



ΣΧΟΛΗ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΚΑΙ
ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ

Διπλωματική Εργασία

ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΩΝ ΠΡΟΑΙΡΕΣΗΣ ΜΕΣΩ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΩΝ GARCH

του

ΚΟΣΚΙΝΑ ΝΙΚΟΛΑΟΥ

Επιβλέπων Καθηγητής: Παπαναστασίου Ιωάννης

Υποβλήθηκε ως απαιτούμενο για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος στη
Λογιστική και Χρηματοοικονομική

Φεβρουάριος 2017

Πίνακας Περιεχομένων

Εισαγωγή	1
Κεφάλαιο 1. Εισαγωγικές Έννοιες στα Παράγωγα Χρηματοοικονομικά Προϊόντα	
1.1 Εισαγωγή	2
1.2 Χρήση και Σημασία των Παραγώγων	3
1.3 Χαρακτηριστικά των Δικαιωμάτων Προαίρεσης	3
1.4 Θέσεις Αγοράς και Πώλησης σε Δικαιώματα Προαίρεσης	
1.4.1 Θέσεις σε Δικαιώματα Αγοράς	5
1.4.2 Θέσεις σε Δικαιώματα Πώλησης	6
1.5 Moneyness ενός Δικαιώματος Προαίρεσης	6
Κεφάλαιο 2. Εισαγωγή στην Αποτίμηση Δικαιωμάτων Προαίρεσης	
2.1 Εισαγωγή	7
2.1.1 Προσδιοριστικοί Παράγοντες της τιμής ενός Δικαιώματος Προαίρεσης	7
2.1.2 Η διαδικασία Αποτίμησης Δικαιωμάτων Προαίρεσης	8
2.2 Το Υπόδειγμα Αποτίμησης Black-Scholes	
2.2.1 Εισαγωγή και υποθέσεις του υποδείγματος	11
2.2.2 Μοντελοποίηση της ανέλιξης των τιμών του υποκείμενου τίτλου	12
2.2.3 Εξαγωγή της διαφορικής εξίσωσης του υποδείγματος Black-Scholes	13
2.2.4 Συντελεστές Ευαισθησίας	17
Κεφάλαιο 3. Αποτίμηση Δικαιωμάτων Προαίρεσης με Υποδείγματα GARCH	
3.1 Εισαγωγή	19
3.2 Το Υπόδειγμα Αποτίμησης GARCH του Duan	21
3.3 Το Υπόδειγμα Αποτίμησης των Heston και Nandi	21
3.3.1 Εισαγωγή	26
3.3.2 Ανάπτυξη του υποδείγματος	27
Κεφάλαιο 4. Ανασκόπηση της Εμπειρικής Βιβλιογραφίας που εξετάζει την ακρίβεια αποτίμησης του υποδείγματος GARCH	
4.1 Εισαγωγή	33
4.2 Ανασκόπηση της ικανότητας αποτίμησης του υποδείγματος GARCH	34
4.3 Τα συστηματικά σφάλματα του υποδείγματος GARCH	40
4.4 Οι προεκτάσεις του υποδείγματος GARCH	44
4.5 Το υπόδειγμα Heston-Nandi GARCH	48
Συμπεράσματα	52
Βιβλιογραφικές Παραπομπές	53

Εισαγωγή

Η ραγδαία ανάπτυξη των αγορών χρηματοοικονομικών παραγώγων τα τελευταία έτη, έχει φέρει τα παράγωγα στο προσκήνιο των σύγχρονων κεφαλαιαγορών. Οι διαρκείς καινοτομίες του κλάδου της χρηματοοικονομικής μηχανικής έχουν εισάγει μια πληθώρα νέων παραγώγων προϊόντων, χωρίς να υπάρχει ο απαραίτητος χρόνος να εξεταστούν οι επιπτώσεις που μπορεί να έχει η ευρεία υιοθέτηση τους. Αυτό καθιστά τη μελέτη τους, ένα σημαντικό πεδίο ερευνών της σύγχρονης χρηματοοικονομικής επιστήμης.

Ένα σημαντικό εργαλείο που βοήθησε στην κατανόηση της λειτουργίας των χρηματοοικονομικών παραγώγων και συντέλεσε στην ευρεία εξάπλωση τους, αποτελεί το υπόδειγμα Black-Scholes-Merton(1973). Το υπόδειγμα αυτό θεωρήθηκε επαναστατικό όταν εμφανίστηκε, καθώς εισήγαγε για πρώτη φορά σε ακαδημαϊκούς και επαγγελματίες ένα πλαίσιο αποτίμησης δικαιωμάτων προαίρεσης. Αργότερα αποδείχθηκε ότι εμφανίζει σημαντικές αποκλίσεις από τις πραγματικές τιμές, και ότι οι βασικές υποθέσεις στις οποίες στηρίζεται δεν είναι ρεαλιστικές και παραβιάζονται. Το κύριο μειονέκτημα του υποδείγματος θεωρείται από πλήθος ακαδημαϊκών η υπόθεση της σταθερής μεταβλητότητας, η οποία προκαλεί συστηματικά σφάλματα αποτίμησης. Αυτό οδήγησε στην ανάπτυξη νέων υποδειγμάτων τα οποία επιχειρούν εναλλακτικές προσεγγίσεις στην εκτίμηση της μεταβλητότητας. Μια κατηγορία αποτελούν τα υποδείγματα αποτίμησης GARCH.

Σκοπός αυτής της διπλωματικής εργασίας είναι να παρουσιάσει τις πρόσφατες εξελίξεις στο πεδίο της αποτίμησης δικαιωμάτων προαίρεσης με χρήση των υποδειγμάτων GARCH. Η εργασία ακολουθεί την εξής δομή. Στο 1ο κεφάλαιο γίνεται μια εισαγωγή στα χρηματοοικονομικά παράγωγα, καθώς και στη σημασία τους στις σύγχρονες αγορές. Στο 2ο κεφάλαιο αναλύονται βασικές έννοιες της αποτίμησης δικαιωμάτων προαίρεσης, ενώ παρουσιάζεται το υπόδειγμα Black-Scholes, το οποίο θα αποτελέσει μέτρο σύγκρισης για πιο προηγμένα υποδείγματα. Στο 3ο κεφάλαιο ακολουθεί η εισαγωγή σε μεθόδους αποτίμησης που χρησιμοποιούν ανεπίξεις GARCH. Συγκεκριμένα παρουσιάζονται και αναλύονται τα υποδείγματα των Duan(1995) και Heston και Nandi(2000). Στο 4ο κεφάλαιο γίνεται μια ανασκόπηση της αρθρογραφίας που αφορά την εμπειρική αποτίμηση δικαιωμάτων, εστιάζοντας στην διερεύνηση της ακρίβειας των υποδειγμάτων GARCH. Η εργασία καταλήγει με τα συμπεράσματα και τις προτάσεις για μελλοντική έρευνα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΣΤΑ ΠΑΡΑΓΩΓΑ

ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΠΡΟΪΟΝΤΑ

1.1 Εισαγωγή

Η δημιουργία, η λειτουργία και η εφαρμογή των παραγώγων χρηματοοικονομικών προϊόντων, βασίζεται, όπως και το όνομα τους υποδηλώνει, στην ύπαρξη κάποιων άλλων, ήδη υφιστάμενων χρηματοοικονομικών προϊόντων ή υποκείμενων τίτλων, όπως μετοχές, ομόλογα, συνάλλαγμα, δάνεια, δείκτες οργανωμένων αγορών, επιτόκια, εμπορεύματα κλπ. Πιο συγκεκριμένα, τα παράγωγα προϊόντα είναι συμβόλαια τα οποία βασίζονται ή των οποίων η αξία προκύπτει από ένα υποκείμενο τίτλο και καλύπτουν μια μελλοντική συναλλαγή του τίτλου αυτού. Η αξία των παραγώγων προϊόντων υφίσταται, επειδή έχουν αξία οι υφιστάμενοι υποκείμενοι τίτλοι και η μεταβολή της αξίας τους έχει άμεση σχέση και ακολουθεί τη μεταβολή της αξίας των υποκείμενων τίτλων. Η διάρκεια των παραγώγων είναι συνήθως μικρότερη από την διάρκεια των υποκείμενων τίτλων.

Τα πλέον συνηθισμένα χρηματοοικονομικά παράγωγα, μπορούν να ενταχθούν σε επιμέρους γενικές κατηγορίες, όπως τα προθεσμιακά συμβόλαια (Forward Contracts), τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης (Future Contracts), τα δικαιώματα προαίρεσης (Options), τις ανταλλαγές επιτοκίων (Swaps), τα υβριδικά παράγωγα (FRAs, Caps, Floors, Collars, Warrants κ.λπ.) και τα πιστωτικά παράγωγα (Credit Derivatives). Υποκείμενος τίτλος, στον οποίον μπορεί να βασίζεται η δημιουργία κάποιου παραγώγου, μπορεί να είναι οποιοδήποτε χρηματοοικονομικό προϊόν της χρηματαγοράς ή κεφαλαιαγοράς, καθώς και επιτόκια, δείκτες, νομίσματα ή σειρά άλλων αξιών. Καθεμία από τις παραπάνω γενικές κατηγορίες περιλαμβάνει σειρά παραγώγων προϊόντων, των οποίων η λειτουργία είναι κοινή, με διαφοροποίηση μόνο ως προς την αντιμετώπιση των ιδιαίτερων χαρακτηριστικών του κάθε συγκεκριμένου υποκείμενου τίτλου στον οποίο το καθένα βασίζεται (Αγγελόπουλος, 2010).

1.2 Χρήση και Σημασία των Παραγώγων

Οι τράπεζες, οι λοιποί χρηματοοικονομικοί οργανισμοί και οι επενδυτές αντιδρώντας στην εμφάνιση των χρηματοοικονομικών κινδύνων ανέπτυξαν μια σειρά χρηματοοικονομικών προϊόντων σχεδιασμένων ώστε να μπορούν να ελέγχουν και να διαχειρίζονται τους κινδύνους αυτούς που υποβόσκουν στο σύγχρονο χρηματοοικονομικό περιβάλλον. Το πρώτο προϊόν που υιοθέτησαν τη δεκαετία του 1970, ήταν προθεσμιακά συμβόλαια επί νομισμάτων, όπου ο ένας αντισυμβαλλόμενος υποχρεούται να αγοράσει και ο άλλος να πουλήσει μια προκαθορισμένη ποσότητα ξένου νομίσματος σε συγκεκριμένη ισοτιμία, σε προσυμφωνημένη μελλοντική ημερομηνία.

Η σύναψη τέτοιων προθεσμιακών συμβολαίων έδινε τη δυνατότητα στους χρήστες να τους να αντισταθμίσουν τον κίνδυνο των μεγάλων διακυμάνσεων των ισοτιμιών, δηλαδή του συναλλαγματικού κινδύνου. Κατά συνέπεια, τα παράγωγα χρηματοοικονομικά προϊόντα σχεδιάστηκαν αρχικά για την αποτελεσματική αντιμετώπιση και αντιστάθμιση συγκεκριμένων κινδύνων. Στη συνέχεια, τα χρηματοοικονομικά παράγωγα χρησιμοποιήθηκαν τόσο για τη μεταφορά των κινδύνων όσο και για επένδυση αλλά και για κερδοσκοπία. Η δυνατότητα χρήσης των παραγώγων για κερδοσκοπία υποστηρίζεται από πολλούς ότι διαμόρφωσε τις συνθήκες και συνέβαλε στην πιστωτική και οικονομική κρίση του 2008 (Αγγελόπουλος, 2010).

1.3 Χαρακτηριστικά των Δικαιωμάτων Προαίρεσης

Τα δικαιώματα προαίρεσης (options) είναι συμβόλαια που παρέχουν στον κάτοχο τους (option holder), το δικαίωμα να προβεί στο μέλλον εφόσον το επιθυμεί, σε μια συναλλαγή με προκαθορισμένους όρους. Πιο συγκεκριμένα, παρέχουν στον κάτοχο ή αγοραστή του συμβολαίου, δηλαδή στον πρώτο αντισυμβαλλόμενο, τη δυνατότητα να αγοράσει ή να πουλήσει το υποκείμενο του δικαιώματος (underlying interest), σε προκαθορισμένη τιμή εξάσκησης του δικαιώματος (exercise price), εντός συγκεκριμένου χρονικού διαστήματος, ή στο τέλος ενός χρονικού διαστήματος. Ο κάτοχος για την απόκτηση του συμβολαίου καταβάλει στον πωλητή (option writer), μια τιμή (premium) ανά υποκείμενο τίτλο. Ο δεύτερος αντισυμβαλλόμενος, ο πωλητής τους συμβολαίου, εφόσον ο κάτοχος αποφασίσει την εφαρμογή των όρων του συμβολαίου, δηλαδή την αγορά ή πώληση του υποκείμενου τίτλου, είναι υποχρεωμένος να τηρήσει τους όρους αυτούς. Η πιο σημαντική διαφορά των

δικαιωμάτων προαίρεσης με τα υπόλοιπα παράγωγα χρηματοοικονομικά προϊόντα, είναι ότι διαχωρίζουν τα δικαιώματα από τις υποχρεώσεις. Ο αγοραστής ενός δικαιώματος προαίρεσης έχει το δικαίωμα της εξάσκησης του, ενώ ο πωλητής του δικαιώματος έχει την υποχρέωση της εκπλήρωσης των όρων του συμβολαίου (Dubofsky και Miller, 2003).

Όπως σε όλα τα παράγωγα, βάση για τη δημιουργία κάποιου δικαιώματος προαίρεσης μπορεί να αποτελέσει οποιοσδήποτε χρηματοοικονομικός τίτλος ή αξία, αποκαλούμενος ως υποκείμενος τίτλος. Ο τίτλος μπορεί να αφορά μετοχές, χρηματιστηριακό δείκτη μετοχών, ξένα νομίσματα, χρεόγραφα ή τίτλους δημοσίου όπως είναι τα έντοκα γραμμάτια ή τα ομόλογα κλπ. Επίσης, υποκείμενος τίτλος ενός δικαιώματος προαίρεσης μπορεί να είναι ένα εμπόρευμα ή ένα πολύτιμο μέταλλο. Συνεπώς, υποκείμενο τίτλος είναι το χρεόγραφο, η αξία, η χρηματική ροή ή το εμπόρευμα βάσει του οποίου δημιουργείται ένα δικαίωμα προαίρεσης. Η τιμή και η μεταβολή της τιμής του υποκείμενου τίτλου επηρεάζει άμεσα τη τιμή του δικαιώματος προαίρεσης.

Απαραίτητο στοιχείο για τη διασφάλιση και τη λειτουργία του δικαιώματος προαίρεσης είναι η ύπαρξη ενός συμβολαίου στο οποίο καθορίζονται τα χαρακτηριστικά και οι όροι του δικαιώματος. Το συμβόλαιο ενός δικαιώματος προαίρεσης, είναι ίσως το μόνο συμβόλαιο που επιτρέπει στον κάτοχο του, εφόσον το επιλέξει, να μην τηρήσει τους όρους του. Τα δικαιώματα προαίρεσης μπορούν να δημιουργούνται είτε εκτός οργανωμένων αγορών, είτε σε οργανωμένες αγορές που λειτουργούν κάτω από συγκεκριμένους κανόνες και τυποποιημένα χαρακτηριστικά (Dubofsky και Miller, 2003).

Εξάσκηση του δικαιώματος είναι η απόφαση του κατόχου του δικαιώματος να προχωρήσει στην εφαρμογή των όρων του συμβολαίου αξιοποιώντας τη δυνατότητα που του παρέχει το συμβόλαιο για παραλαβή ή παράδοση του υποκείμενου τίτλου, ο οποίος μπορεί να αφορά μια προκαθορισμένη ποσότητα και ποιότητα αγαθών, έναν αριθμό μετοχών ή τη λήψη ενός ποσού σε μετρητά. Η τιμή εξάσκησης ενός δικαιώματος είναι η προκαθορισμένη τιμή του υποκείμενου τίτλου με βάση την οποία θα γίνει η παράδοση ή η παραλαβή του υποκείμενου τίτλου, ή η τιμή βάση της οποίας θα υπολογισθεί το ποσό σε μετρητά που θα καταβληθεί στον κάτοχο του δικαιώματος. Η τιμή εξάσκησης και οι όροι διαμόρφωσης της καθορίζονται από την οργανωμένη αγορά στην οποία είναι εισηγμένο προς διαπραγμάτευση το δικαίωμα προαίρεσης. Για παράδειγμα, οι τιμές εξάσκησης των δικαιωμάτων προαίρεσης επί μετοχών σχετίζονται με τη μεταβολή αυτή, όπως και με το ύψος της τιμής της μετοχής στην υποκείμενη αγορά (Αγγελόπουλος, 2010).

1.4 Θέσεις Αγοράς και Πώλησης σε Δικαιωμάτων Προαίρεσης

1.4.1 Θέσεις σε Δικαιώματα Αγοράς

Ο αγοραστής ενός δικαιώματος αγοράς (call holder), εκτιμά ότι η τιμή του υποκείμενου τίτλου θα αυξηθεί έως τη λήξη του συμβολαίου. Η αγορά ενός δικαιώματος αγοράς (θέση long σε call option) δίνει στον επενδυτή τη δυνατότητα δυνητικά απεριόριστου κέρδους, ενώ οι ζημίες περιορίζονται στο ποσό του ασφαλιστρου (premium), το οποίο καταβάλλει κατά την αγορά του δικαιώματος. Αυτά τα δύο στοιχεία δικαιολογούνται, γιατί πολλοί κερδοσκόποι προτιμούν να αγοράσουν ένα δικαίωμα αγοράς μιας μετοχής, αντί για την ίδια τη μετοχή, εκμεταλλευόμενοι τη μόχλευση που δημιουργούν τα δικαιώματα.

Οι δυνατότητες που παρέχονται στον κάτοχο του δικαιώματος αγοράς είναι οι εξής:

1. Να εξασκήσει το δικαίωμα κατά τη λήξη του (ευρωπαϊκού τύπου call option) ή κατά το διάστημα μέχρι τη λήξη του (αμερικανικού τύπου call option).

2. Να το πουλήσει στη δευτερογενή αγορά στην τρέχουσα τιμή του, η οποία διαμορφώνεται βάσει των εξελίξεων στην αγορά.

3. Να κλείσει τη θέση του πριν τη λήξη του συμβολαίου, λαμβάνοντας αντίθετη θέση.

4. Να μην το εξασκήσει, χάνοντας το κεφάλαιο που δαπάνησε για την απόκτηση του δικαιώματος.

Ο πωλητής ενός δικαιώματος αγοράς (θέση short σε call option) εκτιμά ότι η τιμή του υποκείμενου τίτλου θα μειωθεί έως τη λήξη του συμβολαίου. Στη βασική της μορφή, η πώληση ενός δικαιώματος προαίρεσης αγοράς είναι η ακάλυπτη πώληση δικαιώματος αγοράς, όπου ο πωλητής του δικαιώματος δεν έχει στη κατοχή του τον υποκείμενο τίτλο για τον οποίο έχει πωλήσει το δικαίωμα. Η θέση αυτή εμπεριέχει υψηλότερο κίνδυνο από την ίδια θέση με κατοχή παράλληλα των μετοχών. Ένας πωλητής δικαιώματος αγοράς είναι υποχρεωμένος να πωλήσει τον υποκείμενο τίτλο στον αγοραστή του δικαιώματος, στην περίπτωση που ο τελευταίος εξασκήσει το δικαίωμα του. Στην περίπτωση του δικαιώματος με παράδοση τίτλων, εφόσον ο πωλητής δεν έχει τον υποκείμενο τίτλο στη κατοχή του, είναι υποχρεωμένος να τον αγοράσει από την αγορά στη τρέχουσα τιμή και στη συνέχεια να τον πωλήσει στον κάτοχο του δικαιώματος αγοράς στη τιμή εξάσκησης.

Τα αποτελέσματα για τον πωλητή ενός δικαιώματος αγοράς είναι ακριβώς τα αντίθετα από τα αποτελέσματα του αγοραστή. Τα κέρδη/ζημίες του αγοραστή ισούνται με τις ζημίες/κέρδη του πωλητή. Αυτό το αποτέλεσμα δίνει το χαρακτηρισμό «παίγνιο μηδενικού υπολοίπου» ή “zero-sum game” στη διαπραγμάτευση των δικαιωμάτων προαίρεσης. (Αγγελόπουλος, 2010)

1.4.2 Θέσεις σε Δικαιώματα Πώλησης

Ο αγοραστής ενός δικαιώματος πώλησης (θέση long σε put option) εκτιμά ότι η τιμή του υποκείμενου τίτλου θα μειωθεί και θα διατηρηθεί σε επίπεδο χαμηλότερο της τιμής εξάσκησης, έως τη λήξη του συμβολαίου. Όπως και στη περίπτωση της απόκτησης ενός δικαιώματος αγοράς, η αγορά ενός δικαιώματος πώλησης προσφέρει στον επενδυτή τη δυνατότητα πραγματοποίησης υψηλών κερδών, ενώ οι ζημίες περιορίζονται μόνο στο ποσό της τιμής του δικαιώματος. Σε αντίθεση με την απόκτηση του δικαιώματος αγοράς όπου ο επενδυτής προσβλέπει σε άνοδο της τιμής της μετοχής, στην αγορά ενός δικαιώματος πώλησης, πρέπει να υπάρξει μείωση της τιμής της μετοχής για την πραγματοποίηση κερδών.

Ο πωλητής ενός δικαιώματος πώλησης (θέση short σε put option) έχει την υποχρέωση να αγοράσει τον υποκείμενο τίτλο σε προκαθορισμένη τιμή, εάν ο κάτοχος του αποφασίσει να το εξασκήσει. Όταν ένα δικαίωμα πώλησης δημιουργείται, ο αγοραστής του πληρώνει το πριμ ή ασφάλιστρο του δικαιώματος στον πωλητή. Αν η τιμή του υποκείμενου τίτλου βρίσκεται υψηλότερα από τη τιμή εξάσκησης, το δικαίωμα λήγει χωρίς να εξασκηθεί. Στη περίπτωση αυτή το κέρδος του πωλητή είναι το ασφάλιστρο του δικαιώματος.

