική του κριτηρίου g_j.



Σχήμα 6.2.: Κατασκευή του πίνακα A_i

Στην συνέχεια για κάθε πίνακα A_i, δημιουργούμε τον αντίστοιχο λογικό [0-1] πίνακα $A_i^{0,1}$ (Σχήμα 6.3.). Η λογική του μετασχηματισμού αυτού, βασίζεται στην στατιστική αντιμετώπιση του κάθε κριτηρίου ως μεταβλητής. Κάθε τέτοια μεταβλητή συνδέεται με ένα σύνολο νέων μεταβλητών, το οποίο και καθορίζουν οι κλάσεις του κριτηρίου. Κατ' αυτό τον τρόπο, αν θεωρήσουμε την αρχική οικογένεια κριτηρίων $G=\{g_j / j=1,\ldots q\}$και συνδέσουμε σε κάθε g_j κριτήριο έναν αριθμό r_j κλάσεων, με $\sum_{j=1}^{q} r_j = r$, επεκτείνουμε το αρχικό σύνολο των q κριτηρίων στο σύνολο των r νέων κριτηρίων. Οι νέες μεταβλητές (κλάσεις κριτηρίων) εισάγουν μια δυαδική σχέση προτίμησης στον χώρο των κλάσεων των κριτηρίων, καθώς δέχονται ως τιμές μόνο τους αριθμούς 0=Αρνηση και 1=Κατάφαση. Δηλ. αν θεωρήσουμε ότι η προτίμηση του k ατόμου, κατατάσσει την i εναλλακτική στην g_j^{lj} $(1 \le l_j \le r_j)$ κλάση του j κριτηρίου, τότε αυτόματα συνδέουμε την τιμή 1 στην μεταβλητή g_j^{lj}, διαφορετικά την 0:

$$pij = \begin{cases} 0, pij \neq g_j^{lj}(i) \\ 1, pij = g_j^{lj}(i) \end{cases}$$

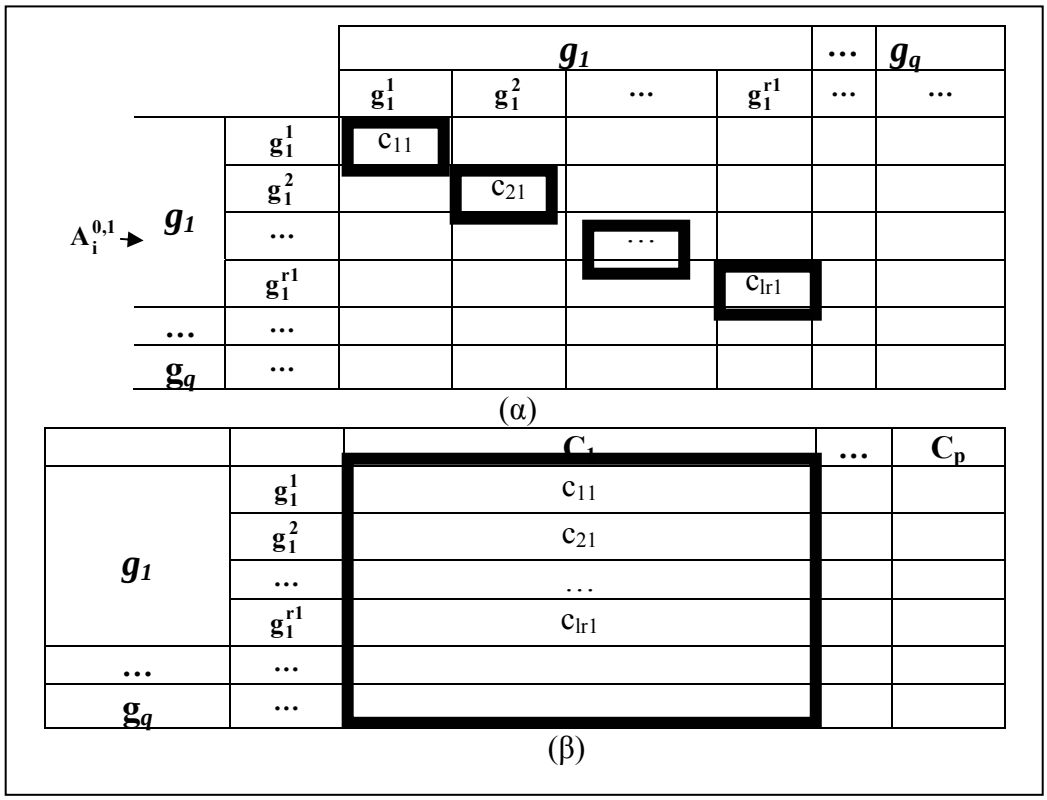


Σχήμα 6.3.: Μετασχηματισμός του πίνακα A_i στον λογικό πίνακα [0-1] $A_i^{0,1}$

Από στατιστικής πλευράς, η κατηγοριοποίηση των κριτηρίων, αναδεικνύει καλύτερα τις σχέσεις που είναι δυνατόν να εμφανιστούν μεταξύ των εναλλακτικών και των κριτηρίων. Από την άλλη πλευρά, η χρήση των δυαδικών μεταβλητών (0, 1), συνδέει τα άτομα (γραμμές) στον κάθε πίνακα $A_i^{0,1}$ με σταθερό βάρος. Αν ορίσουμε ως βάρος γραμμής το άθροισμα των μονάδων της γραμμής, τότε αυτό το άθροισμα αντιστοιχεί στον αριθμό q (πληθάριθμο της αρχικής οικογένειας των κριτηρίων) και είναι σταθερό για κάθε γραμμή. Η ισότητα των βαρών, προκαθορίζει την ισόποση συμμετοχή των ατόμων στην ανάλυση του πίνακα δεδομένων καθώς και στην εξαγωγή της απόφασης.

Στην συνέχεια κάθε λογικός [0-1] πίνακας $A_i^{0,1}$ μετατρέπεται στον αντίστοιχο πίνακα συχνοτήτων C_i (Σχήμα 6.3.(α)). Κάθε τέτοιος πίνακας είναι τετραγωνικός με γραμμές και στήλες το σύνολο των κλάσεων όλων των κριτηρίων. Η κύρια διαγώνιος κάθε πίνακα C_i (συχνότητα ατόμων που ταξινομούν την κάθε εναλλακτική α_i σε μία συγκεκριμένη κλάση g_j^{lj}), δημιουργεί την στήλη C_j/ j=1,2,…,p ενός νέου πίνακα C που έχει ως γραμμές το σύνολο r των κλάσεων όλων των κριτηρίων g_j (Σχήμα 6.4 (β)) . Κάθε στοιχείο $\{c_{ij}\}$ του πίνακα αυτού, εκφράζει το σύνολο των ατόμων των οποίων η γνώμη για την i απόφαση αντιστοιχεί στην l_j κλάση του j κριτηρίου. Ο C είναι ο τελευταίος πίνακας των μετασχηματισμών και παρέχει συγκεντρωμένη και αναλλοίωτη την πληροφορία που περιείχε το αρχικό σύνολο των

n πολυκριτήριων πινάκων, σε μορφή συχνοτήτων των δυαδικών σχέσεων. Στον πίνακα C, εφαρμόζουμε την Παραγοντική Ανάλυση των Αντιστοιχιών.



6.2. ΠΟΛΥΚΡΙΤΗΡΙΑ ΘΕΩΡΙΑ ΧΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑΣ

Στο 4ο Κεφάλαιο, προσπαθήσαμε να προσεγγίσουμε, καθώς και να αναδείξουμε το σύνολο των μεθόδων που αφορούν την κατασκευή σύνθετων κριτηρίων και την προσαρμογή μιας δεδομένης διάταξης της προτίμησης σε γραμμική διάταξη, όπως αυτή υπαγορεύεται από τις αριθμητικές αναπαραστάσεις του νέου κριτηρίου. Οι μέθοδοι αυτές αναφέρονταν σε προβλήματα απόφασης που αφορούσαν ένα άτομο και τα οποία είτε περιείχαν είτε όχι, ρίσκο. Οι παραπάνω μέθοδοι επεκτάθηκαν, στα πλαίσια της θεωρίας κοινωνικής επιλογής και σε προβλήματα ομαδικής απόφασης. Η συνολική παράθεση του μεγάλου αριθμού των μεθόδων της θεωρίας της χρησιμότητας, είναι πιθανόν να οδηγήσει σε σύγχυση και να δυσκολέψει την ανάδειξη των ιδιαίτερων χαρακτηριστικών της κάθε μεθόδου. Κατ' αυτόν τον τρόπο, κρίνεται απαραίτητη μια δεύτερη αναφορά στο θέμα της πολυκριτήριας θεωρίας της Χρησιμότητας. Η αναφορά αυτή επικεντρώνεται αποκλειστικά στα

προβλήματα με σταθερό περιβάλλον απόφασης, όπου δηλ. δεν παρατηρείται η ύπαρξη σεναρίων.

6.2.1. Μια άλλη ματιά στην θεωρία Χρησιμότητας (α)

Σε μια πολυκριτήρια διαδικασία απόφασης, ο κάθε ενδιαφερόμενος καλείται να εκφράσει τις προτιμήσεις του ως προς ένα σύνολο εναλλακτικών αποφάσεων με βάση τις θέσεις που διαμορφώνονται από μια συνεπή οικογένεια κριτηρίων. Στην περίπτωση που το σύνολο των θέσεων αυτών είναι ολικά προδιατεταγμένο, η προδιάταξη των κριτηρίων εισάγει μια αντίστοιχη προδιάταξη στις προτιμήσεις του ενδιαφερομένου. Κατά δεύτερο λόγο, το κάθε κριτήριο λειτουργεί σαν μεταβλητή και είναι ικανό να ορίσει διαμερισμό του συνόλου των εναλλακτικών σε κλάσεις ισοδυναμίας. Κάθε τέτοια κλάση ισοδυναμίας αντιστοιχεί στο υποσύνολο A' των εναλλακτικών για τις οποίες ο ενδιαφερόμενος εκφράζει αδιαφορία προτίμησης υπό την προοπτική του κριτηρίου g_j. Το ερώτημα που τίθεται σ' αυτήν την περίπτωση αφορά την δυνατότητα αριθμητικής αντιπροσώπευσης της κάθε κλάσης, την σύνδεση δηλ. της κάθε κλάσης με έναν αριθμό ο οποίος και μπορεί να δηλώσει ότι μια κλάση είναι προτιμότερη μιας άλλης σύμφωνα με μια αριθμητική σύγκριση. Το ερώτημα αυτό περιγράφεται από τον θεμελιώδη μετασχηματισμό της προδιάταξης (Κεφάλαιο 3^o)και δηλώνει την αντιστοίχιση μιας δεδομένης σχέσης προδιάταξης σε σχέση γραμμικής διάταξης.

Ο ζητούμενος μετασχηματισμός, έχει άμεση σχέση με την ύπαρξη μιας πραγματικής, αύξουσας συνάρτησης, ορισμένης στο σύνολο των προτιμήσεων (κριτηρίων) και η οποία μπορεί να εκφράσει πιστά, σε αριθμητική μορφή, την διάταξη αυτών των προτιμήσεων. Μια τέτοια συνάρτηση, ονομάζεται συνάρτηση χρησιμότητας u, ή απλά συνάρτηση τιμής. Η συνάρτηση αυτή, οφείλει να είναι συνεχής και σταθερή σε κάθε μονότονο μετασχηματισμό. Ο Debreu (1959), δίνει τον ακόλουθο ορισμό:

> *Μια συνάρτηση τιμής u, είναι μια αύξουσα συνάρτηση ορισμένη στο G η οποία και ικανοποιεί την δεδομένη προδιάταξη* $\underset{\sim}{<}$ *στο* $\Re$.

Η έννοια της διάταξης είναι άμεσα συνυφασμένη με την τοπολογία. Ο Herden (1993) δίνει έναν τοπολογικό ορισμό της συνάρτησης τιμής:

Έστω (X,R,t) ένας αριθμητικός μη – κενός τοπολογικός χώρος, συνδεδεμένος με μια αριθμητική συνάρτηση R.

Ορίζουμε ως (συνεχή) R-ομομορφισμό, $f:(X,R,t)\longrightarrow(\Re,\leq,t_{nat})$ (t_{nat}: η φυσική τοπολογία του $\Re$) την (συνεχή) συνάρτηση f για την οποία ισχύει: $f(x)\leq f(y):\ \forall(x,y)\in X$ με xRy.

Μία (συνεχής) συνάρτηση τιμής f στο (X,R,t) συνιστά μια (συνεχή) πραγματική συνάρτηση με την χαρακτηριστική ιδιότητα της διατήρησης της R διάταξης, δηλ. έναν (συνεχή) R-ομομορφισμό $f:(X,R,t)\longrightarrow(\Re,\leq,t_{nat})$, *τέτοιον ώστε* $f(x)<f(y)$: $\forall(x,y)\in X$ με xRy και yRx.

Στην βάση του παραπάνω ορισμού, παρατίθενται τα ακόλουθα δύο θεωρήματα που μας παρέχουν τις απαραίτητες συνθήκες για την ύπαρξη μιας συνάρτησης τιμής:

Θεώρημα (Eilenberg –Debreu) [Eilenberg (1941), Debreu (1954,1964)]: *Έστω (X,R,t) ένας γραμμικά προδιατεταγμένος, διαχωρισμένος και συνδεδεμένος τοπολογικός χώρος, στον οποίο η R είναι συνεχής. Τότε υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση τιμής, ορισμένη στον (X,R,t).*

Θεώρημα Debreu [Debreu (1954,1964)]: *Έστω (X,R,t) ένας γραμμικά προδιατεταγμένος τοπολογικός χώρος καθώς και ένας δεύτερος αριθμήσιμος τοπολογικός χώρος (D,R,t)* ($D\subset X$) *επί του οποίου η R είναι συνεχής. Τότε υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση τιμής, ορισμένης στο (X,R,t).*

Το πρώτο θεώρημα δηλώνει ότι κάθε συνεχής γραμμική προδιάταξη $\underset{\sim}{<}$ σε διαχωρισμένο και συνδεδεμένο τοπολογικό χώρο, έχει μια συνεχή αναπαράσταση χρησιμότητας, δηλώνει δηλ. την ύπαρξη μιας συνεχούς αύξουσας και πραγματικής συνάρτηση u στο X, όπου $u(x)<u(y)\ \forall(x,y)\in X$ με $x\prec y$. Αντίστοιχα, το δεύτερο θεώρημα δηλώνει ότι κάθε συνεχής γραμμική προδιάταξη σε δευτερεύοντα τοπολογικό χώρο, έχει επίσης συνεχή αναπαράσταση χρησιμότητας.

Συνοπτικά, σαν μια πρώτη επαναφορά στο θέμα της συνάρτησης χρησιμότητας, παραθέτουμε τα ακόλουθα δύο συμπεράσματα:

1. Μια συνάρτηση χρησιμότητας συνιστά μια πραγματική συνάρτηση u, η οποία ορίζεται σε ένα χώρο X και επιτρέπει την διατήρηση της διάταξης που υπαγορεύεται στον X, από μια σχέση προτίμησης R.

2. Η *συνέχεια* και η *μονοτονία* της συνάρτησης χρησιμότητας u, αποτελούν τις απαραίτητες συνθήκες για την διατήρηση της διάταξης μέσω της παρούσας αριθμητικής αναπαράστασης.

6.2.2. Μια άλλη ματιά στην θεωρία Χρησιμότητας (β)

Η παρουσία ολικής προδιάταξης σε ένα σύνολο X, διατάσει τα στοιχεία του συνόλου κατά μια αύξουσα ακολουθία (μικρότερο, μεγαλύτερο). Κατ' αυτόν τον τρόπο, το σύνολο X αποκτά την δομή αλυσίδας (chain) και εφοδιάζεται με το μικρότερο και το μεγαλύτερο του στοιχείο, ως προς την προτεινόμενη αυτή διάταξη. Η χρήση μιας αριθμητικής αναπαράστασης οφείλει να διατηρεί την υπάρχουσα διάταξη, οφείλει δηλ. να διατηρεί το μέγιστο και το ελάχιστο στοιχείο της προτεινόμενης αλυσίδας.

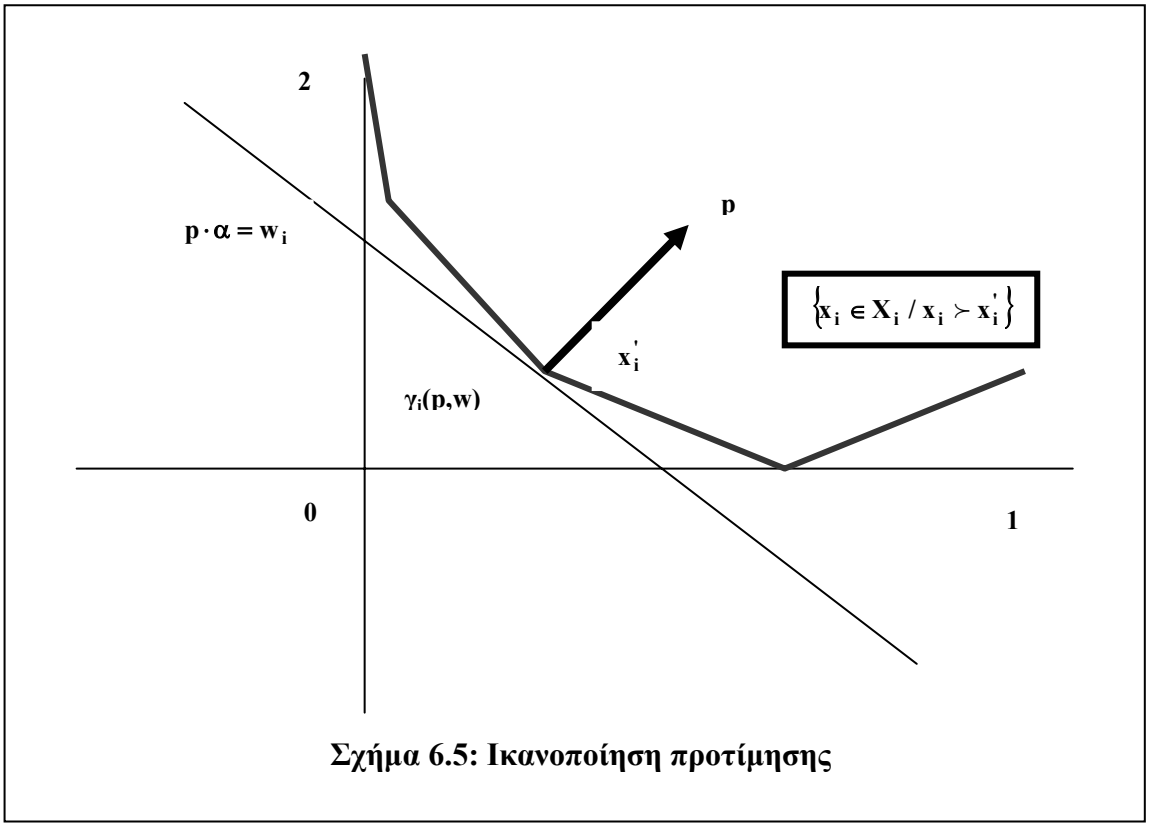
Οι έννοιες μέγιστο και ελάχιστο, συνήθως δηλώνονται ως συμπληρωματικές και αποτελούν απόρροια μιας συγκεκριμένης διαδικασίας, της διαδικασίας της βελτιστοποίησης. Η βελτιστοποίηση συνιστά απαραίτητο συστατικό του μηχανισμού της ανθρώπινης σκέψης, καθώς αυτή αναπτύσσεται γραμμικά και αναζητεί την «βέλτιστη λύση» σε κάθε προτεινόμενο πρόβλημα. Κατ' αυτόν τον τρόπο, η επιλογή του μέγιστου στοιχείου μιας δεδομένης αλυσίδας στοιχείων, συνδέεται άμεσα με μια διαδικασία βελτιστοποίησης της συνάρτησης χρησιμότητας. Το στοιχείο το οποίο εμφανίζει μια «βέλτιστη» τιμή ως προς την αριθμητική του αναπαράσταση (την αποκλειστική του συνάρτηση χρησιμότητας), ταυτόχρονα χρίζεται ως μέγιστο.

