

■ **ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΕΝΟΣ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΟΣ ΜΑΡΚΟΒΙΑΝΗΣ ΑΛΛΑΓΗΣ ΚΑΘΕΣΤΩΤΟΣ ΣΤΙΣ ΜΗΝΙΑΙΕΣ ΑΠΟΔΟΣΕΙΣ ΤΟΥ Χ.Α.Α.**

**Αθανάσιος Νούλας**

*Καθηγητής*

Τμήμα Λογιστικής και Χρηματοοικονομικής  
*Πανεπιστήμιο Μακεδονίας*

**Γιάννης Παπαναστασίου**

*Επίκουρος Καθηγητής*

Τμήμα Λογιστικής και Χρηματοοικονομικής  
*Πανεπιστήμιο Μακεδονίας*

## **Περίληψη**

Στην παρούσα εργασία εφαρμόζεται ένα υπόδειγμα Μαρκοβιανής αλλαγής καθεστώτων για τις μηνιαίες αποδόσεις του Χρηματιστηρίου Αθηνών (X.A). Το υπόδειγμα Μαρκοβιανής αλλαγής καθεστώτος, σε αντίθεση με τα κλασσικά γραμμικά υποδείγματα, είναι επαρκές για την μοντελοποίηση ιδιαίτερων χαρακτηριστικών των χρηματοοικονομικών σειρών. Οι αποδόσεις του X.A μοντελοποιούνται σαν μια στοχαστική διαδικασία αλλαγής καθεστώτος Διαπιστώνεται ότι η μέση περίοδος θετικών μέσων αποδόσεων είναι αρκετά βραχύβια συγκρινόμενη με αυτή των αρνητικών μέσων αποδόσεων.

## **Λέξεις κλειδιά**

Μαρκοβιανή αλλαγή καθεστώτος, χρηματιστηριακή απόδοση, στοχαστική διαδικασία.

## 1. Εισαγωγή

Η εφαρμογή μη-γραμμικών υποδειγμάτων στις οικονομικές χρονοσειρές έχει γίνει μια συνήθης πρακτική τα τελευταία χρόνια. Συγκεκριμένα, τα υποδείγματα Μαρκοβιανής αλλαγής καθεστώτος (Markov Switching Regime Models), έχουν γίνει ιδιαίτερα δημοφιλή μετά την εμφάνιση του σημαντικού άρθρου του Hamilton (1989). Αυτά τα υποδείγματα έχουν εφαρμοστεί με επιτυχία στη μοντελοποίηση των επιχειρηματικών κύκλων της οικονομίας π.χ. Ferrara (2003), Moolman (2004).

Στην παρούσα εργασία εφαρμόζεται ένα υπόδειγμα Μαρκοβιανής αλλαγής καθεστώτων για τις μηνιαίες αποδόσεις του Χρηματιστηρίου Αξιών Αθηνών.

## 2. Το υπόδειγμα

Το υπόδειγμα Μαρκοβιανής αλλαγής καθεστώτος, σε αντίθεση με τα κλασσικά γραμμικά υποδείγματα, είναι επαρκές για τη μοντελοποίηση ιδιαίτερων χαρακτηριστικών των χρηματοοικονομικών σειρών όπως για παράδειγμα οι συχνές μεταβολές του μέσου. Έστω ότι οι παρατηρήσεις  $\{Y_t\}$ ,  $t = 1, \dots, T$ , μπορούν να ερμηνευτούν ικανοποιητικά με τη χρήση μιας αυτοπαλινδρόμενης, (AR), διαδικασίας της οποίας οι παράμετροι ή/και η τυπική απόκλιση ή/και ο μέσος μεταβάλλονται διαχρονικά. Γενικά, η διαχρονική εξέλιξη ερμηνεύεται από μια μη-παρατηρούμενη μεταβλητή  $S_t$  η οποία είναι ανεξάρτητη όλων των παρελθοντικών παρατηρήσεων  $Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_1$ . Υποτίθεται ότι η άγνωστη μεταβλητή  $S_t$  ακολουθεί μια Μαρκοβιανή αλυσίδα πρώτου βαθμού με  $K$  καθεστώτα. Έτσι το υπόδειγμα αυτό ορίζεται σαν μια διαδικασία MS-AR.