1.5 Moneyness ενός Δικαιώματος Προαίρεσης

Ένα δικαίωμα προαίρεσης μπορεί να χαρακτηριστεί κατά τη διάρκεια ζωής του ως in-the-money, at-the-money ή out-the-money, αναλόγως της τιμής εξάσκησης του σε σχέση με τη τρέχουσα τιμή του υποκείμενου τίτλου του. Ένα δικαίωμα χαρακτηρίζεται in-the-money, εάν η άμεση εξάσκηση του θα επέφερε κέρδος στον κάτοχο του. Για τον κάτοχο ενός δικαιώματος αγοράς, αυτό θα συνεπαγόταν η τρέχουσα τιμή του υποκείμενου να είναι μεγαλύτερη από τη τιμή εξάσκησης. Το αντίθετο θα ίσχυε για τον κάτοχο ενός δικαιώματος πώλησης, καθώς θα έπρεπε η τρέχουσα τιμή να είναι μικρότερη από τη τιμή εξάσκησης, για να έχει άμεσο κέρδος από την εξάσκηση του. Αντιστρόφως, τα δικαιώματα τα οποία θα επέφεραν ζημιά στον κάτοχο τους εάν εξασκούσαν άμεσα, χαρακτηρίζονται ως out-the-money. Σε περιπτώσεις όπου η τρέχουσα τιμή είναι κατά πολύ μικρότερη ή μεγαλύτερη της τιμής εξάσκησης, μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο χαρακτηρισμός deep-in ή deep-out-the-money αντίστοιχα. Τέλος, εάν η τρέχουσα τιμή του υποκείμενου τίτλου ενός δικαιώματος ισούται με τη τιμή εξάσκησης ή βρίσκεται πολύ κοντά σε αυτή, το συμβόλαιο μπορεί να χαρακτηριστεί ως at-the-money.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΩΝ

ΠΡΟΑΙΡΕΣΗΣ

2.1 Εισαγωγή

Η τιμή (option premium) ενός δικαιώματος προαίρεσης είναι το ποσό που ο κάτοχος ή ο αγοραστής του δικαιώματος καταβάλλει στον πωλητή για την απόκτηση των όρων και πλεονεκτημάτων που περιλαμβάνονται στο συμβόλαιο του δικαιώματος .

Η τιμή αναφέρεται σε μία μονάδα του υποκείμενου τίτλου και αποτελείται από δύο τμήματα, την εσωτερική αξία (intrinsic value) και την υπεραξία (time value). Η τιμή δεν περιλαμβάνεται στους τυποποιημένους όρους του συμβολαίου, αλλά διαμορφώνεται από τους συμμετέχοντες στην αγορά (αγοραστή, πωλητή, ειδικούς διαπραγματευτές, μεσολαβητές), ανάλογα με τις επικρατούσες συνθήκες που σχετίζονται τόσο με τον υποκείμενο τίτλο, όσο και με τις εξελίξεις στην οικονομία και της αγοράς. Το ύψος της τιμής του δικαιώματος προαίρεσης δεν είναι σταθερό αλλά μεταβάλλεται συνεχώς έως τη λήξη του, επηρεαζόμενο από τις δυνάμεις της αγοράς.

2.1.1 Προσδιοριστικοί Παράγοντες της τιμής ενός Δικαιώματος Προαίρεσης

Βασικοί παράγοντες που επηρεάζουν την τιμή (premium) ενός δικαιώματος είναι:

➤ Η τρέχουσα τιμή του υποκείμενου τίτλου του συμβολαίου, δηλαδή της μετοχής, του νομίσματος, του δείκτη κλπ. Όσο υψηλότερη η τιμή του υποκείμενου τίτλου, τόσο υψηλότερη αναμένεται να είναι και η τιμή ενός δικαιώματος αγοράς του.

➤ Η ιστορική μεταβλητότητα (historical volatility) και η τεκμαιρόμενη μεταβλητότητα (implied volatility) της τιμής του υποκείμενου τίτλου, οι οποίες εκφράζονται από την τυπική απόκλιση και τη διακύμανση των αποδόσεων του υποκείμενου τίτλου. Η υψηλή μεταβλητότητα οδηγεί σε υψηλή τιμή ενός δικαιώματος. Οι θέσεις αγοράς σε δικαιώματα προαίρεσης (long call και long put), θα μπορούσαν να θεωρηθούν και ως θέσεις αγοράς της μεταβλητότητας, υπό την έννοια ότι η αξία του δικαιώματος θα αυξηθεί εάν αυξηθεί και η μεταβλητότητα. Αντίθετα οι θέσεις πώλησης σε δικαιώματα προαίρεσης (short call και short

put), μπορούν να θεωρηθούν και ως θέσεις πώλησης της μεταβλητότητας, καθώς η τιμή του δικαιώματος πρόκειται να μειωθεί, εάν μειωθεί και η μεταβλητότητά του υποκειμένου του. Σαν αποτέλεσμα, η μεταβλητότητα του υποκειμένου περιουσιακού στοιχείου που αναμένεται κατά τη διάρκεια ζωής του συμβολαίου, έχει καθοριστικό ρόλο στη διαμόρφωση της τιμής του αντίστοιχου δικαιώματος προαίρεσης.

- Οι προσδοκίες των επενδυτών.
- Το επίπεδο των συναλλαγματικών ισοτιμιών, στη περίπτωση δικαιωμάτων συναλλάγματος.
- Η προσφορά και η ζήτηση άλλων χρηματοοικονομικών προϊόντων.
- Το επίπεδο του ακίνδυνου επιτοκίου (risk free rate) και των λοιπών επιτοκίων στην αγορά. Ένα υψηλό επίπεδο επιτοκίων διαμορφώνει υψηλότερες τιμές στα δικαιώματα αγοράς.
- Ο χρόνος που απομένει μέχρι τη λήξη του δικαιώματος. Η τιμή ενός δικαιώματος μειώνεται όσο αυτό πλησιάζει στη λήξη του.
- Η τιμή εξάσκησης του δικαιώματος. Οι υψηλές τιμές εξάσκησης δικαιωμάτων αγοράς οδηγούν σε μείωση τις τιμές δικαιωμάτων πώλησης.
- Ο τύπος του δικαιώματος. Στα δικαιώματα αμερικανικού τύπου, η τιμή δικαιώματος προσδιορίζεται από τη τιμή εξάσκησης και τη τρέχουσα τιμή του υποκειμένου, ώστε να μην υπάρχει περιθώριο για εξισορροπητική κερδοσκοπία.
- Η καταβολή ή μη μερίσματος από την υποκείμενη μετοχή, εάν πρόκειται για δικαιώματα προαίρεσης επί μετοχών.

2.1.2 Η Διαδικασία Αποτίμησης Δικαιωμάτων Προαίρεσης.

Η βασική ιδέα αποτίμησης ενός δικαιώματος προαίρεσης, είναι η σύνθεση ενός χαρτοφυλακίου αποτίμησης, το οποίο αναπαράγει τις πληρωμές του δικαιώματος χρησιμοποιώντας θέσεις αγοράς(πώλησης) του υποκειμένου τίτλου και επένδυση(δανεισμό) στο επιτόκιο χωρίς κίνδυνο. Έχοντας δημιουργήσει το χαρτοφυλάκιο αποτίμησης, η τιμή του δικαιώματος προαίρεσης ισούται με το κόστος σύνθεσης αυτού του χαρτοφυλακίου.

Όπως προαναφέρθηκε, η μεταβλητότητα του υποκειμένου τίτλου είναι καθοριστικός παράγοντας κατά την αποτίμηση ενός δικαιώματος προαίρεσης. Απαραίτητη προϋπόθεση κάθε υποδείγματος αποτίμησης, είναι η δημιουργία μιας διαδικασίας ή μεθόδου, η οποία να αποτυπώνει την αβεβαιότητα στην διαχρονική εξέλιξη των τιμών του υποκειμένου στοιχείου. Με άλλα λόγια, είναι αναγκαία η δημιουργία ενός υποδείγματος που να μοντελοποιεί τη

μεταβλητότητα του υποκείμενου τίτλου. Αυτό είναι το χαρακτηριστικό που κάνει την αποτίμηση των δικαιωμάτων προαίρεσης πιο περίπλοκη σε σύγκριση με την αποτίμηση προθεσμιακών συμβολαίων.

Τα διαφορετικά υποδείγματα αποτίμησης λαμβάνουν διαφορετικές υποθέσεις σχετικά με την εξέλιξη των τιμών του υποκείμενου τίτλου και της μεταβλητότητάς του. Το πιο απλό υπόδειγμα αποτίμησης αποτελεί το διωνυμικό μοντέλο (binomial pricing model), το οποίο υποθέτει ότι ο χρόνος έως τη λήξη του δικαιώματος μπορεί να διαιρεθεί σε μικρά χρονικά διαστήματα ή βήματα. Στο τέλος κάθε βήματος, το υπόδειγμα υποθέτει ότι η τιμή του υποκείμενου τίτλου θα κινηθεί ανοδικά ή καθοδικά κατά ένα ποσοστό που μπορεί να υπολογισθεί μέσω της ιστορικής μεταβλητότητας και του χρόνου έως τη λήξη του δικαιώματος. Έτσι παράγεται μια δενδροειδής διωνυμική κατανομή, που αναπαριστά τις πιθανές μεταβολές που μπορεί να πάρει η τιμή του υποκείμενου τίτλου, από τη δημιουργία του συμβολαίου έως τη λήξη του. Η τιμή του δικαιώματος σε κάθε βήμα της δενδροειδούς κατανομής, μπορεί να υπολογισθεί μέσω οπισθογενούς επαγωγής, ξεκινώντας από την λήξη του δικαιώματος και καταλήγοντας στο παρόν βήμα αναδρομικά.

Πιο σύνθετα υποδείγματα, κάνουν χρήση διαφορετικών μεθόδων μοντελοποίησης της μεταβλητότητας. Το κλασσικό υπόδειγμα Black-Scholes υποθέτει ότι η τιμή του υποκείμενου τίτλου ακολουθεί μια στοχαστική ανέλιξη, τη λεγόμενη και γεωμετρική κίνηση Brown, και ότι η μεταβλητότητα παραμένει διαχρονικά σταθερή. Σύμφωνα με το υπόδειγμα αυτό, κάθε μεταβολή στη τιμή του υποκείμενου τίτλου μπορεί να διαιρεθεί σε δύο επιμέρους μεταβολές, συναρτήσει του χρόνου. Η μια καθορίζεται από την παρούσα τιμή και την αναμενόμενη απόδοση, ενώ η άλλη διαμορφώνεται μέσω μιας στοχαστικής μεταβλητής.

Έχοντας ένα υπόδειγμα που να μοντελοποιεί την εξέλιξη των τιμών του υποκείμενου, η διαδικασία που θα πρέπει να ακολουθηθεί για την αποτίμηση του δικαιώματος προαίρεσης είναι η εξής. Το πρώτο βήμα είναι η εύρεση των πληρωμών του δικαιώματος κατά τη λήξη του. Στη συνέχεια γίνεται αναπαραγωγή των πληρωμών αυτών μέσω της κατασκευής του χαρτοφυλακίου αποτίμησης. Τέλος, η αξία του χαρτοφυλακίου αυτού σε κάθε στιγμή στη διάρκεια ζωής του συμβολαίου, θα ισοδυναμεί με την τιμή του δικαιώματος προαίρεσης. Το χαρτοφυλάκιο θα πρέπει να αποτελείται από θέση αγοράς(πώλησης) στον υποκείμενο τίτλο, και δανεισμό(επένδυση) ενός ποσού με το ακίνδυνο επιτόκιο, σε αναλογίες τέτοιες ώστε να μην δημιουργούνται ευκαιρίες αρμπιτράζ. Αν η τιμή ενός δικαιώματος αγοράς ήταν μεγαλύτερη από την αξία του χαρτοφυλακίου αποτίμησης, ο επενδυτής θα μπορούσε να πωλήσει το δικαίωμα αγοράς και να αγοράσει το χαρτοφυλάκιο αποτίμησης. Αντίθετα, αν η

τιμή του δικαιώματος αγοράς ήταν μικρότερη, ο επενδυτής θα μπορούσε να πωλήσει το χαρτοφυλάκιο αποτίμησης και να αγοράσει το δικαίωμα αγοράς.

Βασικό βήμα στη διαδικασία σύνθεσης του χαρτοφυλακίου αποτίμησης ενός δικαιώματος προαίρεσης, είναι η εύρεση του συντελεστή δ (*delta*) του δικαιώματος. Ο συντελεστής δ μπορεί να υπολογισθεί ως ο ρυθμός μεταβολής στην αξία ενός δικαιώματος, από μια μεταβολή στην αξία του υποκείμενου τίτλου. Στη σύνθεση του χαρτοφυλακίου αποτίμησης, ο συντελεστής δ δίνει το μέγεθος της θέσης σε μονάδες του υποκείμενου τίτλου που θα πρέπει να κατέχει ο επενδυτής, ώστε να επιτύχει την αναπαραγωγή των πληρωμών του δικαιώματος προαίρεσης, και άρα να αποτιμήσει σωστά το δικαίωμα αυτό. Ο συντελεστής δ μπορεί ακόμα να ερμηνευθεί ως βαθμός ευαισθησίας, δίνοντας τη μεταβολή στην αξία του δικαιώματος, από μια δεδομένη μεταβολή στην αξία του υποκείμενου τίτλου.

2.2 Το Υπόδειγμα Αποτίμησης Black-Scholes

2.2.1 Εισαγωγή και υποθέσεις του υποδείγματος

Ένας σημαντικός σταθμός στην αποτίμηση παραγώγων, αποτελεί το μοντέλο αποτίμησης των Black, Scholes και Merton, το οποίο παρουσίασαν το 1973. Για την ανακάλυψη τους αυτή βραβεύτηκαν με το Nobel Οικονομικών το 1995.

Το υπόδειγμα βασίζεται στην υπόθεση ότι ο επενδυτής δύναται να κατασκευάσει ένα χαρτοφυλάκιο αποτελούμενο από ένα Δικαίωμα Αγοράς μιας μετοχής που δεν αποφέρει μέρισμα και την ίδια τη μετοχή, με τρόπο τέτοιο ώστε το χαρτοφυλάκιο να αντισταθμίζει τον κίνδυνο και να αποφέρει βέβαιο έσοδο στη λήξη του δικαιώματος. Το χαρτοφυλάκιο θα πρέπει να έχει παρούσα αξία ίση με το δανεισμό ενός κατάλληλου ποσού, το οποίο τοκισζόμενο με το ακίνδυνο επιτόκιο θα έχει ίση αξία με το δικαίωμα αγοράς στη λήξη του.

Βασικές υποθέσεις πάνω στις οποίες στηρίζεται το υπόδειγμα αποτίμησης, είναι οι ακόλουθες συνθήκες αναφορικά με την υποκείμενη μετοχή και το δικαίωμα προαίρεσης:

- i. Το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο (risk-free rate) είναι γνωστό και διαχρονικά αμετάβλητο.
- ii. Η τιμή της μετοχής ακολουθεί «τυχαίο περίπατο» (random walk) σε συνεχή χρόνο, είναι δηλαδή μια μονοδιάστατη στοχαστική ανέλιξη Wiener με διακύμανση ίση με το τετράγωνο της τιμής της υποκείμενης μετοχής. Οι τιμές που μπορεί να πάρει η μετοχή σε κάθε χρονικό διάστημα, ακολουθούν λογαριθμοκανονική κατανομή.
- iii. Η υποκείμενη μετοχή δεν αποφέρει μερίσματα ή άλλες εισφορές.
- iv. Το δικαίωμα προαίρεσης είναι Ευρωπαϊκού τύπου, άρα μπορεί να εξασκηθεί μόνο στη λήξη του και όχι πριν από αυτή.
- v. Δεν υπάρχουν κόστη συναλλαγών κατά την αγορά/πώληση της υποκείμενης μετοχής ή του δικαιώματος προαίρεσης.
- vi. Ο επενδυτής μπορεί να δανειστεί οποιοδήποτε κλάσμα της τιμής ενός αξιόγραφου και να το πουλήσει ή να το διακρατήσει, με κέρδος το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο.
- vii. Η ανοιχτή πώληση δεν έχει κόστος. Ένας πωλητής που δεν κατέχει ένα αξιόγραφο, μπορεί να λάβει ένα ποσό ίσο με τη τιμή του αξιόγραφου εκείνη τη στιγμή από τον πωλητή του, και στη συνέχεια να τον εξοφλήσει σε μια προκαθορισμένη μελλοντική ημερομηνία, πληρώνοντας ένα ποσό αντίστοιχο με τη τιμή του αξιόγραφου την ημερομηνία εκείνη.

Υπό αυτές τις υποθέσεις η τιμή του δικαιώματος εξαρτάται μόνο από τη τιμή της υποκείμενης μετοχής και το χρόνο, καθώς οι υπόλοιποι προσδιοριστικοί παράγοντες μπορούν να θεωρηθούν γνωστές σταθερές. Ο επενδυτής δύναται να δημιουργήσει μια θέση αντιστάθμισης κινδύνου η οποία αποτελείται από δύο συνιστώσες, μια θέση αγοράς στην υποκείμενη μετοχή και μια θέση πώλησης στο δικαίωμα προαίρεσης. Η αξία της αντισταθμιστικής θέσης δεν εξαρτάται από την τιμή της μετοχής, αλλά μόνο από το χρόνο και από τις τιμές γνωστών σταθερών (Black και Scholes, 1973).

2.2.2 Μοντελοποίηση της ανέλιξης των τιμών του υποκείμενου τίτλου

Μια βασική υπόθεση που χρησιμοποιεί το υπόδειγμα Black-Scholes, είναι ότι οι τιμές των μετοχών διαμορφώνονται σύμφωνα με μια στοχαστική διαδικασία, δηλαδή μεταβάλλονται στο χρόνο με κάποιο βαθμό αβεβαιότητας. Μια στοχαστική διαδικασία είναι μια συλλογή τυχαίων μεταβλητών που αντιπροσωπεύουν την εξέλιξη κάποιου συστήματος με τυχαίες μεταβλητές κατά τη πάροδο του χρόνου.

Οι στοχαστικές διαδικασίες μπορούν να κατηγοριοποιηθούν ως διαδικασίες διακριτού χρόνου και ως συνεχούς χρόνου. Η μεταβλητή μιας στοχαστικής ανέλιξης διακριτού χρόνου, μπορεί να αλλάξει τιμή μόνο σε συγκεκριμένα χρονικά σημεία. Αντίθετα η μεταβλητή μιας στοχαστικής ανέλιξης συνεχούς χρόνου μπορεί να αλλάξει τιμή σε οποιοδήποτε χρονικό σημείο μέσα στο χρονικό διάστημα στο οποίο η διαδικασία ορίζεται. Οι στοχαστικές διαδικασίες μπορούν ακόμα να χαρακτηριστούν με βάση το αν η μεταβλητή μπορεί να πάρει διακριτές τιμές ή συνεχείς τιμές (Hull, 2014).

Μια σημαντική ιδιότητα στην μοντελοποίηση της τιμής των μετοχών, είναι η ιδιότητα Markov. Μια ανέλιξη Markov, ονομάζεται μια κατηγορία στοχαστικών διαδικασιών στις οποίες μόνο η παρούσα τιμή μιας μεταβλητής μπορεί να επηρεάσει τη μελλοντική της μεταβολή. Άρα μόνο η παρούσα τιμή της μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη μελλοντική της πρόβλεψη και όχι οι παρελθοντικές τιμές της μεταβλητής. Επομένως, οι προβλέψεις για τη μελλοντική τιμή των μετοχών μπορούν να γίνουν μόνο σε όρους μιας κατανομής πιθανοτήτων, η οποία με τη σειρά της δεν εξαρτάται από το πώς διαμορφώθηκαν οι τιμές της μεταβλητής στο παρελθόν.

Η ανέλιξη Markov είναι συνεπής με την ασθενούς μορφής Υπόθεση Αποτελεσματικών Αγορών, η οποία διατείνεται ότι οι τιμές των αξιογράφων ενσωματώνουν όλη τη πληροφόρηση

που μπορεί να εξαχθεί από τα στοιχεία της χρηματιστηριακής αγοράς. Η προσέγγιση αυτή υποθέτει ότι οι διαδοχικές αποδόσεις των μετοχών είναι γραμμικά ανεξάρτητες και οι κατανομές πιθανοτήτων τους σταθερές διαχρονικά. Η ασθενής μορφής αποτελεσματικότητα υποθέτει ότι ένας επενδυτής δεν μπορεί να εκμεταλλευτεί την συσχέτιση των αποδόσεων για να αποκομίσει αποδόσεις μεγαλύτερες από εκείνες που αντιστοιχούν στο κίνδυνο που έχει αναλάβει. Άρα, η υπόθεση της ανέλιξης Markov, είναι πιο περιοριστική από την υπόθεση της ασθενούς μορφής αποτελεσματικότητας. Κατά συνέπεια, εάν ισχύει η ανέλιξη Markov τότε ισχύει και η ασθενούς μορφής αποτελεσματικότητα, ενώ το αντίστροφο δεν ισχύει (Hull, 2014).

2.2.3 Εξαγωγή της διαφορικής εξίσωσης του υποδείγματος Black-Scholes.