Συνήθως, δύσκολα μια τέτοια μεγιστοποίηση δίνεται άμεσα. Είναι προτιμότερο της περισσότερες φορές, να οδηγηθούμε σ' αυτή, μέσω του συμπληρωματικού της δρόμου, του δρόμου της ελαχιστοποίησης. Χαρακτηριστικό παράδειγμα μιας τέτοιας διαδικασίας, είναι το παράδειγμα υπολογισμού της αδράνειας των νεφών της Παραγοντικής Ανάλυσης ($1^{ο}$ Κεφάλαιο). Σ' αυτήν την υποπαράγραφο, θα περιγράψουμε το πρόβλημα της βελτιστοποίησης μιας συνάρτησης χρησιμότητας μέσα από μια διαδικασία ελαχιστοποίησης. Η διαδικασία

αυτή θα δοθεί με οικονομική ορολογία, μέσω παραδείγματος της θεωρίας των Καταναλωτών (Debreu ,1959).

Σε κάθε καταναλωτή I αντιστοιχεί το σύνολο κατανάλωσης X_i (σύνολο εναλλακτικών). Έχοντας ως δεδομένο ένα σύστημα αξίας p καθώς και μια κατανάλωση $x_i \in X_i$, ορίζουμε την δαπάνη (expenditure) του καταναλωτή ως το γινόμενο: $p \cdot x_i$. Η δαπάνη αυτή πρέπει να είναι μικρότερη ή το πολύ ίση με τον περιορισμό πλούτου w_i (wealth constraint) του καταναλωτή, πρέπει δηλ. να ικανοποιεί την ανισότητα: $p \cdot x_i \le w_i$. Η m-άδα των w_i ονομάζεται κατανομή πλούτου. Μ' αυτόν τον τρόπο μπορούμε να προσδιορίσουμε τον πλούτο του καταναλωτή, ως σημείο του $\Re^m$. Αντίστοιχα το ζεύγος (p, w_i) του $\Re^{l+m}$, ονομάζεται ζεύγος τιμής-πλούτου.

Στην περίπτωση που $p \neq 0$, η παραπάνω ορολογία έχει την γεωμετρική απεικόνιση του Σχήματος 6.5. Όπως παρατηρούμε στο σχήμα, η κατασκευή της υπερεπίπεδου πλούτου $\{\alpha \in \Re^1 / p \cdot \alpha = w_i\}$, χωρίζει το σύνολο κατανάλωσης X_i σε δύο μέρη. Ο περιορισμός του $p \cdot x_i \le w_i$, δηλώνει ότι το x_i πρέπει να τοποθετηθεί στον κλειστό χώρο που βρίσκεται κάτω του υπερεπιπέδου τιμής.



Σχήμα 6.5: Ικανοποίηση προτίμησης

Σε μια γενική περίπτωση του ζεύγους (p,w), μπορεί να παρατηρηθεί η περίπτωση όπου το σύνολο των $\{x_i \in X_i / p \cdot x_i \leq w_i\}$, των επιλογών του καταναλωτή να είναι κενό. Το κενό αυτό μπορεί να παραβλεφθεί, με τον ορισμό του κώνου S_i (με κορυφή 0), του συνόλου των ζευγών (p,w) στο $\Re^{l+m}$. Κάθε ζεύγος (p,w) του S_i συνδέεται με το μη κενό σύνολο $\gamma_i(p,w)= \{x_i \in X_i / p \cdot x_i \leq w_i\}$, των πιθανών καταναλώσεων που ικανοποιούν τον περιορισμό του πλούτου για το δεδομένο ζεύγος. Κατ' αυτόν τον τρόπο ορίζουμε μια αντιστοιχία γ_i από το S_i στο X_i.

Δεδομένης λοιπόν της ύπαρξης του ζεύγους (p,w) στο S_i, ο i καταναλωτής επιλέγει από το σύνολο $\gamma_i(p,w)$, την βέλτιστη κατανάλωση x_i ως προς τις προτιμήσεις του, επιλέγει δηλ. το μέγιστο στοιχείο για την προδιάταξη της προτίμησης του. Σ' αυτήν την περίπτωση επιτυγχάνει την ικανοποίηση της προτίμησης του (preference satisfaction.). Οι όροι «ικανοποίηση προτίμησης» και « βελτιστοποίηση της συνάρτησης χρησιμότητας» είναι συνώνυμοι. Μπορούμε λοιπόν, με μια αλλαγή ορολογίας, να ορίσουμε το παραπάνω πρόβλημα εύρεσης σε πρόβλημα μεγιστοποίησης της συνάρτησης χρησιμότητας u_i στο σύνολο $\gamma_i(p,w)$.

Το μέγιστο αυτό στοιχείο του $\gamma_i(p,w)$, που ικανοποιεί τις προτιμήσεις του καταναλωτή, το ονομάζουμε $x_i^{'}$ ($x_i^{'} \succ_i x_i$ και $x_i^{i}, x_i \in \gamma_i(p,w)$. Η παρουσία του υπερεπιπέδου $\{\alpha \in \Re^l / p \cdot \alpha = w_i\}$, διαιρεί το σύνολο X_i σε δύο τμήματα: το σύνολο $\gamma_i(p,w)$ και το σύνολο $\left\{x_i \in X_i / x_i \underset{\sim}{\succ} x_i^{'}\right\}$ των καταναλώσεων x_i που είναι τουλάχιστον τόσο «επιθυμητές» όσο η $x_i^{'}$. Κατ' αυτό τον τρόπο η $x_i^{'}$ κατανάλωση συνιστά το μέγιστο και το ελάχιστο στοιχείο των δύο παραπάνω συνόλων, αντίστοιχα. Με βάση αυτή την παρατήρηση, μπορούμε να πούμε ότι η $x_i^{'}$ αποτελεί το μέγιστο στοιχείο του $\gamma_i(p,w)$ εάν και μόνο εάν ελαχιστοποιεί την κατανάλωση $p \cdot x_i$ στο σύνολο $\left\{x_i \in X_i / x_i \underset{\sim i}{\succ} x_i^{'}\right\}$. Το τελικό αυτό συμπέρασμα, μετασχηματίζει το πρόβλημα βελτιστοποίησης της συνάρτησης χρησιμότητας σε πρόβλημα ελαχιστοποίησης της μετρικής της κατανάλωσης που προσδιορίζεται από το γινόμενο $p \cdot x_i$.

6.3. Η ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΟΥ X^2 ΣΤΗΝ ΠΑΡΑΓΟΝΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΩΝ

Η Παραγοντική Ανάλυση των Αντιστοιχιών, αναφέρεται στην προσέγγιση μιας πολυδιάστατης κατανομής συχνοτήτων από ένα ορθοκανονικό σύστημα συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας. Οι συναρτήσεις αυτές είναι συνεχείς και προσδιορίζουν την τοπολογία του χώρου στον οποίο τοποθετούνται.

Έστω I ένας περασμένος χώρος και $(i, i', i'', \ldots)$ ένα στοιχείο του I. Ονομάζουμε R^I: τον διανυσματικό χώρο των συναρτήσεων στο I καθώς και R_I: τον διανυσματικό χώρο των μετρικών στο I. Με τον όρο συνάρτηση u^I (αντίστοιχα μετρική m_I) στο I, ορίζουμε ένα σύστημα πραγματικών τιμών, με δείκτες στο I, έτσι ώστε: $u^I = \{u^i / i \in I\}$ (αντίστοιχα: $m_I = \{m_i / i \in I\}$). Αντίστοιχα, θεωρούμε επίσης το σύνολο J, καθώς και τους διανυσματικούς χώρους των συναρτήσεων στο J(R^J) και των μετρικών (R_J).

Στην περίπτωση που οι μετρικές m_I (m_J), δηλώνονται ως πιθανότητες p_I (p_J), τότε ο διανυσματικός χώρος των μετρικών μετονομάζεται σε simplex χώρο των πιθανοτήτων στο I (J). Αντίστοιχα, μια τυχαία μεταβλητή, αντιστοιχεί σε μια συναρτησιακή απεικόνιση του (I, p_I) ((J, p_j))στο R. Καθώς, όμως μια τυχαία μεταβλητή προσδιορίζεται άμεσα από μια κατανομή συχνοτήτων (πιθανότητας), μπορούμε να πούμε ότι οι χώροι των συναρτήσεων R^Iκαι R^J, δηλώνουν διανυσματικούς χώρους τυχαίων μεταβλητών (Benzecri, 1976).

Ονομάζουμε νέφος αντικειμένων N(I) το σύνολο των σημείων με δείκτη i:

$N(I)=\{(f_J^i, f_{i.}) / i \in I\}$. Το προφίλ $f_J^i = \left\{\frac{f_{ij}}{f_j}, j \in J\right\}$ με στάθμιση $f_{i.}$, αποτελεί την σταθμισμένη απεικόνιση της μεταβλητής I, στον διανυσματικό χώρο των μεταβλητών J. Η απεικόνιση αυτή γίνεται με την βοήθεια των μετρικών των I και J, με συνέπεια το προφίλ f_J^i να αποτελεί σημείο του διανυσματικού χώρου R_J. Η περιγραφή του νέφους N(I) συμπληρώνεται από το βαρύκεντρο του G_J, μέσο όρο των προφίλ f_J^i στο R_J.

Η Παραγοντική Ανάλυση των Αντιστοιχιών μπορεί να ερμηνευθεί, ως Ανάλυση σε Κύριες Συνιστώσες στα νέφη των εξαρτημένων πιθανοτήτων. Κατ' αυτό τον τρόπο η μέθοδος των Αντιστοιχιών επιχειρεί την προσέγγιση μιας υπό συνθήκη

κατανομής από ένα σύστημα κεντροποιημένων ορθοκανονικών κατανομών. Θεωρώντας ότι το προφίλ-γραμμή προσδιορίζεται ως διάνυσμα του R_J, μπορούμε να πούμε ότι η μεταβλητή i προσδιορίζεται από y_j μεταβλητές.

Κάνοντας χρήση της μετρικής του X^2, εκτιμάμε την προσέγγιση της εμπειρικής κατανομής των y_j από την θεωρητική G_J, σύμφωνα με την ποσότητα:

$$\left\| y_j - G_j \right\|^2$$

Η παραπάνω ποσότητα ακολουθεί την X^2 κατανομή και επιτρέπει τον μετασχηματισμό της πολυδιάστατης κατανομής σε πολυκανονική κατανομή. Αν δηλ. θεωρήσουμε την αδράνεια του νέφους N(I) ως προς G_J, τότε η κοινή κατανομή των y_j, προσδιορίζεται από την σχέση (Benzecri,1976, 1980):

$$p(y) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \det(\sigma)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\sum\left\{\left(\sigma^{-1}\right)^{jj'} y_j y_{j'} / j, j' = 1,...,n\right\}/2\right)$$

Η διαγωνιοποίηση του πίνακα της αδράνειας οδηγεί στην κατασκευή των παραγοντικών αξόνων, οι οποίοι με την σειρά της προσδιορίζουν ένα σύστημα ορθοκανονικών μεταβλητών $z_1,\ldots,z_r$, οι οποίες και προσεγγίζουν την κατανομή της y. Οι μεταβλητές αυτές τοποθετούνται σε υπόχωρο L του R^J και έχουν συνεχή κατανομή, η οποία δίνεται από την παρακάτω πυκνότητα πιθανότητας:

$$p(z_h) = (2\pi)^{-\frac{r}{2}} \left(\prod\{\sigma_{hh} / h = 1, r\}\right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\sum\left\{\left(\sigma_{hh}^{-1}\right)^{jj'} z_h / h = 1,...,r\right\}/2\right)$$

Η κατασκευή των παραγοντικών αξόνων επιτρέπει τον μετασχηματισμό του χώρου simplex του N(I) σε ένα σύστημα συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας φ^α, του R^J. Οι συναρτήσεις αυτές, σύμφωνα με την ορολογία της μεθόδου της Ανάλυσης σε Κύριες Συνιστώσες, ονομάζονται (κανονικοί) παράγοντες. Η προβολή του προφίλ f_J^i σε κάθε παραγοντικό άξονα, μετασχηματίζει την υπό συνθήκη κατανομή σε γραμμικό συνδυασμό των ανεξάρτητων κατανομών φ^α, σύμφωνα με την σχέση:

$$F_\alpha(i) = \sum_{j=1}^{r} \phi^\alpha \frac{f_{ij}}{f_{i.}}.$$

Οι παράγοντες $F_\alpha(i)$, προσδιορίζονται ως Κύριες Συνιστώσες του f_J^i και εκτιμούνται ως συναρτησιακές σχέσεις που δηλώνουν την απόσταση της κατανομής f_J^i από την μέση της τιμή (βαρύκεντρο), ως προς ένα νέο σύστημα συντεταγμένων.

6.4. ΠΑΡΑΓΟΝΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΚΟΙΝΩΝΙΚΗΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ

Η θεωρία της κοινωνικής επιλογής συνιστά ένα σημαντικό εργαλείο αρωγής σε προβλήματα απόφασης που αφορούν σύνολα ή ομάδες ατόμων. Όπως ορίστηκε, στο $4^{ο}$ Κεφάλαιο, η επίλυση του προβλήματος ομαδικής αρωγής απόφασης με την βοήθεια της θεωρίας της κοινωνικής επιλογής, βασίζεται στην κατασκευή και βελτιστοποίηση των συναρτήσεων κοινωνικής επιλογής:

$F : \Im X \times \Im D \longrightarrow P(X)$, όπου:

- $\Im X$: το σύνολο των υποσυνόλων του X τα οποία και προσδιορίζονται από πραγματοποιήσιμες εναλλακτικές.
- $\Im D$: το σύνολο των προφίλ των προτιμήσεων των n ατόμων, με το κάθε στοιχείο του $D \in \Im D$ να αποτελεί μια n-άδα μερικών αυστηρών διατάξεων – όπου η κάθε διάταξη αναφέρεται σε ένα και μόνο άτομο στην ομάδα
- P(X) είναι το δυναμοσύνολο του X ($P(X \approx \Im X)$).

Η βελτιστοποίηση των συναρτήσεων κοινωνικής επιλογής, οδηγεί στην εύρεση του τελικού συνόλου επιλογής: $F(Y, D) \in P(X)$ (με $\varnothing \subset F(Y, D) \subseteq Y$), όπου Y: το υποσύνολο των καλύτερων εναλλακτικών υπό την προοπτική του συνόλου $\Im D$ των αρχικών προτιμήσεων των n-ατόμων.

Οι συναρτήσεις κοινωνικής επιλογής θεωρούνται συναρτήσεις χρησιμότητας και επιτρέπουν την αριθμητική αναπαράσταση των προτιμήσεων του συνόλου των n ατόμων ως προς το σύνολο X των εναλλακτικών. Γι' αυτό τον λόγο, πέραν της αναγκαιότητας βελτιστοποίησης, οι συναρτήσεις αυτές οφείλουν να ικανοποιούν το σύνολο των συνθηκών των συναρτήσεων χρησιμότητας: την συνέχεια και την μονοτονία. Στην υποπαράγραφο αυτή, θα επιχειρήσουμε μια αρχική προσέγγιση της Παραγοντικής Ανάλυσης με την θεωρία της κοινωνικής επιλογής στο πλαίσιο των τριών συνθηκών: βελτιστοποίησης, συνέχειας και μονοτονίας.

1. Βελτιστοποίηση

Όπως προαναφέρθηκε, η διαδικασία βελτιστοποίησης μιας συνάρτησης χρησιμότητας συνδέεται άμεσα με μια διαδικασία ελαχιστοποίησης. Ο Herden (2001), επεκτείνει το συμπέρασμα αυτό και για την περίπτωση των συναρτήσεων κοινωνικής επιλογής. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε τον φυσικό αριθμό $n \geq 2$. Το πρόβλημα της ομαδικής αρωγής αποφάσεων αφορά κύρια, την εύρεση κάποιων συμβιβασμών μεταξύ των n ατόμων μιας ομάδας, τα οποία πιθανότατα έχουν διαφορετικά ενδιαφέροντα. Η πολυκριτήρια αντιμετώπιση των προτιμήσεων με την βοήθεια κάποιων μετρικών της επιτρέπει να θεωρήσουμε αρχικά κάποια οικογένεια $\{(\Omega_i, A_i)\}_{1\leq i\leq n}$ μη κενών μετρικών χώρων καθώς και μια οικογένεια $\{\Im X_i\}_{1\leq i\leq n}$ των συνόλων $\Im X_i$ των πραγματικών μετρικών συναρτήσεων στο (Ω_i, A_i).

Υποθέτουμε ότι κάποιες επιλεγμένες μετρικές συναρτήσεις $X_2 \in \Im X_2, ..., X_n \in X_n$ αναπαριστούν τα ενδιαφέροντα συγκεκριμένων ατόμων της ομάδας. Η επίλυση του πολυκριτήριου προβλήματος ομαδικής αρωγής αποφάσεων, συνίσταται στον προσδιορισμό όλων των μετρικών συναρτήσεων $X_1 \in \Im X_1$, έτσι ώστε:

$$G(X_1, X_2, ..., X_n) = \min_{X\in\Im X1} G(X, X_2, ..., X_n) \qquad (1),$$

για συγκεκριμένη συνάρτηση $G : X_1 x....x X_n \longrightarrow \Re$.

Η σύγκλιση των δύο μεθόδων: της Παραγοντικής Ανάλυσης των Αντιστοιχιών και της κοινωνικής επιλογής, ως προς την συνθήκη της βελτιστοποίησης μπορεί να αναζητηθεί στην ταύτιση της ζητούμενης συνάρτησης G με την συνάρτηση της αδράνειας. Ο Herden (2002), προσεγγίζει το πρόβλημα της βελτιστοποίησης της αδράνειας, για την γενική περίπτωση της μεθόδου της Ανάλυσης σε Κύριες Συνιστώσες, διατυπωμένο με ανάλογη ορολογία, όπως παραπάνω:

Έστω, οι p φυσικοί αριθμοί καθώς και οι πραγματικές τυχαίες μεταβλητές $X_1,\ldots,X_p$, $V_1,\ldots,V_k$ στον μετρικό χώρο πιθανότητας (Ω,A,P). Το σύστημα των βασικών εξισώσεων της μεθόδου της Ανάλυσης σε Κύριες Συνιστώσες είναι το εξής:

$$X_i = \sum_{j=1}^{p} \alpha_{ij} V_j, \qquad \forall i \in \{1,...,p\}.$$

Θεωρούμε την αντικειμενική συνάρτηση $G : \Re^p \times \Im X^p \longrightarrow \Re^{\geq 0}$, η οποία προσδιορίζεται ως εξής:

$$G\left(\left(z_1,...,z_p\right), Y_1,..., Y_p\right) := \sigma^2\left(\sum_{j=1}^{p} z_j Y_j\right),$$

για κάθε διάνυσμα $\left(\left(z_1,...,z_p\right), Y_1,..., Y_p\right) \in \Re^p \times \Im X^p$.

Σ' αυτήν την περίπτωση, ο χώρος $\Re^p$ μπορεί να θεωρηθεί ως το σύνολο όλων των πραγματικών συναρτήσεων στο $\{1,\ldots,p\}$.