Για παράδειγμα αν η σειρά  $\{Y_t\}$  ερμηνεύεται από ένα αυτοπαλινδρόμενο υπόδειγμα με  $p$  χρονικές υστερήσεις και ο μέσος της σειράς ανήκει σε  $K$  διαφορετικά καθεστώτα τότε το υπόδειγμα  $MSM(K)-AR(p)$  δίνεται από την εξίσωση:

$$Y_t - \mu(S_t) = \sum_{i=1}^p \beta_i [Y_{t-i} - \mu(S_{t-i})] + \varepsilon_t \quad (1)$$

όπου η τυχαία μεταβλητή  $\varepsilon$ , έχει τις κλασσικές ιδιότητες της κανονικής κατανομής καί της διαδικασίας άσπρου θορύβου,  $\beta_i$  είναι οι συντελεστές της AR διαδικασίας,  $\mu$  ο μέσος της σειράς καί  $S_t$  η άγνωστη διακριτή που περιγράφει το τρέχον καθεστώς στο οποίο ανήκει ο μέσος της σειράς,  $S_t \in \{1, \dots, K\}$ ,  $\forall t$ , όπου  $K$  ο αριθμός των καθεστώτων.

Επειδή η  $S_t$  υποτίθεται ότι ακολουθεί μια Μαρκοβιανή αλυσίδα πρώτου βαθμού με  $K$  καθεστώτα, αυτό συνεπάγεται ότι η τιμή της σειράς  $S_{t-1}, \forall t$ , εξαρτάται μόνο από την προηγούμενή της τιμή  $S_{t-1}$ . Επομένως για οποιαδήποτε καθεστώτα  $m, n = 1, \dots, K$  δίνονται οι πιθανότητες:

$$\text{P}(S_t = n | S_{t-1} = m, S_{t-2} = m, \dots) = \text{P}(S_t = n | S_{t-1} = m) = \rho_{nm}$$

όπου φυσικά ισχύει  $\sum_{m=1}^K \rho_{nm} = 1$ .

Οι πιθανότητες  $\rho_{nm}$ ,  $m, n = 1, \dots, K$ , καλούνται πιθανότητες μετάβασης (transition probabilities) γιατί δείχνουν την πιθανότητα μετάβασης από το ένα καθεστώς,  $m$ , στο άλλο καθεστώς,  $n$ .

Οι εκτιμήσεις των δεσμευμένων πιθανοτήτων:

$$\text{P}(S_t = n | Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_1) \text{ καί } \text{P}(S_t = n | Y_T, \dots, Y_1)$$

αναφέρονται ως “φιλτραρισμένες” (filtered probabilities) καί “ομαλοποιημένες” (smoothed probabilities) πιθανότητες αντίστοιχα. Αυτές οι πιθανότητες χρησιμοποιούνται για την ex-post εύρεση των σημείων αλλαγής καθεστώτος.

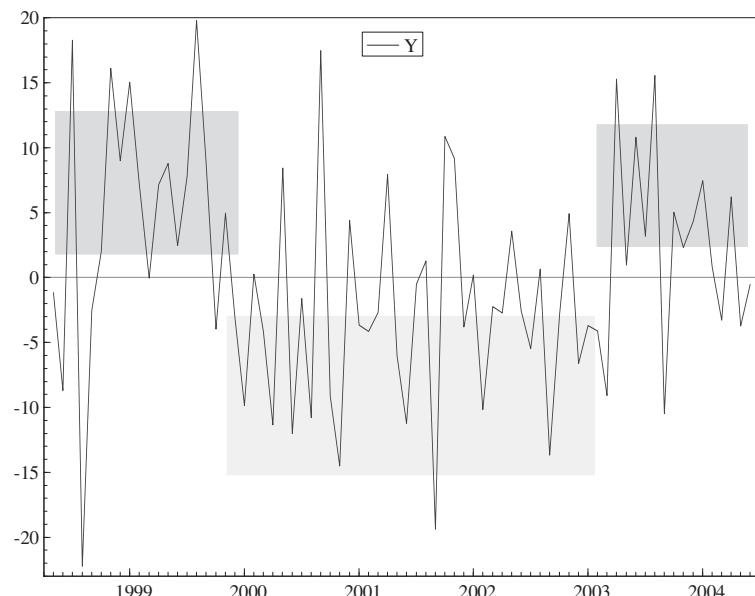
Στο διάγραμμα 1 απεικονίζονται οι ποσοστιαίες αποδόσεις του ΧΑΑ. από τον Μάιο του 1998 μέχρι τον Ιούνιο του 2004.