Η διαφορική εξίσωση των Black, Scholes και Merton ικανοποιείται από κάθε παράγωγο προϊόν, το οποίο εξαρτάται από μια υποκείμενη μετοχή η οποία δεν αποδίδει μέρισμα. Έχει συνεπώς καθολική ισχύ. Έστω χαρτοφυλάκιο P , το οποίο αποτελείται από q_s μετοχές και q_c δικαιώματα αγοράς επί της μετοχής S . Η αξία V του χαρτοφυλακίου ισούται με:

$$V = q_s S + q_c C \quad (2.1)$$

Η μεταβολή dV της αξίας του χαρτοφυλακίου, από μεταβολές της αξίας της μετοχής και του δικαιώματος αγοράς, dS και dC αντίστοιχα, ισούται με:

$$dV = q_s dS + q_c dC \quad (2.2)$$

Η μεταβολή της αξίας του χαρτοφυλακίου σε οποιαδήποτε χρονική περίοδο dt , πρέπει να αντιστοιχεί στην απόδοση ενός ακίνδυνου χρεογράφου για την ίδια περίοδο, εφόσον το χαρτοφυλάκιο P είναι χαρτοφυλάκιο αντιστάθμισης κινδύνου. Εάν η αξία του χαρτοφυλακίου V , επενδυόταν για μια περίοδο dt με απόδοση r_f , τότε στο τέλος της περιόδου dt , θα είχε κέρδος ίσο με $r_f V dt$. Για να μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το χαρτοφυλάκιο P αντισταθμίζει τον κίνδυνο, θα πρέπει να ικανοποιείται η σχέση:

$$\begin{aligned} r_f V dt &= q_s dS + q_c dC \Rightarrow \\ \Rightarrow r_f (q_s S + q_c C) dt &= q_s dS + q_c dC \end{aligned} \quad (2.3)$$

Εάν ο επενδυτής αγοράσει ένα τεμάχιο της μετοχής S , δηλαδή $q_s = 1$, και εκδώσει q_c δικαιώματα αγοράς, για να θεωρήσουμε ότι το χαρτοφυλάκιο αντισταθμίζει τον κίνδυνο θα πρέπει η αξία του V , να παραμένει σταθερή και ανεξάρτητη από μεταβολές στη τιμή της μετοχής S . Άρα θα πρέπει να ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$\frac{\partial V}{\partial S} = 0 \Leftrightarrow 1 + q_c \frac{\partial C}{\partial S} = 0 \Leftrightarrow q_c = -\frac{1}{\frac{\partial C}{\partial S}}$$

Από τη σχέση (2.3), για $q_s = 1$ και $q_c = -\frac{1}{\frac{\partial C}{\partial S}}$ προκύπτει:

$$\begin{aligned} r_f \left(S - \frac{C}{\frac{\partial C}{\partial S}} \right) dt &= dS - \frac{1}{\frac{\partial C}{\partial S}} dC \Rightarrow \\ \Rightarrow dC &= \frac{\partial C}{\partial S} dS - r_f \frac{\partial C}{\partial S} dt + r_f C dt \end{aligned} \quad (2.4)$$

Ανέλιξη Wiener

Μια υποκατηγορία των στοχαστικών ανελίξεων Markov, αποτελεί η ανέλιξη Wiener. Μια στοχαστική ανέλιξη $W = (W_t, t \geq 0)$, ονομάζεται ανέλιξη Wiener εάν:

- (1) κάθε τιμή της W_t τη στιγμή t , είναι συνεχής με $W_0 = 0$.
- (2) η μεταβολή $W_{t+t'} - W_t$ ακολουθεί τη την κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διακύμανση $\sqrt{t' - t}$, και είναι ανεξάρτητη από τη πορεία της ανέλιξης μέχρι τη στιγμή t .

Με βάση τα παραπάνω η μεταβολή της τιμής της μετοχής dS δίνεται από τη σχέση:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW \quad (2.5)$$

όπου μ η στιγμιαία αναμενόμενη απόδοση της μετοχής, σ η στιγμιαία τυπική απόκλιση της μετοχής και dW μια τυχαία μεταβλητή με τις ιδιότητες μιας ανέλιξης Wiener. Ισχύει ότι $dW \sim N(0, \sqrt{dt})$

Εάν C η τιμή ενός δικαιώματος αγοράς, και S η τιμή της υποκείμενης μετοχής, τότε η μεταβλητή C θα είναι συνάρτηση των S και t . Από τη ταυτότητα του Itô, (Itô, 1951) προκύπτει:

$$dC = \left(\frac{\partial C}{\partial S} \mu S + \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \sigma S \frac{\partial C}{\partial S} dW \quad (2.6)$$

Αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα στη σχέση (2.4), προκύπτει:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + r_f \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 - r_f C = 0 \quad (2.7)$$

Η οποία αποτελεί τη στοχαστική διαφορική εξίσωση του μοντέλου Black-Scholes. Η εξίσωση αυτή έχει γενική ισχύ καθώς την ικανοποιεί κάθε παράγωγο προϊόν η αξία του οποίου προσδιορίζεται συναρτήσει της αξίας S ενός υποκείμενου προϊόντος και του χρόνου t . Επιπλέον, στην εξίσωση εμφανίζεται μόνο η τυπική απόκλιση σ του υποκείμενου προϊόντος και όχι η αναμενόμενη απόδοση μ . Επομένως η αξία του δικαιώματος προαίρεσης είναι ανεξάρτητη από την αναμενόμενη απόδοση και προσδιορίζεται μόνο από τη τρέχουσα αξία S του υποκείμενου προϊόντος, τη μεταβλητότητα του, και το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο (Hull, 2014).

Για την επίλυση της διαφορικής αυτής εξίσωσης είναι αναγκαίος ο καθορισμός οριακών συνθηκών ανάλογα με το υπό εξέταση παράγωγο προϊόν. Στην περίπτωση των δικαιωμάτων αγοράς, οι οριακές συνθήκες προκύπτουν από την αξία που έχουν κατά τη λήξη τους. Εάν στη λήξη η τιμή του υποκείμενου προϊόντος S είναι μεγαλύτερη από τη τιμή εξάσκησης K , τότε το δικαίωμα θα εξασκηθεί και θα έχει αξία ίση με $S - K$. Σε αντίθετη περίπτωση, εάν η τιμή του υποκείμενου S είναι μικρότερη ή ίση της τιμής εξάσκησης K , τότε το δικαίωμα δεν εξασκείται και άρα έχει μηδενική αξία. Τα παραπάνω συνοψίζονται ως εξής:

$$C = \begin{cases} S - K, & \text{εάν } S > K \\ 0, & \text{εάν } S \leq K \end{cases}$$

Με τις συνθήκες αυτές η λύση της εξίσωσης (2.7) δίνεται από τη σχέση:

$$C = SN(d_1) - Ke^{-r_f t} N(d_2) \quad (2.8)$$

όπου σ είναι η τυπική απόκλιση των αποδόσεων της μετοχής, προεξοφλημένων σε ετήσια βάση με συνεχή ανατοκισμό και τ τα έτη που απομένουν έως τη λήξη του δικαιώματος αγοράς. Το $N(d_1)$ και $N(d_2)$ ισούται με το εμβαδόν κάτω από τη καμπύλη της αθροιστικής τυποποιημένης κανονικής κατανομής έως τα σημεία d_1 και d_2 αντίστοιχα, τα οποία δίνονται από τις σχέσεις:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r_f + \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

και

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r_f - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$$

Για την αποτίμηση των δικαιωμάτων πώλησης, μπορούμε να λάβουμε υπόψη την αντιστοιχία που ισχύει μεταξύ των δικαιωμάτων αγοράς και των δικαιωμάτων πώλησης, γνωστής και ως Put-Call Parity, και να χρησιμοποιήσουμε τη παρακάτω σχέση:

$$C + \frac{K}{(1+r_f)^t} = S + P$$

όπου P η αξία του αντίστοιχου δικαιώματος πώλησης, για τον ίδιο υποκείμενο τίτλο με τιμή S . Μετασχηματίζουμε τη σχέση ώστε ο ανατοκισμός να γίνεται σε συνεχή χρόνο, για να πάρουμε:

$$C = S + P - Ke^{r_f\tau}$$

Με αντικατάσταση στη σχέση που δίνει την αξία ενός δικαιώματος αγοράς (σχέση 2.8), προκύπτει η αξία ενός δικαιώματος πώλησης:

$$P = S [N(d_1) - 1] - Ke^{-r_f\tau} [N(d_1) - 1] \quad (2.9)$$

2.2.4 Συντελεστές Ευαισθησίας

Η τιμή ενός δικαιώματος προαίρεσης, μπορεί να επηρεαστεί από μια πληθώρα παραγόντων. Βασιζόμενοι στη σχέση που δηλώνει την αξία των δικαιωμάτων αγοράς ή πώλησης σύμφωνα με το μοντέλο Black-Scholes, είναι δυνατή η περαιτέρω ανάλυση του τρόπου με τον οποίο διάφοροι παράγοντες επιδρούν στην αξία των δικαιωμάτων, μέσω της εξαγωγής συντελεστών ευαισθησίας. Οι συντελεστές αυτοί αναφέρονται στη βιβλιογραφία συλλογικά ως παράμετροι αντιστάθμισης ή ως "the Greeks", καθώς αναπαρίστανται από πεζούς ελληνικούς χαρακτήρες.

➤ Ο συντελεστής δ (*delta*) αναπαριστά τη μεταβολή στην αξία ενός δικαιώματος προαίρεσης εξαιτίας μιας μεταβολής στη τρέχουσα αξία του υποκείμενου προϊόντος, και δίνεται από τη σχέση $\delta = \partial C / \partial S$. Στην περίπτωση των δικαιωμάτων αγοράς ισχύει $\delta = N(d_1)$, ενώ για τα δικαιώματα πώλησης $\delta = N(d_1) - 1$. Μια μεταβολή ΔS στην αξία του υποκείμενου προϊόντος συνεπάγεται μεταβολή κατά $\delta \Delta S$ στην αξία του δικαιώματος. Σαν αποτέλεσμα, οι πιθανές ζημιές από την αγορά ενός ΔA μπορούν να αντισταθμιστούν από την ανοιχτή πώληση δ μονάδων του υποκείμενου προϊόντος, ενώ οι πιθανές ζημιές από την πώληση ενός ΔA μπορούν να αντισταθμιστούν από την αγορά δ μονάδων του υποκείμενου προϊόντος. Ο συντελεστής δ δίνει τον συντελεστή αντιστάθμισης κινδύνου (*hedge ratio*) στο υπόδειγμα Black-Scholes. Οι τιμές του συντελεστή δ είναι θετικές για τα Δικαιώματα Αγοράς και αρνητικές για τα Δικαιώματα Πώλησης.

➤ Ο συντελεστής γ (*gamma*) αναπαριστά τη μεταβολή του συντελεστή δ συναρτήσει των μεταβολών στην τρέχουσα αξία του υποκείμενου προϊόντος, δηλαδή $\gamma = \partial \delta / \partial S = \partial^2 C / \partial S^2$.

Μικρές τιμές του συντελεστή γ υποδεικνύουν ότι ο συντελεστής δ θα παρουσιάσει περιορισμένη μεταβολή εάν μεταβληθεί η αξία του υποκείμενου προϊόντος, ενώ μια υψηλή τιμή του συντελεστή γ υποδεικνύει ότι ο συντελεστής δ θα παρουσιάζει υψηλή ευαισθησία σε μεταβολές της αξίας του υποκείμενου προϊόντος. Ο συντελεστής γ είναι θετικός τόσο για τα Δικαιώματα Αγοράς όσο και για τα Δικαιώματα Πώλησης γιατί κάθε αύξηση ή μείωση στην αξία του υποκείμενου προϊόντος οδηγεί σε ανάλογη αύξηση ή μείωση του συντελεστή δ . Ο υπολογισμός του συντελεστή γ δίνεται από τη σχέση:

$$\gamma = \frac{e^{-d_1^2/2}}{S\sigma\sqrt{2\tau\pi}}$$

➤ Ο συντελεστής θ (*theta*) αναπαριστά τη μεταβολή στην αξία του δικαιώματος συναρτήσει της μεταβολής στο χρόνο, δηλαδή $\theta = \partial C / \partial t$. Με τη θετική πορεία του χρόνου t , το χρονικό διάστημα έως τη λήξη του δικαιώματος τ , μειώνεται. Έτσι, ο συντελεστής θ συνδέεται με την ευαισθησία της αξίας του δικαιώματος σε σχέση με το χρόνο έως τη λήξη του. Ο συντελεστής θ είναι αρνητικός για τα δικαιώματα αγοράς, καθώς η αξία τους μειώνεται όσο πλησιάζουν προς τη λήξη τους. Για τα δικαιώματα πώλησης ο θ μπορεί να είναι θετικός εάν το δικαίωμα είναι πολύ πιθανό να εξασκηθεί, και αρνητικός εάν είναι πιθανό να μην εξασκηθεί στη λήξη του. Ο υπολογισμός του θ δίνεται από τις σχέσεις που ακολουθούν.

$$\text{Για Δικαιώματα Αγοράς:} \quad \theta = -\frac{S\sigma e^{-\frac{d_1^2}{2}}}{2\sqrt{2\tau\pi}} - rKe^{-r\tau} N(d_2)$$

$$\text{Για Δικαιώματα Πώλησης:} \quad \theta = -\frac{S\sigma e^{-\frac{d_1^2}{2}}}{2\sqrt{2\tau\pi}} - rKe^{-r\tau} [1 - N(d_2)]$$

➤ Ο συντελεστής v (*vega*) αναπαριστά τη σχέση μεταξύ της αξίας του δικαιώματος και της μεταβλητότητας του υποκείμενου προϊόντος, δηλαδή $v = \partial C / \partial \sigma$. Ο συντελεστής v είναι θετικός τόσο για Δικαιώματα Αγοράς όσο και για Δικαιώματα Πώλησης, καθώς μία αύξηση(μείωση) της μεταβλητότητας της τιμής ενός υποκείμενου προϊόντος επιφέρει αύξηση(μείωση) της τιμής του δικαιώματος. Ο υπολογισμός δίνεται από τη σχέση:

$$v = Se^{-\frac{d_1^2}{2}} \sqrt{\frac{\tau}{2\pi}}$$

➤ Ο συντελεστής ρ (*rho*) αναπαριστά τη μεταβολή στην αξία του δικαιώματος σε σχέση με τις μεταβολές στο ακίνδυνο επιτόκιο r_f , δηλαδή $\rho = \partial C / \partial r_f$. Ο συντελεστής ρ είναι θετικός για τα Δικαιώματα Αγοράς, καθώς μια αύξηση των επιτοκίων αυξάνει την αξία τους και αρνητικός για τα Δικαιώματα Πώλησης καθώς μια αύξηση των επιτοκίων μειώνει την αξία τους. Ο ρ δίνεται από τις σχέσεις:

$$\text{Για Δικαιώματα Αγοράς:} \quad \rho = K\tau e^{-r_f\tau} N(d_2)$$

$$\text{Για Δικαιώματα Πώλησης:} \quad \rho = -K\tau e^{-r_f\tau} [1 - N(d_2)]$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΩΝ ΠΡΟΑΙΡΕΣΗΣ ΜΕ

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ GARCH

3.1 Εισαγωγή

Στην προηγούμενη ενότητα παρουσιάστηκε το κλασικό υπόδειγμα αποτίμησης Black-Scholes, καθώς και η διαδικασία αποτίμησης δικαιωμάτων προαίρεσης στην πιο απλή της μορφή. Η κεντρική ιδέα της αποτίμησης δικαιωμάτων, θέλει τη κατασκευή ενός χαρτοφυλακίου αντιστάθμισης το οποίο αποτελείται από το δικαίωμα προαίρεσης καθώς και το υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο στο οποίο το δικαίωμα βασίζεται, σε αντίθετες θέσεις, και σε αναλογία τέτοια ώστε το αντισταθμιστικό χαρτοφυλάκιο να έχει απόδοση ίση με το ακίνδυνο επιτόκιο. Στη συνέχεια το χαρτοφυλάκιο αποτιμάται κάνοντας χρήση της υπόθεσης απουσίας ευκαιριών αρμπιτράζ. Το υπόδειγμα Black-Scholes ισχύει υπό μια σειρά υποθέσεων. Κεντρική υπόθεση αφορά την ανέλιξη που ακολουθεί η τιμή του υποκείμενου τίτλου. Το υπόδειγμα υποθέτει ότι το υποκείμενο στοιχείο ακολουθεί μια γεωμετρική κίνηση Brown, και άρα η μεταβλητότητα του παραμένει σταθερή διαχρονικά.

Η υπόθεση αυτή έχει απορριφθεί ως μη ρεαλιστική από πληθώρα ερευνών, όπως αυτές των Fama(1965) και Mandelbrot(1966), που υποστηρίζουν ότι οι κατανομές των αποδόσεων των μετοχών παρουσιάζουν υψηλή ασυμμετρία και κύρτωση (fat-tail distribution), καθώς και μεταβλητότητα κατά συστάδες (volatility clustering). Επίσης, η υπόθεση δεν επαληθεύεται εμπειρικά από τις τιμές των δικαιωμάτων που παρατηρούνται στις αγορές (Breton, 2010). Εμπειρικές μελέτες έχουν αποδείξει ότι η τεκμαιρόμενη μεταβλητότητα του υποδείγματος Black-Scholes διαφέρει ανάμεσα σε διαφορετικές τιμές εξάσκησης και ληκτότητας. Οι συστηματικές αποκλίσεις του υποδείγματος οφείλονται στην υπόθεση της σταθερής χρονικά μεταβλητότητας (Su et al., 2010).

Πολλοί ερευνητές έχουν επιχειρήσει να ξεπεράσουν τις αδυναμίες του υποδείγματος Black και Scholes, επικεντρώνοντας τη προσοχή τους σε υποδείγματα που θα μοντελοποιούν με μεγαλύτερη ακρίβεια τη μεταβλητότητα. Οι Su et al.(2010) διαχωρίζουν τα σύγχρονα υποδείγματα σε δύο γενικές κατηγορίες, τα υποδείγματα τεκμαιρόμενης μεταβλητότητας και στοχαστικής μεταβλητότητας. Στη δεύτερη κατηγορία ανήκουν τα υποδείγματα στοχαστικής μεταβλητότητας συνεχούς χρόνου, καθώς και τα υποδείγματα με ανεπίξεις GARCH σε διακριτό χρόνο. Παρότι τα υποδείγματα στοχαστικής μεταβλητότητας σε συνεχή χρόνο είναι

αποτελεσματικά στην αποτίμηση δικαιωμάτων, δεν είναι πρακτικά στην εφαρμογή τους, καθώς είναι δύσκολο να αντληθεί μια μεταβλητή συνεχούς χρόνου από παρατηρήσεις σε διακριτό χρόνο. Η λύση μπορεί να δοθεί με την εξαγωγή της τεκμαιρόμενης μεταβλητότητας από τις τιμές των δικαιωμάτων προαίρεσης, η οποία αποτελεί μια χρονοβόρα διαδικασία και απαιτεί σημαντική υπολογιστική ισχύ (Su et al., 2010). Για τον λόγο αυτό, πολλοί ερευνητές επιχειρούν να αντιμετωπίσουν το πρόβλημα αυτό, εστιάζοντας τη προσοχή του στην ανάπτυξη υποδειγμάτων που κάνουν χρήση διαδικασιών ARCH.

Τα υποδείγματα ARCH (Αυτοπαλίνδρομα υποδείγματα με υπό συνθήκη Ετεροσκεδαστικότητα - Autoregressive Conditionally Heteroscedastic) παρουσιάστηκαν για πρώτη φορά από τον Robert F. Engle στο άρθρο “Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation”, *Econometrica*, 1982. Αρχικά, το προτεινόμενο πεδίο εφαρμογής αφορούσε μακροοικονομικά δεδομένα, τελικά όμως τα υποδείγματα ARCH και η γενίκευσή τους, τα GARCH (Generalized ARCH), αποδείχθηκαν ιδιαίτερα δημοφιλή σε ακαδημαϊκούς και επαγγελματίες του κλάδου των χρηματοοικονομικών.

Τα υποδείγματα GARCH οδήγησαν σε μια πολύ διαφορετική προσέγγιση της ανάλυσης χρονολογικών σειρών χρηματοοικονομικών δεδομένων, μέσω της πιο αποτελεσματικής μοντελοποίησης της μεταβλητότητας της τιμής των χρηματοοικονομικών περιουσιακών στοιχείων. Το 2003 το βραβείο Νόμπελ Οικονομικών Επιστημών απονεμήθηκε στους Robert F. Engle και Clive W.J. Granger για τη “μέθοδο ανάλυσης οικονομικών χρονολογικών σειρών με χρονικά μεταβαλλόμενη μεταβλητότητα ARCH” (Francq και Zakoian, 2010). Τα υποδείγματα GARCH χρησιμοποιούνται ευρέως στη μοντελοποίηση χρονολογικών σειρών, ιδιαίτερα για την εμπειρική διερεύνηση στο πεδίο των χρηματοοικονομικών, όπως για παράδειγμα στις έρευνες των Bollerslev(1986), French et al.(1987), Pagan και Schwert(1990), Glosten et al.(1993) και Maheu και McCurdy(2004).

Στα πλαίσια της αποτίμησης δικαιωμάτων προαίρεσης, τα υποδείγματα GARCH εμφανίζουν σημαντικά οφέλη έναντι των υποδειγμάτων στοχαστικής μεταβλητότητας όπως το κλασσικό υπόδειγμα Black-Scholes και το Ad-Hoc Black-Scholes. Τα υποδείγματα GARCH παρουσιάζουν ένα πλεονέκτημα έναντι των υποδειγμάτων στοχαστικής μεταβλητότητας συνεχούς χρόνου, καθώς η μεταβλητότητα είναι παρατηρήσιμη στις ιστορικές τιμές του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου και μπορεί να εξαχθεί. Κατά συνέπεια είναι δυνατή η αποτίμηση ενός δικαιώματος προαίρεσης χρησιμοποιώντας μόνο τις παρατηρήσεις των ιστορικών τιμών του υποκείμενου στοιχείου (Breton, 2010). Τα GARCH χρησιμοποιήθηκαν στην αποτίμηση δικαιωμάτων για πρώτη φορά από τον Jin-Chuan Duan, στο άρθρο “The

GARCH Option Pricing Model”, Journal of Mathematical Finance , 1995, στα πλαίσια ενός υποδείγματος σε διακριτό χρόνο.

Υπάρχουν ποικίλες προσεγγίσεις στην αποτίμηση δικαιωμάτων σε διακριτό χρόνο, κυρίως σε ανελίξεις με μία χρονική υστέρηση, τις πλέον διαδεδομένες σε πρακτικό επίπεδο. Μερικές από αυτές, για αποτίμηση δικαιωμάτων Ευρωπαϊκού τύπου, αποτελούν τα υποδείγματα των Duan και Simonato(1998), Bollerslev και Mikkelsen(1996, 1999), Heston και Nandi(2000), Duan και Zhang(2001), Hsieh and Ritchken(2005) καθώς και οι Christoffersen και Jacobs(2004). Για δικαιώματα Αμερικανικού τύπου, υποδείγματα με τη χρήση GARCH ανέπτυξαν οι Ritchken και Trevor(1998) και ο Stentoft(2005) .