Οι κύριες συνιστώσες των $X_1,\ldots,X_n$ ορίζονται σε συγκεκριμένα υποσύνολα S_t του $\Re^p \times \Im X^p$ ($t \in \{1,...,p\}$), στα οποία και ελαχιστοποιείται η ποσότητα $G(S_t)$. Στην τετριμμένη περίπτωση όπου ο βέλτιστος υπόχωρος είναι ευθεία (t=1), θεωρούμε το σύνολο S_1 το οποίο και αποτελείται από όλα τα διανύσματα $\left(\left(z_1,...,z_p\right)X_1,...,X_p\right) \in \Re^p \times \Im X^p$ με $\sum_{j=1}^{p} z_j^2 = 1$. Στην συνέχεια υπολογίζουμε το διάνυσμα $\left(z_{11},...,z_{1p}\right) \in \Re^p$, το οποίο και ικανοποιεί την εξίσωση:

$$G\left(\left(z_{11},...,z_{1p}\right), X_1,..., X_p\right) = \min_{\left(\left(z_{11},...,z_{1p}\right), X_1,...,Xn\right) \in S_1} G\left(\left(z_1,...,z_p\right), X_1,..., X_p\right) \qquad (2)$$

και ορίζει την πρώτη Κύρια Συνιστώσα: $K_1 = \sum_{j=1}^{p} z_{1j} X_j$.

Στην γενική περίπτωση του πολυδιάστατου βέλτιστου υπόχωρου, θεωρούμε αρχικά ότι οι $K_1,\ldots,K_{t-1}$, έχουν υπολογιστεί. Στην συνέχεια επιλέγουμε το σύνολο S_t των διανυσμάτων $\left(\left(z_1,...,z_p\right)X_1,...,X_p\right) \in \Re^p \times \Im X^p$ με $\sum_{j=1}^{p} z_j^2 = 1$ και $\operatorname{cov}(K_i, \sum_j z_j X_j) = 0$, για κάθε $i \in \{1,...,t-1\}$. Στο επόμενο βήμα, υπολογίζουμε το διάνυσμα $\left(z_{t1},...,z_{tp}\right) \in \Re^p$, το οποίο και ικανοποιεί την εξίσωση:

$$G((z_{t1},...,z_{tp}),X_1,...,X_p) = \min_{((z_{11},...,z_{1p}),X_1,...,Xn)\in S_t} G((z_1,...,z_p),X_1,...,X_p) \qquad (3)$$

και ορίζει την t Κύρια Συνιστώσα: $K_t = \sum_{j=1}^{p} z_{tj}X_j$. Οι K_1, …,K_p συνιστούν την οικογένεια των Κυρίων συνιστωσών των X_1,…, X_p.

2,3. Μονοτονία, Συνέχεια

Οι Κύριες Συνιστώσες K_t, συνιστούν της συντεταγμένες των πραγματικών μεταβλητών X_i ως προς τις νέες κανονικοποιημένες μεταβλητές (παράγοντες) z_t. Οι νέες αυτές μεταβλητές αποτελούν γραμμικό μετασχηματισμό των X_i, και επιτρέπουν την αναπροσαρμογή του αρχικού πίνακα δεδομένων σε απλούστερα συστατικά (components). Η κατασκευή των παραγόντων με βάση την εξίσωση της αδράνειας, επιτρέπει την διατήρηση των αποστάσεων που παρατηρούνται στο νέφος των αντικειμένων. Οι παράγοντες συνιστούν σύνθετες. πραγματικές και συνεχείς μεταβλητές και ως τέτοιες εμφανίζουν τις ιδιότητες της μονοτονίας και της συνέχειας.

6.5. ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΗ ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ ΜΕΤΡΗΣΗ

Η αθροιστική δομή των σύνθετων κριτηρίων, όπως παρουσιάστηκε στο 4^{ο} Κεφάλαιο, απαιτεί την επικύρωση μιας μεγάλης οικογένειας συνθηκών. Μια τέτοια επικύρωση, είναι δύσκολο να επιβεβαιωθεί στην πράξη, λόγω της μεγάλης αυστηρότητας των περιορισμών. Οι πρακτικές αυτές δυσκολίες μπορούν να υπερκερασθούν μέσω εναλλακτικών δομών. Η πιο συνηθισμένη από αυτές αντιλαμβάνεται το κάθε κριτήριο ως σύνθεση δύο ή περισσοτέρων συνιστωσών (components). Κατ' αυτόν τον τρόπο η κλίμακα τιμής του κάθε κριτηρίου ερμηνεύεται ως συνάρτηση των κλιμάκων τιμής των συνιστωσών του. Τέτοιου είδους δομές που οδηγούν στην ταυτόχρονη μέτρηση των κριτηρίων με τα συστατικά της ανήκουν στο πεδίο των θεωριών της συνδυαστικής μέτρησης (conjoint measurement). Η απλούστερη περίπτωση μιας τέτοιας συνδυαστικής μέτρησης είναι η αθροιστική (additive conjoint measurement).

Η θεωρία χρησιμότητας, επιτρέπει την αντιστοίχιση αριθμητικών τιμών σε προτιμήσεις, κατά τέτοιο τρόπο ώστε η προτεινόμενη αριθμητική διάταξη να

αντιστοιχεί στην διάταξη των προτιμήσεων. Η αντιστοίχιση αυτή επιτυγχάνεται μέσω μιας συναρτησιακής σχέσης φ, η οποία και λειτουργεί ως ομομορφισμός μεταξύ μιας εμπειρικής σχεσιακής δομής και μιας αριθμητικής δομής. Η σχεσιακή δομή μπορεί να περιέχει μία ή περισσότερες σχέσεις. Στην δεύτερη περίπτωση αν θεωρήσουμε την εμπειρική δομή $\langle A, \succ, \circ \rangle$ και την αντίστοιχη αριθμητική δομή $\langle \Re, >, + \rangle$, η συνάρτηση φ συνιστά έναν ομομορφισμό, ο οποίος και αντιστοιχεί το A στο $\Re$, το $\succ$ στο $>$ καθώς και την $\circ$ (σύνθεση) στην + (άθροιση). Η τελευταία αντιστοιχία, δηλώνει την αθροιστική φύση της συναρτησιακής σχέσης φ.

Η αθροιστική συνδυαστική μέτρηση μπορεί να αποτελεί μια εναλλακτική εκδοχή της αθροιστικής δομής που εμφανίζεται σε προβλήματα απόφασης, παρόλα αυτά χρειάζεται και αυτή έναν σημαντικό αριθμό συνθηκών για να θεμελιωθεί (Krantz, 1971). Η πιο σημαντική από αυτές είναι οι συνθήκη της ανεξαρτησίας των συστατικών. Ο όρος της ανεξαρτησίας των συνιστωσών αποτελεί δάνειο από την στατιστική και προσδίδει στις συνιστώσες μιας μέτρησης ιδιότητες ανάλογες με αυτές των ανεξάρτητων μεταβλητών. Ειδικότερα, αν θεωρήσουμε την δομή $\left\langle A_1, A_2, \underset{\sim}{\succ} \right\rangle$ καθώς και τα στοιχεία $\alpha \in A_1$ και $p \in A_2$, η επιλογή της τιμής του κάθε συστατικού είναι ανεξάρτητη από την τιμή του άλλου. Η συνθήκη της ανεξαρτησίας επιτρέπει την κατασκευή αριθμητικών συναρτήσεων φ_i, ορισμένων σε κάθε σύνολο A_i /i=1,2 καθώς και μιας συνάρτησης F, μονότονης για κάθε μεταβλητή, έτσι ώστε για κάθε $\alpha, b \in A_1$ και $p, q \in A_2$:

$$(\alpha, p) \underset{\sim}{\succ} (b, q) \quad \text{εάν} \qquad F[\varphi_1(\alpha), \varphi_1(b)] \geq F[\varphi_1(p), \varphi_1(q)]$$

Η χαρακτηριστική επίδραση της ανάλυσης της διακύμανσης, στο θέμα των συνιστωσών που προσδιορίζουν την μέτρηση, προσδίδει στην ιδιότητα της ανεξαρτησίας την αθροιστική της φύση. Σ' αυτήν την περίπτωση η συνθετική συνάρτηση F είναι αθροιστική και η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί:

$$(\alpha, p) \underset{\sim}{\succ} (b, q) \quad \text{εάν} \qquad \varphi_1(\alpha) + \varphi_1(b) \geq \varphi_1(p) + \varphi_1(q).$$

Ιστορικά, οι θεωρίες της αθροιστικής συνδυαστικής μέτρησης είναι παράγωγα της Στατιστικής, και απορρέουνε από συγκεκριμένες υποθέσεις για την εξάρτησης μιας

μέτρησης από πλήθος ανεξάρτητων μεταβλητών. Οι μέθοδοι δε της Παραγοντικής Ανάλυσης διακρίνονται για τον παραγοντικό σχεδιασμό του συνόλου δεδομένων και δηλώνουν μέσω των εξισώσεων τους, την αθροιστική φύση μιας τέτοιας εξάρτησης, χωρίς a priori υποθέσεις.

Στην γενική περίπτωση της, η αθροιστική εξάρτηση της μετρικής πρέπει να εξακριβωθεί. Για αυτή την πιστοποίηση πρέπει να παρατεθούν και άλλες συνθήκες, πέραν της συνθήκης της ανεξαρτησίας των συνιστωσών. Οι συνθήκες αυτές θα δοθούν συνολικά στο πλαίσιο του ορισμού της αθροιστικής συνδυαστικής μέτρησης των n-συνιστωσών. Οι ορισμοί των συνθηκών παραλείπονται.

Ορισμός 6.1.: Θεωρούμε μια οικογένεια μη κενών συνόλων A_i, $i \in N, n \geq 3$ καθώς και την δυαδική σχέση $\underset{\sim}{\succ}$, ορισμένη στο γινόμενο $\mathop{X}_{i=1}^{n} A_i$. Η δομή $\left\langle A_1, A_2, ..., A_n \underset{\sim}{\succ} \right\rangle$ ονομάζεται n-διάστατη αθροιστική συνδυαστική δομή, εάν η $\underset{\sim}{\succ}$ ικανοποιεί τα παρακάτω αξιώματα:

1. Ασθενής διάταξη
2. Ανεξαρτησία
3. Περιοριστική επίλυση (restricted solvability)
4. Κάθε αυστηρά φραγμένη κανονική ακολουθία είναι πεπερασμένη
5. Τουλάχιστον τρεις συνιστώσες είναι ουσιώδεις (essential) .

Θεώρημα 6.1.: Εάν η δομή $\left\langle A_1, A_2, ..., A_n \underset{\sim}{\succ} \right\rangle$ $n \geq 3$, είναι n-διάστατη αθροιστική συνδυαστική δομή, τότε υπάρχουν πραγματικές συναρτήσεις φ_i στο A_i, τέτοιες ώστε για όλα τα $\alpha_i, b_i \in A_i$, $i \in N$,

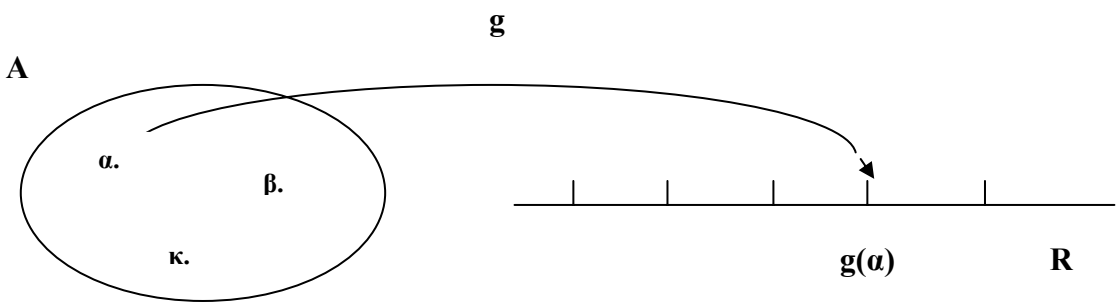
$$\alpha_1 \ldots \alpha_n \underset{\sim}{\succ} b_1 \ldots b_n \qquad \text{εάν} \qquad \sum_{i=1}^{n} \varphi(\alpha_i) \geq \sum_{i=1}^{n} \varphi(b_i)$$

Το τελευταίο αυτό θεώρημα δηλώνει ότι η παρουσία μιας σχέσης διάταξης της προτίμησης στο καρτεσιανό γινόμενο $\mathrm{X}_{i=1}^{n} A_i$, μπορεί να δοθεί με ανισότητες αθροιστικής μορφής.

6.6. ΠΟΛΥΚΡΙΤΗΡΙΑ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

Η αντιστοίχιση των ιδιοτήτων της μονοτονίας και της συνέχειας καθώς και η διαδικασία της βελτιστοποίησης στην οποία αναφερθήκαμε προηγουμένως, συνηγορούν για την ύπαρξη ενός ισχυρού δεσμού μεταξύ των στατιστικών μεθόδων της Παραγοντικής Ανάλυσης και της πολυκριτήριας θεωρίας της Χρησιμότητας. Η χρήση του όρου «δεσμός» είναι χαρακτηριστική και αποτρέπει την οποιαδήποτε προσπάθειας ταύτισης στο επίπεδο των μεθοδολογιών. Παρόλα αυτά, οι μέθοδοι της Παραγοντικής Ανάλυσης επιτυγχάνουν, μέσω της συνεπούς αντικειμενικής συνάρτησης της αδράνειας, να χαρακτηρίσουν πλήρεις και συνεχείς προδιατάξεις στο σύνολο $\left(\Re^{\geq 0}\right)^n$. Οι προδιατάξεις αυτές αποτελούν την αριθμητική εκτίμηση των αντίστοιχων προδιατάξεων προτίμησης μιας συγκεκριμένης ομάδας ατόμων, ως προς ένα σύνολο εναλλακτικών. Απ' αυτήν την άποψη, η καθιέρωση τέτοιων προδιατάξεων είναι σε πλήρη συμφωνία με το μαθηματικό υπόβαθρο της θεωρίας της Χρησιμότητας (Herden, 2002).

Όπως έχει αναφερθεί (Κεφάλαιο $5^{ο}$), ως κριτήριο χαρακτηρίζουμε « μια συνάρτηση g, ορισμένη στο σύνολο A των εναλλακτικών και η οποία παίρνει τιμές σε ένα διατεταγμένο σύνολο. Η συνάρτηση αυτή αναπαριστά αριθμητικά τις προτιμήσεις του D.M., σύμφωνα με συγκεκριμένη οπτική.». Αν συμβολίσουμε με $\aleph, Z, Q, \Re$ τα σύνολα των φυσικών, των ακεραίων, των ρητών και των πραγματικών αριθμών, αντίστοιχα, και με «$\leq$» τη φυσική τους διάταξη, τότε τα σύνολα $<\aleph, \leq>$,$<Z, \leq>$,$<Q, \leq>$ και $<\Re, \leq>$ονομάζονται διατεταγμένα σύνολα. (Σχήμα 6.6). Στην περίπτωση που η ζητούμενη διάταξη οφείλει να είναι αυστηρά γραμμική (μέγιστο, ελάχιστο στοιχείο), το διατεταγμένο σύνολο μετονομάζεται σε αλυσίδα. Παραδείγματα αλυσίδας είναι τα σύνολα $<\aleph, \leq>$ καθώς και υποσύνολα των $Z, Q, \Re$, όπως $<\Re^{\geq 0}, \leq>$, $<\Re^{\leq 0}, \leq>$, κ.ο.κ. (Κάλφα, 1995).



Σχήμα 6.6: Γραφική αναπαράσταση κριτηρίου

Η σύγκριση των δύο εναλλακτικών α και β, γίνεται στο επίπεδο των αριθμητικών τους αναπαραστάσεων g(α) και g(β). Η εκδήλωση κάποιας διαφοροποίησης στις εκτιμήσεις των εναλλακτικών, λαμβάνεται ως παρουσία προτίμησης. Για παράδειγμα η ανισότητα g(α)>g(β), μας επιτρέπει να θεωρήσουμε μια σαφέστατη εκδήλωση προτίμησης στην εναλλακτική α, έναντι της β, υπό την οπτική του κριτηρίου g. Κατ' αυτό τον τρόπο, οι παραστάσεις g(α) και g(β) συνιστούν μετρήσεις των δύο εναλλακτικών α και β.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα στατιστικής μέτρησης αποτελεί ή έννοια της τυχαίας μεταβλητής. Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα, τον χώρο πιθανότητας (Ω,F,P) ενός πειράματος, όπου Ω: ο δειγματοχώρος, F: η οικογένεια των γεγονότων και P: ο νόμος που δίνει την πιθανότητα του κάθε πειράματος. Για να μελετήσουμε το αποτέλεσμα του πειράματος, μας διευκολύνει να αντιστοιχίσουμε σε κάθε απλό γεγονός έναν ή περισσότερους αριθμούς (μονοδιάστατη – πολυδιάστατη τυχαία μεταβλητή). Ο πραγματικός αυτός αριθμός μπορεί να είναι σημείο της πραγματικής ευθείας ή γενικά ένα σημείο του Ευκλείδειου χώρου των n διαστάσεων. Στην περίπτωση που σε κάθε απλό γεγονός $\omega \in \Omega$ αντιστοιχούμε έναν πραγματικό αριθμό Χ(ω), τότε ο νέος δειγματοχώρος είναι η πραγματική ευθεία $R^1=(-\infty,\infty)$ και απλά γεγονότα οι πραγματικοί αριθμοί. Αν θεωρήσουμε ως γεγονότα τα διαστήματα

$(-\infty, x]$ και ονομάσουμε πεδίο Borel $B^1 \subset R^1$, την μικρότερη οικογένεια των διαστημάτων αυτών, τότε θεωρώντας ένα σύνολο $A \in R^1$, ονομάζουμε τυχαία μεταβλητή X, κάθε πραγματική μεταβλητή X(ω) με την ιδιότητα: για κάθε τιμή της x, το διάστημα $X^{-1}(-\infty, x]$ να αποτελεί γεγονός του Ω (Κουνιάς, 1991).

Οι τυχαίες μεταβλητές συνιστούν μετρήσεις των ομάδων των γεγονότων ενός πειράματος, οι οποίες και εκφράζονται σε μια πραγματική κλίμακα. Από αυτήν την άποψη, οι τυχαίες μεταβλητές διεκδικούν την έννοια του «στατιστικού κριτηρίου» και εκφράζουν μέσω των τιμών τους την διάταξη των προτιμήσεων ενός συνόλου ατόμων με βάση κάποιο χαρακτηριστικό. Σε αντιδιαστολή με τις μεθόδους της Κοινωνικής Επιλογής, ή πιο απλά με τις μεθόδους της Θεωρίας της Χρησιμότητας, η κλίμακα των πραγματικών τιμών δεν κατασκευάζεται με βάση κάποια μεθοδολογία, αλλά είναι ορισμένη με βάση την διαφοροποίηση των κλάσεων της μεταβλητής. Αυτή η διαπίστωση δηλώνει την χαρακτηριστική διαφορά των όρων «στατιστικό» κριτήριο και κριτήριο. Στην περίπτωση που οι κλάσεις της μεταβλητής είναι διατεταγμένες, η διάταξη αυτή επεκτείνεται και στον χώρο των γεγονότων.