Όπως δείχνουν οι σκιασμένες περιοχές, οπτικά η μηνιαία απόδοση του χρηματιστηρίου μπορεί να χωριστεί σε δύο φάσεις (καθεστώτα). Το ένα καθεστώς χαρακτηρίζεται από αρνητικές κατά μέσο όρο αποδόσεις, όπως φαίνεται στο διάγραμμα 1 για τη χρονική περίοδο 2000-2003 όπου κυριαρχούν οι χαμηλές αποδόσεις. Αντίθετα οι χρονικές περίοδοι 1999-2000 και 2003-2004 μπορούν να χαρακτηριστούν από υψηλές αποδόσεις κατά μέσο όρο, αφού, στην πλειοψηφία

τους, υπερτερούν οι θετικές αποδόσεις.

Επομένως ο δεσμευμένος μέσος των μηνιαίων αποδόσεων του χρηματιστηρίου φαίνεται να ερμηνεύεται ικανοποιητικά από την ύπαρξη δύο καθεστώτων. Συγκεκριμένα ενός καθεστώτος με αρνητική μέση απόδοση και ενός άλλου με θετική μέση απόδοση.

### Διάγραμμα 1



Έτσι στα δεδομένα προσαρμόστηκε ένα υπόδειγμα MSM(2)-AR(2):

$$Y_t - \mu(S_t) = \beta_1 [Y_{t-1} - \mu(S_{t-1})] + \beta_2 [Y_{t-2} - \mu(S_{t-2})] + \varepsilon_t \quad (2)$$

όπου  $\varepsilon_t \sim NID(0, \sigma^2)$  και ο δεσμευμένος μέσος των αποδόσεων μεταβάλλεται ανάμεσα σε δύο καθεστώτα (αρνητικών και θετικών μέσων αποδόσεων):

$$\mu(S_t) = \begin{cases} \mu_1 < 0 & \text{αν } S_t = 1 \\ \mu_2 > 0 & \text{αν } S_t = 2 \end{cases}$$

Η διακύμανση του διαταρακτικού όρου υποτίθεται ότι είναι η ίδια και στα δύο καθεστώτα, καθώς επίσης και οι

παράμετροι  $\beta_1, \beta_2$ . Φυσικά τα δύο καθεστώτα αφορούν διαφορετικές δεσμευμένες κατανομές των αποδόσεων αφού για παράδειγμα ο μέσος είναι αρνητικός για το 1<sup>o</sup> καθεστώς και θετικός για το 2<sup>o</sup> καθεστώς.

Έτσι οι αποδόσεις του X.A.A. μοντελοποιούνται σαν μια στοχαστική διαδικασία αλλαγής καθεστώτος που δίνεται από την εξίσωση (2).

Οι πιθανότητες μετάβασης υποτίθεται ότι παραμένουν διαχρονικά αμετάβλητες και είναι:

$\rho_{12} =$  η πιθανότητα αρνητικής μέσης απόδοσης στην τρέχουσα περίοδο, δεδομένης της θετικής μέσης απόδοσης στην προηγούμενη χρονική περίοδο.

$\rho_{21} =$  η πιθανότητα θετικής μέσης απόδοσης στην τρέχουσα περίοδο, δεδομένης της αρνητικής μέσης απόδοσης στην προηγούμενη χρονική περίοδο.

Επειδή ισχύει:  $\rho_{12} = 1 - \rho_{11}$  και  $\rho_{21} = 1 - \rho_{22}$  συνεπάγεται ότι στη συγκεκριμένη περίπτωση οι πιθανότητες μετάβασης προσδιορίζονται πλήρως από τις πιθανότητες  $\rho_{11}$  και  $\rho_{22}$ .

### 3. Η εκτίμηση του υποδείγματος

Η εκτίμηση της εξίσωσης (2) έγινε με τη χρήση του αλγόριθμου EM του MSVAR<sup>1</sup> που χρησιμοποιεί τις εντολές του προγράμματος Ox, Doornik (1999).

Όλες οι εκτιμήσεις των συντελεστών μαζί με τους διαγνωστικούς ελέγχους παρουσιάζονται στον πίνακα 1.