3.2 Το υπόδειγμα GARCH του Duan(1995)

Το υπόδειγμα αποτίμησης GARCH του Duan(1995), έχει τρία βασικά χαρακτηριστικά που το διαφοροποιούν από τα μέχρι τότε υπάρχοντα μοντέλα αποτίμησης. Πρώτον, η τιμή ενός δικαιώματος είναι συνάρτηση του ασφάλιστρου κινδύνου και ενσωματώνεται στη τιμή του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου. Δεύτερον, σε αντίθεση με τα υποδείγματα που προηγήθηκαν, δεν ακολουθεί μια ανελίξη Markov. Τρίτον, το υπόδειγμα GARCH μπορεί να εξηγήσει κάποια συστηματικά σφάλματα αποτίμησης που παρουσιάζει το υπόδειγμα Black-Scholes. Τα συστηματικά αυτά σφάλματα είναι η υποτιμολόγηση των δικαιωμάτων όταν είναι out-of-the-money και η υποτιμολόγηση των δικαιωμάτων με βραχεία ληκτότητα, όπως περιγράφηκαν από τους (Black, 1975) και (Whaley,1982). Ένα επιπλέον χαρακτηριστικό του υποδείγματος Black-Scholes είναι η εμφάνιση της καμπύλης σε σχήμα U όταν η τεκμαιρόμενη μεταβλητότητα αποτυπώνεται διαγραμματικά σε σχέση με την τιμή εξάσκησης, ένα φαινόμενο γνωστό ως Volatility Smile (Rubinstein 1985, Sheikh 1991).

Εξαιτίας της πολυπλοκότητας των ανελίξεων GARCH, στο υπόδειγμα αποτίμησης χρησιμοποιείται μια γενικευμένη εκδοχή ουδετεροποίησης του κινδύνου, η οποία αποτελεί επέκταση της μεθόδου ουδετεροποίησης κινδύνου που χρησιμοποιούν οι Rubinstein(1976) και Brennan(1979). Η εκδοχή αυτή αναφέρεται ως Τοπική Σχέση Αποτίμησης Ουδετεροποιημένου Κινδύνου (Locally Risk-Neutral Valuation Relationship ή LRNVR). Η σχέση αυτή διαφέρει από το συμβατικό μέτρο ουδετεροποιημένου κινδύνου (Risk-Neutral Measure), καθώς χαρακτηρίζεται από ανεξαρτησία της υπό συνθήκη μεταβλητότητας της επόμενης περιόδου, σε μεταβολές του μέτρου αποτίμησης με ουδετεροποιημένο κίνδυνο. Αυτή είναι μια σημαντική διαφορά, διότι στις ανελίξεις GARCH, η μη-δεσμευμένη μεταβλητότητα

καθώς και κάθε δεσμευμένη μεταβλητότητα πέραν της αμέσως επόμενης περιόδου, επηρεάζονται από μεταβολές στο μέτρο ουδετεροποιημένου κινδύνου (Duan, 1995).

Το υπόδειγμα αποτίμησης του Duan(1995) υποθέτει μια οικονομία διακριτού χρόνου, όπου S_t η τιμή της υποκείμενης μετοχής (ή κάποιου άλλου χρηματοοικονομικού περιουσιακού στοιχείου) στον χρόνο t . Η απόδοση μιας περιόδου υπό το μέτρο πιθανότητας P , δίνεται από τη σχέση που ακολουθεί:

$$\ln \frac{S_t}{S_{t-1}} = r_f + \lambda \sqrt{h_t} - \frac{1}{2} h_t + \varepsilon_t \quad (3.1.1)$$

όπου ε_t διαταρακτικός όρος με μέση τιμή 0 και δεσμευμένη διακύμανση h_t υπό το μέτρο πιθανότητας P , r_f το σταθερό ακίνδυνο επιτόκιο μιας περιόδου και λ το σταθερό ασφάλιστρο κινδύνου. Επιπλέον, ο διαταρακτικός όρος ε_t ακολουθεί μια διαδικασία $GARCH(p, q)$ κατά Bollerslev (1986) υπό το μέτρο πιθανότητας P , όπως φαίνεται στη συνέχεια:

$$h_t = a_0 + \sum_{i=1}^q a_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i} \quad (3.1.2)$$

με

$$\varepsilon_t | \varphi_{t-1} \sim N(0, h_t)$$

όπου φ_t το σύνολο πληροφόρησης όλων των διαθέσιμων πληροφοριών μέχρι και τον χρόνο t . Επιπλέον ισχύει ότι $p \geq 0$, $q \geq 0$, $a_0 > 0$, $a_i \geq 0$, με $i = 1, \dots, q$ και $\beta_i \geq 0$ με $i = 1, \dots, p$. Δηλαδή, η δεσμευμένη διακύμανση h_t είναι γραμμική συνάρτηση των τετραγώνων των παρελθοντικών διαταρακτικών όρων, και των παρελθοντικών δεσμευμένων διακυμάνσεων. Άρα η δεσμευμένη διακύμανση h_t μπορεί να προβλεφθεί μέσω του συνόλου πληροφόρησης φ_t . Για να διασφαλιστεί η συνθήκη στασιμότητας της συνδιακύμανσης στη διαδικασία $GARCH(p, q)$, πρέπει να ισχύει ότι:

$$\sum_{i=1}^q a_i + \sum_{i=1}^p \beta_i < 1$$

Για την ανάπτυξη του υποδείγματος αποτίμησης $GARCH$, ο Duan(1995) υποστηρίζει ότι η συμβατική σχέση αποτίμησης ουδετεροποιημένου κινδύνου πρέπει να γενικευθεί ώστε

να είναι συμβατή με την παρουσία ετεροσκεδαστικότητας στις αποδόσεις του υποκείμενου περιουσιακού τίτλου. Για να το επιτύχει, ορίζει ένα μέτρο αποτίμησης Q το οποίο ικανοποιεί τη Τοπική Σχέση Αποτίμησης Ουδετεροποιημένου Κινδύνου (LRNVR), όταν ισχύουν τα παρακάτω:

- το μέτρο Q είναι συνεχές σε σχέση με το μέτρο P
- η δεσμευμένη απόδοση μιας περιόδου του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου, δοθέντος του συνόλου πληροφόρησης της προηγούμενης περιόδου, $S_t/S_{t-1} | \varphi_{t-1}$ ακολουθεί λογαριθμοκανονική κατανομή υπό το μέτρο Q .

Η αναμενόμενη τιμή υπό το μέτρο Q της δεσμευμένης απόδοσης μίας περιόδου S_t/S_{t-1} , δοθέντος του συνόλου πληροφόρησης της προηγούμενης περιόδου φ_{t-1} , ισούται με την απόδοση του ακίνδυνου επιτοκίου r_f , δηλαδή:

$$E^Q(S_t/S_{t-1} | \varphi_{t-1}) = e^{r_f} \quad (3.1.3)$$

Οι διακυμάνσεις υπό τα μέτρα Q και P , των δεσμευμένων αποδόσεων μίας περιόδου S_t/S_{t-1} , δοθέντος του συνόλου πληροφόρησης της προηγούμενης περιόδου φ_{t-1} , εξισώνονται:

$$Var^Q(\ln(S_t/S_{t-1} | \varphi_{t-1})) = Var^P(\ln(S_t/S_{t-1} | \varphi_{t-1})) \quad (3.1.4)$$

Η τελευταία ιδιότητα, μαζί με το γεγονός ότι η υπό συνθήκη αναμενόμενη τιμή της απόδοσης μπορεί να αντικατασταθεί με την απόδοση του ακίνδυνου επιτοκίου, δίνουν ένα υπόδειγμα το οποίο δεν εξαρτάται από τις προτιμήσεις των επενδυτών. Σύμφωνα με τον ορισμό του υποδείματος από τον Duan(1995), η ισότητα των δεσμευμένων διακυμάνσεων υπό τα μέτρα P και Q , αποτελεί βέβαιη συνθήκη. Εφόσον το μέτρο Q είναι απολύτως συνεχές σε σχέση με το μέτρο P , εάν η σχέση ισχύει για το μέτρο P τότε θα ισχύει και για το μέτρο Q . Στην περίπτωση που η διαδικασία GARCH που ακολουθεί η τιμή είναι ομοσκεδαστική, εάν δηλαδή ισχύει ότι $p = 0$ και $q = 0$, οι δεσμευμένες διακυμάνσεις γίνονται η ίδια σταθερά, και η Τοπική Σχέση Αποτίμησης Ουδετεροποιημένου Κινδύνου (LRNVR) απλοποιείται στην Συμβατική Σχέση Αποτίμησης Ουδετεροποιημένου Κινδύνου.

Από τη σχέση LRNVR συνεπάγεται ότι, υπό το μέτρο Q , η απόδοση μίας περιόδου του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου δίνεται από τη σχέση:

$$\ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) = r_f - \frac{1}{2} h_t + \xi_t \quad (3.1.5)$$

όπου ο υπό συνθήκη διαταρακτικός όρος ξ_t , δεσμευμένος ως προς το σύνολο πληροφόρησης της προηγούμενης περιόδου φ_{t-1} ακολουθεί τη κανονική κατανομή με μέση τιμή 0, και διακύμανση την υπό συνθήκη διακύμανση h_t :

$$\xi_t | \varphi_{t-1} \sim N(0, h_t)$$

και

$$h_t = a_0 + \sum_{i=1}^q a_i (\xi_{t-1} - \lambda\sqrt{h_{t-1}})^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i} \quad (3.1.6)$$

Από τις προηγούμενες σχέσεις συνεπάγεται ότι η τιμή του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου τη στιγμή της λήξης του συμβολαίου T , δίνεται:

$$S_T = S_t \exp\left[(T-t)r_f - \frac{1}{2} \sum_{s=t+1}^T h_s + \sum_{s=t+1}^T \xi_s\right] \quad (3.1.7)$$

Η τιμή του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου, προεξοφλημένη με το ακίνδυνο επιτόκιο r_f έχει τις ιδιότητες μιας στοχαστικής διαδικασίας martingale. Στο πεδίο των στοχαστικών διαδικασιών σε διακριτό χρόνο, martingale ονομάζεται μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών σε κανένα σημείο της οποίας δεν είναι δυνατό να εκτιμηθεί η επόμενη τιμή της μεταβλητής κάνοντας χρήση των παρελθοντικών τιμών. Με άλλα λόγια, η αναμενόμενη τιμή της επόμενης μεταβλητής στη διαδικασία, είναι ίση με τη τελευταία παρατηρηθείσα τιμή (Duan, 1995).

Η τιμή C_t^{GH} ενός Δικαιώματος αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου τον χρόνο t , με τιμή εξάσκησης K και λήξη τον χρόνο T , δίνεται από τη σχέση:

$$C_t^{GH} = e^{-(T-t)r_f} E^Q[\max(S_T - K, 0) | \varphi_t] \quad (3.1.8)$$

όπου φ_t το σύνολο πληροφόρησης $\{X_t, \varepsilon_t, \dots, \varepsilon_{t-q+1}, h_t, \dots, h_{t-p+1}\}$. Το σύνολο πληροφόρησης μπορεί να απλουστευθεί σημαντικά για $p = 1$ και $q = 1$, λαμβάνοντας το υπόδειγμα $GARCH(1,1)$. Το υπόδειγμα αποτίμησης $GARCH(1,1)$ αποτελεί μια διαδικασία Markov δύο παραγόντων. Εκφράζει ρητά την τιμή του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου ως συνάρτηση του επιπέδου των τιμών και της δεσμευμένης μεταβλητότητας (Duan, 1995).

Μια σημαντική προέκταση του υποδείγματος αποτίμησης δικαιωμάτων, είναι η εξαγωγή του συντελεστή ευαισθησίας δ (*delta*) που χρησιμοποιείται για αντιστάθμιση *delta* (*delta hedging*). Όπως προαναφέρθηκε και στο σχετικό κεφάλαιο, ο συντελεστής δ ενός δικαιώματος προαίρεσης είναι η πρώτη μερική παράγωγος της τιμής του δικαιώματος προαίρεσης ως προς την τιμή του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου. Στα πλαίσια του υποδείγματος αποτίμησης $GARCH$, ο συντελεστής δ δίνεται από τη σχέση:

$$\delta_t^{GH} = e^{-(T-t)r_f} E^Q \left[\frac{S_T}{S_t} 1_{\{S_T \geq K\}} \mid \varphi_t \right] \quad (3.1.9)$$

Για την περίπτωση των Δικαιωμάτων Πώλησης Ευρωπαϊκού τύπου, η τιμή και ο συντελεστής δ μπορούν να εξαχθούν μέσω της σχέσης αντιστοίχισης δικαιωμάτων αγοράς-πώλησης (*put-call parity*). Μπορεί να αποδειχθεί ότι η τιμή του δικαιώματος και ο συντελεστής δ σύμφωνα με το υπόδειγμα $GARCH$, ταυτίζονται με τα αντίστοιχα μεγέθη του υποδείγματος Black-Scholes, όταν η διαδικασία που μοντελοποιεί τη τιμή του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου είναι ομοσκεδαστική. Επιπλέον, δεν υπάρχει αναλυτική λύση για τη τιμή του δικαιώματος και τον συντελεστή δ , καθώς δεν μπορεί να εξαχθεί αναλυτικά η υπό συνθήκη κατανομή της τιμής του υποκείμενου στοιχείου για περισσότερες από μίας περιόδους. Λύση μπορεί να δοθεί μόνο προσεγγιστικά χρησιμοποιώντας μια μέθοδο προσομοίωσης.

3.3 Το υπόδειγμα αποτίμησης των Heston και Nandi(2000)

3.3.1 Εισαγωγή

Στην προηγούμενη ενότητα παρουσιάστηκε το υπόδειγμα αποτίμησης του Duan(1995), το οποίο κάνει χρήση μιας διαδικασίας GARCH για να αποτυπώσει τη σχέση ανατροφοδότησης που υπάρχει μεταξύ των αποδόσεων του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου, και της μεταβολής της μεταβλητότητας αυτών των αποδόσεων. Έχει διαπιστωθεί εμπειρικά η ύπαρξη της λεγόμενης «μεταβλητότητας κατά συστάδες» (volatility clustering), ενός φαινομένου κατά το οποίο μεγάλες μεταβολές στις τιμές των χρηματοοικονομικών μέσων, τείνουν να δημιουργούν συμπλέγματα (Cont, 2005). Για παράδειγμα, η εμφάνιση υψηλών αποδόσεων στις τιμές ενός χρεογράφου, είναι πιθανό να ακολουθείται και από άλλες παρατηρήσεις υψηλών αποδόσεων. Επιπλέον, όταν υπάρχουν αρνητικές εξελίξεις ή ειδήσεις σχετικά με μία μετοχή, η διακύμανση μεταβάλλεται εντονότερα από ότι αν οι εξελίξεις ήταν θετικές. Εμφανίζεται κατά συνέπεια μια αρνητική συσχέτιση μεταξύ των μεταβολών στις αποδόσεων και των μεταβολών στην μεταβλητότητα (Black 1976, Engle και Ng, 1993). Η μεταβλητότητα κατά συστάδες, αποτελεί μια πολύ σημαντική ιδιότητα στην αποτίμηση δικαιωμάτων, την οποία τα υποδείγματα θα πρέπει να περιλαμβάνουν.

Το υπόδειγμα του Duan(1995) επιτυγχάνει στην ενσωμάτωση μιας διαδικασίας που να μπορεί να μοντελοποιεί την μεταβλητότητα κατά συστάδες. Δεν παρέχεται όμως μια λύση αναλυτικά, αλλά προσεγγιστικά μέσω προσομοίωσης. Οι Duan και Simonato(1998) εισήγαγαν ένα υπόδειγμα το οποίο έκανε χρήση μεθόδων προσομοίωσης martingale, για την αποτίμηση δικαιωμάτων ευρωπαϊκού τύπου. Οι Duan, Gauthier και Simonato(1999) χρησιμοποίησαν σειρές Edgeworth για να επιτύχουν μια αναλυτική προσέγγιση στην αποτίμηση δικαιωμάτων ευρωπαϊκού τύπου, όταν το υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο ακολουθεί μια μη-γραμμική ανέλιξη GARCH (NGARCH ή Non-linear-GARCH). Προέκταση της προσέγγισης αυτής αποτελεί το υπόδειγμα των Duan, Gauthier, Sasseville και Simonato(2006), οι οποίοι προσάρμοσαν το προηγούμενο υπόδειγμα τους σύμφωνα με την εκθετική ανέλιξη GARCH (EGARCH ή Exponential GARCH) των Glosten, Jagannathan και Runkle(1993).

Το πρώτο υπόδειγμα αποτίμησης με ανέλιξη GARCH το οποίο είχε αναλυτική λύση, παρουσιάστηκε από τους Heston και Nandi(2000). Ανήκει στα υποδείγματα αποτίμησης GARCH σε διακριτό χρόνο. Οι Heston και Nandi διεξάγουν εκτενείς εμπειρικές δοκιμές για να υποστηρίξουν το υπόδειγμα τους. Πιο συγκεκριμένα, τα αποτελέσματα των ερευνών τους

δείχνουν ότι το υπόδειγμα τους παράγει τιμές με μικρότερες αποκλίσεις από τις πραγματικές, σε σύγκριση με το υπόδειγμα Ad Hoc Black-Scholes των Dumas, Fleming και Whaley(1998).

Οι Hsieh και Ritchken(2006) εικάζουν ότι η χειρότερη απόδοση του Ad Hoc Black-Scholes οφείλεται στη χρήση διαφορετικής τεκμαιρόμενης μεταβλητότητας στην αποτίμηση κάθε δικαιώματος προαίρεσης, κατά την εξειδίκευση του υποδείγματος. Τα μικρότερα λάθη του υποδείγματος Heston-Nandi, οφείλονται σύμφωνα με τους δημιουργούς του, στην ικανότητα του να αποτυπώνει τη συσχέτιση μεταξύ των μεταβολών στις αποδόσεις και των μεταβολών στη μεταβλητότητα, καθώς επίσης και τη σχέση εξάρτησης της μεταβλητότητας από τις παρελθοντικές τιμές της.

3.3.2 Ανάπτυξη του υποδείγματος αποτίμησης των Heston και Nandi(2000).

Οι Heston και Nandi(2000) στηρίζουν το υπόδειγμα που ανέπτυξαν σε δύο βασικές υποθέσεις. Σύμφωνα με τη πρώτη υπόθεση, ο λογάριθμος της τιμής του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου S στο χρόνο t , συμπεριλαμβανομένων των συσσωρευμένων τόκων και μερισμάτων, ακολουθεί μια ανέλιξη $GARCH$, σε διακριτό χρόνο με χρονικά διαστήματα διάρκειας Δ :

$$\log(S_t) = \log(S_{t-\Delta}) + r + \lambda h_t + \sqrt{h_t} z_t \quad (3.2.1)$$

με

$$h_t = \omega + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i\Delta} + \sum_{i=1}^q \alpha_i (z_{t-i\Delta} - \gamma_i \sqrt{h_{t-i\Delta}})^2 \quad (3.2.2)$$

όπου r το ακίνδυνο επιτόκιο για το χρονικό διάστημα Δ , z_t ο διαταρακτικός όρος στο χρόνο t , h_t η δεσμευμένη διακύμανση των λογαριθμικών αποδόσεων μεταξύ του χρόνου t και $t - \Delta$. Η δεσμευμένη διακύμανση h_t είναι γνωστή μέσω του συνόλου πληροφόρησης, στο χρόνο $t - \Delta$.

Σύμφωνα με τους Heston και Nandi(2000), η δεσμευμένη διακύμανση h_t αναπαριστά το πριμ αποδόσεων, και άρα η μέση απόδοση του περιουσιακού στοιχείου εξαρτάται από το επίπεδο κινδύνου. Η εξίσωση (3.2.1), υποθέτει ότι η αναμενόμενη απόδοση του υποκείμενου στοιχείου είναι μεγαλύτερη από την απόδοση του ακίνδυνου επιτοκίου, κατά ένα μέγεθος ανάλογο της δεσμευμένης διακύμανσης h_t . Η τυπική απόκλιση ισούται με τη τετραγωνική ρίζα της δεσμευμένης διακύμανσης h_t , άρα το πριμ αποδόσεων ανά μονάδα κινδύνου είναι επίσης ανάλογο της δεσμευμένης διακύμανσης h_t . Όταν οι παράμετροι του υποδείγματος α_i

και β_i τείνουν στο 0, το υπόδειγμα απλοποιείται στο αντίστοιχο των Black-Scholes. Μπορεί δηλαδή ναδειχθεί ότι το υπόδειγμα Black-Scholes αποτελεί μια ειδική περίπτωση του υποδείγματος των Heston και Nandi.

Το υπόδειγμα Heston-Nandi επικεντρώνεται στην ανέλιξη πρώτης τάξεως με $p = 1$ και $q = 1$, $GARCH(1,1)$. Η ανέλιξη πρώτης τάξεως παραμένει στάσιμη για $\beta_1 + a_1\gamma_1^2 < 1$. Η δεσμευμένη διακύμανση στο χρόνο $t + \Delta$ είναι συνάρτηση της τιμής spot του υποκείμενου στοιχείου, όπως φαίνεται στη παρακάτω σχέση:

$$h_{t+\Delta} = \omega + \beta_1 h_t + \alpha_1 \frac{\log(S_t) - \log(S_{t-\Delta}) - r - \lambda h_t - \gamma_1 h_t^2}{h_t} \quad (3.2.3)$$

όπου α_1 ο συντελεστής κύρτωσης της κατανομής. Για $\alpha_1 = 0$, η χρονικά μεταβαλλόμενη μεταβλητότητα είναι σταθερή. Ο συντελεστής γ_1 εξηγεί την ασυμμετρία στην επίδραση των σφαλμάτων. Μια μεγάλη αρνητική τιμή του διαταρακτικού όρου z_t , προκαλεί μεγαλύτερη αύξηση της μεταβλητότητας από μια θετική τιμή z_t αντίστοιχου μεγέθους. Η συνδιακύμανση της δεσμευμένης διακύμανσης h_t με την λογαριθμική απόδοση του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$Cov_{t-\Delta}[h_{t+\Delta}, \log(S_t)] = -2\alpha_1\gamma_1 h_t \quad (3.2.4)$$

Δοθείσας μιας θετικής τιμής α_1 , θετικές τιμές της παραμέτρου γ_1 οδηγούν σε αρνητική συνδιακύμανση μεταξύ της απόδοσης του υποκείμενου τίτλου και της διακύμανσης του. Η παράμετρος γ_1 εκφράζει την ασυμμετρία της κατανομής των αποδόσεων του υποκείμενου τίτλου. Η κατανομή είναι συμμετρική για τιμές $\gamma_1 = 0$ και $\lambda = 0$.