Η θεωρία της αθροιστικής συνδυαστικής μέτρησης, επιτρέπει στο πλαίσιο μιας αθροιστικής δομής προτίμησης, τον μετασχηματισμό των ήδη υπαρχόντων μετρήσεων σε γραμμικά συστήματα ανεξάρτητων συνιστωσών. Η άμεση συνάφεια της θεωρίας αυτής, με την διαδικασία κατασκευής των συναρτήσεων της Παραγοντικής Ανάλυσης, επιτρέπει μια δεύτερη πολυκριτήρια προσέγγιση των μετρήσεων της Παραγοντικής Ανάλυσης. Κατ' αυτό τον τρόπο οι συναρτήσεις (Κύριες Συνιστώσες) της Ανάλυσης σε Κύριες Συνιστώσες, συνιστούν τον μετασχηματισμό των συντεταγμένων μιας οικογένειας τυχαίων μεταβλητών από ένα ορθοκανονικό σύστημα ανεξάρτητων μεταβλητών (παραγόντων). Στην περίπτωση της Παραγοντικής Ανάλυσης των Αντιστοιχιών, οι μετρήσεις δίνονται με την μορφή κατανομών πιθανότητας, οι οποίες με την σειρά τους αυτοπροσδιορίζονται από γραμμικά συστήματα ανεξάρτητων κατανομών. Οι πραγματικές αυτές μετρήσεις μπορεί να υποδηλώνουν την ύπαρξη τυχαίων μεταβλητών, στην ουσία όμως συγκρίνουν κατανομές πιθανότητας. Η διατήρηση της σχετικής θέσης αυτών των μετρήσεων ως προς ένα νέο σύστημα συντεταγμένων, εκφράζεται από την βελτιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης της αδράνειας.

Ειδικότερα, στην περίπτωση της Παραγοντικής Ανάλυσης των Αντιστοιχιών, έχουμε δύο σύνολα ποιοτικών –κατά κύριο λόγο- μεταβλητών. Τα σύνολα αυτά τα

ονομάζουμε I και J. Το προφίλ f_J^i εκφράζει την υπό συνθήκη κατανομή της κατανομής του $i \in I$, στο σύνολο των J χαρακτηριστικών. Μπορούμε να πούμε ότι η υπό συνθήκη αυτή κατανομή, δηλώνει ένα αντίστοιχο υπό συνθήκη κριτήριο. Τα ίδια ισχύουν και για το προφίλ f_I^j.

Ο παραγοντικός μετασχηματισμός των προφίλ, εκφράζεται συναρτησιακά από τις παρακάτω σχέσεις:

$$F_\alpha(i) = \sum_{j=1}^{r} \phi^\alpha \frac{f_{ij}}{f_{i.}}, \; i \in I$$

$$G_\alpha(j) = \sum_{j=1}^{r} \psi^\alpha \frac{f_{ij}}{f_{.j}}$$

Οι παράγοντες $F_\alpha(i)$ ($G_\alpha(j)$), δηλώνονται ως μετασχηματισμός των προφίλ f_J^i (f_I^j) σε ορθοκανονικά συστήματα των συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας φ^α (ψ^α). Οι συναρτήσεις αυτές εκφράζουν αντίστοιχα την ύπαρξη ορθοκανονικού μετασχηματισμού ανεξάρτητων κατανομών στα σύνολα J και I αντίστοιχα. Κατ' αυτό τον τρόπο αν θεωρήσουμε ότι το σύνολο I περιγράφεται ως «κριτήρια» και το σύνολο J περιγράφεται αντίστοιχα ως «εναλλακτικές» μπορούμε να πούμε ότι η τιμή $G_\alpha(j) \; / \; j \in J$, δηλώνει την μέτρηση της κατανομής της j εναλλακτικής υπό την προοπτική του γραμμικού συνδυασμού των ανεξάρτητων κατανομών που προσδιορίζονται από το σύνολο I. Στην περίπτωση αυτή, ο κάθε παραγοντικός άξονας ερμηνεύεται ως σύνθεση των ανεξαρτήτων κατανομών των κριτηρίων και αποτελεί ένα σύνθετο κριτήριο. Η ερμηνεία του άξονα, καθώς και η απόδοση κάποιου ονόματος σ' αυτόν, βασίζονται σε κατάλληλη ανάγνωση των πινάκων των αποτελεσμάτων της μεθόδου (Απόλυτες – Σχετικές συνεισφορές).

Η παρουσία των κατανομών πιθανότητας και η περίπτωση του «εξαρτημένου κριτηρίου», είναι πιθανόν να οδηγήσουν σε σύγχυση για την ταύτιση της μεθόδου με την θεωρία της Αναμενόμενης Χρησιμότητας. Η εν λόγω θεωρία, εξετάζει την περίπτωση διάταξης των «υπό συνθήκη αποφάσεων» (Krantz, 1971) με βάση την αρχή του Bernoulli:

$$E(\alpha) = \max_{\alpha \in A} \sum_{s \in S} p(s)u(\alpha, s)$$, όπου:

p(s): κατανομή πιθανότητας

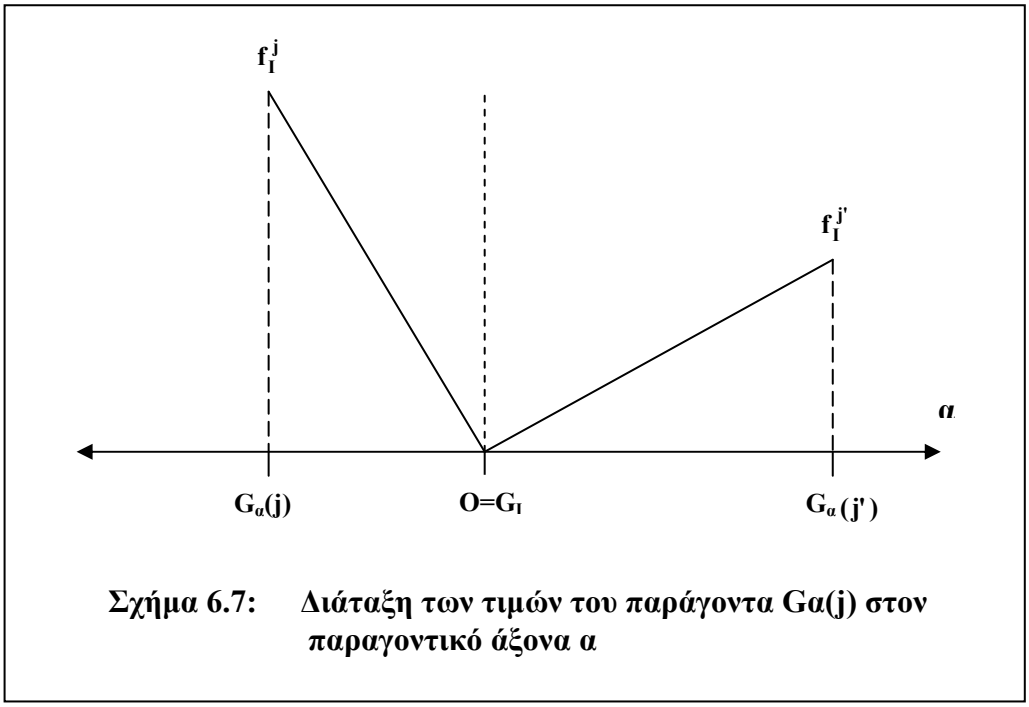
u(α,s): συνάρτηση πιθανότητας.

Οι εναλλακτικές διατάσσονται με βάση τις τιμές της συνάρτησης Ε(α). Η διάταξη αυτή εκφράζει την διάταξη των κατανομών των εναλλακτικών με λιγότερο ή περισσότερο κίνδυνο.

Παρά την όποια ταύτιση της σχέσης του Bernoulli και των συναρτήσεων των παραγόντων, δεν μπορούμε να πούμε σε καμία περίπτωση ότι οι συναρτήσεις φ^{α} και ψ^{α} εκφράζουν χρησιμότητες. Αυτό συνεπάγεται άμεσα, την απουσία οποιοσδήποτε μορφής κινδύνου στα συμπεράσματα μιας διάταξης στην Παραγοντική Ανάλυση των Αντιστοιχιών. Η διάταξη των κατανομών στους παραγοντικούς άξονες με βάση τις αριθμητικές του τιμές γίνεται χωρίς την αναφορά σε επιλογή εναλλακτικής με «λιγότερο ή περισσότερο κίνδυνο».

6.7. ΣΥΝΘΕΣΗ ΤΩΝ ΠΑΡΑΓΟΝΤΙΚΩΝ ΑΞΟΝΩΝ

Κάθε παράγοντας εκφράζει συναρτησιακά την απόσταση της προβολής του προφίλ από τον μέσο όρο των κατανομών (Σχήμα 6.7).



Σχήμα 6.7: Διάταξη των τιμών του παράγοντα Gα(j) στον παραγοντικό άξονα α

Η διάταξη των μεταξύ δύο κατανομών των εναλλακτικών j και j', δηλώνεται ως διαφορά των αποστάσεων, όπως αυτές δηλώνονται από τις αριθμητικές τιμές των παραγόντων τους, στον παραγοντικό άξονα α. Αυτή η παρατήρηση βρίσκεται σε πλήρη συμφωνία με την άποψη του Krantz (1989) για την γεωμετρική διάταξη στην Ανάλυση Δεδομένων. Στο πλαίσιο αυτής της διάταξης, ο Benzecri (1973), προτείνει τον υπολογισμό της απόστασης μεταξύ δύο κατανομών j και j', σύμφωνα με την σχέση:

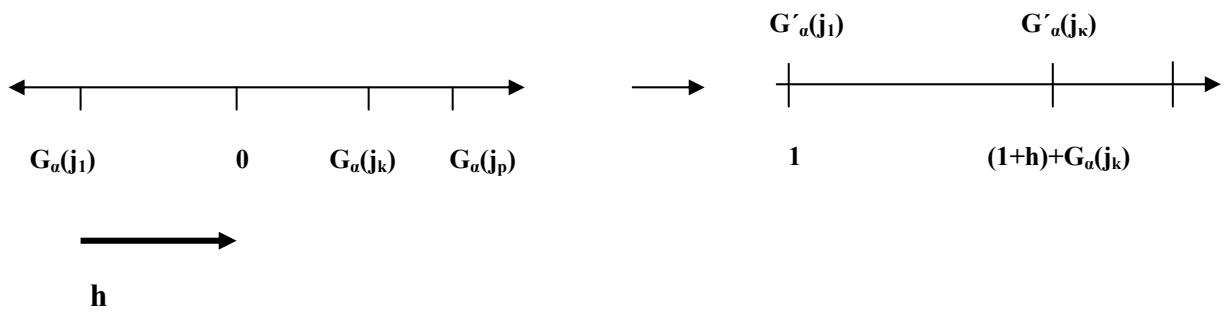
$$\left\| p_I^j - p_I^{j'} \right\| = \sum_\alpha \left(G_\alpha(j) - G_\alpha(j') \right)^2 .$$

Η διάταξη που μπορεί να παρατηρηθεί μεταξύ των κατανομών $j \in J$, μπορεί να εκφραστεί αριθμητικά, ως διάταξη των μεταξύ τους αποστάσεων. Η αντιμετώπιση της γεωμετρικής αυτής διάταξης, ως διαφορά μετρήσεων, μπορεί να δημιουργήσει πληθώρα προβλημάτων που σχετίζονται με τα συστήματα αναφοράς των μετρήσεων. Η απλούστερη περίπτωση που μπορεί να δημιουργήσει μια τέτοιου είδους σύγχυση, είναι η περίπτωση του ενός παραγοντικού άξονα. Σύμφωνα με τον Raikov (1965), κάθε κατευθυνόμενος άξονας επιτρέπει την περιγραφή μιας γραμμικής διάταξης από ένα υποσύνολο της πραγματικής ευθείας. Στην περίπτωση όμως του παραγοντικού άξονα, παρατηρούμε δύο αντίθετες κατευθύνσεις στον άξονα, οι οποίες δηλώνουν με την σειρά τους δύο διαφορετικά είδη διατάξεων.

Κατά την γνώμη μας, αυτά τα προβλήματα μπορούν να αντιμετωπισθούν με την μονοδρόμηση του κάθε άξονα. Η θέση αυτή, βρίσκεται σε πλήρη συμφωνία με την ερμηνεία του άξονα και αντανακλά πλήρως την διαδικασία σύνθεσης που λαμβάνει χώρα στον βέλτιστο υπόχωρο των εξαρτημένων εναλλακτικών. Ο παραγοντικός άξονας, αντιπροσωπεύει μία και μόνο νέα κατεύθυνση και αναδεικνύει ένα καινούργιο χαρακτηριστικό (μεταβλητή –κριτήριο), στην βάση του οποίου αξιολογούνται οι προτιμήσεις ενός συγκεκριμένου συνόλου ατόμων. Από την άλλη πλευρά, η θέση αυτή αξιοποιεί πλήρως την θεωρία της αθροιστικής συνδυαστικής μέτρησης και δημιουργεί ένα νέο κριτήριο που βασίζεται σε ανεξάρτητα χαρακτηριστικά.

Η μονοδρόμηση του άξονα, μπορεί να επιλύει το πρόβλημα ανεύρεσης ενός και μόνου συστήματος αναφοράς (κριτηρίου), αλλά δεν επιλύει και το πρόβλημα της

κλίμακας. Η κλίμακα παραμένει ένα υποσύνολο της πραγματικής ευθείας (που περιέχει και το 0) και δεν συνιστά μια κλίμακα φυσικών μετρήσεων, σύμφωνα με τα πρότυπα της θεωρίας της Χρησιμότητας. Ο μετασχηματισμός της πραγματικής κλίμακας σε φυσική, δεν επιφέρει ουσιαστικές αλλαγές στην αξιολόγηση των εναλλακτικών καθώς η σχετική απόσταση των μετρήσεων τους παραμένει σταθερή. Εφόσον δοθεί το όνομα στον παραγοντικό άξονα, ο μετασχηματισμός της κλίμακας συνιστά μια ομοθεσία κατά το διάνυσμα (1+h), όπου h: η απόσταση της ελάχιστης τιμής από την αρχή των αξόνων. Κατ' αυτό τον τρόπο, αποδίδουμε στην εναλλακτική με την ελάχιστη μέτρηση ως προς το νέο κριτήριο (π.χ. την $G_\alpha(j_1)$) την τιμή 1 και σε κάθε άλλη (π.χ. την $G_\alpha(j_k)$) την τιμή (1+h)+ $G_\alpha(j_k)$ (Σχήμα 6.8).



Σχήμα 6.8: Αλλαγή κλίμακας σε παραγοντικό άξονα

Οι μετασχηματισμένοι παράγοντες $G'_\alpha(j_k)$, εκφράζουν σε μορφή γραμμικής διάταξης τις προτιμήσεις ενός συνόλου ατόμων ως προς τις j εναλλακτικές, σύμφωνα με τις ανισότητες:

$$j_{k1} \underset{\sim}{\succ} j_{k2} \Leftrightarrow G'_\alpha(j_{k1}) \geq G'_\alpha(j_{k2}) .$$

Η διάταξη αυτή είναι σύμφωνη με τις γενικότερες αρχές της θεωρίας της Κοινωνικής επιλογής και της θεωρίας της αθροιστικής συνδυαστικής μέτρησης και απεικονίζει την θέση μιας εναλλακτικής στην μετασχηματισμένη κλίμακα των τιμών μιας νέας σύνθετης μεταβλητής. Οι νέες αυτές μεταβλητές, εκφράζονται σε διαφορετική κλίμακα, η οποία προσδιορίζεται από την τετραγωνική ρίζα της αντίστοιχης ιδιοτιμής του κάθε παραγοντικού άξονα α ($\sqrt{\lambda_\alpha}$).

Η εφαρμογή της Παραγοντικής Ανάλυσης των Αντιστοιχιών στον αρχικό πίνακα δεδομένων (κριτήρια $\times$εναλλακτικές) επέτρεψε την ανασύνθεση των αρχικών κριτηρίων σε νέα σύνθετα κριτήρια, μικρότερου αριθμού από τα αρχικά. Τα νέα αυτά κριτήρια αποδίδουν, μέσω αριθμητικής διάταξης, την διάταξη των προτιμήσεων των εναλλακτικών. Η σημαντικότητα του κάθε κριτηρίου α, ερμηνεύεται σε ποσοστό ιδιοτιμής $\left(\frac{\lambda_\alpha}{\sum\lambda_\alpha}\right)$, και αντιπροσωπεύει την πληροφορία του αρχικού πίνακα δεδομένων, που εκπροσωπεί ο κάθε παραγοντικός άξονας α. Το απαιτούμενο ποσοστό πληροφορίας που απαιτείται για την ερμηνεία των αρχικών δεδομένων, δεν είναι σταθερό αλλά εξαρτάται από το μέγεθος του πίνακα που αναλύεται (αριθμός γραμμών, αριθμός στηλών). Για παράδειγμα, όσο μικρότερος είναι ο αρχικός πίνακας, τόσο λιγότεροι παραγοντικοί άξονες θα χρησιμοποιηθούν. Το ποσοστό αυτό, καθορίζει το πλήθος των ερμηνεύσιμων αξόνων καθώς και το πλήθος των νέων σύνθετων κριτηρίων.

Στην περίπτωση που ο $1^{ος}$ παραγοντικός άξονας ικανοποιεί το απαιτούμενο ποσοστό πληροφορίας, λέμε ότι άξονας αυτός συνιστά ένα «απόλυτο» σύνθετο κριτήριο, το οποίο και δηλώνει την συνολική προτίμηση ως προς τις j εναλλακτικές. Σε διαφορετική περίπτωση, είμαστε αναγκασμένοι να προχωρήσουμε σε μια εκ νέου σύνθεση του συνόλου των παραγοντικών αξόνων, που αντιπροσωπεύουν το ζητούμενο ποσοστό.

Η πολυκριτήρια προσέγγιση της Παραγοντικής Ανάλυσης των Αντιστοιχιών, βασίστηκε σε μια προσεκτική ανάγνωση των κύριων χαρακτηριστικών της μεθόδου. Τα χαρακτηριστικά αυτά αντιπαρατέθηκαν με ήδη υπάρχουσες πολυκριτήριες θεωρίες και επικύρωσαν την δυνατότητα του κάθε παραγοντικού άξονα να παρέχει διάταξη των προτιμήσεων. Η ανάγκη δημιουργίας ενός νέου σύνθετου κριτηρίου δεν πρέπει να αναζητηθεί στις θεωρίες που χρησιμοποιήθηκαν. Για παράδειγμα, η κατασκευή ενός νέου κριτηρίου το οποίο να βασίζεται σε μια αθροιστική δομή ανεξάρτητων χαρακτηριστικών, δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί καθώς η μέθοδος της Παραγοντικής Ανάλυσης των Αντιστοιχιών είναι κατηγορηματική στο θέμα της ανεξαρτησίας. Οι κανονικοί παράγοντες είναι ανεξάρτητοι και ασυσχέτιστοι μεταξύ τους και δηλώνουν την αναλυτικότερη έκφραση ενός φαινομένου στα βασικά του συστατικά. Με άλλα λόγια, η μέθοδος δεν είναι σε θέση να αναλύσει περισσότερο το φαινόμενο.

Η διαπίστωση αυτή είναι βασική και αποτρέπει κάθε προσπάθεια κατασκευής νέων γραμμικών διατάξεων. Η επίλυση του προβλήματος της σύνθεσης των παραγοντικών αξόνων, πρέπει να αναζητηθεί σε άλλες μεθόδους που περιγράφουν μη-γραμμικές διατάξεις. Τέτοιες μέθοδοι, απαντιούνται στην οικογένεια των μεθόδων της θεωρίας Υπεροχής. Η ανάλυση ενός πολυκριτήριου προβλήματος, με βάση την ασθενέστερη δυαδική σχέση προτίμησης (σχέση υπεροχής), είναι δυνατόν να μας παρέχει λύσεις σε προβλήματα απόφασης που δεν υπηρετούν την γραμμική διάταξη.