Όπως φαίνεται από τον πίνακα 1 όλες οι εκτιμήσεις των παραμέτρων είναι στατιστικά σημαντικές. Στο καθεστώς των αρνητικών αποδόσεων η εκτίμηση του μέσου είναι περίπου -3%, ενώ, αντίθετα, στις θετικές αποδόσεις η εκτίμηση του μέσου είναι περίπου 8%. Οι διαγνωστικοί έλεγχοι δεν φανερώνουν την ύπαρξη προβλημάτων αυτοσυσχέτισης (portmanteau), ετεροσκεδαστικότητας (hetero) και μη-κανονικότητας (normality test). Το ίδιο συμπέρασμα εξάγεται

---

1. Βλέπε Krolzig (1998).

από τη διαγραμματική ανάλυση των καταλοίπων η οποία απεικονίζεται στα διαγράμματα 2 και 3.

**Πίνακας 1.** Εκτίμηση και έλεγχος του υποδείγματος MSM(2)-AR(2).

Παράμετροι (t-στατιστική)	$\mu_1 = -3.0513$ (-3.9201)	$\mu_2 = 8.0143$ (5.6517)	$\beta_1 = -0.5584$ (-4.6010)	$\beta_2 = -0.2813$ (-2.3580)
Τυπική απόκλιση	6.2534			

Διαγραμματικοί Έλεγχοι:

```

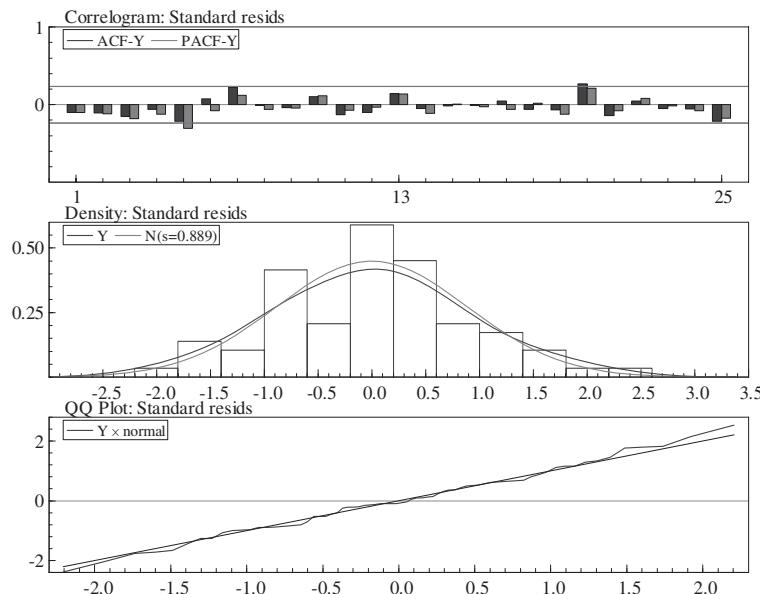
StdResids: portmanteau(12): Chi(10)= 15.0828[0.1291]
StdResids: normality test : Chi(2) = 0.2068 [0.9018]
StdResids: hetero test: Chi(4) = 0.3461 [0.9867]
StdResids: hetero-X test: Chi(5) = 0.3797 [0.9959]

PredError: portmanteau(12): Chi(10)= 10.7141[0.3802]
PredError: normality test : Chi(2) = 2.8318 [0.2427]
PredError: hetero test: Chi(4) = 6.6974 [0.1528]
PredError: hetero-X test: Chi(5) = 8.0408 [0.1540]

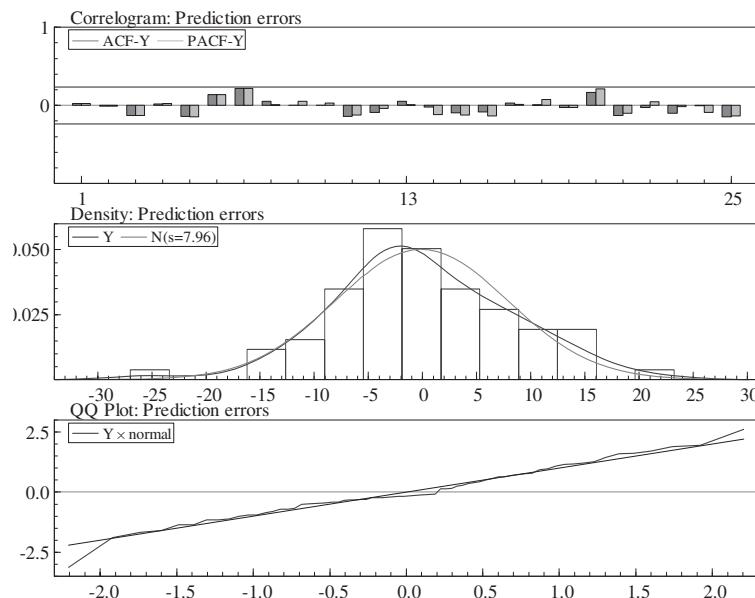
AR Error: portmanteau(12): Chi(10)= 15.3054[0.1213]
AR Error: normality test : Chi(2) = 0.0100 [0.9950]
AR Error: hetero test: Chi(4) = 1.2540 [0.8691]
AR Error: hetero-X test: Chi(5) = 2.3087 [0.8050]