Για να αποτιμηθεί ένα δικαίωμα προαίρεσης είναι απαραίτητη η εύρεση της κατανομής ουδετεροποιημένου κινδύνου της τιμής του υποκείμενου στοιχείου. Οι εξισώσεις (3.2.1) και (3.2.2) μπορούν να γραφούν υπό ουδετεροποιημένο κίνδυνο ως εξής:

$$\log(S_t) = \log(S_{t-\Delta}) + r - \frac{1}{2} h_t + \sqrt{h_t} z_t^* \quad (3.2.5)$$

και

$$h_t = \omega + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i\Delta} + \sum_{i=2}^q a_i z_{t-i\Delta} - \gamma_i \sqrt{h_{t-i\Delta}^2} + \alpha_1 z_{t-\Delta}^* - \gamma_1^* \sqrt{h_{t-\Delta}^2} \quad (3.2.6)$$

όπου,

$$z_t^* = z_t + \left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \sqrt{h_t}$$

και

$$\gamma_1^* = \gamma_1 + \lambda + \frac{1}{2}$$

Όπως προαναφέρθηκε στην αρχή αυτής της ενότητας, το υπόδειγμα των Heston και Nandi (2000) στηρίζεται σε δύο υποθέσεις. Σύμφωνα με τη δεύτερη υπόθεση, η τιμή ενός δικαιώματος προαίρεσης με μία περίοδο ως τη λήξη του, ταυτίζεται με την τιμή που θα έδινε το υπόδειγμα Black-Scholes. Το υπόδειγμα Black-Scholes χρησιμοποιείται, όπως και στην περίπτωση του υποδείγματος του Duan(1995), γιατί η τιμή του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου ακολουθεί λογαριθμοκανονική κατανομή στο διάστημα μιας περιόδου. Εάν το υπόδειγμα Black-Scholes ισχύει για μία περίοδο, τότε η κατανομή με ουδετεροποιημένο κίνδυνο του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου είναι λογαριθμοκανονική με μέση τιμή $S_{t-\Delta} e^r$. Συνεπάγεται ότι υπάρχει τυχαία μεταβλητή z_t^* η οποία ακολουθεί κανονική κατανομή υπό τη υπόθεση ουδετεροποιημένου κινδύνου (Heston και Nandi, 2000).

Οι δύο υποθέσεις επιτρέπουν την εξαγωγή της αξίας όλων των ενδεχόμενων απαιτήσεων οι οποίες μπορούν να γραφτούν ως συνάρτηση της spot τιμής του υποκείμενου τίτλου. Καθώς τα δικαιώματα προαίρεσης αποτελούν συνάρτηση της τιμής του υποκείμενου στοιχείου S_t , και της δεσμευμένης διακύμανσης του $h_{t+\Delta}$, η δεσμευμένη διακύμανση μπορεί να γραφτεί και ως συνάρτηση της spot τιμής του υποκείμενου τίτλου, δηλαδή της S_t , στην εξίσωση (3.2.3). Ο συντελεστής που καθορίζει την ασυμμετρία ουδετεροποιημένου κινδύνου στο υπόδειγμα GARCH, είναι ο γ_1^* , και της πραγματικής ασυμμετρίας, ο γ_1 . Οι δύο αυτοί συντελεστές μπορούν να διαφέρουν μεταξύ τους λόγω της ύπαρξης της παραμέτρου λ , δηλαδή του πριμ κινδύνου (Heston και Nandi, 2000).

Η παράμετρος λ έχει πολύ μικρή επίδραση στις τιμές της δεσμευμένης διακύμανσης h_t , τροποποιεί όμως τη κατανομή της μελλοντικής διακύμανσης με ουδετεροποιημένο κίνδυνο. Σύμφωνα με τους Heston και Nandi (2000), τα εμπειρικά στοιχεία δείχνουν ότι η διακύμανση συσχετίζεται αρνητικά με τις αποδόσεις του δείκτη S&P500, τον οποίον και χρησιμοποιούν ως τον υποκείμενο τίτλο στο εμπειρικό τμήμα του άρθρου τους. Υποστηρίζουν ότι εάν ο

υποκείμενος τίτλος έχει θετικό πριμ αποδόσεων ($\lambda > -1/2$) και η διακύμανση είναι αρνητικά συσχετισμένη με τις αποδόσεις του υποκείμενου στοιχείου ($\gamma_1 > 0$), τότε ο ρυθμός μεταβολής της διακύμανσης με ουδετεροποιημένο κίνδυνο θα είναι μεγαλύτερος από τον ρυθμό μεταβολής της κανονικής διακύμανσης. Ως αποτέλεσμα, η τεκμαιρόμενη μεταβλητότητα θα είναι μεγαλύτερη από την αναμενόμενη μεταβλητότητα (Heston και Nandi, 2000).

Έστω $f(\varphi)$ η ροπογεννήτρια συνάρτηση του λογαρίθμου των αποδόσεων S_t . Ισχύει:

$$f(\varphi) = E_t(S_t^\varphi) \quad (3.2.7)$$

Έστω $f^*(\varphi)$ η ροπογεννήτρια συνάρτηση της ανέλιξης ουδετεροποιημένου κινδύνου που περιγράφουν οι εξισώσεις (3.2.5) και (3.2.6). Η $f(\varphi)$ παίρνει τη μορφή:

$$f(\varphi) = S_t \exp \left\{ A(t; T, \varphi) + \sum_{i=1}^p B_i(t; T, \varphi) h(t + 2\Delta - i\Delta) + \sum_{i=1}^{q-1} C_i(t; T, \varphi) (z(t + \Delta - i\Delta) - \gamma_1 \sqrt{h(t + \Delta - i\Delta)})^2 \right\} \quad (3.2.8)$$

όπου,

$$A(t; T, \varphi) = A(t + \Delta; T, \varphi) + \varphi r + B_1(t + \Delta; T, \varphi) \omega - \frac{1}{2} \ln(1 - 2\alpha_1 B_1(t + \Delta; T, \varphi)) \quad (3.2.9)$$

και

$$B_1(t; T, \varphi) = \varphi(\lambda + \gamma_1) - \frac{1}{2} \gamma_1^2 + \beta_1 B_1(t + \Delta; T, \varphi) + \frac{\frac{1}{2} (\varphi - \gamma_1)^2}{1 - 2\alpha_1 B_1(t + \Delta; T, \varphi)} \quad (3.2.10)$$

Για μία χρονική υστέρηση, δηλαδή για τιμές $p = q = 1$, οι συντελεστές $A(t; T, \varphi)$ και $B_1(t; T, \varphi)$ μπορούν να υπολογιστούν μέσω των περιορισμών:

$$A(t; T, \varphi) = 0$$

$$B_1(t; T, \varphi) = 0$$

Η αξία του δικαιώματος προαίρεσης είναι η προεξοφλημένη αναμενόμενη απόδοση του όρου $Max(S_t - K, 0)$, που υπολογίζεται κάνοντας χρήση της χαρακτηριστικής συνάρτησης $f(\varphi)$. Η τιμή ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς με τιμή εξάσκησης K , λήξη το χρόνο T και με υποκείμενο τίτλο, η τιμή του οποίου ακολουθεί ανέλιξη $GARCH$, δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} C^{HN} &= e^{-r(T-t)} E_t^* [Max(S_t - K, 0)] = \\ &= \frac{1}{2} S_t + \frac{e^{-r(T-t)}}{\pi} \int_0^{\infty} Re \left[\frac{K^{-i\varphi} f^*(i\varphi + 1)}{i\varphi} \right] d\varphi - \\ &- K e^{-r(T-t)} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} Re \left[\frac{K^{-i\varphi} f^*(i\varphi)}{(i\varphi)} \right] d\varphi \right) \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

Όπου $Re[]$ το πραγματικό μέρος ενός μιγαδικού αριθμού και $E_t^*[]$ η αναμενόμενη τιμή υπό την κατανομή ουδετεροποιημένου κινδύνου.

Στο υπόδειγμα των Heston και Nandi(2000), η τιμή του δικαιώματος προαίρεσης είναι συνάρτηση της τρέχουσας τιμής του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου S_t και της δεσμευμένης διακύμανσης $h(t + \Delta)$. Η δεσμευμένη διακύμανση αποτελεί συνάρτηση της ανέλιξης που ακολουθεί το υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο, και ως εκ τούτου, η τιμή του δικαιώματος προαίρεσης αποτελεί συνάρτηση τόσο της τρέχουσας τιμής του υποκείμενου στοιχείου, όσο και των παρελθοντικών του τιμών. Σε αντίθεση με τα υποδείγματα συνεχούς χρόνου, η διακύμανση είναι μια άμεσα παρατηρήσιμη συνάρτηση των ιστορικών τιμών του υποκείμενου στοιχείου και έτσι δεν υπάρχει λόγος να εκτιμηθεί μέσω κάποιας διαδικασίας.

Όπως και στα προηγούμενα υποδείγματα αποτίμησης, η τιμή του δικαιώματος πώλησης ευρωπαϊκού τύπου (European call), μπορεί εύκολα να εξαχθεί μέσω της ισοδυναμίας δικαιωμάτων αγοράς και δικαιωμάτων πώλησης (Put-Call Parity). Για την εξαγωγή των συντελεστών ευαισθησίας δ , αρκεί να αναλογιστεί κανείς τα παρακάτω. Η τιμή του δικαιώματος αγοράς στο μοντέλο των Heston και Nandi, όπως και στην αντίστοιχη εξίσωση του υποδείματος Black-Scholes, μπορεί να γραφεί και ως η τιμή του υποκείμενου στοιχείου S_t επί μια πιθανότητα P_1 , συν την προεξοφλημένη με το ακίνδυνο επιτόκιο τιμή εξάσκησης K , πολλαπλασιασμένη με μία πιθανότητα P_2 :

$$C^{HN} = S_t P_1 - K e^{-r(T-t)} P_2$$

Το P_1 μπορεί να ερμηνευθεί και ως ο συντελεστής ευαισθησίας της τιμής του δικαιώματος ως προς μια μεταβολή στη τιμή του υποκείμενου στοιχείου, δηλαδή ο συντελεστής δ . Το P_2 εκφράζει τη πιθανότητα με ουδετεροποιημένο κίνδυνο, η τιμή του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου S_t να είναι μεγαλύτερη από τη τιμή εξάσκησης K κατά τη λήξη του δικαιώματος προαίρεσης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ ΤΗΣ ΕΜΠΕΙΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑΣ ΠΟΥ ΕΞΕΤΑΖΕΙ ΤΗΝ ΑΚΡΙΒΕΙΑ ΑΠΟΤΙΜΗΣΗΣ ΤΩΝ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΩΝ GARCH

4.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται μια ανασκόπηση της εμπειρικής βιβλιογραφίας, που εξετάζει την αποτίμηση μέσω υποδειγμάτων GARCH. Η ανασκόπηση αυτή είναι οργανωμένη στις ακόλουθες ενότητες. Στη πρώτη ενότητα, εξετάζεται η βιβλιογραφία που συγκρίνει το υπόδειγμα GARCH με τα υποδείγματα Black-Scholes και Ad-Hoc Black-Scholes, ενώ στη δεύτερη ενότητα, μελετώνται τα άρθρα που αφορούν τα συστηματικά σφάλματα του υποδείματος GARCH. Στη τρίτη ενότητα γίνεται ανασκόπηση των εμπειρικών μελετών που εξετάζουν προεκτάσεις του GARCH. Στη τελευταία ενότητα, μελετάται η βιβλιογραφία που αφορά το υπόδειγμα των Heston και Nandi(2000), και την ικανότητα αποτίμησης του σε σύγκριση με τα υπόλοιπα υποδείγματα που έχουν μελετηθεί.

Το υπόδειγμα αποτίμησης Black-Scholes, σύμφωνα με πλήθος εμπειρικών μελετών, όπως των Dumas, Fleming και Whaley(1998), εμφανίζει συστηματικά σφάλματα αποτίμησης. Το πρώτο από αυτά αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως “volatility smile”. Χαρακτηρίζεται έτσι γιατί η τεκμαιρόμενη μεταβλητότητα που εξάγεται από τη τιμή ενός δικαιώματος μέσω του υποδείματος Black-Scholes, εμφανίζει κυρτή σχέση ως προς τη τιμή εξάσκησης. Αυτό συνεπάγεται ότι όσο η τιμή του υποκείμενου τίτλου ενός δικαιώματος αγοράς, μειώνεται σε σχέση με τη τιμή εξάσκησης, ή αυξάνεται για τη περίπτωση ενός δικαιώματος πώλησης, και άρα το δικαίωμα είναι out-of-the-money, το υπόδειγμα Black-Scholes οδηγεί σε μεροληπτική αποτίμηση. Το δεύτερο συστηματικό σφάλμα αποτίμησης, αφορά τη σχέση μεταξύ τεκμαιρόμενης μεταβλητότητας και ληκτότητας. Η τεκμαιρόμενη μεταβλητότητα που εξάγεται μέσω του υποδείματος Black-Scholes μπορεί να διαφέρει ανάμεσα σε δικαιώματα προαίρεσης στον ίδιο υποκείμενο τίτλο, αλλά με διαφορετική ληκτότητα.

Το σημαντικότερο προτέρημα του υποδείματος αποτίμησης GARCH έναντι του Black-Scholes, είναι ο προσδιορισμός της υπό συνθήκη μεταβλητότητας, έναντι της σταθερής μεταβλητότητας που υποθέτει το δεύτερο υπόδειγμα. Αν η διακύμανση των αποδόσεων του υποκείμενου τίτλου είναι υψηλή τη χρονική περίοδο όπου γίνεται η αποτίμηση, τότε και η αξία ενός δικαιώματος προαίρεσης πάνω στον τίτλο αυτό, αναμένεται να είναι υψηλότερη τη

περίοδο εκείνη. Αντίστοιχα, αν η διακύμανση των αποδόσεων του υποκείμενου τίτλου είναι χαμηλή κατά τη περίοδο όπου γίνεται η αποτίμηση, τότε και η αξία ενός δικαιώματος προαίρεσης στον τίτλο αυτό, αναμένεται να είναι χαμηλότερη. Καθώς είναι γνωστό ότι οι αποδόσεις των υποκείμενων τίτλων εμφανίζουν ετεροσκεδαστικότητα (Mandelbrot 1963, Akgiray 1989), το υπόδειγμα GARCH είναι το πλέον κατάλληλο υπόδειγμα αποτίμησης, διότι μπορεί να προσδιορίσει με μεγαλύτερη ακρίβεια την διακύμανση των αποδόσεων του υποκείμενου τίτλου τη χρονική περίοδο όπου γίνεται η αποτίμηση, και κατά συνέπεια να αποτιμήσει με μεγαλύτερη ακρίβεια ένα δικαίωμα στον τίτλο αυτό.

Το Black-Scholes, ως ένα υπόδειγμα σταθερής μεταβλητότητας, αδυνατεί να αποτυπώσει τα ιδιαίτερα αυτά χαρακτηριστικά, καθώς υποθέτει ότι η διακύμανση των αποδόσεων του υποκείμενου τίτλου είναι διαχρονικά σταθερή. Άρα το υπόδειγμα Black-Scholes υποθέτει ομοσκεδαστικότητα στις αποδόσεις του υποκείμενου τίτλου. Σαν αποτέλεσμα, το υπόδειγμα GARCH είναι πιο ευέλικτο στην αποτίμηση δικαιωμάτων, οι υποκείμενοι τίτλοι των οποίων εμφανίζουν μεταβλητότητα κατά συστάδες.

4.2 Ανασκόπηση της ικανότητας αποτίμησης του υποδείγματος GARCH

Η ικανότητα αποτίμησης του υποδείγματος GARCH έχει διερευνηθεί εμπειρικά από διάφορες μελέτες, όπως των Duan(1995), Sabbatini και Linton(1998), Duan και Zhang(2001) και Lehar et al.(2002). Στη πλειοψηφία τους συγκρίνουν την απόδοση του υποδείγματος GARCH με το Black-Scholes ή το Ad-Hoc Black-Scholes των Dumas, Fleming και Whaley(1998), στην αποτίμηση δικαιωμάτων προαίρεσης ευρωπαϊκού τύπου, σε δείκτες όπως τον S&P100, S&P500 και FTSE100. Η εμπειρική βιβλιογραφία που εξετάζει την αποτίμηση δικαιωμάτων αμερικανικού τύπου είναι αρκετά πιο περιορισμένη. Κυριότερη είναι η συμβολή των Ritchken και Trevor(1998), οι οποίοι προεκτείνουν το υπόδειγμα του Duan(1995) ώστε να είναι εφικτή η αποτίμηση δικαιωμάτων του τύπου αυτού. Σημαντική επίσης είναι η συνεισφορά του Stentoft(2005), ο οποίος συμπεραίνει ότι τα υποδείγματα GARCH μπορούν να εφαρμοστούν με επιτυχία και στην αποτίμηση δικαιωμάτων αμερικανικού τύπου.

Το υπόδειγμα αποτίμησης GARCH του Duan(1995) εξετάζεται εμπειρικά για πρώτη φορά από στο άρθρο “The GARCH Option Pricing Model”. Πιο συγκεκριμένα, ο Duan(1995) εξετάζει την ικανότητα αποτίμησης του υποδείγματος GARCH(1,1), όπως αυτό παρουσιάστηκε στην Ενότητα 3.2, έναντι του υποδείγματος Black-Scholes.

Για την εκτίμηση των συντελεστών του υποδείγματος, ο Duan(1995) χρησιμοποιεί τις ημερήσιες αποδόσεις του δείκτη S&P100 για την περίοδο μεταξύ Ιανουαρίου 1986 και Δεκεμβρίου 1989. Το ακίνδυνο επιτόκιο που χρησιμοποιείται είναι 0%, ενώ οι τιμές των συμβολαίων είναι κανονικοποιημένες, με τη τιμή εξάσκησης όλων των συμβολαίων να είναι ίση με \$1. Από το δείγμα αφαιρέθηκαν τα συμβόλαια με moneyness (Τιμή υποκείμενου τίτλου/ Τιμή εξάσκησης του συμβολαίου) μεγαλύτερο από 1,2 ή μικρότερο από 0,8. Για την εύρεση της αξίας των δικαιωμάτων αγοράς χρησιμοποιήθηκε προσομοίωση Monte Carlo με 50.000 επαναλήψεις. Στη συνέχεια, εξετάστηκαν τα σφάλματα αποτίμησης για 3 διαφορετικές κατηγορίες ληκτότητας, 30, 90 και 180 ημερών έως τη λήξη. Επιπλέον, ο Duan εξετάζει τρία επίπεδα της αρχικής υπό συνθήκη διακύμανσης, για να διαπιστώσει εάν έχει κάποια επίδραση στην αποτίμηση. Ο πρώτος έλεγχος γίνεται για αρχική υπό συνθήκη διακύμανση ίση με τη στάσιμη διακύμανση, ο δεύτερος για 20% κάτω από τη στάσιμη διακύμανση και ο τρίτος για 20% πάνω από τη στάσιμη διακύμανση.

Στην εμπειρική έρευνα του Duan(1995) γίνεται φανερό ότι το υπόδειγμα Black-Scholes σε σχέση με το υπόδειγμα GARCH, υποτιμολογεί συστηματικά τα δικαιώματα αγοράς out-of-the money. Το μέγεθος των σφαλμάτων αυτών αυξάνεται, όσο μειώνεται ο χρόνος έως τη λήξη. Τα αποτελέσματα συμφωνούν με αυτά των Dumas, Fleming και Whaley(1998). Επίσης, παρατηρείται ότι τα σφάλματα αποτίμησης του Black-Scholes σε σύγκριση με το υπόδειγμα GARCH, αυξάνονται στη μικρότερη κατηγορία ληκτότητας των 30 ημερών. Γενικότερα, το υπόδειγμα Black-Scholes υποτιμολογεί, σε σχέση με το GARCH τις περισσότερες κατηγορίες δικαιωμάτων αγοράς, όταν η αρχική υπό συνθήκη διακύμανση είναι 20% υψηλότερη από τη στάσιμη. Αντίθετα υπερτιμολογεί τις περισσότερες κατηγορίες ληκτότητας και moneyness, όταν η αρχική υπό συνθήκη διακύμανση είναι ίση ή κατά 20% χαμηλότερη από τη στάσιμη.

Αυτή η πρώιμη εμπειρική διερεύνηση, έδειξε ότι το υπόδειγμα GARCH, δεν εμφανίζει τα συστηματικά σφάλματα αποτίμησης του Black-Scholes. Εξετάστηκαν όμως μόνο τα σχετικά σφάλματα αποτίμησης μεταξύ των δύο υποδειγμάτων, δίνοντας μεγάλη έμφαση στην επίδραση της αρχικής υπό συνθήκη διακύμανσης.

Μια πιο άρτια προσέγγιση, τόσο στον προσδιορισμό του υποδείγματος που πρέπει να χρησιμοποιηθεί για την εκτίμηση της μεταβλητότητας, όσο στην μεθοδολογία αξιολόγησης των υποδειγμάτων ακολουθούν οι Sabbatini και Linton(1998). Στο άρθρο “A GARCH model of the implied volatility of the Swiss Market index from option prices”, εξετάζουν την ικανότητα αποτίμησης του υποδείγματος GARCH έναντι του υποδείγματος Black-Scholes. Το δείγμα τους περιλαμβάνει τις ημερήσιες τιμές κλεισίματος του ελβετικού χρηματιστηριακού δείκτη SMI(Swiss Market Index) τη περίοδο μεταξύ 1ης Ιανουαρίου 1992 και 31ης

Δεκεμβρίου 1996, καθώς και τις τιμές των δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης ευρωπαϊκού τύπου στον δείκτη SMI για τη περίοδο αυτή.