Η χρήση των μεθόδων της θεωρίας υπεροχής απαιτεί αρχικά ένα προσδιορισμό του πολυκριτήριου προβλήματος, που καλούμαστε να επιλύσουμε. Το πρόβλημα αυτό εκφράζεται σε μορφή πίνακα (εναλλακτικών × κριτηρίων), με την κάθε του στήλη να δηλώνει αριθμητικά την προτίμηση ως προς την κάθε εναλλακτική σύμφωνα με ένα κριτήριο-στήλη. Κατ' αυτό τον τρόπο, δημιουργούμε τον πολυκριτήριο πίνακα (εναλλακτικών × παραγόντων), με τιμές τις μετασχηματισμένες τιμές της j εναλλακτικής ως προς τον α παράγοντα (Σχήμα 6.9.).

		ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ			
		Παράγ. 1	Παράγ. 2	…	Παράγ. q
ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΕΣ	Εναλλακτική 1	…	…	…	…
	Εναλλακτική j	$G'_1(j)$	$G'_2(j)$	…	$G'_q(j)$
	…	…	…	…	…
	Εναλλακτική p	…	…	…	…

Σχήμα 6.9.: Πολυκριτήριος πίνακας Παραγόντων

Η επέμβαση μας στην μεθοδολογία των σχέσεων υπεροχής, περιορίζεται αποκλειστικά στον καθορισμό των βαρών των κριτηρίων. Το βάρος που προσδίδεται σε κάθε παραγοντικό άξονα αφορά το ποσοστά αδράνειας που ερμηνεύει ο άξονας και μάλιστα κανονικοποιημένο για τον αριθμό των αξόνων που μετέχουν σ' αυτό το πρόβλημα απόφασης.

Στην περίπτωση που η εφαρμοζόμενη μέθοδος υπεροχής είναι μια εκ των (ELECTRE I, ELECTRE Is), λαμβάνουμε ως αποτέλεσμα της συνθετικής διαδικασίας το βέλτιστο υποσύνολο των εναλλακτικών. Το υποσύνολο αυτό αναφέρεται αποκλειστικά στις προτιμήσεις ενός συνόλου ατόμων, όπως αυτές εκφράζονται από τα νέα σύνθετα κριτήρια.

6.8. Η ΠΡΟΤΑΣΗ ΜΑΣ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΙΚΑ

Το παρόν κεφάλαιο τοποθετείται στο επίκεντρο της έρευνας που διεξάγεται σ' αυτή την διατριβή. Πιο συγκεκριμένα, σ' αυτό το κεφάλαιο αιτιολογείται, σε θεωρητική βάση, η αρχική μας πρόταση που προσδιορίζεται ως «Πολυκριτήρια υποστήριξη αποφάσεων με την βοήθεια της Παραγοντικής Ανάλυσης των Αντιστοιχιών». Η πρόταση αυτή, συνίσταται σε τρία βασικά μέρη:

- Εφαρμογή της μεθόδου της Παραγοντικής Ανάλυσης των Αντιστοιχιών σε συγκεκριμένο πίνακα συχνοτήτων (κριτηρίων × εναλλακτικών). Η δημιουργία του πίνακα βασίζεται στην συγκεκριμένη στατιστική ανάλυση, η οποία και επιτρέπει την ακριβή αναπαράσταση επ' αυτού, της πληροφορίας που περιέχεται σε ένα αρχικό σύνολο πολυκριτήριων πινάκων, στον πίνακα αυτό.
- Πολυκριτήρια ερμηνεία των αποτελεσμάτων που μας παρέχει η συγκεκριμένη εφαρμογή. Η ερμηνεία αυτή αποδίδεται στους παραγοντικούς άξονες και τους παράγοντες των εναλλακτικών, με την βοήθεια των γενικών αρχών της θεωρίας της Χρησιμότητας και ειδικότερα της θεωρίας της κοινωνικής επιλογής.
- Εφαρμογή της μεθόδου υπεροχής ELECTRE Is σε έναν νέο πολυκριτήριο πίνακα (νέων κριτηρίων × εναλλακτικών). Η τελευταία αυτή εφαρμογή, μας παρέχει το «καλύτερο υποσύνολο» εναλλακτικών σύμφωνα με την συνολική προτίμηση ων, ως προς το αρχικό σύνολο των κριτηρίων.

Σε σχέση με τα τρία αυτά στάδια, θεωρούμε ότι το πρώτο στάδιο της στατιστικής ανάλυσης είναι αρκετά προσιτό και δεν χρειάζονται περαιτέρω διευκρινίσεις. Η μόνη μας παρατήρηση περιορίζεται στην αναγκαιότητα του κατακερματισμού των

κριτηρίων σε κλάσεις. Ασχέτως αν η διαδικασία αυτή δεν επιβάλλεται πάντοτε από την μέθοδο της Παραγοντικής Ανάλυσης των Αντιστοιχιών, θεωρούμε ότι είναι απαραίτητη για την συγκεκριμένη εφαρμογή της μεθόδου, καθώς αναδεικνύει με τον καλύτερο τρόπο τις σχέσεις που υπάρχουν ανάμεσα στα κριτήρια και τις εναλλακτικές.

Σε αντίθεση με το πρώτο στάδιο, το δεύτερο είναι ιδιαίτερα σημαντικό και απαιτεί επιπλέον αναφορά. Στο στάδιο αυτό εντάσσουμε πλήρως την Παραγοντική Ανάλυση των Αντιστοιχιών σε μια πολυκριτήρια διαδικασία και απαιτείται αντίστοιχη ερμηνεία των αποτελεσμάτων της. Η τοποθέτηση αυτή ξεκινά με την εισαγωγή του όρου «στατιστικό κριτήριο». Ο όρος αυτός χαρακτηρίζει τόσο τις μεταβλητές όσο και τις κατανομές πιθανότητας και προσδιορίζει την δυνατότητα αυτών να προσφέρουν αριθμητική αναπαράσταση των προτιμήσεων ενός συνόλου ατόμων ως προς ένα σύνολο εναλλακτικών. Η δυνατότητα αυτή είναι προφανής για την περίπτωση των τυχαίων μεταβλητών με διακεκριμένες τιμές. Όμοια ισχύει και για την περίπτωση των κατανομών πιθανότητας, όπου αυτή η προτίμηση διατάσσεται με βάση τα ποσοστά συχνότητας.

Η παρατήρηση αυτή συνιστά μια αρχική προσέγγιση των μεθόδων της Παραγοντικής Ανάλυσης με την θεωρία της κοινωνικής επιλογής. Η προσέγγιση αυτή ισχυροποιείται από επιπλέον παρατηρήσεις που αναφέρονται στον βασικό μηχανισμό των δύο μεθοδολογιών. Σύμφωνα με τον Herden, η βελτιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης της αδράνειας είναι ικανή να ορίσει συνεχείς προδιατάξεις των εναλλακτικών στην αλυσίδα των θετικών, πραγματικών αριθμών. Παρόλο που το παράδειγμα του Herden, ξεκινά με αφετηρία την μέθοδο της Ανάλυσης σε Κύριες Συνιστώσες και επεκτείνεται στην συνέχεια για όλη την Παραγοντική Ανάλυση, εμείς θα το προσεγγίσουμε αποκλειστικά για την μέθοδο της Παραγοντικής Ανάλυσης των Αντιστοιχιών. Η προσέγγιση αυτή βασίζεται στην ικανότητα της μεθόδου να αναλύει την πληροφορία ενός πίνακα δύο μεταβλητών (κριτηρίων, μεταβλητών) και όχι απλά τις παρατηρήσεις ενός συνόλου ατόμων ως προς μια μεταβλητή (εναλλακτικές). Η ιδιότητα αυτή, καθιστά την Παραγοντική ανάλυση των Αντιστοιχιών ως ιδανική παραγοντική μέθοδο για πολυκριτήρια εφαρμογή.

Η βελτιστοποίηση της αδρανείας οδηγεί στην κατασκευή των παραγοντικών αξόνων. Καθώς το νέφος των μεταβλητών N(J) προσδιορίζεται ως το σύνολο των

εξαρτημένων κατανομών των εναλλακτικών ως προς τις κλάσεις των αρχικών κριτηρίων, η κατασκευή των παραγοντικών αξόνων στο N(J) εισάγει νέα σύνθετα κριτήρια. Οι προβολές (παράγοντες) των κατανομών των εναλλακτικών στους άξονες συνιστούν τις τιμές των εναλλακτικών ως προς τα νέα κριτήρια. Η αθροιστική συνάρτηση του παράγοντα-εναλλακτική: $G_\alpha(j) = \sum_{j=1}^{r} \psi^\alpha \frac{f_{ij}}{f_{.j}}$, ερμηνεύει την τιμή της j εναλλακτικής στον άξονα α, ως γραμμικό συνδυασμό των ορθοκανονικών κατανομών ψ^α. Οι νέες κατανομές υποδεικνύουν νέες, ανεξάρτητες κατευθύνσεις στον simplex χώρο πιθανότητας των κριτηρίων, και ορίζουν νέα, σύνθετα κριτήρια. Η ερμηνεία της αθροιστικής συνάρτησης των παραγόντων $G_\alpha(j)$, με βάση την θεωρία της αθροιστικής συνδυαστικής μέτρησης, επιτρέπει την διάταξη των εναλλακτικών σε κάθε παραγοντικό άξονα α, με την βοήθεια των παραγόντων τους. Η διάταξη μεταξύ των κατανομών δύο εναλλακτικών j και j', δηλώνεται ως διαφορά των αποστάσεων, όπως αυτές δηλώνονται από τις αριθμητικές τιμές των συντεταγμένων τους, στον παραγοντικό άξονα α.

Η υιοθέτηση της γεωμετρικής αυτής διάταξης εκφράζεται στην πραγματική ευθεία. Αυτό μπορεί να δημιουργήσει σημαντικά πρακτικά προβλήματα λόγω της παρουσίας δύο αντίθετων κατευθύνσεων στον άξονα. Σ' αυτή την περίπτωση προτείνεται μονοδρόμηση της κατεύθυνσης, σύμφωνα με την υπόδειξη του κριτηρίου που ερμηνεύει τον άξονα. Τέλος, ο μετασχηματισμός της πραγματικής κλίμακας σε αντίστοιχη φυσική, αναδεικνύει την διάταξη των εναλλακτικών στον άξονα.

Η βασική θεώρηση της Παραγοντικής Ανάλυσης των Αντιστοιχιών, βασίζεται στην ανασύνθεση της πληροφορίας του αρχικού πίνακα αξόνων, από ένα σύνολο ορθοκανονικών αξόνων. Η σημαντικότητα του άξονα βασίζεται στο ποσοστό της πληροφορίας που αυτός ερμηνεύει. Ανάλογα με το μέγεθος του πίνακα, υπολογίζεται το απαιτούμενο ποσοστό πληροφορίας και καθορίζεται ο αριθμός των παραγοντικών αξόνων που θα χρησιμοποιηθούν στην ανάλυση. Στην περίπτωση που ο $1^{ος}$ παραγοντικός άξονας, καλύπτει αυτό το ποσοστό, τότε ονομάζεται άξονας κατάταξης. Στην περίπτωση αυτή, η κατάταξη οδηγεί απευθείας σε επιλογή της καλύτερης εναλλακτικής.

Σε διαφορετική περίπτωση, απαιτείται το σύνολο των αξόνων που συμπληρώνουν το απαιτούμενο ποσοστό. Αυτό μας οδηγεί αυτόματα, στο τρίτο στάδιο. Καθώς οι

άξονες αυτοί, αποτελούν άξονες κατάταξης, μπορούμε να αντιστοιχίσουμε την διάταξη αυτή σε έναν νέο πίνακα (εναλλακτικών × παραγόντων). Η αντιστοίχιση αυτή γίνεται στην βάση της συνολικής πληροφορίας της προτίμησης που ερμηνεύεται από τους άξονες. Οι εναλλακτικές σ' αυτό τον πίνακα αντιπροσωπεύονται από τις μετασχηματισμένες τιμές των παραγόντων τους. Ο πίνακας αναλύεται στην συνέχεια με την μέθοδο ELECTRE Is, η οποία και εξασφαλίζει μη-κυρτή βελτιστοποίηση. Σαν αποτέλεσμα της ανάλυσης παίρνουμε το υποσύνολο των καλύτερων εναλλακτικών.

Σε γενικές γραμμές, αυτά ήταν τα συμπεράσματα της πολυκριτήριας προσέγγισης της Παραγοντικής Ανάλυσης των Αντιστοιχιών. Η έκταση (και η επανάληψη) των συμπερασμάτων είναι επιβεβλημένη, λόγω του θεωρητικού χαρακτήρα της έρευνας. Όπως παρατηρήσαμε, η έρευνα βασίστηκε κύρια στην μεθοδολογία της Παραγοντικής Ανάλυσης των Αντιστοιχιών αλλά τεκμηριώθηκε αυστηρά στα πλαίσια της Πολυκριτήριας Ανάλυσης. Κατά την γνώμη μας, εισάγει ένα νέο εργαλείο αποφάσεων το οποίο και αποτελεί συνδυασμό Παραγοντικής Ανάλυσης των Αντιστοιχιών και της πολυκριτήριας μεθοδολογίας. Η εφαρμογή που ακολουθεί τεκμηριώνει αυτό τον ισχυρισμό μας.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Η προτεινόμενη μεθοδολογία εφαρμόστηκε σε ένα αρχικό σύνολο Ν(73) πολυκριτήριων πινάκων. Η εφαρμογή της Παραγοντικής Ανάλυσης των Αντιστοιχιών βασίστηκε στο λογισμικό S-pro (1999). Από την οικογένεια των μεθόδων των σχέσεων υπεροχής, επιλέχθηκε η μέθοδος ELECTRE Is, η εφαρμογή της οποίας βασίστηκε στο αντίστοιχο λογισμικό (1993).

Τρία είναι τα βασικά στάδια που χαρακτηρίζουν την συγκεκριμένη εφαρμογή. Τα στάδια αυτά, βρίσκονται σε πλήρη συμφωνία με τα στάδια της μεθοδολογίας που αναπτύχθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Πιο συγκεκριμένα, θα αναφερθούμε διεξοδικά στα:

1. Στατιστική επεξεργασία ενός αρχικού συνόλου πολυκριτήριων πινάκων και την κατασκευή ενός τελικού πίνακα, στον οποίο εφαρμόζουμε την Παραγοντική Ανάλυση των Αντιστοιχιών

2. Πολυκριτήρια ερμηνεία των αποτελεσμάτων της Παραγοντικής Ανάλυσης των Αντιστοιχιών και αναγνώρισης της διάταξης στον κάθε παραγοντικό άξονα.

3. Υποστήριξη απόφασης, για την περίπτωση που είναι αρκετός ο πρώτος παραγοντικός άξονας. Σε διαφορετική περίπτωση, εφαρμόζουμε την μέθοδο ELECTRE Is, σε νέο πολυκριτήριο πίνακα, επιδιώκοντας την σύνθεση των παραγοντικών αξόνων.

1. ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Για την προτεινόμενη εφαρμογή, χρησιμοποιούμε ένα αρχικό σύνολο πολυκριτήριων πινάκων στους οποίους ταξινομούνται τα αποτελέσματα μιας έρευνας

που διεξήχθη από το Πολυτεχνείο Κρήτης. Η έρευνα αφορούσε τις προτιμήσεις ενός συνόλου 73 ατόμων ως προς ένα σύνολο προϊόντων σύμφωνα με συγκεκριμένα κριτήρια.

Καθένας από τους N(73) πολυκριτήριους Πίνακες περιγράφει την αξιολόγηση I(6) προϊόντων (αντικείμενα) A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 ως προς J(6) κριτήρια (μεταβλητές) G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6 από N άτομα. Τα κριτήρια αυτά μας δίνονται χωρισμένα σε κλάσεις. Οι κλάσεις του κάθε κριτηρίου δίνονται στον Πίνακα 1:

Πίνακας 1: Κριτήρια και κλάσεις κριτηρίων

Κριτήρια	*Κλάσεις των Κριτηρίων*
G_1 (Ποιότητα):	G_{11}(Κακή), G_{12}(Άγνοια), G_{13}(Μέτρια),G_{14}(Καλή), G_{15}(Πολύ Καλή)
G_2 (Γεύση):	G_{21}(Κακή), G_{22}(Άγνοια), G_{23}(Μέτρια),G_{24}(Καλή), G_{25}(Πολύ Καλή)
G_3 (Τιμή):	G_{31}(Υψηλή), G_{32}(Άγνοια), G_{33}(Κανονική),G_{34}(Μέτρια), G_{35}(Χαμηλή)
G_4 (Φήμη):	G_{41}(Καθόλου), G_{42}(Λίγο), G_{43}(Πολύ),
G_5 (Συσκευασία):	G_{51}(Κακή), G_{52}(Άγνοια), G_{53}(Μέτρια),G_{54}(Καλή), G_{55}(Πολύ Καλή)
G_6 (Εικόνα):	G_{61}(Κακή), G_{62}(Άγνοια), G_{63}(Μέτρια),G_{64}(Καλή), G_{65}(Πολύ Καλή)

Αρχικά, δημιουργούμε για κάθε προϊόν A_i και έναν αντίστοιχο πίνακα A_i στον οποίο περιγράφεται η αξιολόγηση του i προϊόντος από τα N(73) άτομα, ως προς το σύνολο των κριτηρίων. Έτσι για το 1^o προϊόν, συγκεντρώνοντας τις N(73) πρώτες γραμμές στον πίνακα A_1 (Σχήμα 1α), έχουμε συγκεντρωμένη την συνολική πληροφορία αξιολόγησης για το προϊόν A_1. Το ίδιο γίνεται και για τα υπόλοιπα προϊόντα.

Στην συνέχεια, για να επιτευχθούν εύκολα και ερμηνεύσιμα αποτελέσματα με την εφαρμογή της μεθόδου Παραγοντικής Ανάλυσης των Αντιστοιχιών, ο πίνακας A_1 μετατρέπεται στον λογικό πίνακα $A_1^{0,1}$ (Σχήμα 1β).

Πίνακας A_1

	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6
1	1	4	2	2	…	…
2						
…						
…						
73						…

α)

Πίνακας $A_1^{0,1}$

	G_{11}	G_{12}	G_{13}	G_{14}	G_{15}	**...**	G_{65}
1	1	0	0	0	0	…	…
2							
…							
…							
73							…

β)

Σχήμα 1: Πίνακας του 1ου προϊόντος (α) και ο αντίστοιχος λογικός [0-1] (β)

Ακολούθως, για κάθε προϊόν A_i δημιουργούμε και ένα πίνακας συμπτώσεων C_i (Σχήμα 2α), με γραμμές και στήλες G_{jk} το σύνολο των κλάσεων όλων των κριτηρίων. Η κύρια διαγώνιος κάθε πίνακα C_i, αντιστοιχεί στην στήλη του προϊόντος C_i ενός νέου πίνακα C (Σχήμα 2β) που έχει ως γραμμές το σύνολο των κλάσεων G_{jk} όλων των κριτηρίων G_j.

		G_1				G_2						...	G_6
		G_{11}	G_{12}	G_{13}	G_{14}	G_{15}	G_{21}	G_{22}	G_{23}	G_{24}	G_{25}	…	…
G_1	G_{11}	6											
	G_{12}		48										
	G_{13}			12									
	G_{14}				7								
	G_{15}					0							
A_1* → G_2	G_{21}						4						
	G_{22}							48					
	G_{23}								12				
	G_{24}									9			
	G_{25}										0		
G_3	.												
G_4	.												
G_5	.											.	
G_6	.												…

Σχήμα 2α:Πίνακας συμπτώσεων C_1

		C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
G_1	G_{11}	6					
	G_{12}	48					
	G_{13}	12					
	G_{14}	7					
	G_{15}	0					
G_2	G_{21}	4					
	G_{22}	48					
	G_{23}	12					
	G_{24}	9					
	G_{25}	0					
G_3	...	...					
G_4	...	...					
G_5	...	...					
G_6	...						