```

## Διάγραμμα 2.



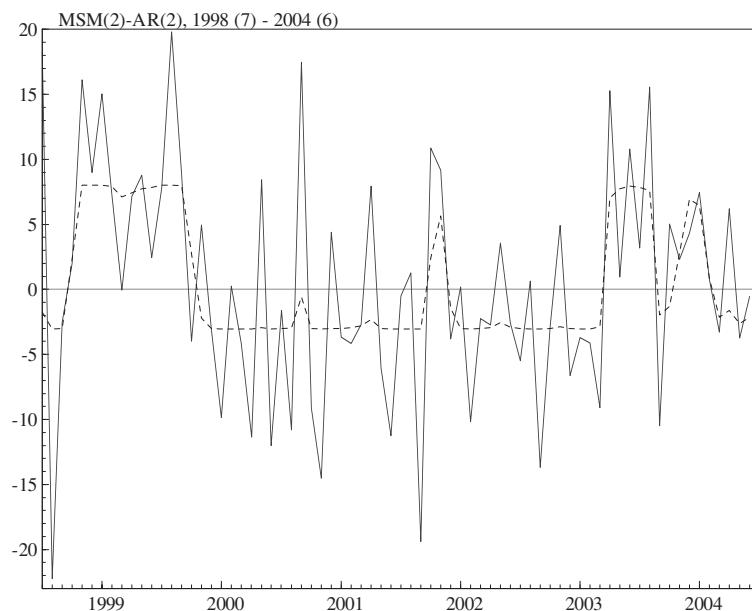
### Διάγραμμα 3.



Στον πίνακα 2 αναφέρονται οι εκτιμήσεις των πιθανοτήτων μετάβασης. Όπως διαπιστώνεται από τις εκτιμήσεις, η παραμονή κάθε καθεστώτος είναι αρκετά υψηλή αφού η πιθανότητα παραμονής στο ίδιο καθεστώς υπερβαίνει το 76% και στις δύο περιπτώσεις. Η πιθανότητα μετάβασης από το πρώτο καθεστώς στο δεύτερο είναι περίπου 23.6% ενώ η αντίστοιχη πιθανότητα από το δεύτερο στο πρώτο είναι 9.8%. Αυτό σημαίνει ότι, μετά το καθεστώς αρνητικών αποδόσεων, υπήρχε σημαντική πιθανότητα μετάβασης σε καθεστώς θετικών αποδόσεων. Επίσης παρατηρείται μια ασυμμετρία αναφορικά με τη διάρκεια των καθεστώτων. Για παράδειγμα η μέση διάρκεια του καθεστώτος αρνητικής απόδοσης είναι περίπου δέκα μήνες ενώ η μέση διάρκεια του καθεστώτος θετικής απόδοσης είναι τέσσερις περίπου μήνες. Διαπιστώνεται δηλαδή ότι η μέση περίοδος θετικών μέσων αποδόσεων είναι αρκετά βραχύβια συγκρινόμενη με αυτή των αρνητικών μέσων αποδόσεων.