Μια σημαντική διαφοροποίηση της μεθοδολογίας των Sabbatini και Linton(1998) σε σχέση με τις περισσότερες εμπειρικές μελέτες, είναι η προκαταρκτική εξέταση του δείγματος που χρησιμοποιούν. Πριν περάσουν στην εμπειρική διερεύνηση της αποτίμησης, εξετάζουν εάν το υπόδειγμα GARCH είναι πράγματι κατάλληλη για τον προσδιορισμό της μεταβλητότητας των αποδόσεων του δείκτη SMI κατά την εξεταζόμενη χρονική περίοδο. Αρχικά παλινδρόμησαν τις ημερήσιες αποδόσεις του δείκτη SMI σε μια σταθερά, με τη μέθοδο των Ελαχίστων Τετραγώνων, υποθέτοντας ότι η χρονολογική σειρά των αποδόσεων δεν παρουσιάζει ετεροσκεδαστικότητα, και άρα η διακύμανση των αποδόσεων είναι διαχρονικά σταθερή. Στη συνέχεια χρησιμοποίησαν την μεθοδολογία Box-Jenkins. Η μέθοδος αυτή συνήθως χρησιμοποιείται για την εύρεση της τάξης ενός υποδείγματος ARMA, παρόλα αυτά μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην προκειμένη περίπτωση σε υποδείγματα ARCH και GARCH, εάν εφαρμοστεί στα τετράγωνα των καταλοίπων. Ο έλεγχος των καταλοίπων έδειξε ότι υπάρχει μερική αυτοσυσχέτιση για 1 και 2 χρονικές υστερήσεις. Το γεγονός αυτό, σε συνδυασμό με τη τιμή του συντελεστή κύρτωσης των καταλοίπων, ο οποίος ήταν μεγαλύτερος από 3, οδήγησε τους Sabbatini και Linton(1998) στην εκτίμηση υποδειγμάτων ARCH(1), ARCH(2) και GARCH(1,1). Στη συνέχεια, επέλεξαν το υπόδειγμα GARCH(1,1) ως το επικρατέστερο, με κριτήριο την υψηλότερη τιμή στον έλεγχο της μέγιστης λογαριθμικής πιθανοφάνειας. Καθώς το υπόδειγμα GARCH(1,1) έχει τον ίδιο αριθμό συντελεστών προς εκτίμηση με το υπόδειγμα ARCH(2), θα πρέπει να προτιμηθεί.

Με δεδομένο ότι το υπόδειγμα GARCH(1,1) είναι κατάλληλο για να εκτιμήσει τη μεταβλητότητα των αποδόσεων του δείκτη SMI κατά την εξεταζόμενη χρονική περίοδο, οι Sabbatini και Linton(1998) θεώρησαν ότι είναι κατάλληλο να εφαρμοστεί και το υπόδειγμα αποτίμησης GARCH για τη περίοδο αυτή. Το δείγμα συνολικά περιλάμβανε 44.000 τιμές δικαιωμάτων προαίρεσης, από το οποίο επιλεγόντουσαν τυχαία 2 δικαιώματα για κάθε ημέρα διαπραγματεύσεων, ένα αγοράς και ένα πώλησης. Σαν κριτήριο για την επιλογή, αποτέλεσε η ληκτότητα τους να είναι μεγαλύτερη των 15 ημερών, και η τιμή του υποκείμενου να απέχει λιγότερο από 10% από την τιμή εξάσκησης.

Οι Sabbatini και Linton(1998), εκτίμησαν τους συντελεστές του υποδείγματος GARCH(1,1), μέσω της μεθόδου των μη γραμμικών ελαχίστων τετραγώνων, ελαχιστοποιώντας τη μέση τιμή των τετραγώνων των αποκλίσεων ανάμεσα στις πραγματικές τιμές των δικαιωμάτων, και τις θεωρητικές τιμές του υποδείγματος GARCH. Καθώς δεν υπάρχει αναλυτική λύση για την εύρεση των θεωρητικών τιμών του υποδείγματος, αυτές

υπολογίζονται προσεγγιστικά μέσω προσομοίωσης Monte Carlo. Μεταγενέστερες έρευνες, όπως αυτές των Duan και Zhang(2001), Lehar et al.(2002) και Christoffersen και Jacobs(2004) διαφοροποιούνται, κάνοντας χρήση διαφορετικών μεθόδων εκτίμησης. Οι Sabbatini και Linton(1998) χρησιμοποιούν κατά την αποτίμηση το τρέχον επιτόκιο Ελβετικού Φράγκου ως ακίνδυνο επιτόκιο, σε αντίθεση με τον Duan(1995) ο οποίος χρησιμοποίησε ακίνδυνο επιτόκιο ίσο με 0%.

Τα αποτελέσματα στην αποτίμησης εντός δείγματος, δείχνουν ότι το υπόδειγμα GARCH υπερτιμολογεί συστηματικά τα δικαιώματα αγοράς, ενώ υποτιμολογεί συστηματικά τα δικαιώματα πώλησης. Η ληκτότητα των δικαιωμάτων επιδρά διαφορετικά στα σφάλματα αποτίμησης, ανάλογα με τον τύπο του δικαιώματος προαίρεσης. Το υπόδειγμα GARCH παράγει μικρότερα σφάλματα στα δικαιώματα αγοράς που έχουν μικρή ληκτότητα (μικρότερη από 1 μήνα), ενώ τιμολογεί με μεγαλύτερη ακρίβεια τα δικαιώματα πώλησης που έχουν μεγάλη ληκτότητα(μεγαλύτερη από 3 μήνες). Το συμπέρασμα αυτό αποτελεί στοιχείο μεροληπτικής αποτίμησης του υποδείγματος GARCH, και δεν μπορούσε να εξαχθεί στην εμπειρική μελέτη του Duan(1995), καθώς εκεί χρησιμοποιήθηκαν μόνο δικαιώματα αγοράς.

Στη συνέχεια, η ικανότητα αποτίμησης του υποδείγματος GARCH, εξετάστηκε εκτός δείγματος σε τιμές δικαιωμάτων οι οποίες δε συμπεριλήφθηκαν στη διαδικασία εκτίμησης των συντελεστών. Εδώ, το υπόδειγμα GARCH βρέθηκε να υποτιμολογεί τόσο τα δικαιώματα αγοράς, όσο και τα δικαιώματα πώλησης, παρότι τα σχετικά σφάλματα αποτίμησης είναι μικρότερα για τα πρώτα. Εξάιρεση αποτελούν τα δικαιώματα αγοράς με μεγάλη ληκτότητα (μεγαλύτερη των τριών μηνών), τα οποία υπερτιμολογούνται συστηματικά από το υπόδειγμα GARCH.

Αντίθετα, το υπόδειγμα Black-Scholes υπερτιμολογεί τη πλειονότητα των δικαιωμάτων αγοράς, ενώ υποτιμολογεί τα δικαιώματα πώλησης. Όπως και το υπόδειγμα GARCH, παράγει μικρότερα σχετικά σφάλματα αποτίμησης για τα δικαιώματα αγοράς, παρά για τα δικαιώματα πώλησης. Συγκρίνοντας τα δύο υποδείγματα, το GARCH υπερέχει στις περισσότερες κατηγορίες moneyness και ληκτότητας, καθώς τα σχετικά σφάλματα αποτίμησης που εμφανίζει είναι μικρότερα. Εξάιρεση αποτελούν τα δικαιώματα at-the-money και out-of-the-money στη πιο σύντομη κατηγορία ληκτότητας. Εδώ το υπόδειγμα GARCH εμφανίζει μεγαλύτερα σχετικά σφάλματα αποτίμησης από το υπόδειγμα Black-Scholes.

Τα αποτελέσματα των Sabbatini και Linton(1998), συμφωνούν σε αρκετά σημεία με την έρευνα των Duan και Zhang(2001), παρότι εντοπίζονται αρκετές διαφορές στη μεθοδολογία των δύο εμπειρικών μελετών. Στο άρθρο “Pricing Hang Seng Index options around the Asian financial crisis – A GARCH Approach” οι Duan και Zhang εξετάζουν την

ικανότητα αποτίμησης του υποδείγματος GARCH του Duan(1995), σε δικαιώματα αγοράς και πώλησης στον δείκτη Hang Seng (HSI), τα οποία διαπραγματεύτηκαν τη περίοδο μεταξύ Ιανουαρίου 1997 και Φεβρουαρίου 1998. Σαν σημείο αναφοράς χρησιμοποιούνται δύο διαφορετικά υποδείγματα Ad-Hoc Black-Scholes.

Οι δύο αυτές παραλλαγές του υποδείγματος Black-Scholes χρησιμοποιούνται από τους Duan και Zhang(2001) για να αποφευχθούν τα συστηματικά σφάλματα αποτίμησης που σχετίζονται με το συγκεκριμένο υπόδειγμα. Η προσέγγιση που ακολουθούν στα δύο Ad-Hoc υποδείγματα, είναι να υπολογίσουν τη τεκμαιρόμενη μεταβλητότητα μέσω του υποδείγματος Black-Scholes χρησιμοποιώντας τις τιμές που παρατηρούνται στην αγορά, και στη συνέχεια να τη παλινδρομήσουν στις τιμές εξάσκησης και στη ληκτότητα. Οι εκτιμημένοι συντελεστές που προκύπτουν από αυτή τη παλινδρόμηση, χρησιμοποιούνται στη προσαρμογή της διακύμανσης με την οποία τα υποδείγματα Ad-Hoc θα κάνουν τη τελική αποτίμηση. Η μεθοδολογία αυτή διαφέρει σημαντικά από τη προσέγγιση άλλων εμπειρικών ερευνών. Δίνει ένα σημαντικό πλεονέκτημα στο υπόδειγμα Black-Scholes, καθώς μετριάζει την επίπτωση των συστηματικών σφαλμάτων που παράγει, κάνοντας έτσι τη σύγκριση με το υπόδειγμα GARCH πιο άμεση.

Για τον προσδιορισμό της μεταβλητότητας των αποδόσεων του δείκτη Hang Seng στην εξεταζόμενη περίοδο, οι Duan και Zhang(2001) εκτιμούν το μη-γραμμικό υπόδειγμα NGARCH(Non-Linear GARCH) των Engle και Ng(1993), ενώ για την εύρεση της θεωρητικής τιμής των δικαιωμάτων, χρησιμοποιούν τη μεθοδολογία του υποδείγματος αποτίμησης GARCH του Duan(1995). Το δείγμα με το οποίο έγινε η εκτίμηση των συντελεστών, είναι οι πρώτες 52 εβδομάδες του αρχικού δείγματος, από τις οποίες κατασκευάστηκαν 52 διαφορετικά σετ εβδομαδιαίων δεδομένων. Σε κάθε εβδομαδιαίο σετ, συμπεριλήφθηκαν τα δικαιώματα προαίρεσης που επρόκειτο να λήξουν σε περισσότερες από 14 και λιγότερες από 90 ημέρες. Η εκτίμηση των συντελεστών έγινε για κάθε εβδομάδα ξεχωριστά, μέσω της ελαχιστοποίησης της μέσης τιμής των τετραγώνων των αποκλίσεων, ανάμεσα στην τεκμαιρόμενη μεταβλητότητα του υποδείγματος GARCH και τη τεκμαιρόμενη μεταβλητότητα των πραγματικών τιμών. Αυτή η διαδικασία βελτιστοποίησης βασίζεται στην μέθοδο Newton-Raphson, σύμφωνα με την οποία δίνονται ορισμένες αρχικές εκτιμήσεις των συντελεστών, και στη συνέχεια μέσω προσομοίωσης με 10.000 επαναλήψεις λαμβάνονται οι βέλτιστες εκτιμήσεις των συντελεστών του υποδείγματος.

Όπως προαναφέρθηκε, για την αξιολόγηση του υποδείγματος GARCH, οι Duan και Zhang(2001) χρησιμοποίησαν ως σημείο αναφοράς δύο υποδείγματα Ad-Hoc Black-Scholes. Στο πρώτο, ο συντελεστής της μεταβλητότητας του υποδείγματος Black-Scholes

ανανεωνόταν, ενώ το υπόδειγμα GARCH μπορούσε να χρησιμοποιήσει μόνο τις τιμές που εκτιμήθηκαν. Στο δεύτερο, ο συντελεστής μεταβλητότητας του Black-Scholes έπαιρνε διαφορετικές τιμές, ανάλογα με τη κατηγορία moneyness και ληκτότητας του δικαιώματος για το οποίο γινόταν η αποτίμηση. Για κάθε μία από τις 52 εβδομάδες όπου έγινε η εκτίμηση των συντελεστών, το υπόδειγμα GARCH αξιολογήθηκε στην αποτίμηση εντός δείγματος στα δικαιώματα εκείνης της εβδομάδας, και εκτός δείγματος κατά τις επόμενες 4 εβδομάδες. Άρα, οι συντελεστές που το υπόδειγμα GARCH χρησιμοποιεί στην αποτίμηση εκτός δείγματος παρέμεναν σταθεροί, ενώ αντίθετα η μεταβλητότητα που χρησιμοποιούσαν τα υποδείγματα Ad-Hoc Black-Scholes μπορούσε να προσαρμόζεται ανάλογα με τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά (moneyness και ληκτότητα) των δικαιωμάτων που αποτιμούσαν.

Τα εμπειρικά αποτελέσματα των Duan και Zhang(2001), αναφορικά με την ικανότητα αποτίμησης μεταξύ των δύο υποδειγμάτων, συμφωνούν με αυτά των Duan(1995) και Sabbatini και Linton(1998). Στην αποτίμηση εντός δείγματος, το υπόδειγμα GARCH αποδίδει καλύτερα από τα δύο Ad-Hoc Black-Scholes, όπως είναι το αναμενόμενο καθώς έχει περισσότερους συντελεστές. Για την αξιολόγηση εκτός δείγματος, υπολογίστηκε ο λογάριθμος του λόγου μεταξύ των μέσων τετραγώνων των σφαλμάτων κάθε υποδείγματος, $\ln(MSE_{GARCH}/MSE_{Black-Scholes})$, για τις τέσσερις εβδομάδες που ακολουθούσαν μετά από κάθε επανεκτίμηση των συντελεστών. Στις κατηγορίες όπου το μέτρο αυτό λαμβάνει αρνητικές τιμές, τα σφάλματα αποτίμησης του υποδείγματος GARCH είναι μικρότερα από τα αντίστοιχα των δύο Ad-Hoc Black-Scholes.

Τα μέσα τετράγωνα των σφαλμάτων του υποδείγματος GARCH, ως ποσοστό των αντίστοιχων για τα δύο υποδείγματα Black-Scholes, ήταν κατά μέσο όρο, μόλις το 7,93%. Επιπλέον, σε όλες τις κατηγορίες αποτιμήσεων εκτός δείγματος, η μηδενική υπόθεση ότι οι μέσες τιμές των λογαρίθμων $\ln(MSE_{GARCH}/MSE_{Black-Scholes})$ είναι μεγαλύτερες από το μηδέν, και άρα το υπόδειγμα GARCH δεν αποδίδει καλύτερα από το Black-Scholes, απορρίφθηκαν σε επίπεδο σημαντικότητας 1%. Χρησιμοποιώντας δύο εναλλακτικές μεθόδους εκτίμησης των συντελεστών του GARCH, τη μέθοδο ελαχιστοποίησης των μέσων τετραγώνων των σφαλμάτων αποτίμησης, και την ελαχιστοποίηση των μέσων τετραγώνων των ποσοστιαίων σφαλμάτων αποτίμησης, τα αποτελέσματα δεν διαφοροποιούνται.

4.3 Τα συστηματικά σφάλματα του υποδείγματος GARCH

Πέρα από τη σύγκριση της ικανότητας αποτίμησης του υποδείγματος GARCH σε σχέση με άλλα υποδείγματα, μεγάλη σημασία έχει και η εξέταση της κατανομής των σφαλμάτων αποτίμησης. Σκοπός είναι να διαπιστωθεί εάν το εν λόγω υπόδειγμα παράγει συστηματικά σφάλματα, κατά την αποτίμηση δικαιωμάτων με συγκεκριμένα χαρακτηριστικά. Εμπειρικές μελέτες που εξετάζουν το συγκεκριμένο ζήτημα, είναι αυτές των Lehar et al.(2002) και Duan και Zhang(2001).

Οι Lehar et al.(2002) στο άρθρο “GARCH vs. stochastic volatility: Option Pricing and Risk Management”, αρχικά συγκρίνουν την επίδοση του υποδείγματος αποτίμησης GARCH του Duan(1995) με το υπόδειγμα Black-Scholes. Τα αποτελέσματα τάσσονται υπέρ του υποδείγματος GARCH, και σε αυτό το ζήτημα βρίσκονται σε συμφωνία με τις εμπειρικές μελέτες των Duan(1995), Sabbatini και Linton(1998) και Duan και Zhang(2001).

Η μεθοδολογία που χρησιμοποιούν οι Lehar et al.(2002) διαφοροποιείται από αυτή των Duan και Zhang(2001) στο μέγεθος του δείγματος, καθώς και στη μέθοδο εκτίμησης των συντελεστών. Το δείγμα που χρησιμοποιείται περιλαμβάνει δικαιώματα αγοράς και πώλησης ευρωπαϊκού τύπου στον δείκτη FTSE 100, τα οποία διαπραγματεύτηκαν τη περίοδο μεταξύ Ιανουαρίου 1993 και Οκτωβρίου 1997, καλύπτοντας 1210 ημέρες διαπραγματεύσεων. Το τελικό δείγμα περιλάμβανε 65.549 δικαιώματα προαίρεσης, με ληκτότητα μεταξύ δύο εβδομάδων και ενός χρόνου. Η σχέση moneyness των συμβολαίων του δείγματος ήταν μεταξύ 0,9 και 1,1.

Η μεθοδολογία εκτίμησης των συντελεστών διαφέρει από αυτήν που χρησιμοποίησαν οι Duan και Zhang(2001), καθώς έγινε μέσω της ελαχιστοποίησης των τετραγώνων των σχετικών σφαλμάτων αποτίμησης (squared relative pricing error ή SRPE). Σύμφωνα με τους Lehar et al.(2002), επιλέχθηκε η σχετική απόκλιση αποτίμησης και όχι η απόλυτη, γιατί η απόλυτη απόκλιση θα επηρέαζε την εκτίμηση των συντελεστών, λόγω της ύπαρξης δικαιωμάτων προαίρεσης με πολύ υψηλή τιμή. Οι 1210 ημέρες διαπραγματεύσεων του δείγματος διαιρέθηκαν σε 120 χρονικά διαστήματα των 10 ημερών. Η εκτίμηση των παραμέτρων έγινε για κάθε δεκαήμερο, και στη συνέχεια εξετάστηκε η ικανότητα αποτίμησης των υποδειγμάτων εκτός δείγματος, για το επόμενο δεκαήμερο.

Για την αξιολόγηση της ικανότητας αποτίμησης των υποδειγμάτων GARCH και Black-Scholes, οι Lehar et al.(2002) χρησιμοποίησαν δύο στατιστικά μέτρα για να υπολογίσουν τα σφάλματα αποτίμησης των δύο υποδειγμάτων, σε σύγκριση με τις πραγματικές τιμές της

αγοράς. Τα μέτρα αυτά είναι η Σχετική Απόκλιση Αποτίμησης (Relative Pricing Error ή RPE), και η Απόλυτη Σχετική Απόκλιση Αποτίμησης (Absolute Relative Pricing Error ή ARPE). Το RPE μετρά την αμεροληψία στην αποτίμηση κάθε υποδείγματος. Ένα μη-μηδενικό RPE υποδεικνύει ότι υπάρχουν συστηματικά σφάλματα αποτίμησης. Το ARPE μετρά τόσο την αμεροληψία, όσο και την ακρίβεια της αποτίμησης. Ο λόγος που χρησιμοποιούν το ARPE και όχι τη ρίζα του μέσου τετραγώνου των σφαλμάτων, είναι γιατί το ARPE δίνει τα σφάλματα αποτίμησης σε ποσοστό. Κατά συνέπεια μπορεί να ερμηνευθεί πιο εύκολα.

Τα αποτελέσματα που μπορούν να εξαχθούν από την εμπειρική έρευνα των Lehar et al.(2002), είναι ότι σύμφωνα με το στατιστικό μέτρο RPE, το υπόδειγμα GARCH υπερτερεί έναντι του Black-Scholes, καθώς οι αποτιμήσεις του έχουν μικρότερο μέσο ποσοστιαία σφάλμα (-2.63% έναντι -7.71% για το Black-Scholes) και παράλληλα μικρότερη τυπική απόκλιση. Το αποτέλεσμα παραμένει ίδιο και σύμφωνα με τα αποτελέσματα του Απόλυτου Σχετικού Σφάλματος Αποτίμησης ARPE, όπου και πάλι το GARCH υπερτερεί του Black-Scholes (16.12% έναντι 22.72% για το Black-Scholes). Όσον αφορά την ικανότητα αποτίμησης μεταξύ των δύο υποδειγμάτων, τα αποτελέσματα αυτά συμφωνούν με της έρευνες των Duan(1995), των Sabbatini και Linton(1998) καθώς και των Duan και Zhang(2001).

Πέρα από το μέγεθος των αποκλίσεων σε απόλυτες τιμές, ιδιαίτερη σημασία έχει και η κατανομή τους. Εξετάζοντας τη κατανομή των σφαλμάτων αποτίμησης χωρισμένων σε κατηγορίες ανάλογα με τα χαρακτηριστικά των δικαιωμάτων προαίρεσης από τα οποία παρήχθησαν, μπορεί να διαπιστωθεί εάν τα υποδείγματα εμφανίζουν συστηματικά σφάλματα αποτίμησης. Οι Lehar et al.(2002) χώρισαν τα σφάλματα που προέκυψαν σε 8 κατηγορίες moneyness και 6 κατηγορίες ληκτότητας. Από τον έλεγχο αυτών των κατηγοριών μπορεί να διαπιστωθεί ότι το υπόδειγμα Black-Scholes παράγει υψηλά σφάλματα κατά την αποτίμηση δικαιωμάτων out-of-the-money, ιδιαίτερα όταν αυτά βρίσκονται κοντά στη λήξη τους. Το γεγονός αυτό έχουν επισημάνει ο Duan(1995) και Sabbatini και Linton(1998). Το υπόδειγμα GARCH υπερτερεί έναντι του Black-Scholes, εμφανίζοντας μικρότερα ποσοστιαία σφάλματα σε 44 από τις 48 κατηγορίες στις οποίες χωρίστηκαν τα σφάλματα αποτίμησης.