Σχήμα 2β: Πίνακας C

Ο πίνακας C, περιέχει σε μορφή συχνοτήτων, αναλλοίωτη την πληροφορία των αρχικών 73 πολυκριτήριων πινάκων. Στον πίνακα αυτόν, εφαρμόζουμε την Παραγοντική Ανάλυση των Αντιστοιχιών.

2. ΠΟΛΥΚΡΙΤΗΡΙΑ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΩΝ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΤΩΝ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΩΝ ΣΤΟΝ ΠΙΝΑΚΑ C

Τα αποτελέσματα της Παραγοντικής Ανάλυσης των Αντιστοιχιών, μας δίνονται κυρίως με την μορφή των παραγοντικών διαγραμμάτων (των επιπέδων και των αξόνων). Η ερμηνεία των διαγραμμάτων αυτών, επιβάλλει την κατάλληλη ανάγνωση των πινάκων των αποτελεσμάτων της ανάλυσης που αναφέρονται στις συντεταγμένες (παράγοντες), στις σχετικές και απόλυτες συμμετοχές καθώς και στις ιδιοτιμές και τα ποσοστά αυτών που αντιστοιχούν στον κάθε παραγοντικό άξονα. Η συγκεκριμένη ανάλυση του πίνακα C, θα περιοριστεί αποκλειστικά στα παραγοντικά διαγράμματα των αξόνων και θα επιδιώξει, μέσω των πινάκων των αποτελεσμάτων της ανάλυσης, να ονομάσει κατάλληλα τους άξονες και να αναγνωρίσει την διάταξη των προϊόντων σ' αυτούς.

Οι πίνακες των αποτελεσμάτων της ανάλυσης θα δοθούν σε δύο πίνακες. Ο πρώτος πίνακας (Πίνακας 2), αναφέρεται στα αντικείμενα (κλάσεις των κριτηρίων), ενώ αντίστοιχα ο δεύτερος (Πίνακας 3) αναφέρεται στις μεταβλητές (προϊόντα). Οι πίνακες αναφέρονται στους τρεις πρώτους παραγοντικούς άξονες.

Πίνακας 2: Πίνακας Αντικειμένων

	1ος Παρ.	**Συν.**	**Συμ.**	**2ος Παρ.**	**Συν.**	**Συμ.**	**3ος Παρ.**	**Συν.**	**Συμ.**
G_{11}	-333	423	5	55	11	0	147	82	3
G_{12}	-383	717	77	-70	23	5	-44	9	2
G_{13}	246	302	12	238	283	22	70	24	2
G_{14}	416	553	52	-343	376	71	-31	2	0
G_{15}	496	367	29	-588	516	82	-159	37	8
G_{21}	433	132	16	-912	587	148	-479	162	55
G_{22}	-415	911	91	64	21	4	34	6	1
G_{23}	194	712	7	-4	0	0	-39	29	0
G_{24}	403	785	49	-52	12	1	-73	25	4
G_{25}	92	17	1	-277	157	21	256	134	25
G_{31}	125	50	1	-17	0	0	249	200	15
G_{32}	-215	437	24	196	360	40	33	10	1
G_{33}	478	754	37	-41	5	0	184	111	15
G_{34}	478	800	95	-113	44	10	-201	141	45
G_{35}	-496	113	9	817	309	49	-1110	571	124
G_{41}	-405	402	69	-7	0	0	-487	582	273
G_{42}	-41	6	0	487	880	155	142	74	17
G_{43}	379	718	67	173	150	28	-90	40	10
G_{51}	-646	815	12	-51	5	0	-5	0	0
G_{52}	-373	721	72	-124	79	16	-62	19	5
G_{53}	-645	670	68	-270	117	23	360	208	57
G_{54}	209	310	18	179	227	26	-93	60	9
G_{55}	381	241	11	252	105	10	-249	102	13
G_{61}	-548	470	17	247	95	7	376	221	22
G_{62}	-308	263	42	-427	508	166	274	208	92
G_{63}	186	169	9	344	579	65	147	105	16
G_{64}	528	613	85	47	4	1	368	297	112
G_{65}	26	1	0	272	198	17	327	286	34

Πίνακας 3: Πίνακας Μεταβλητών

	1ος Παρ.	**Συν.**	**Συμ.**	**2ος Παρ.**	**Συν.**	**Συμ.**	**3ος Παρ.**	**Συν.**	**Συμ.**
A_1	-101	50	11	109	58	26	241	288	176
A_2	301	289	110	-399	507	389	-220	154	160
A_3	408	767	227	-37	6	3	82	30	24
A_4	-230	184	69	313	341	257	-366	467	478
A_5	246	245	70	269	294	168	181	134	103
A_6	-639	809	506	-247	121	152	125	31	53

Οι θέσεις των προϊόντων σε κάθε παραγοντικό άξονα, δίνονται από την στήλη των συντεταγμένων (1ος Παράγοντας, 2ος Παράγοντας, 3ος Παράγοντας) του πίνακα των μεταβλητών. Σύμφωνα με τα συμπεράσματα όμως, του 6ου Κεφαλαίου, κάθε παράγοντας εκφράζει μια εξαρτημένη κατανομή με αποτέλεσμα ο παραγοντικός άξονας να δηλώνει και μια νέα κατεύθυνση στο νέφος των αντικειμένων (κλάσεων των κριτηρίων). Η νέα αυτή κατεύθυνση, αναδεικνύει ένα νέο κριτήριο, το οποίο και εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των κλάσεων των αρχικών κριτηρίων (γραμμών). Η ανάδειξη του νέου κριτηρίου συνιστά μια διαδικασία που ταυτίζεται με την ερμηνεία του παραγοντικού άξονα. Στην πραγματικότητα, δεν συμμετέχουν όλες οι γραμμές στον σχηματισμό του νέου κριτηρίου. Η συμβολή των γραμμών στον σχηματισμό του νέου κριτηρίου, εκφράζεται από τις στήλες του συνημίτονου και της συμμετοχής.

Η στήλη της συμμετοχής δηλώνει την απόλυτη συνεισφορά: $\mathrm{CTR}_\alpha(i) = \frac{f_i F_\alpha(i)}{\lambda_\alpha}$, της i κλάσης κριτηρίου στην δημιουργία του παραγοντικού άξονα U_α. Όσο πιο μεγάλη είναι η τιμή της $CTR_\alpha(i)$, τόσο σημαντικότερη είναι η συνεισφορά της γραμμής i στην κατασκευή του άξονα U_α.

Η στήλη του συνημίτονου, δηλώνει την σχετική συνεισφορά: $\cos^2_\alpha(i) = \frac{F_\alpha(i)^2}{\sum F_\alpha(i)^2}$, της i κλάσης κριτηρίου στην δημιουργία του παραγοντικού άξονα U_α. Όσο πιο κοντά στη μονάδα βρίσκεται η σχετική συνεισφορά της γραμμής i στον άξονα U_α, τόσο μεγαλύτερη είναι η συμβολή της στην δημιουργία του. Όσο αυτή η τιμή απομακρύνεται από τη μονάδα και πλησιάζει στο μηδέν, τόσο η συμβολή

της για την ερμηνεία του άξονα ελαττώνεται, με συνέπεια να μη μπορούμε να εξάγουμε χρήσιμα συμπεράσματα για την συμβολή της (Παπαδημητρίου, 1994).

Η ερμηνεία του κάθε παραγοντικού άξονα, απαιτεί συνδυασμένη ανάγνωση των στηλών της συμμετοχής και του συνημίτονου του πίνακα των αντικειμένων. Καθώς όμως οι δύο αυτές στήλες είναι ανάλογες (όσο πιο μεγάλη είναι η τιμή του συνημίτονου μιας γραμμής, άλλο τόσο ανάλογα μεγάλη είναι και η τιμή της συμμετοχής), χρησιμοποιούμε ως βασική τιμή την τιμή του συνημίτονου και την τιμή της συμμετοχής ως συμπληρωματική. Λόγω του βαρυκεντρικού σχεδιασμού του κάθε άξονα, οι τιμές των παραγόντων, δίνονται σε θετικές και αρνητικές τιμές. Η διάκριση του πρόσημου, υποδηλώνει τον χαρακτηρισμό του άξονα από δύο ξεχωριστές ομάδες κλάσεων κριτηρίων. Για την περαιτέρω ερμηνεία των αξόνων θα συνδέουμε σε κάθε κλάση κριτηρίου την τριάδα (κωδικός, συνημίτονο, συμμετοχή).

2.1. 1ος Παραγοντικός Άξονας

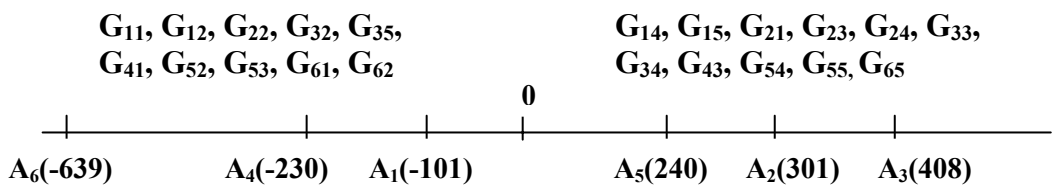
Ο πρώτος παραγοντικός άξονας, χαρακτηρίζεται στα αριστερά από τις ακόλουθες κλάσεις κριτηρίων:

Κακή ποιότητα (G_{11},423,5), *Άγνοια ποιότητας* (G_{12},717,77), *Άγνοια γεύσης* (G_{22},911,91), *Άγνοια τιμής* (G_{32},437,24), *Τιμή χαμηλή* (G_{35},113,9), *Καθόλου φήμη* (G_{41},402,69), *Άγνοια συσκευασίας* (G_{52},721,72), *Συσκευασία μέτρια* (G_{53},670,68), *Εικόνα κακή* (G_{61},470,17), *Άγνοια εικόνας* (G_{62},263,42).

Αντίστοιχα στα δεξιά του άξονα, διακρίνουμε τις παρακάτω κλάσεις κριτηρίων:

Ποιότητα καλή (G_{14},553,52), *Ποιότητα πολύ καλή* (G_{15},367,29), *Γεύση κακή* (G_{21},132,16), *Γεύση μέτρια* (G_{23},712,7), *Γεύση καλή* (G_{24},785,49), *Τιμή κανονική* (G_{33},754,37), *Τιμή μέτρια* (G_{34},800,95), *Φήμη πολύ* (G_{43},718,67), *Συσκευασία καλή* (G_{54},310,18), *Συσκευασία πολύ καλή* (G_{55},241,11), *Εικόνα καλή* (G_{65},613,85)

Η παραπάνω διάταξη των κλάσεων των κριτηρίων στον $1^{ο}$ παραγοντικό άξονα, σε συνδυασμό με την σχετική θέση των παραγόντων των προϊόντων, αποδίδεται στο παρακάτω σχήμα (Σχήμα 3):



Σχήμα 3. Ο 1ος παραγοντικός άξονας

Σε γενικές γραμμές, το αριστερό άκρο του άξονα χαρακτηρίζεται κύρια, από την κλάση «Άγνοια», η οποία και αναφέρεται στο σύνολο των κριτηρίων (Ποιότητα, Γεύση, Τιμή, Συσκευασία, Εικόνα). Αντίθετα στο δεξί άκρο του άξονα παρουσιάζεται μια πληθώρα των υπολοίπων των κλάσεων των κριτηρίων. Η διαφοροποίηση της κλάσης «Άγνοια» σε σχέση με τις υπόλοιπες, μπορεί να ερμηνευθεί κάλλιστα ως ένδειξη *αναγνωρισιμότητας* των προϊόντων. Σ' αυτή την ερμηνεία συνεισφέρει άλλωστε και η παρουσία της κλάσης «Καθόλου Φήμη» στο αριστερό άκρο, σε αντιδιαστολή με την κλάση «Πολύ Φήμη», που εμφανίζεται στο δεξί. Τα δεδομένα αυτά κρίνονται αρκετά για να χαρακτηρίσουν τον $1^{ο}$ παραγοντικό άξονα, ως *άξονα marketing*. Η κατεύθυνση της *αναγνωρισιμότητας* στον άξονα, δίνεται από αριστερά προς τα δεξιά. Κατ' αυτόν τον τρόπο, η προτίμηση των προϊόντων ως προς το νέο τους χαρακτηριστικό, αυξάνεται από αριστερά προς τα δεξιά. Έτσι μπορούμε, να πούμε ότι το προϊόν A_6 θεωρείται το λιγότερο γνωστό, το A_4 θεωρείται λίγο περισσότερο γνωστό, κ.ο.κ. Σύμφωνα με αυτή την διάταξη, το προϊόν A_3, είναι το πιο αναγνωρίσιμο από τα 6.

Μια λεπτομερέστερη ανάγνωση των κλάσεων των κριτηρίων, μας δίνει μερικά νέα δεδομένα, τα οποία και μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την ερμηνεία των υπολοίπων αξόνων. Για παράδειγμα, η μικρή *αναγνωρισιμότητα* στο αριστερό άκρο του άξονα, συνδέεται άμεσα με την παρουσία των κλάσεων της «κακής ποιότητας», της «κακής εικόνας» αλλά συγχρόνως και των κλάσεων της «χαμηλής τιμής» και της «μέτριας συσκευασίας». Η κλάση «κακή εικόνα» και «μέτρια συσκευασία» συντάσσονται άμεσα στο πλαίσιο της *μικρής αναγνωρισιμότητας*. Εντύπωση προκαλεί, η παρουσία της κλάσης «κακή ποιότητα», η οποία και προσδίδει στο κριτήριο «ποιότητα» ένα γενικότερα διαφημιστικό χαρακτήρα (όσο πιο γνωστό είναι το προϊόν, τόσο καλύτερη ποιότητα θεωρείται ότι διαθέτει). Τέλος η κλάση «χαμηλή τιμή» συνδέει μάλλον υποσυνείδητα, το είδος της τιμής με την γνώση για το προϊόν (αν δεν το γνωρίζω, τότε πιθανότατα θα έχει χαμηλή τιμή).

Τα συμπεράσματα αυτά, ενισχύονται και από την επιμέρους ερμηνεία των κλάσεων που τοποθετούνται στο δεξί άκρο του άξονα. Πράγματι στο άκρο της *υψηλής αναγνωρισιμότητας*, εμφανίζονται οι κλάσεις «καλή ποιότητα», «πολύ καλή ποιότητα», «κακή γεύση», «μέτρια γεύση», «καλή γεύση», «κανονική τιμή», «μέτρια τιμή», «καλή συσκευασία», «πολύ καλή συσκευασία», «καλή εικόνα». Τα προϊόντα με μεγάλη αναγνωρισιμότητα, θεωρείται ότι παρουσιάζουν καλή ποιότητα, αλλά και σχετικά υψηλές τιμές. Επίσης θεωρείται σχεδόν βέβαιο ότι η συσκευασία και η εικόνα τους κρίνεται ανάλογα. Εντύπωση όμως, προκαλεί η παρουσία μεγάλου αριθμού των κλάσεων του κριτηρίου «γεύση» και ιδιαίτερα της κλάσης «κακή γεύση». Η παρατήρηση αυτή μας επιτρέπει να θεωρήσουμε ότι η αξιολόγηση του κριτηρίου γεύση είναι καθαρά υποκειμενική. Κατ' αυτόν τον τρόπο η «γεύση» αναγνωρίζεται ως το μοναδικό κριτήριο που δεν επηρεάζεται ευνοϊκά από την αναγνωρισιμότητα των προϊόντων. Για τον ίδιο όμως λόγο, η ανεξάρτητη αυτή παρουσία της γεύσης σε μια ανάλυση στην οποία κυριαρχεί η *αναγνωρισιμότητα*, προσδίδει στο κριτήριο αυτό έναν βοηθητικό ρόλο.

2.2. 2ος Παραγοντικός Άξονας

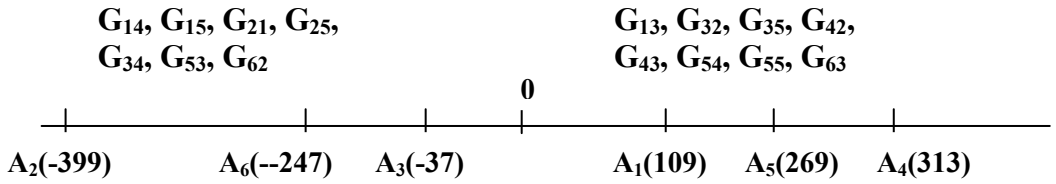
Ο δεύτερος παραγοντικός άξονας, χαρακτηρίζεται στα αριστερά από τις ακόλουθες κλάσεις των κριτηρίων:

Ποιότητα καλή (G_{14},376,71), *Ποιότητα πολύ καλή* (G_{15}, 516,82), *Γεύση κακή* (G_{21},587,148), *Γεύση πολύ καλή* (G_{25},157,21), *Τιμή μέτρια* (G_{34},44,10), *Συσκευασία μέτρια* (G_{53},117,23), *Άγνοια εικόνας* (G_{62},508,166)

Αντίστοιχα στα δεξιά του άξονα, διακρίνουμε τις παρακάτω κλάσεις κριτηρίων:

Ποιότητα μέτρια (G_{13},283,22), *Άγνοια τιμής* (G_{32},360,40), *Τιμή χαμηλή* (G_{35},309,49), *Φήμη λίγο* (G_{42},880,155), *Φήμη πολύ* (G_{43},150,28), *Συσκευασία καλή* (G_{54},227,26), *Συσκευασία πολύ καλή* (G_{55},105,10), *Εικόνα μέτρια* (G_{63},579,95), *Εικόνα πολύ καλή* (G_{65},198,17)

Ο συγκεκριμένος διαχωρισμός των κλάσεων των κριτηρίων στον $2^{ο}$ παραγοντικό άξονα, σε συνδυασμό με την σχετική θέση των παραγόντων των προϊόντων, παρουσιάζεται στο διάγραμμα του $2^{ου}$ παραγοντικού άξονα (Σχήμα 4):



Σχήμα 4. Ο $2^{ος}$ παραγοντικός άξονας

Όπως παρατηρούμε, το δεξί άκρο του 2ου παραγοντικού άξονα, χαρακτηρίζεται κυρίως από τις κλάσεις «Φήμη λίγο», «Φήμη πολύ» και « Τιμή χαμηλή». Οι δύο αυτές κλάσεις της φήμης, αντιστοιχούν σε παρουσία αναγνωρισιμότητας, όπως αυτή ορίστηκε προηγουμένως. Η παρουσία της κλάσης «Τιμή χαμηλή», προσδίδει έναν επιπλέον παράγοντα στην αναγνωρισιμότητα: τον οικονομικό. Σε αντιδιαστολή με τις παρούσες κλάσεις, εμφανίζεται στο δεξί άκρο του άξονα μόνο η κλάση «Τιμή μέτρια», χωρίς επιπλέον αναφορά σε αναγνωρισιμότητα. Αυτή η παρατήρηση μας διευκολύνει να προχωρήσουμε σε καθαρά οικονομική ερμηνεία του δεύτερου παραγοντικού άξονα, μεταθέτοντας την όποια παρουσία παραγόντων διαφήμισης, σε δευτερεύοντα ρόλο. Ο άξονας αυτός ονομάζεται *Οικονομικός Ι* , και επιτρέπει *την διάκριση των προϊόντων σε αυτά που παρουσιάζουν χαμηλή τιμή και σε αυτά που παρουσιάζουν μέτρια τιμή*. Καθώς η χαμηλή τιμή κρίνεται καλύτερη της μέτριας, ο άξονας κατευθύνεται από αριστερά προς τα δεξιά. Με βάση αυτό το οικονομικό κριτήριο, η προτίμηση των προϊόντων αυξάνεται ανάλογα με αυτή την κατεύθυνση. Έτσι λοιπόν, το A_2 κρίνεται ως το χειρότερο προϊόν, το A_6 λίγο καλύτερο, κ.ο.κ..