**Πίνακας 2.** Εκτιμήσεις των πιθανοτήτων μετάβασης.

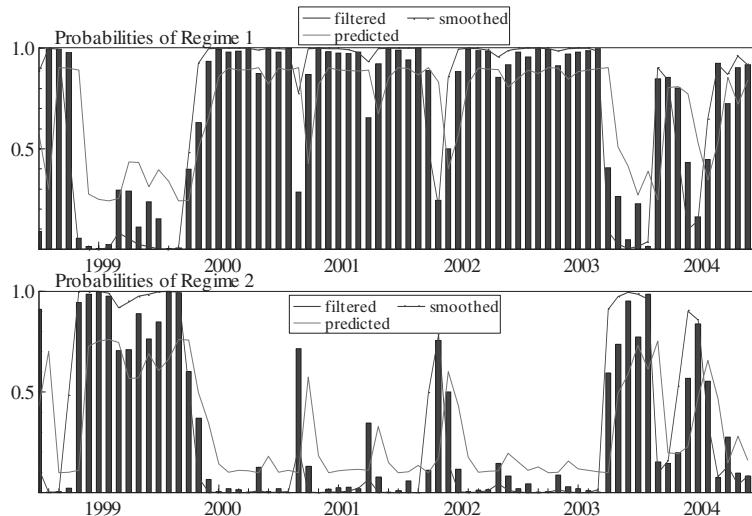
	$\rho_{il}$	$\rho_{l2}$	Διάρκεια	Αδεσμευτη πιθανότητα
$S_t = 1$	0.9020	0.0980	10.20	0.7066
$S_t = 2$	0.2361	0.7639	4.24	0.2934

**Διάγραμμα 4.**

Στο διάγραμμα 4 παρουσιάζονται οι μηνιαίες αποδόσεις μαζί με τον δεσμευμένο μέσο τους σύμφωνα με το εκτιμημένο υπόδειγμα της εξίσωσης (2). Από το διάγραμμα γίνονται εμφανείς οι περίοδοι αρνητικών και θετικών μέσων αποδόσεων.

Το διάγραμμα 5 εμφανίζει όλες τις πιθανότητες και για τα δύο καθεστώτα.

### Διάγραμμα 5.



**Πίνακας 3.** Κύκλοι των δύο καθεστώτων.

1° Καθεστώς	2° Καθεστώς
1998:7 - 1998:10 [0.8482]	1998:11 - 1999:10 [0.9447]
1999:11 - 2001:10 [0.9611]	2001:11 - 2001:11 [0.7859]
2001:12 - 2003:3 [0.9836]	2003:4 - 2003:8 [0.9654]
2003:9 - 2003:10 [0.8731]	2003:11 - 2004:1 [0.7624]
2004:2 - 2004:6 [0.8630]	

Το διάγραμμα επιβεβαιώνει τις εκτιμήσεις του πίνακα 2. Έτσι γίνεται και οπτικά εμφανές ότι η εξεταζόμενη περίοδος του χρηματιστηρίου χαρακτηρίζεται κυρίως από την κυριαρχία του πρώτου καθεστώτος ιδιαίτερα μετά το 2000.

Τέλος στον πίνακα 3 παρουσιάζονται οι αντίστοιχοι κύκλοι εμφάνισης των δύο καθεστώτων.

Όπως διαπιστώνεται από τον πίνακα, τον Νοέμβριο του 1998 η πιθανότητα ύπαρξης του δεύτερου καθεστώτος ήταν περίπου 94.5%. Το ίδιο σχεδόν ισχύει και για τον Απρίλιο του 2003 όπου η πιθανότητα ήταν 96.5%. Επίσης αξιοσημείωτη είναι και η μακρά διάρκεια του πρώτου καθεστώτος από τον Νοέμβριο του 1999 μέχρι τον Οκτώβριο 2001 με πιθανότητα 96.1%.

### **Βιβλιογραφία**

- Doornik, J.A. (1999) "Object –Oriented Matrix Programming using Ox", 3<sup>rd</sup> ed. Timberlake Consultant Press, London.
- Ferrara, L. (2003) "A three-regime real-time indicator for the US economy", *Economics Letters* 81, 373-378.
- Hamilton, J.D. (1989) "A new approach to the economic analysis of non-stationary time series and business cycle", *Econometrica* 57 (2), 357-384.
- Krolzig, H-M. (1998) "Econometric modelling of Markov-switching vector autoregressions using MSVAR for Ox", Discussion Paper, Dept. of Economics, University of Oxford.
- Moolman E. (2004) "A Markov switching regime model of the South African business cycle", *Economic Modelling* 21, 631-646.