Ανάμεσα στα αποτελέσματα των Duan και Zhang(2001) και Lehar et al.(2002) εμφανίζεται μια σημαντική διαφοροποίηση σχετικά με το αν η αποτίμηση του υποδείγματος GARCH είναι μεροληπτική. Στην έρευνα των Lehar et al.(2002) παρατηρείται ότι και τα δύο υποδείγματα υποτιμολογούν συστηματικά τα δικαιώματα προαίρεσης, καθώς η μέση τιμή και η διάμεσος του μέτρου RPE είχαν αρνητικές τιμές, τόσο για το GARCH όσο και για το Black-Scholes. Αυτό σημαίνει ότι η μεταβλητότητα του υποκείμενου τίτλου υποεκτιμάται συστηματικά και από τα δύο υποδείγματα στη συγκεκριμένη έρευνα. Αντίθετα, στην εμπειρική

μελέτη των Duan και Zhang(2001), το υπόδειγμα GARCH δεν παράγει συστηματικά σφάλματα, τόσο στην αποτίμηση εντός δείγματος, όσο και κατά την αποτίμηση εκτός δείγματος, δηλαδή 1 έως 4 εβδομάδες μετά την τελευταία επανεκτίμηση των συντελεστών. Όπως είναι αναμενόμενο, τα ποσοστιαία σφάλματα αποτίμησης του υποδείγματος GARCH αυξάνονται, όσο αυξάνει και ο αριθμός των ημερών που παρήλθε από τη τελευταία επανεκτίμηση των συντελεστών του. Όμως, ακόμα και τη 4η εβδομάδα της εκτός δείγματος αποτίμησης, το GARCH δεν υπερτιμολογεί ή υποτιμολογεί συστηματικά τα συμβόλαια κάποιας συγκεκριμένης κατηγορίας ληκτότητας ή moneyness.

Τα αποτελέσματα των Duan και Zhang(2001) έρχονται σε αντίθεση και με έναν επιπλέον έλεγχο που έκαναν οι Lehar et al.(2002) για να εξετάσουν την αμεροληψία των υποδειγμάτων. Οι αποκλίσεις ARPE για κάθε ένα από τα δύο υποδείγματα, παλινδρομήθηκαν στις ανεξάρτητες μεταβλητές του χρόνου έως τη λήξη, του moneyness, καθώς και σε μια ψευδομεταβλητή η οποία παίρνει τιμή 1 για τα δικαιώματα αγοράς και 0 για τα δικαιώματα πώλησης. Από τους εκτιμημένους συντελεστές των δύο παλινδρομήσεων προέκυψε ότι και στα δύο υποδείγματα, τα συμβόλαια in-the-money αποτιμώνται με μεγαλύτερη ακρίβεια από τα out-of-the-money, καθώς επίσης ότι τα δικαιώματα με περισσότερο χρόνο έως τη λήξη αποτιμώνται με μεγαλύτερη ακρίβεια σε σύγκριση με αυτά που πλησιάζουν στη λήξη τους. Τα αποτελέσματα αυτά συμφωνούν με τους Sabbatini και Linton(1998). Ο εκτιμημένος συντελεστής της ψευδομεταβλητής είχε μικρότερη τιμή για το υπόδειγμα GARCH από τον αντίστοιχο του Black-Scholes, οδηγώντας στο συμπέρασμα ότι το υπόδειγμα GARCH αποτιμά με ακρίβεια τόσο τα δικαιώματα αγοράς όσο και τα δικαιώματα πώλησης, χωρίς να μεροληπτεί μεταξύ των δύο, όπως το υπόδειγμα Black-Scholes. Επιπλέον, ο συντελεστής προσδιορισμού R^2 αυτών των παλινδρομήσεων είναι μικρότερος για το υπόδειγμα GARCH (13.12%) από τον αντίστοιχο για το υπόδειγμα Black-Scholes(28.28%). Αυτό είναι ένα θετικό στοιχείο υπέρ του GARCH, καθώς υποδεικνύει ότι η ληκτότητα, το moneyness, καθώς και ο τύπος ενός δικαιώματος προαίρεσης, επηρεάζουν σε μικρότερο βαθμό την εμφάνιση σφαλμάτων αποτίμησης. Το αποτέλεσμα αυτό διαφοροποιείται από τους Sabbatini και Linton(1998), οι οποίοι συμπέραναν ότι το υπόδειγμα GARCH υποτιμολογεί τα δικαιώματα αγοράς αλλά και τα δικαιώματα πώλησης στην εκτός δείγματος αποτίμηση, με εξαίρεση τα δικαιώματα αγοράς με ληκτότητα μεγαλύτερη των τριών μηνών.

Οι εμπειρικές μελέτες των Duan(1995), Sabbatini και Linton(1998), Duan και Zhang(2001) καθώς και των Lehar et al.(2002) συμφωνούν στο ότι οι θεωρητικές τιμές του υποδείγματος GARCH βρίσκονται πιο κοντά στις τιμές που παρατηρούνται στην αγορά, σε σύγκριση με το υπόδειγμα Black-Scholes. Το κύριο μειονέκτημα που εντοπίζουν στο

υπόδειγμα Black-Scholes είναι τα συστηματικά σφάλματα αποτίμησης, τα οποία όμως μπορούν να μειωθούν αισθητά, κάνοντας χρήση ενός Ad-Hoc υποδείγματος, όπως αυτών που χρησιμοποιήθηκαν στην εμπειρική έρευνα των Duan και Zhang(2001). Σχετικά με την ύπαρξη μεροληπτικής ή όχι αποτίμησης του υποδείγματος GARCH, τα αποτελέσματα δεν είναι ξεκάθαρα. Η προσέγγιση που ακολουθούν οι Duan και Zhang(2001) καταλήγει στο συμπέρασμα ότι το υπόδειγμα GARCH δεν παράγει συστηματικά σφάλματα αποτίμησης απέναντι σε δικαιώματα συγκεκριμένης ληκτότητας ή moneyness. Αντίθετα οι Lehar et al.(2002) συμπεραίνουν ότι το υπόδειγμα GARCH υποτιμολογεί συστηματικά, και τα δικαιώματα αγοράς αλλά και τα δικαιώματα πώλησης. Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουν και οι Sabbatini και Linton(1998), με εξαίρεση τα δικαιώματα αγοράς με μεγάλη ληκτότητα τα οποία υπερτιμολογούνται συστηματικά από το υπόδειγμα GARCH. Το αποτέλεσμα των Lehar et al.(2002) ενδέχεται να είναι παραπλανητικό, καθώς χρησιμοποιούν διαφορετική συνάρτηση απωλειών στην εκτίμηση των συντελεστών του υποδείγματος, από τη συνάρτηση απωλειών που χρησιμοποιείται για την αξιολόγηση των αποτελεσμάτων. Σύμφωνα με τους Christoffersen και Jacobs(2004b) και Bams, Lehnert και Wolff(2009), η μεθοδολογία αυτή είναι εσφαλμένη, καθώς μπορεί να οδηγήσει σε εκτίμηση υποβέλτιστων συντελεστών, και άρα σε λανθασμένα συμπεράσματα.

4.4 Οι προεκτάσεις του υποδείγματος GARCH

Πέρα από το απλό υπόδειγμα GARCH του Duan(1995), έχουν αναπτυχθεί προεκτάσεις του αρχικού υποδείγματος, τα οποία έχουν ως στόχο να προσδιορίσουν με μεγαλύτερη ακρίβεια την μεταβλητότητα του υποκείμενου τίτλου. Τα υποδείγματα αυτά κάνουν χρήση πιο περίπλοκων διαδικασιών στον προσδιορισμό της υπό συνθήκη μεταβλητότητας, εισάγοντας επιπλέον συντελεστές προς εκτίμηση. Με αυτό τον τρόπο επιδιώκουν να αποτυπώσουν φαινόμενα που επηρεάζουν τη μεταβλητότητα του υποκείμενου τίτλου, όπως είναι η επίδραση της ασυμμετρίας και η επίδραση της μόχλευσης στις μεταβολές των τιμών των μετοχών. Είναι γνωστό ότι οι επενδυτές αντιδρούν πιο έντονα απέναντι σε καθοδικές κινήσεις των τιμών της αγοράς, σε σύγκριση με αντίστοιχες ανοδικές κινήσεις. Σαν αποτέλεσμα, αρνητικές αποδόσεις αυξάνουν ραγδαία τη μεταβλητότητα, ενώ θετικές αποδόσεις του ίδιου μεγέθους επηρεάζουν λιγότερο, ή και καθόλου τη μεταβλητότητα (Franq και Zakoian, 2010). Εμπειρικές μελέτες που εξετάζουν τη σχετική απόδοση των διάφορων προεκτάσεων του υποδείγματος GARCH, είναι αυτές των Hardle και Hafner(2000), Yung και Zhang(2003), Christoffersen and Jacobs(2004) και Chiang και Huang(2011).

Μια προέκταση του υποδείγματος GARCH του Duan(1995), αποτελεί το υπόδειγμα TGARCH(Threshold GARCH). Ο λόγος που εξετάζεται το υπόδειγμα TGARCH, είναι για να διαπιστωθεί η σχέση που έχει η «Καμπύλη Επιπτώσεων Ειδήσεων» (News Impact Curve) με την αποτίμηση δικαιωμάτων προαίρεσης. Σύμφωνα με τους Engle και Ng(1993), καμπύλη επιπτώσεων ειδήσεων ορίζεται η διακύμανση ως συνάρτηση των παρελθοντικών αποδόσεων. Το υπόδειγμα TGARCH μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην εκτίμηση της φύσης της καμπύλης, και άρα στο να εξεταστεί η ύπαρξη ή όχι ασυμμετρίας.

Οι Hardle και Hafner(2000), στο άρθρο “Discrete time option pricing with flexible volatility estimation”, χρησιμοποίησαν ένα υπόδειγμα TGARCH για τη μοντελοποίηση των αποδόσεων του υποκείμενου τίτλου. Στη συνέχεια, χρησιμοποιήθηκε η μεθοδολογία του Duan(1995) για να γίνει η αποτίμηση των δικαιωμάτων προαίρεσης. Ως σημείο αναφοράς, χρησιμοποιήθηκε το υπόδειγμα GARCH του Duan(1995) καθώς και το υπόδειγμα Black-Scholes. Για την εκτίμηση των συντελεστών των υποδειγμάτων GARCH και TGARCH μέσω της μεθόδου μέγιστης πιθανοφάνειας, χρησιμοποιήθηκαν οι ημερήσιες τιμές κλεισίματος του δείκτη DAX για το διάστημα μεταξύ Ιανουαρίου 1988 και Μαρτίου 1991.

Στην αποτίμηση εκτός δείγματος, τόσο το υπόδειγμα GARCH όσο και το TGARCH αποδίδουν σημαντικά καλύτερα από το Black-Scholes. Στα δικαιωμάτων τα οποία βρίσκονται

in-the-money και at-the-money, το υπόδειγμα TGARCH αποδίδει οριακά καλύτερα από το GARCH. Η διαφορά στην ακρίβεια των δύο υποδειγμάτων γίνεται φανερή στην αποτίμηση δικαιωμάτων out-of-the-money. Το υπόδειγμα TGARCH παράγει σημαντικά μικρότερα ποσοστιαία σφάλματα στην αποτίμηση των δικαιωμάτων που βρίσκονται σε αυτή τη κατηγορία, και ιδιαίτερα αυτών που έχουν μικρή ληκτότητα. Σε όλες τις περιπτώσεις ληκτότητας και moneyness των συμβολαίων, το υπόδειγμα TGARCH υπερτερεί έναντι του GARCH, γεγονός που υποδεικνύει ότι τη καμπύλη επιπτώσεων ειδήσεων και τα χαρακτηριστικά της πράγματι επηρέασαν τις τιμές των δικαιωμάτων κατά την περίοδο εξέτασης των υποδειγμάτων.

Οι Christoffersen και Jacobs(2004), εξετάζουν προεκτάσεις του υποδείγματος GARCH, όπως τα υποδείγματα NGARCH, TGARCH, EGARCH(Exponential GARCH), καθώς και ενός υποδείγματος που συνδυάζει τα χαρακτηριστικά του TGARCH και EGARCH. Στο άρθρο “Which GARCH Model for Option Valuation?” εκτίμησαν τα παραπάνω υποδείγματα, χρησιμοποιώντας τις εβδομαδιαίες τιμές κλεισίματος του δείκτη S&P500, κατά το χρονικό διάστημα μεταξύ Ιουνίου 1988 και Μαΐου 1992. Στη συνέχεια εξετάστηκε η ικανότητα αποτίμησης σε δικαιώματα αγοράς ευρωπαϊκού τύπου στο δείκτη, τόσο εντός όσο και εκτός δείγματος. Για την εκτίμηση των συντελεστών χρησιμοποιήθηκαν δύο μεθοδολογίες, η μέθοδος της μέγιστης πιθανοφάνειας, και η μέθοδος των μη γραμμικών ελαχίστων τετραγώνων.

Τα αποτελέσματα των Christoffersen και Jacobs(2004) δείχνουν ότι τα πιο περίπλοκα υποδείγματα με περισσότερους συντελεστές προς εκτίμηση, όπως το EGARCH, αποδίδουν συγκριτικά καλύτερα στην αποτίμηση εντός δείγματος. Αυτό όμως που έχει σημασία στην πρακτική εφαρμογή ενός υποδείγματος αποτίμησης, είναι η απόδοση εκτός δείγματος. Εκεί, η εικόνα αντιστρέφεται, καθώς τα πιο περίπλοκα υποδείγματα παράγουν μεγαλύτερα σφάλματα αποτίμησης σε σύγκριση με το συγκριτικά απλούστερο υπόδειγμα NGARCH. Οι Christoffersen και Jacobs(2004) καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι όσον αφορά την αποτίμηση σε πρακτικό επίπεδο, και άρα λαμβάνοντας σαν κριτήριο τις αποδόσεις αποτίμησης εκτός δείγματος, οι κύριοι παράγοντες που επηρεάζουν την μεταβλητότητα είναι η επίδραση της μόχλευσης, καθώς και η επίδραση του φαινομένου της μεταβλητότητας κατά συστάδες. Σαν συνέπεια, το υπόδειγμα NGARCH, ως το πιο «φειδωλό» υπόδειγμα που καταφέρνει να προσδιορίσει τις δύο αυτές επιδράσεις, είναι και το πλέον κατάλληλο.

Σύμφωνα με τα παραπάνω αποτελέσματα έρχεται και η έρευνα των Yung και Zhang(2003), οι οποίοι στο άρθρο “An Empirical Investigation of the GARCH Option Pricing Model: Hedging Performance”, συγκρίνουν την ικανότητα αποτίμησης του υποδείγματος

EGARCH, με το Ad-Hoc Black-Scholes των Dumas, Fleming και Whaley(1998). Όπως και στην έρευνα των Christoffersen και Jacobs(2004), χρησιμοποιούν για δείγμα τις ημερήσιες αποδόσεις του δείκτη S&P500 και τις τιμές των δικαιώματα προαίρεσης ευρωπαϊκού τύπου στον δείκτη, για το διάστημα μεταξύ Ιουνίου 1999 και Νοεμβρίου 1999. Στο δείγμα συμπεριλήφθηκαν δικαιώματα με ληκτότητα μεταξύ 21 και 90 ημερών, και σχέσης moneyness από 0,9 έως και 1,1. Για τον προσδιορισμό της σχέσης που ακολουθούν οι αποδόσεις του δείκτη S&P500 κατά την εξεταζόμενη περίοδο, χρησιμοποιούν το υπόδειγμα EGARCH(1,1), όπως αναπτύχθηκε από τον Nelson(1991), ενώ για την εύρεση των θεωρητικών τιμών των δικαιωμάτων προαίρεσης, χρησιμοποιείται η μεθοδολογία του Duan(1995).

Η αξιολόγηση των δύο υποδειγμάτων στην εντός δείγματος αποτίμηση, έγινε χρησιμοποιώντας ως κριτήριο τη τετραγωνική ρίζα των της μέσης τιμής των τετραγώνων των αποκλίσεων (Root Mean Squared Error ή RMSE), μεταξύ των θεωρητικών και των πραγματικών τιμών. Εντός δείγματος, το υπόδειγμα EGARCH αποδίδει σημαντικά καλύτερα, παρουσιάζοντας μικρότερο RMSE και παράλληλα μικρότερη τυπική απόκλιση σε σύγκριση με το Ad-Hoc Black-Scholes. Ωστόσο, στην εκτός δείγματος αποτίμηση η οποία έχει και μεγαλύτερη πρακτική σημασία, το υπόδειγμα EGARCH αποδίδει οριακά καλύτερα από το Ad-Hoc Black-Scholes, χωρίς όμως αυτή η διαφορά να είναι στατιστικά σημαντική. Παράλληλα, το προβάδισμα του EGARCH έναντι του Ad-Hoc Black-Scholes μειώνεται, όσο αυξάνεται ο αριθμός των ημερών που παρήλθαν από την εκτίμηση των συντελεστών.

Τα αποτελέσματα των Yung και Zhang(2003) συμφωνούν με τις εμπειρικές μελέτες των Christoffersen και Jacobs(2004). Ωστόσο, η έρευνα των Chiang και Huang(2011) έρχεται σε αντίθεση, τονίζοντας ότι υπό τις κατάλληλες συνθήκες στην αγορά, το υπόδειγμα EGARCH μπορεί να αποδώσει σημαντικά καλύτερα από τα άλλα υποδείγματα GARCH. Στο άρθρο “Stock Market Momentum, Business Conditions, and GARCH option pricing models”, οι Chiang και Huang(2011), εξετάζουν την ικανότητα αποτίμησης 5 προεκτάσεων του υποδείγματος GARCH, όταν κυριαρχούν διαφορετικές τάσεις στην αγορά. Τα αποτελέσματα τους έχουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον, καθώς αποδεικνύουν ότι οι συνθήκες που επικρατούν επηρεάζουν σημαντικά την ικανότητα αποτίμησης των υποδειγμάτων.

Το δείγμα που χρησιμοποιήθηκε για την εκτίμηση της μεταβλητότητας ήταν οι ημερήσιες τιμές κλεισίματος του δείκτη S&P500 από τον Ιανουάριο του 1990, έως τον Δεκέμβριο του 2005. Η εκτίμηση της μεταβλητότητας έγινε με τα υποδείγματα GARCH, EGARCH του Nelson(1990), GJR-GARCH των Glosten et al.(1993), NGARCH των Engle και Ng(1993), TGARCH του Zakoian(1994), και NGARCH-Jump του Duan et al.(2006). Η εκτίμηση των συντελεστών για όλα τα υποδείγματα έγινε με τη μέθοδο της μέγιστης

πιθανοφάνειας. Για την εύρεση των θεωρητικών τιμών κάθε υποδείγματος, χρησιμοποιήθηκε η μεθοδολογία του υποδείγματος GARCH του Duan(1995). Η αξιολόγηση των υποδειγμάτων έγινε με δύο κριτήρια. Το πρώτο είναι η μέση τιμή της απόλυτης απόκλισης μεταξύ των θεωρητικών τιμών του εκάστοτε υποδείγματος, και των πραγματικών τιμών (Mean Absolute Error ή MAE). Δεύτερο κριτήριο ήταν η τετραγωνική ρίζα της μέσης τιμής του τετραγώνου των αποκλίσεων ανάμεσα στη τεκμαιρόμενη μεταβλητότητα του κάθε υποδείγματος, και της πραγματικής τεκμαιρόμενης μεταβλητότητας που μπορεί να εξαχθεί μέσω των τιμών της αγοράς (Implied Volatility Root Mean-Squared Error ή IVRMSE).

Η περίοδος 1996-2005 κατά την οποία εξετάστηκε η ακρίβεια αποτίμησης των υποδειγμάτων, χωρίστηκε σε υποπεριόδους ανάλογα με το αν η επικρατούσα τάση της αγοράς ήταν ανοδική ή καθοδική, σύμφωνα με τη μεθοδολογία των Lunde και Timmermann(2004). Τα αποτελέσματα των Chiang και Huang(2011) δεν συμφωνούν με αυτά των Yung και Zhang(2003), καθώς δείχνουν ότι σε ολόκληρη τη περίοδο εξέτασης, το υπόδειγμα EGARCH είχε την καλύτερη απόδοση, σημειώνοντας τα χαμηλότερα σφάλματα τόσο με το μέτρο MAE όσο και με το IVRMSE. Την ακρίβεια του EGARCH ακολουθούν το απλό υπόδειγμα GARCH, το TGARCH και το NGARCH. Και πάλι τα αποτελέσματα διαφοροποιούνται από προηγούμενες εμπειρικές μελέτες, καθώς έρχονται σε αντίθεση με τους Christoffersen και Jacobs(2004) οι οποίοι υποστήριζαν την υπεροχή του υποδείγματος NGARCH στην εκτός δείγματος αποτίμηση. Επίσης, έρχονται σε αντίθεση και με τα αποτελέσματα των Hardle και Hafner(2000), οι οποίοι συμπεραίνουν ότι το υπόδειγμα TGARCH υπερτερεί έναντι του απλού υποδείγματος GARCH.

Παρουσιάζονται ωστόσο αισθητές διαφοροποιήσεις στα αποτελέσματα, ανάμεσα στις περιόδους όπου η επικρατούσα τάση της αγοράς είναι ανοδική, και σε αυτές όπου είναι καθοδική. Όταν επικρατεί ανοδική τάση, το υπόδειγμα με τα μικρότερα σφάλματα αποτίμησης, σύμφωνα και με τα δύο κριτήρια είναι το GARCH, ακολουθούμενο από το EGARCH, TGARCH και NGARCH. Αντίθετα, όταν η επικρατούσα τάση είναι καθοδική, το υπόδειγμα που εμφανίζει τα μικρότερα σφάλματα αποτίμησης είναι το EGARCH, και ακολουθούν τα NGARCH-Jump, TGARCH και GARCH. Το ότι διαφορετικά υποδείγματα GARCH έχουν διαφορετική απόδοση ανάλογα με τη κύρια τάση της αγοράς, είναι ένα στοιχείο που συνηγορεί στην ιδιαίτερη σημασία των επιδράσεων της μόχλευσης και της μεταβλητότητας κατά συστάδες, στην διαδικασία αποτίμησης δικαιωμάτων.