2.3. $3^{ος}$ Παραγοντικός άξονας

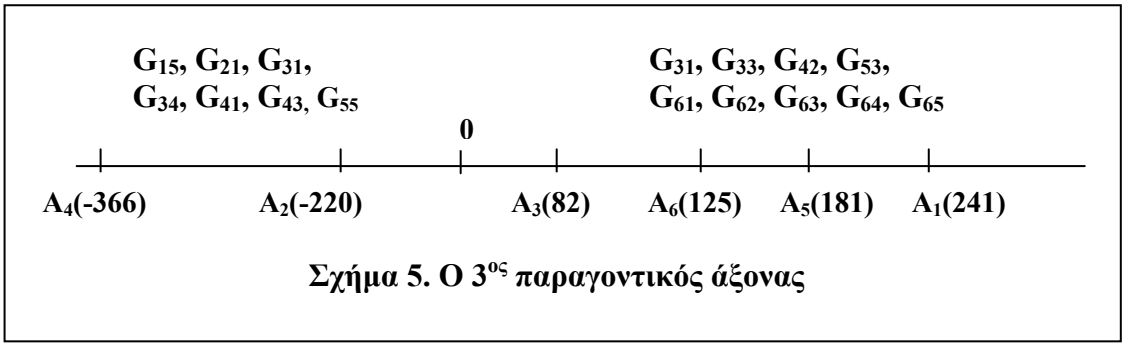
Ο τρίτος παραγοντικός άξονας, χαρακτηρίζεται στα αριστερά από τις ακόλουθες κλάσεις των κριτηρίων:

Ποιότητα πολύ καλή (G_{15},37,8), *Γεύση κακή* (G_{21},162,55), *Τιμή χαμηλή* (G_{31},571,124), *Τιμή μέτρια* (G_{34},141,45), *Φήμη καθόλου* (G_{41},582,273), *Φήμη πολύ* (G_{43},40,10), *Συσκευασία πολύ καλή* (G_{55},102,13).

Στο δεξί άκρο του άξονα διακρίνουμε τις κλάσεις:

Τιμή υψηλή (G_{31},200,15) *Τιμή κανονική* (G_{33},111,15), *Φήμη λίγο* (G_{42},74,17), *Συσκευασία μέτρια* (G_{53},208,57) *καθώς και όλο το κριτήριο της εικόνας*: G_{61}, G_{62}, G_{63}, G_{64}, G_{65}.

Το παραγοντικό διάγραμμα του άξονα μας δίνεται στο σχήμα 5.



Σχήμα 5. Ο 3ος παραγοντικός άξονας

Ο τρίτος παραγοντικός άξονας, είναι ξεκάθαρα οικονομικός. Πράγματι αυτό που χαρακτηρίζει τον άξονα, είναι η διάκριση των κατώτερων κλάσεων του κριτηρίου τιμής (Τιμή υψηλή, Τιμή κανονική) στο δεξί του άκρο και των ανώτερων κλάσεων της τιμής (Τιμή μέτρια, Τιμή χαμηλή), στο αριστερό του άκρο. Ο άξονας ονομάζεται *Οικονομικός ΙΙ* και η κατεύθυνση του δίνεται από δεξιά προς αριστερά. Κατ' αυτόν τον τρόπο το προϊόν A_1 θεωρείται το χειρότερο, το A_5 το αμέσως καλύτερο, κ.ο.κ.

3. ΥΠΟΣΤΗΡΙΞΗ ΑΠΟΦΑΣΗΣ

Η σημαντικότητα του κάθε παραγοντικού άξονα ορίζεται από τα ποσοστά των ιδιοτιμών, τα οποία είναι: για μεν τον πρώτο παραγοντικό άξονα (45,5%), για τον δεύτερο παραγοντικό άξονα (22,7), για δε τον τρίτο (16,7). Οι απαιτήσεις της συγκεκριμένης εφαρμογής για ένα ισχυρό ποσοστό αναπαράστασης της πληροφορίας

της τάξης του 80%, καθιστά ανίσχυρο τον ισχυρισμό μας για διάταξη των προϊόντων επί αυτού του 1^{ου} παραγοντικού άξονα. Σε διαφορετική περίπτωση, η προτίμηση των 73 ατόμων επί των προϊόντων θα εκφραζόταν με την μορφή γραμμικής διάταξης επί του άξονα αυτού, ως εξής:

$A_3>A_2>A_5>A_1>A_4>A_6$

Καθώς το ποσοστού πληροφορίας είναι ιδιαίτερα υψηλό, θα επιδιώξουμε την διάταξη των προϊόντων σε ένα σύνολο παραγοντικών αξόνων, που συγκεντρώνουν αθροιστικά, το ποσοστό πληροφορίας. Στην προκειμένη περίπτωση, απαιτούνται οι τρεις παραγοντικοί άξονες (45,5%+22,7+16,7%=84,9).

Η υιοθέτηση και των τριών παραγοντικών αξόνων εισάγει ένα πρόβλημα σύνθεσης το οποίο σύμφωνα με την μεθοδολογία που αναπτύχθηκε στο 6^{ο} Κεφάλαιο, επιλύεται με μη- γραμμικό τρόπο, σύμφωνα με την γενική θεώρηση των μεθόδων υπεροχής. Πιο συγκεκριμένα, η επίλυση του προβλήματος σύνθεσης, βασίζεται στην εφαρμογή της μεθόδου ELECTRE Is σε έναν νέο πολυκριτήριο πίνακα, ο οποίος και περιλαμβάνει τις ελαφρώς τροποποιημένες συντεταγμένες (παράγοντες) των προϊόντων και στους τρεις παραγοντικούς άξονες.

Η πολυκριτήρια εκτίμηση των παραγοντικών αξόνων, τους καθιστά βασικά εργαλεία για την κατάταξη των προϊόντων. Η κατάταξη αυτή, προσδιορίζεται στην βάση του σύνθετου κριτηρίου που ερμηνεύει τον κάθε άξονα. Το κριτήριο αυτό, χαρακτηρίζει την κατεύθυνση της κατάταξης, η οποία και επιτυγχάνεται αριθμητικά μέσω των παραγόντων των προϊόντων. Η αναγκαιότητα όμως της φυσικής διάταξης, επιβάλλει τον μετασχηματισμό της βαρυκεντρικής κλίμακας σε αντίστοιχη φυσική. Η αλλαγή κλίμακας, μπορεί να ερμηνευθεί σαν αντικατάσταση των αρνητικών τιμών των παραγόντων από αντίστοιχες θετικές (και διάφορες του μηδενός). Η αντικατάσταση των τιμών, γίνεται εύκολα με την χρήση ομοθεσίας, δηλ. με την γεωμετρική μεταφορά του συνόλου των τιμών του κάθε παράγοντα, κατά ένα διάστημα που θα εξασφαλίζει το θετικό πρόσημο των τιμών. Το διάστημα αυτό, είναι κατά μία μονάδα μεγαλύτερο από την απόσταση της πιο ακραίας (αρνητικά) τιμής από την αρχή των αξόνων. Η προτεινόμενη αλλαγή κλίμακας, δεν αλλοιώνει τις διαφορές των αποστάσεων, μεταξύ των παραγόντων.

Για την συγκεκριμένη εφαρμογή, έχουμε τρεις παραγοντικούς άξονες καθώς και τρεις διαφορετικές διατάξεις. Οι διατάξεις αυτές είναι οι εξής:

1ος παραγοντικός άξονας:

(-639) A_6<(-230)A_4<(-101)A_1<(240)A_5<(301)A_2<(408)**A_3**

2ος παραγοντικός άξονας:

(-399)A_2<(-247)A_6<(-37)A_3<(109)A_1<(269)A_5<(313)**A_4**

3ος παραγοντικός άξονας: (Η ερμηνεία του άξονα, επιβάλλει την αλλαγή της κατεύθυνσης του πρόσημου)

(-241)A_1<(-181)A_5<(-125)A_6<(-82)A_3<(220)A_2<(366)**A_4**

Το προϊόν A_3 θεωρείται το καλύτερο για τον 1ο παραγοντικό άξονα, ενώ στον 2ο και 3ο παραγοντικό άξονα την θέση αυτή καταλαμβάνει το προϊόν A_4.

Ο μετασχηματισμός της κλίμακας των αξόνων, απαιτεί την εισαγωγή του διαστήματος (639+1=640) για τον 1ο άξονα, του διαστήματος (399+1=400) για τον 2ο άξονα και του διαστήματος (241+1=242) για τον 3ο άξονα. Οι νέες τιμές των προϊόντων στους τρεις άξονες είναι οι εξής:

1ος παραγοντικός άξονας:

(-639+640=**1**)A_6, (-230+640=**410**)A_4, (-101+640=**539**)A_1,
(246+640=**886**)A_5, (301+640=**941**)A_2, (408+640=**1048**)**A_3**

2ος παραγοντικός άξονας:

(-399+400=**1**)A_2, (-247+400=**153**)A_6, (-37+400=**363**)A_3,
(109+400=**509**)A_1, (269+400=**669**)A_5, (313+400=**713**)**A_4**

3ος παραγοντικός άξονας:

(-241+242=**1**)A_1, (-181+242=**61**)A_5, (-125+242=**117**)A_6,
(-82+242=**160**)A_3, (220+242=**462**)A_2, (366+242=**608**)**A_4**

Οι διατάξεις των προϊόντων επί των παραγοντικών αξόνων (είτε με την μορφή των παραγόντων του είτε με τις μετασχηματισμένες τιμές τους), προσδιορίζονται ως διατάξεις αποστάσεων. Συγχρόνως όμως, οι διατάξεις αυτές προσδιορίζουν και την διάταξη της προτίμησης που εκφράζει το σύνολο των ατόμων για τα προϊόντα. Η

προτίμηση εκφράζεται υπό την προοπτική του σύνθετου κριτηρίου που ερμηνεύει ο κάθε παραγοντικός άξονας. Η κλίμακα των αξόνων δεν είναι σταθερή παρά προσδιορίζεται από την τετραγωνική ρίζα της αντίστοιχης ιδιοτιμής ($\sqrt{\lambda_\alpha}$) (τυπική απόκλιση του παράγοντα). Κατ' αυτόν τον τρόπο, οι μετασχηματισμένες τιμές των παραγόντων των προϊόντων, μπορούν να θεωρηθούν ως μετρήσεις στην κλίμακα που υπαγορεύει ο άξονας-κριτήριο. Οι τιμές αυτές μπορούν να ταξινομηθούν σε έναν νέο πολυκριτήριο πίνακα 6×3, με τις γραμμές να αντιστοιχούν στα προϊόντα και τις στήλες στις νέες τιμές των παραγόντων (Πίνακας 4).

Πίνακας 4: Πολυκριτήριος πίνακας των προϊόντων και των μετασχηματισμένων τιμών των παραγόντων

	Παρ.1	**Παρ.2**	**Παρ.3**
A_1	539	509	1
A_2	941	1	462
A_3	1048	363	160
A_4	410	713	608
A_5	886	669	61
A_6	1	153	117
	45	**23**	**17**

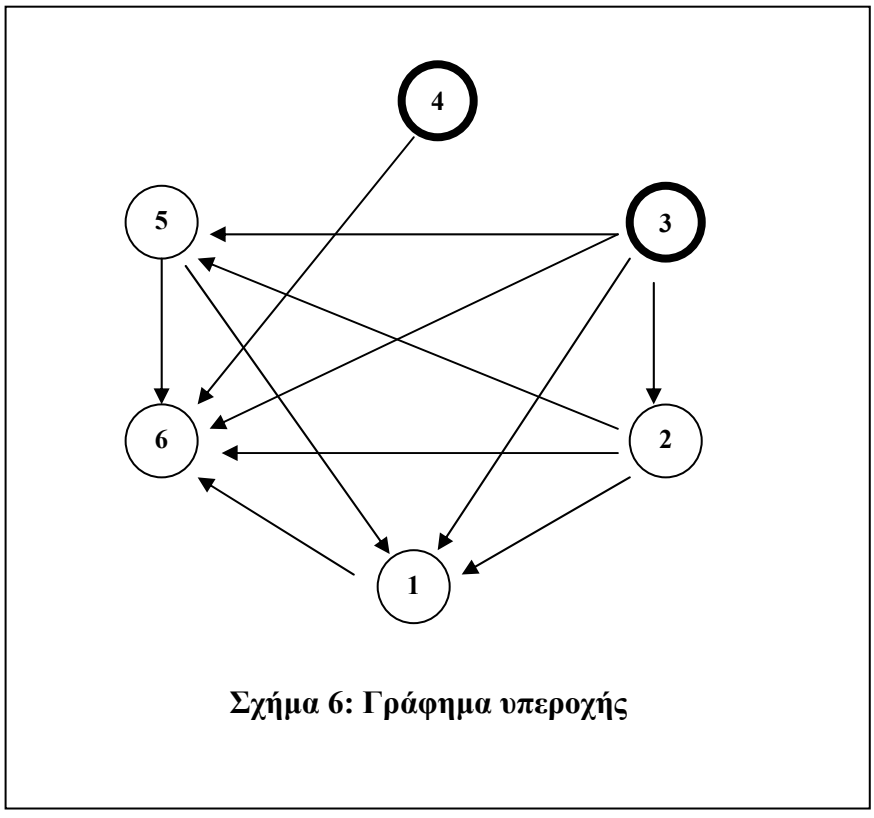
Στην συνέχεια αναλύουμε τον παραπάνω πίνακα προτιμήσεων με την μέθοδο ELECRE Is. Η μόνη παρέμβαση που γίνεται στην μέθοδο αυτή, αφορά τον καθορισμό των βαρών .Ως βάρη των κριτηρίων (αξόνων), ορίζονται τα *στρογγυλοποιημένα* ποσοστά ιδιοτιμής που αντιστοιχούν στους άξονες και προσδιορίζουν την σημαντικότητα τους. Ορίζουμε δηλ. ως βάρος για τον $1^ο$ άξονα τον αριθμό 45, για τον $2^ο$ τον 23 και για τον $3^ο$ το 17.

Στο πρώτο στάδιο εφαρμογής της μεθόδου ELECRE Is, παίρνουμε τον παρακάτω πίνακα υπεροχής 6×6 (Πίνακας 5). Ο πίνακας είναι δυαδικός (0,1) με τις γραμμές και τις στήλες να αντιστοιχούν στα προϊόντα.

Πίνακας 5: Πίνακας Υπεροχής

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_1	0	0	0	0	0	1
A_2	1	1	0	0	1	1
A_3	1	1	1	0	1	1
A_4	0	0	0	1	0	1
A_5	1	0	0	0	1	1
A_6	0	0	0	0	0	1

Από τον πίνακα αυτό, οδηγούμαστε στο ακόλουθο γράφημα υπεροχής (Σχήμα 6):



Σχήμα 6: Γράφημα υπεροχής

Το εικονιζόμενο γράφημα υπεροχής είναι και το τελικό γράφημα, καθώς αναδεικνύει το «βέλτιστο» υποσύνολο των προϊόντων, τα οποία δεν κυριαρχούνται από τα υπόλοιπα. Το υποσύνολο αυτό αποτελείται από τα προϊόντα **{A_3,A_4}**, και συνιστά τον πυρήνα του γραφήματος υπεροχής. Η ταύτιση του πυρήνα με την

βέλτιστη προτίμηση για κάθε παραγοντικό άξονα, είναι προφανής: το προϊόν A_3 κρίθηκε καλύτερο για τον $1^ο$ παραγοντικό άξονα και αντίστοιχα το προϊόν A_4 κρίθηκε καλύτερο για τους επόμενους δύο.

4. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η εφαρμογή αυτή, βασίζεται στην προσέγγιση του προηγούμενου κεφαλαίου. Τα συμπεράσματα της εφαρμογής, θα βασιστούν σε τρεις παρατηρήσεις που δεν έχουν να κάνουν με θεωρίες, αλλά μόνο με πρακτικά ζητήματα.

- Ο τρόπος ερμηνείας των παραγοντικών αξόνων είναι χαρακτηριστικός της Παραγοντικής Ανάλυσης των Αντιστοιχιών. Οι άξονες μπορεί να ερμηνεύονται από συγκεκριμένες κλάσεις κριτηρίων, αλλά η ανάδειξη του σύνθετου κριτηρίου, που αντιστοιχεί στον άξονα, δεν έχει απαραίτητα άμεση σχέση με αυτές τις κλάσεις. Τις περισσότερες φορές, το κριτήριο αυτό αναφέρεται σε κρυμμένες πτυχές των δεδομένων και υποδεικνύει την ανεξάρτητη μεταβλητή με την οποία είναι περισσότερο συσχετισμένες οι κλάσεις. Δεν είναι παράξενο λοιπόν, που τα ονόματα των αξόνων (Marketting, Οικονομικός Ι, Οικονομικός ΙΙ) δεν αναφέρονται ευθέως σε συγκεκριμένες κλάσεις.

- Η μέθοδος εφαρμόζεται σε συγκεκριμένο δείγμα ατόμων, και αναδεικνύει τις κατευθύνσεις των προτιμήσεων, που εκφράζει αυτό το δείγμα. Οι κατευθύνσεις αυτές έχουν άμεση σχέση με την κατάρτιση των ερωτηματολογίων.

- Η πολυκριτήρια προσέγγιση της Παραγοντικής Ανάλυσης των Αντιστοιχιών προσφέρει ένα εύκολο και άμεσο εργαλείο υποστήριξης αποφάσεων. Η διαδικασία που προτείνεται δεν είναι μηχανική. Αντίθετα απαιτεί, απαραίτητα, την συμμετοχή του ανθρώπινου παράγοντα.

Βιβλιογραφία

Α. ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Κάλφα, Κ., *Εισαγωγή στην Θεωρία Δικτύων*, Ζήτη, Θεσσαλονίκη, (1995)

Κουνιάς, Σ., Κολυβά-Μαχαίρα, Φ., Μπαγιάτης, Κ., Μπόρα-Σέντα, Ε., *Εισαγωγή στην Στατιστική,* Χριστοδουλίδη, Θεσσαλονίκη, (1990)

Κουνιάς, Σ., Μωυσιάδης Χ., *Πιθανότητες Ι (Θεωρία και Ασκήσεις)*, Ζήτη, Θεσσαλονίκη, (1991)

Κουνιάς, Σ., Καλπαζίδου, Σ., *Πιθανότητες ΙΙ (Θεωρία και Ασκήσεις)*, Ζήτη, Θεσσαλονίκη, (1991)

Κουτσουπιάς, Ν., *Λογισμικό Ανάλυσης Δεδομένων: Τριδιάστατοι πίνακες συχνοτήτων, Ανάλυση Αντιστοιχιών, Ιεραρχική Ταξινόμηση. Οδηγός Χρήσης,* Παρατηρητής, Θεσσαλονίκη, (1999)

Λάκκη, Κ., *Άλγεβρα*, Τμήμα Μαθηματικών Αριστοτελείου Πανεπιστημίου, Θεσσαλονίκη, (1993)

Μποζαπαλίδης, Σ.Μ., *Εισαγωγή στην Γραμμική Άλγεβρα*, Τμήμα Μαθηματικών Αριστοτελείου Πανεπιστημίου, Θεσσαλονίκη, (1994)

Μποζαπαλίδης, Σ.Μ., *Γραμμική Άλγεβρα (Μέρος, Β),* Τμήμα Μαθηματικών Αριστοτελείου Πανεπιστημίου, Θεσσαλονίκη, (1984)

Παπαδημητρίου, Γ., *Περιγραφική Στατιστική*, Παρατηρητής, Θεσσαλονίκη, (1986)

Παπαδημητρίου, Γ., *Επαγωγική Στατιστική*, Παρατηρητής, Θεσσαλονίκη, (1989)

Παπαδημητρίου, Γ., *Μέθοδοι Ανάλυσης Δεδομένων (Πανεπιστημιακές Παραδόσεις)*, Πανεπιστήμιο Μακεδονίας, Θεσσαλονίκη, (1994)

Σίσκος, Γ., *Γραμμικός Προγραμματισμός,* Εκδόσεις Νέων τεχνολογιών, Αθήνα, (1998)

Στεφανίδης, Ν.Κ., *Εισαγωγή στην Γεωμετρία*, Τμήμα Μαθηματικών Αριστοτελείου Πανεπιστημίου, Θεσσαλονίκη, (1993)

Φλώρου, Γ., *Προσδιορισμός της Ιδανικότερης μετρικής απόστασης και καλύτερου τρόπου ομαδοποίησης στις διάφορες μεθόδους της Αυτόματης Ταξινόμησης κατά Αύξουσα Ιεραρχία (Διδακτορική διατριβή),* Πανεπιστήμιο Μακεδονίας, Θεσσαλονίκη, (1997)

Β. ΞΕΝΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Arrow, K.J., A difficulty in the concept of social welfare, *J. Political Economy*, 58, (1950), 328-346,

Arrow, K.J., *Social choice and individual values,* 2nd edition, John Wiley and Sons, New York, (1963)

Baourakis, G., Matsatsinis, N. F., Siskos, Y., Agricultural product development using multidimensional and multicriteria analysis; the case of wine, *European Journal of Operational Research*, 94(2), (1996), 321-34,

Barbut, M., Moujardet B., *Ordre et classification, algebre et combinatoire*, t. I et II, Paris, Hachette Universite, (1970)

Bastin, Ch., Benzecri, J.-P., Bourgarit, Ch., Cazes, P., *Pratique de l' Analyse des donnees: Abrege theorique etudes de cas modele*, Dunod, Paris, (1980)

Benzecri, J-P (ed.)*, L'analyse des donnes –Tome 1 : La Taxinomie ,* Dunod, Paris, (1973)

Benzecri, J-P (ed.)*, L'analyse des donnes –Tome 1 : L' analyse des correspondances ,* Dunod, Paris (2nd edition),(1976)

Benzecri, J.-P., *Pratique de l' Analyse des donnees: Analyse des Correspondances & Classification expose elementaire* , Dunod, Paris, (1984),

Benzecri, J.-P., *Correspondence Analysis Handbook*, Marcel Dekker-Inc, New York, (1992)

Berge, C., *Graphes et hypergraphes* , Dunod, Paris, (1973)

Bertier, P., Bouroche, J.-M., *Analyse des donnees multidimensionnelles*, Press Universitaires de France, Paris, (1975)

Birkhoff, L.-N., *Lattice Theory*, 3rd Edition, Providence, R. I. American Mathematical Society, (1973)

Bouroche, J.M., *Analyse des donnees en Marketing,* Masson, 1997

Bouyssou, D., Building criteria: a prerequisite for MCDA, in C.A. Bana e Costa (ed.), *Readings in Multiple Criteria Decision Aid,* Springer-Verlag, Berlin, (1990), 184-215

Brans, J.P., Mareschal, B., The PROMETHEE methods for MCDM; The PROMCALC, GAIA and BANKADVISER software, in C.A. Bana e Costa (ed.), *Readings in Multiple Criteria Decision Aid,* Springer-Verlag, Berlin, (1990), 216-251

Cailliez F., Pages J.-P., *Introduction a l' analyse des donnees*, Smash, Paris, (1976)

Cambell, N.R., *Symposium: Measurement and Its Importance for Philosophy,* Aristotelian Society, Suppl. Vol 17, Harisson, London, p.126, (1938)

Cantor, G., Beitrage zur Begrundung des tranfiniten Mengenlehre, *Math. Ann.*, 46, 481-512, (1895)

Caroll, J.D., *Individual differences and multidimensional scaling,* polycopie, Bell Laboratories, (1970)

Chankong, V., Haimes, Y.Y., *Multiobjective decision making: Theory and methodology,* North-Holland Publishing Company, New York, (1983)

Christofides, N., *Graph theory – An algorithmic approach,* Academic Press Inc., London, (1975)

Churchman, C.W., *The Systems Approach,* Dell, New York, (1968)

Condorcet, M.J.A.N.C. (Marquis de), *Essais sur l' application de l'analyse a la probabilite des decisions rendues a la pluralite des voix,* Paris, (1785)

Debreu, G., Representation of a preference ordering by a numerical function, in *Decision Process,* (R.M. Thrall, C.H. Coombs and R.L. Davis, eds*.)*, Wiley, New York, (1954), 159-166

Debreu, G., *Theory of Value: An axiomatic analysis of economic equilibrium*, Yale University Press, New Heaven and London,(1959)

Debreu, G., Continuity properties of paretian utility, *International Economic Review*, 5, (1964), 285-293,

Diday, E., *Nouvelles metodes et nouveaux concepts en classification automatique et reconnaissance des formes,* these de doctorat d' Etat Universite de Paris VI, (1972)

Diday, E., Lemaire J., Pouget J., Testu F., *Elements d' Analyse de donnees,* Bordas, Paris, 1982

Droesbeke, J-J., Fichet, B., Tassi, P., *Modeles pour l'analyse des donnees multidimesionelles,* Economica, Paris, (1992)

Dyer, J., Sarin, R.K., Measurable multiattribute value functions*, Operations Research,* 27, (1979), 810-822

Edwards, W. (ed.), *Utility theories: Measurements and applications*, Kluwer Academic Publishers, (1992)

Eilenberg, S., Ordered topological spaces, *American Journal of Mathematics*, 63, (1941), 39-45,

Escofier, B., Pages, J., *Analyses factorieles simples et multiples : objectifs, methods et interpretation*, Dunod, Paris, (1990)

Everitt, B.-S., *The Analysis of Contingency Tables,* Chapman and Hall, London, (1977)

Fishburn, P.C., *Utility Theory For Decision Making,* Wiley, New York, (1970)

Fishburn, P.C., Additive representations of real-valued functions on subsets of product sets, *Journal of Mathematical Psychology,* 8, (1971), 382-388

Fishburn, P.C., *Les mathematiques de la decision*, Gauthier-Villars, Paris, (1973)

Fishburn, P.C., *The Theory of Social Choice,* Princeton University Press, Princeton, New Jersey, (1973)

Fisher, R.A., *Statistical Methods for Research Workers*, Oliver and Boyd, Edinburgh, (1950)

Greenacre, M.J., *Correspondence Analysis in Practice*, Academic Press, London, (1993)

Greenacre, M.J., *Theory and Applications of Correspondence Analysis*, Academic Press, London, (1984)

Guttman, L., A general non metric technique for finding the smallest coordinate space for a configuration of points*, Psychometrica*, vol. 33, (1963), 469-506

Harary, F., A graph theoretic approach to similarity relations, *Psychometrica,* Vol 29, n^{o} 2, (1964)

Herden, G., On some equivalent approaches to Mathematical Utility Theory, *Journal of Mathematical Social Sciences*, 29, (1995), 19-31

Herden, G., Pallack, A., *Consistency in ordinal data analysis II. Preprint*, University of Essen, Germany, (2001a)

Herden, G., Pallack, A., *Consistency in ordinal data analysis III. Preprint*, University of Essen, Germany, (2001b)

Herden, G., Pallack, A., Consistency in ordinal data analysis I*, Journal of Mathematical social sciences*, 43, (2002), 79-113

Hoffman, D.L., Franke, G.R., Correspondence analysis: graphical representation of categorical data in marketing research, *Journal of Marketing Research*, 23, (1986), 213-227

Horst, P., Relations between m sets of measures, *Psychometrica*, Vol. 26, (1961)

Hotteling, H., Analysis of a complex of statistical variables into principal components, *Journal of Educational Psychology*, Vol .24, (1933)

Howard, N., Least squares classification and principal component analysis: a comparison in *Quantitative ecological analysis in the social sciences* (M.Dogan & S.Rokkan, eds.), Cambridge, M.I.T. Press, (1969)

Huggonard, J., Roy, B., Ranking of suburban line extension projects for the Paris metro system by a multicriteria method, *Transportation Research*, 16A, (1982), 301-312

Jambu, M., *Classification Automatique pour l' Analyse des Donnees, I-Methodes et algorithms,* Paris, Dunod, (1978)

Jambu, M., Lebeaux, M.-O., *Classification automatique pour l' analyse des donnees : 2- logiciels*, Dunod, Paris, (1978)

Jacquet-Lagreze, E., Siskos, J., Assessing a set of additive utility functions for multicriteria decision – making, the UTA method, *European Journal of Operational Research*, 10, (1982), 151-164,

Jacquet-Lagreze, E., An application of the UTA discriminant model for the evaluation of R & D projects, in *Advances in Multicriteria Analysis* (P.M. Pardalos, Y.Siskos, C. Zopounidis, eds.), Kluwer Academic Publishers, (1995), 203-211

Johnson, R., Wichern, D., *Applied Multivariate Statistical Analysis, 3rd Edition*, Prentice-Hall Inc., New Jersey, (1992).

Keeney, R.L., Raiffa, H., *Decisions with multiple Objectives,* Wiley, New York, (1976)

Keeney, R., *Value – focused thinking: A path to creative decision making,* Harvard U.P., London, (1992)

Kendall, M.G., Stuart A., *The advanced theory of statistics*, 3 tomes, London, Griffin, (1958-1966)

Kendall, M.G., *Rank correlation methods*, London, Griffin, 1962

Krantz, D. H., Luce, D. R., Suppes, P., Tversky, A., *Foundations of Measurement*, Vol I, Academic Press, New York, (1971)

Krantz, D. H., Luce, D. R., Suppes, P., Tversky, A., *Foundations of Measurement*, Vol II, Academic Press, San Diego, (1989)

Krantz, D. H., Luce, D. R., Suppes, P., Tversky, A., *Foundations of Measurement*, Vol III, Academic Press, San Diego, (1990)

Kruskal, J.B., Multidimensional scaling by optimizing goodness of fit to a nonmetric hypothesis, *Psychometrica*, vol. 29, (1964), 1-27

Kruskal, J.B., Nonmetric multidimensional scaling: a numerical method, *Psychometrica*, vol.29, (1964), 115-129

Kullback, S. *Information theory and Statistics,* Wiley, New York, (1977)

Lancaster, H.O., *The chi-squared distrib*ution, New York, Willey, (1969)

Lebart, L., Fenelon, J.P., *Informatique et statistique appliquees*, Dunod, Paris, (1979)

Lebart, L., Morineau, A., Fenelon, J.P., *Traitement des donnees statistiques,* Dunod, Paris, (1979)

Lebart, L., Morineau, A., Tabard, N., *Techniques de la descriprtion statistique,* Dunod, Paris, (1979)

Lebart, L., Complementary Use of Correspondence Analysis and Clusters Analysis in *Correspondence Analysis in the Social Sciences* (Greenacre, M., Blasius, J., eds.), Academic Press, London, (1994)

Lerman, I., *Les bases de la classification automatique,* Gauthier–Villars, Paris, (1970)

Lerman, I., *Classification et Analyse ordinale des donnees,* Dunod, Paris, (1981)

Luce, R.D., Raiffa, H., *Games and decisions: Introduction and Critical Survey,* Wiley, New York, (1957)

Matsatsinis, N.F., Avgerinopoylos, E., Baourakis, G., Data Analysis methods applied to agricultural marketing, in *Advances in Stochastic modeling and Data Analysis*, (Janssen, J., Skiadas C. H., Zopounidis C., eds.), Kluwer, Dordecht, (1995)

Mood, A.M., Graybill, F.A., *Introduction to the Theory of Statistics*, Mc Craw-Hill, New York, (1963)

Moscarola J., Roy, B., Procedure automatique d' examen de dossiers foudee sur un classement trichotomique en presence de criteres multiples, *Revue Francaise d' Informatique et de Rechearche Operationelle,* 22,2, (1977)

Mousseau, V., Elicitating information concerning the relative importance of criteria, in *Advances in Multicriteria Analysis* (P.M. Pardalos, Y.Siskos, C. Zopounidis, eds.), Kluwer Academic Publishers, (1995), 17-43

Murakami, Y., Formal structure of majority decision, *Econometrica,* 34, (1966), 709-718

Nishisato, S., *Analysis of Categorical Data: Dual scaling and its Applications,* University of Toronto Press, (1980)

Paruccini, M., (ed.), *Applying multiple criteria aid for decision to environmental management,* Kluwer Academic Publishers, (1994)

Pearson, K., On a criterion that a given system of deviations from the probable case of a correlated system of variables is such that it can be reasonably supposed to have arisen from a random sampling, *Philos. Mag,* 5(50), (1900), 157-175

Pearson, K., On the Theory of Contingency and Its Relation to association and Normal Correlation, *Drapers' Co. Memoirs, Biometric Series No. 1*, London, (1904),

Peyroux C., " *Agregation d' opinions individuelles*" These de 3 eme cycle, Univ. de Paris 6, (1975)

Raiffa, H., *Decision analysis – Introductory lectures on choice under uncertainty*, Addison-Wesley, Reading, (1970)

Raikov, D.A., *Vector Spaces*, P. Noordhoff Ltd, Groningen, (1965)

Regnier, S., *Partitions R-adjacentes,* Note interne 78, Centre de Mathematiques Appliquees et de Calcul (Maisson des Sciences de l' Homme), Paris, (1971)

Roberts, F.S., *Measurement Theory with Applications to Decision Making, Utility and The Social Sciences*, Addison-Wesley, London, (1979)

Roberts, F.S., Applications of the theory of meaningfulness to psychology, *Journal of Mathematical Psychology*, 29, (1985), 311-332

Roubens, M., Preference relations on actions and criteria in multicriteria decision making, *European Journal of Operational Research*, 10, (1982), 51-55

Roubens, M., Vincke, Ph., *Preference Modelling*, Springer-Verlag, Berlin, (1985)

Roux, M., *Algorithmes de classification*, Masson, Paris, (1985)

Roy, B., Classement et choix en presence de points de vue multiple, (La methode ELECTRE), *RIRO*, (1968), 57-55

Roy, B., *Algebre moderne et theorie des graphes orientees vers les sciences economiques et sociales,* t. I et II, Dunod, Paris, (1969-1970)

Roy, B., Decision avec criteres multiples : problems et methodes, *Revue METRA*, vol. XI, n^{o} 1, (1972)

Roy, B., Bertier, P., La methode ELECTRE II: une application au media-planning, in *VIIeme Conference Internationale de Recherche Operationnele, Dublin* (M. Ross, ed.), OR72, North-Holland, Amsterdam, (1972), 291-302

Roy, B., How outranking relation helps multiple criteria decision making, in *Multiple Criteria decision Making, (J. Cochrane, M.Zeleny, eds.)*, Univ. of South Carolina Press, Columbia, (1973), 179-201

Roy, B., ELECTRE III: Un algorithme de classements fonde sur une representation floue de criteres multiples, *Cahier du CERO*, 20, (1978), 3-24

Roy, B., Skalka, J.M., ELECTRE IS – Aspects methodologiques et guide d' utilization, *Document du LAMSADE*, n^{o} 30, (1984)

Roy, B. (a), Decision – aid and decision making, in C.A. Bana e Costa (ed.), *Readings in Multiple Criteria Decision Aid,* Springer-Verlag, Berlin, (1990), 184-215

Roy, B. (b), The outranking approach and the foundations of ELECTRE methods, in C.A. Bana e Costa (ed.), *Readings in Multiple Criteria Decision Aid,* Springer-Verlag, Berlin, (1990), 184-215

Roy, B., *Multicriteria Methodology for Decision Aiding*, Kluwer, Dordrecht, (1996)

Russell, B., *The Principle of mathematics,* Norton, New York, (1938)

Saaty, T.L., *The Analytic Hierarchy Process*, Mc Craw Hill, New York, (1980)

Sage A.P., *Methodology for Large Scale Systems,* McGraw-Hill, New York, (1977)

Saporta G., *Probabilities, analyse des donnees et statistique,* Technip, (1989)

Sarin, R., Conjoint measurement: theory and methods, in C.A. Bana e Costa (ed.), *Readings in Multiple Criteria Decision Aid,* Springer-Verlag, Berlin, 184-215, (1990),

Savage, L.J., *The Foundations of Statistics,* Wiley, New York, (1954)

Sen, A.K., *Collective choice and social welfare*, Holden-Day, San Francisco, (1970)

Shepard, R.N., Metric structures in ordinal data, *Journal of Mathematical Psychology,* 3, (1966)

Shepard, R.N., Representation of structure in similarity data: problems and prospects, *Psychometrica*, Vol 39, n^{o} 4, (1974)

Siskos, Y., Yannacopoulos, D., UTASTAR, an ordinal regression method for building additive value functions, *Investigacao Operational 5,* no 1, (1985), 39-53

Siskos, Y., Grigoroudis, E., Matsatsinis, N.F., Baourakis, G.H., Comparative behavioral analysis of European oil consumers, in *Advances in Stochastic modelling and Data Analysis* (Janssen, J., Skiadas, C.H., Zopounidis, C., eds.), Kluwer, Dordecht, (1995)

Siskos, Y., Spyridakos, A. Intelligent multicriteria decision support: Overview and perspectives, *European Journal of Operational Research*, (1999), 236-246

Schiffman S., Reynolds M., Young F., *Introduction to multidimensional scaling,* New York Academic Press, (1981)

Stevens S.S., Mathematics, measurement and psychophysics, in *Handbook of Experimental Psychology* (S.S. Stevens, ed.), Wiley, New York, (1951)

Suppes, P., Winer, M., An axiomatization of utility based on the notion of utility differences, *Management Science*, 1, (1955), 259-270

Szpilrajn, E., Sur l' extension de l' ordre partiel, *Fundamenta Mathematicae,* 16, (1930), 386-389

Thurstone, L.L., *Multiple – Factor Analysis*, Univ. of Chicago Press, Chicago, (1947)

Tremolieres, R., *Partager le plain,* Editions Robert Laffont, Paris, (1975)

Volle, M., *Analyse des donnees*, Economica, Paris, (1985)

Vanderpooten, D., The construction of prescriptions in outranking methods, in C.A. Bana e Costa (ed.), *Readings in Multiple Criteria Decision Aid,* Springer-Verlag, Berlin, (1990), 184-215

Vasnick, J.C., Measurement theory and decision aid, in C.A. Bana e Costa (ed.), *Readings in Multiple Criteria Decision Aid,* Springer-Verlag, Berlin, (1990), 449-463

Vincke, Ph., *Multicriteria decision aid*, Wiley, Chichester, (1992)

Vincke, Ph., Preferences and numbers in *A-MCD-A (Multiple criteria Decision Making)* (Colorni, A., Paruccini, M., Roy, B., eds.), Luxembourg, European Communities, (2001), 355-372

Von Neumann, J., Morgenstern, O., *Theory of games and economic behavior*, 4rh edition, Princeton University Press, Princeton, (1980)

Ward, J.H., Hierarchical grouping to optimize an objective function, *Journal of American Statistical Association*, Vol 5, (1963)

Whittaker, L.L., *Graphical Models in Applied Multivariate Statistics,* Wiley, New York, (1990)