4.5 Το υπόδειγμα Heston-Nandi GARCH

Οι εμπειρικές μελέτες των Duan και Zhang(2001), Christoffersen και Jacobs(2004) και Chiang και Huang(2011) έχουν εξετάσει την ακρίβεια αποτίμησης του υποδείγματος GARCH, σε τιμές δικαιωμάτων στους δείκτες S&P500 και Hang Seng, δείχνοντας ότι έχει αξιοσημείωτη ικανότητα αποτίμησης. Επιπλέον, έχουν εξεταστεί προεκτάσεις του υποδείγματος αποτίμησης GARCH, που χρησιμοποιούν διαφορετικές προσεγγίσεις για την εκτίμηση της μεταβλητότητας του υποκείμενο τίτλου, όπως το EGARCH, TGARCH και NGARCH. Ένα από τα μειονεκτήματα αυτών των υποδειγμάτων, είναι ότι δεν έχουν αναλυτική λύση, και άρα οι τιμές των δικαιωμάτων υπολογίζονται προσεγγιστικά, μέσω προσομοίωσης. Η διαδικασία αυτή είναι χρονοβόρα και απαιτεί σημαντική υπολογιστική ισχύ.

Οι Heston και Nandi(2000) βασιζόμενοι στη μεθοδολογία του υποδείγματος GARCH, ανέπτυξαν ένα υπόδειγμα το οποίο έχει αναλυτική λύση στην αποτίμηση δικαιωμάτων προαίρεσης ευρωπαϊκού τύπου. Το θεωρητικό πλαίσιο του υποδείγματος αυτού έχει παρουσιαστεί στην ενότητα 3.3. Επιπρόσθετα, οι Heston και Nandi(2000) εξέτασαν την ακρίβεια του HN-GARCH(Heston-Nandi GARCH) σε σύγκριση με το υπόδειγμα Ad-Hoc Black-Scholes των Dumas, Fleming και Whaley(1998). Το δείγμα που χρησιμοποίησαν ήταν οι ημερήσιες αποδόσεις του δείκτη S&P500 για τη περίοδο 1992-1994. Η εκτίμηση των συντελεστών έγινε με τη μέθοδο των μη γραμμικών ελαχίστων τετραγώνων, για τους πρώτους 6 μήνες κάθε έτους. Στη συνέχεια εξετάστηκε η ακρίβεια αποτίμησης των υποδειγμάτων εντός δείγματος για το πρώτο εξάμηνο κάθε έτους, και εκτός δείγματος για το δεύτερο εξάμηνο.

Στην αποτίμηση εντός δείγματος, οι Heston και Nandi(2000) συμπεραίνουν ότι το Ad-Hoc Black-Scholes αποδίδει καλύτερα από το HN-GARCH, χρησιμοποιώντας σαν κριτήριο το RMSE. Το αποτέλεσμα αυτό όμως μπορεί να θεωρηθεί παραπλανητικό, καθώς η μεταβλητότητα του Ad-Hoc Black-Scholes ανανεωνόταν κάθε εβδομάδα στην εντός δείγματος αποτίμηση. Τα αποτελέσματα των Heston και Nandi(2000) συμφωνούν με την έρευνα των Su et al.(2010). Στο άρθρο “An Application of closed-form GARCH option pricing model on FTSE 100 option and volatility” οι Su et al.(2010) εξετάζουν εμπειρικά την ικανότητα αποτίμησης του υποδείγματος HN-GARCH απέναντι στο υπόδειγμα Ad-Hoc Black-Scholes, σε δικαιώματα προαίρεσης ευρωπαϊκού τύπου στο δείκτη FTSE100. Η χρονική περίοδος που εξετάζουν είναι μεταξύ Ιανουαρίου 2005 και Μαρτίου 2006. Στην εντός δείγματος αποτίμηση, οι Su et al.(2010) συνηγορούν ότι το Ad-Hoc Black-Scholes εμφανίζει μικρότερα ποσοστιαία σφάλματα αποτίμησης.

Στην εκτός δείγματος αποτίμηση, τα αποτελέσματα είναι αντίθετα, τόσο για τους Heston και Nandi(2000), όσο και για τους Su et al.(2010). Και στις δύο εμπειρικές μελέτες, το υπόδειγμα HN-GARCH υπερέχει έναντι του Ad-Hoc Black-Scholes, στις περισσότερες κατηγορίες. Παρόλα αυτά, στην έρευνα των Heston και Nandi(2000) εντοπίζονται διαφορές στην ακρίβεια της αποτίμησης δικαιωμάτων, ανάλογα με τα χαρακτηριστικά τους. Ενώ το HN-GARCH εμφανίζει μικρότερα σφάλματα από το Ad-Hoc Black-Scholes στην αποτίμηση δικαιωμάτων out-of-the-money και in-the-money ανεξαρτήτως ληκτότητας, δεν ισχύει το ίδιο και για τα δικαιώματα at-the-money.

Σύμφωνα με την έρευνα των Heston και Nandi(2000), το υπόδειγμα Ad-Hoc Black-Scholes εμφανίζει μικρότερα σφάλματα αποτίμησης από το HN-GARCH, στα δικαιώματα αγοράς των οποίων η τιμή εξάσκησης είναι πολύ κοντά στη spot τιμή του υποκείμενου τίτλου, και τα οποία έχουν ληκτότητα μικρότερη από 40 ημέρες. Επίσης, στα at-the-money δικαιώματα πώλησης, το Ad-Hoc Black-Scholes έχει μικρότερα σφάλματα σε όλες της κατηγορίες ληκτότητας. Το ίδιο δεν ισχύει στην έρευνα των Su et al.(2010) για τα at-the-money δικαιώματα με ληκτότητα μικρότερη από 65 ημέρες. Μόνο στη συγκεκριμένη κατηγορία αυτής της έρευνας, το απλό υπόδειγμα Black-Scholes αποδίδει καλύτερα, τόσο σε σύγκριση με το HN-GARCH, το οποίο είχε το δεύτερο μικρότερο μέσο σφάλμα, όσο και σε σύγκριση με το Ad-Hoc Black-Scholes. Οι Su et al.(2010) το αποδίδουν στο γεγονός ότι για αυτή τη κατηγορία ληκτότητας και moneyness, η τεκμαιρόμενη μεταβλητότητα των δικαιωμάτων ήταν σταθερή, ικανοποιώντας έτσι την υπόθεση της σταθερής μεταβλητότητας του υποδείγματος Black-Scholes.

Το συμπέρασμα που μπορεί να εξαχθεί από τις εμπειρικές έρευνες των Heston και Nandi(2000) και Su et al.(2010) είναι ότι, με εξαίρεση τα at-the-money συμβόλαια με μικρή ληκτότητα, στα οποία το αποτέλεσμα δεν είναι ξεκάθαρο, το υπόδειγμα HN-GARCH αποδίδει καλύτερα στην αποτίμηση εκτός δείγματος, σε σύγκριση με το Ad-Hoc Black-Scholes. Το ερώτημα που απομένει, είναι εάν το υπόδειγμα που αναπτύχθηκε από τους Heston και Nandi, είναι ανταγωνιστικό σε σύγκριση με τα υπόλοιπα υποδείγματα GARCH. Οι Hsieh και Ritchken(2006) επιχείρησαν να δώσουν απάντηση σε αυτό το ερώτημα, στο άρθρο “An Empirical Comparison of GARCH Option Pricing Models”.

Σε αυτή την εμπειρική μελέτη οι Hsieh και Ritchken(2006), εξετάζουν την ικανότητα αποτίμησης του υποδείγματος HN-GARCH απέναντι στο υπόδειγμα Black-Scholes, και το υπόδειγμα NGARCH, το οποίο αποτελεί μια από τις προέκτασης του υποδείγματος αποτίμησης GARCH του Duan(1995). Σύμφωνα με τους Christoffersen και Jacobs(2004), το

NGARCH θεωρείται το επικρατέστερο υπόδειγμα στην εκτός δείγματος αποτίμηση, ανάμεσα στα υποδείγματα GARCH.

Τα δεδομένα που χρησιμοποιούν οι Hsieh και Rithcken(2006), είναι οι τιμές δικαιωμάτων αγοράς ευρωπαϊκού τύπου στον δείκτη S&P500, για το διάστημα μεταξύ Ιανουαρίου 1991 και Δεκεμβρίου 1995. Η εκτίμηση των συντελεστών για τα δύο υποδείγματα έγινε με τη μέθοδο των μη-γραμμικών ελαχίστων τετραγώνων, χρησιμοποιώντας μόνο τα δεδομένα του πρώτου εξαμήνου, για κάθε έτος του δείγματος. Με αυτό τον τρόπο, τα υποδείγματα εξετάστηκαν στην αποτίμηση εντός δείγματος, με εβδομαδιαία επανεκτίμηση των συντελεστών, στο πρώτο εξάμηνο κάθε έτους. Στο δεύτερο εξάμηνο κάθε έτους, η αποτίμηση ήταν εκτός δείγματος, χρησιμοποιώντας τους τελευταίες εκτιμημένους συντελεστές του πρώτου εξαμήνου.

Τα αποτελέσματα των Hsieh και Rithcken(2006), δεν επιβεβαιώνουν τους Su et al.(2010), καθώς δεν βρίσκουν ότι το υπόδειγμα Black-Scholes παράγει τα μικρότερα ποσοστιαία σφάλματα αποτίμησης στα δικαιώματα at-the-money με σύντομη ληκτότητα. Αυτό που γίνεται σαφές είναι ότι το Black-Scholes υπερτιμολογεί συστηματικά τα δικαιώματα out-of-the-money ανεξαρτήτως ληκτότητας, εμφανίζοντας παράλληλα και μεγάλα ποσοστιαία σφάλματα στις κατηγορίες αυτές. Αυτό έχει διαπιστωθεί ήδη από τις έρευνες των Duan(1995), Sabbatini και Linton(1998) και Duan και Zhang(2001).

Τα υποδείγματα NGARCH και HN-GARCH εμφανίζουν σημαντικά μικρότερες αποκλίσεις σε σύγκριση με το υπόδειγμα Black-Scholes, χωρίς να εμφανίζουν τα συστηματικά σφάλματα του, όπως την υπερτιμολόγηση συμβολαίων out-of-the-money. Τόσο στην αποτίμηση εντός, όσο και εκτός δείγματος, το υπόδειγμα των Heston και Nandi δεν καταφέρνει να υπερισχύσει έναντι του NGARCH, καθώς εμφανίζει μεγαλύτερα σφάλματα αποτίμησης, στις περισσότερες κατηγορίες moneyness και ληκτότητας. Στις κατηγορίες μικρής και μεσαίας ληκτότητας, δηλαδή 10 έως 45 και 46 έως 90 ημερών έως τη λήξη, το HN-GARCH αποτιμά υψηλότερα τα συμβόλαια in και at-the-money, ενώ αποτιμά χαμηλότερα τα συμβόλαια deep-in και deep-out-the-money. Στις περισσότερες περιπτώσεις, οι αποτιμήσεις του υποδείγματος HN-GARCH έχουν μικρότερη ακρίβεια σε σύγκριση με το NGARCH. Οι μεγαλύτερες αποκλίσεις ανάμεσα στα δύο υποδείγματα, μπορούν να εντοπιστούν στα δικαιώματα out-of-the-money.

Μια επιπλέον παρατήρηση, είναι το γεγονός ότι δεν εμφανίζεται σημαντική διαφορά στην ακρίβεια των αποτιμήσεων, η οποία να οφείλεται στην απαξίωση των εκτιμημένων συντελεστών. Σύμφωνα με τους Hsieh και Retchkin(2006), οι αποτιμήσεις εκτός δείγματος που βασίζονται σε συντελεστές, η εκτίμηση των οποίων έγινε ακόμα και 20 εβδομάδες πριν,

δεν παρουσιάζουν σημαντικά υψηλότερες αποκλίσεις σε σύγκριση με αποτιμήσεις που εξήχθησαν μέσω πρόσφατα εκτιμημένων συντελεστών. Τα δύο υποδείγματα δεν παρουσιάζουν έντονη χρονική αλλοίωση, και άρα δεν είναι απαραίτητη η συνεχής επανεκτίμηση τους. Το γεγονός αυτό μπορεί να οφείλεται στην ικανότητα των ανελίξεων GARCH να αποτυπώνουν τις κύριες ιδιότητες των χρονολογικών σειρών.

Συμπεράσματα

Το θέμα της εργασίας αυτής αποτέλεσε η αποτίμηση δικαιωμάτων προαίρεσης με τη χρήση υποδειγμάτων GARCH. Αρχικά, παρουσιάστηκαν βασικές έννοιες των χρηματοοικονομικών παραγώγων, καθώς και η σημασία τους στις σύγχρονες αγορές. Στη συνέχεια εξετάστηκαν τα δικαιώματα προαίρεσης, και η βασική μεθοδολογία αποτίμησής τους. Παρουσιάστηκε το υπόδειγμα αποτίμησης Black-Scholes ενώ αναλύθηκαν τα μειονεκτήματα που εμφανίζει το συγκεκριμένο υπόδειγμα. Στην επόμενη ενότητα εξετάστηκαν εναλλακτικές προσεγγίσεις στην αποτίμησης δικαιωμάτων προαίρεσης, μέσω υποδειγμάτων GARCH. Πιο συγκεκριμένα παρουσιάστηκε το θεωρητικό πλαίσιο δύο διαδομένων υποδειγμάτων, η μεθοδολογία αποτίμησης GARCH του Duan(1995), καθώς και το υπόδειγμα των Heston και Nandi(2000). Στη τελευταία ενότητα έγινε μια ανασκόπηση της σύγχρονης εμπειρικής βιβλιογραφίας που εξετάζει την αποτίμηση δικαιωμάτων.

Τα συμπεράσματα που μπορούν να εξαχθούν από την ανασκόπηση της εμπειρικής βιβλιογραφίας, είναι ότι το υπόδειγμα GARCH στις περισσότερες περιπτώσεις υπερέχει του υποδείγματος Black-Scholes, καθώς εμφανίζει μικρότερα σφάλματα αποτίμησης. Το αποτέλεσμα αυτό γίνεται φανερό στις έρευνες των Duan(1995), Sabbatini και Linton(1998), Duan και Zhang(2001) και Hsieh και Ritchken(2006). Η μοναδική περίπτωση όπου το υπόδειγμα Black-Scholes εμφανίζει, υπό συγκεκριμένες συνθήκες, μικρότερα ποσοστιαία σφάλματα αποτίμησης αποτελεί η έρευνα των Su et al.(2010). Αυτό το αποτέλεσμα όμως εμφανίζεται μόνο στη κατηγορία at-the-money δικαιωμάτων με σύντομη ληκτότητα. Πέρα από την αποτίμηση δικαιωμάτων προαίρεσης ευρωπαϊκού τύπου, οι Ritchken και Trevor(1998), καθώς και ο Stentoft(2005) υποστηρίζουν, ότι τα υποδείγματα GARCH μπορούν να χρησιμοποιηθούν με επιτυχία και στην αποτίμηση δικαιωμάτων αμερικανικού τύπου.

Παράλληλα, οι περισσότερες εμπειρικές μελέτες υποστηρίζουν ότι το υπόδειγμα GARCH δεν παρουσιάζει τόσο έντονα συστηματικά σφάλματα αποτίμησης, τα οποία αποτελούν έναν από τους κύριους περιορισμούς του Black-Scholes. Τα αποτελέσματα όμως δεν είναι ξεκάθαρα. Στην έρευνα των Duan και Zhang(2001) δεν εντοπίζονται συστηματικά σφάλματα αποτίμησης του υποδείγματος GARCH σε κάποια κατηγορία moneyness ή ληκτότητας. Αντίθετα, οι Sabbatini και Linton(1998) καθώς και οι Lehar et al.(2002) υποστηρίζουν ότι το υπόδειγμα GARCH υποτιμολογεί συστηματικά στις περισσότερες κατηγορίες ληκτότητας και moneyness, ενώ υπερτιμολογεί συστηματικά τα δικαιώματα αγοράς με μεγάλη ληκτότητα. Το αποτέλεσμα των Lehar et al.(2002) ίσως είναι

παραπλανητικό, καθώς στην εμπειρική τους έρευνα χρησιμοποιούν διαφορετική συνάρτηση απωλειών στην εκτίμηση των συντελεστών και στην αξιολόγηση των υποδειγμάτων. Σύμφωνα με τους Christoffersen και Jacobs(2004b) και τους Bams, Lehnert και Wolff(2009), αυτή η μεθοδολογία μπορεί να οδηγήσει σε λανθασμένα αποτελέσματα.

Με βάση το υπόδειγμα αποτίμησης GARCH του Duan(1995), έχουν αναπτυχθεί υποδείγματα που προεκτείνουν την μεθοδολογία, κάνοντας την εκτίμηση της μεταβλητότητας του υποκείμενου τίτλου με τη χρήση διαδικασιών EGARCH, TGARCH ή NGARCH. Τα υποδείγματα αυτά σε συγκεκριμένες περιπτώσεις βελτιώνουν την ακρίβεια αποτίμησης του αρχικού υποδείγματος GARCH. Στην έρευνα των Hardle και Hafner(2000), το υπόδειγμα TGARCH αποδίδει καλύτερα από το GARCH στην αποτίμηση δικαιωμάτων ευρωπαϊκού τύπου. Επιπλέον, οι Christoffersen και Jacobs(2004a), έχοντας εξετάσει την ικανότητα αποτίμησης 5 προεκτάσεων του υποδείγματος GARCH, καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι τα περίπλοκα υποδείγματα με περισσότερους συντελεστές προς εκτίμηση, δεν αποδίδουν καλύτερα στην εκτός δείγματος αποτίμηση. Από τα αποτελέσματα τους γίνεται φανερό ότι οι κύριοι παράγοντες που πρέπει να προσδιορίσει σωστά ένα υπόδειγμα αποτίμησης, είναι η επίδραση της μόχλευσης και της μεταβλητότητας κατά συστάδες. Το NGARCH είναι το πιο «φειδωλό» υπόδειγμα που παράλληλα προσδιορίζει με ακρίβεια τις δύο αυτές επιδράσεις στην μεταβλητότητα του υποκείμενου τίτλου, και με αυτό τον τρόπο εμφανίζει τα μικρότερα σφάλματα αποτίμησης.

Το συμπέρασμα αυτό επιβεβαιώνεται και από την έρευνα των Yung και Zhang(2003) όπου το υπόδειγμα EGARCH αποδίδει οριακά καλύτερα από το Ad-Hoc Black-Scholes υπόδειγμα των Dumas, Fleming και Whaley(1998), χωρίς ωστόσο η διαφορά αυτή να είναι στατιστικά σημαντική. Παρόλα αυτά, το υπόδειγμα EGARCH μπορεί να αποδώσει καλύτερα από τα άλλα υποδείγματα GARCH, υπό τις κατάλληλες συνθήκες στην αγορά. Οι Chiang και Huang(2011) βρίσκουν ότι η επικρατούσα τάση στην αγορά επηρεάζει τα την αποτίμηση, ενώ από τα αποτελέσματα τους γίνεται φανερό ότι όταν η κυρίαρχη τάση στην αγορά είναι καθοδική, το υπόδειγμα EGARCH εμφανίζει συγκριτικά μικρότερα σφάλματα αποτίμησης, σε σχέση με τα ανταγωνιστικά υποδείγματα.

Ένα από τα μειονεκτήματα των υποδειγμάτων αποτίμησης GARCH, είναι ότι δεν έχουν αναλυτική λύση, και έτσι είναι αναγκαία η χρήση μεθόδων προσομοίωσης για την προσέγγιση της τιμής των δικαιωμάτων προαίρεσης. Το υπόδειγμα HN-GARCH των Heston και Nandi(2000) ξεπερνά το πρόβλημα αυτό, υστερεί όμως στην ακρίβεια αποτίμησης συγκριτικά με τα άλλα υποδείγματα GARCH. Στα αποτελέσματα της εμπειρικής έρευνας των Heston και Nandi(2000) και Su et al.(2010) γίνεται φανερό ότι το HN-GARCH εμφανίζει

μικρότερα ποσοστιαία σφάλματα αποτίμησης σε σχέση με το Ad-Hoc Black-Scholes. Δεν καταφέρνει παρόλα αυτά να ξεπεράσει το υπόδειγμα NGARCH, κάτι που διαπιστώνεται από τα αποτελέσματα των Hsieh και Ritchken(2006). Ωστόσο, αποτελεί μια εναλλακτική λύση για πρακτικούς λόγους, καθώς η εύρεση της τιμής των δικαιωμάτων μέσω του HN-GARCH έχει αναλυτική λύση, και άρα δεν είναι αναγκαία η χρήση μεθόδων προσομοίωσης, όπως ισχύει στην περίπτωση των άλλων υποδειγμάτων GARCH.

Οι περισσότερες εμπειρικές μελέτες που αφορούν την εξέταση της αποτίμησης μέσω υποδειγμάτων GARCH, επικεντρώνονται στα δικαιώματα προαίρεσης επί δεικτών, όπως του S&P100 και S&P500, FTSE100 και Hang Seng. Πρόταση για μελλοντική έρευνα θα μπορούσε να αποτελέσει η διερεύνηση της ακρίβειας αποτίμησης των υποδειγμάτων GARCH, σε δικαιώματα επί μετοχών, καθώς κάτι τέτοιο δεν έχει εξεταστεί διεξοδικά στη σύγχρονη αρθρογραφία.

Βιβλιογραφικές Παραπομπές

Άρθρα σε Επιστημονικά Περιοδικά

- Baillie, R. and Bollerslev, T. (1992) 'Prediction in dynamic models with time-dependent conditional variances', *Journal of econometrics*, 52(1/2), pp. 91-91.
- Bams, D., Lehnert, T. and Wolff, C. (2009) 'Loss Functions in Option Valuation: A Framework for Selection', *Management Science*, 55(5), pp. 853-862.
- Barone-Adesi, G., Engle, R. and Mancini, L. (2008) 'A GARCH option pricing model with filtered historical simulation', *Review Of Financial Studies*, 21(3), pp. 1223-1258.
- Black, F. and Scholes, M. (1973) 'The Pricing of Options and Corporate Liabilities', *The Journal of Political Economy*, 81(3), pp. 637.
- Bollerslev, T. (1986) 'Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity', *Journal of Econometrics*, 31(3), pp. 307-327.
- Bollerslev, T., Engle, R. and Wooldridge, J. (1988) 'A capital asset pricing model with time-varying covariances', *Journal of political economy*, 96(1), pp. 116-131.
- Bollerslev, T. and Mikkelsen, H. (1996) 'Modeling and pricing long memory in stock market volatility', *Journal Of Econometrics*, 73(1), pp. 151-184.
- Brennan, M. J. (1979) 'The Pricing of Contingent Claims in Discrete Time Models', *The Journal of Finance*, 34(1), pp. 53-68.
- Breton, M. and de Frutos, J. (2010) 'Option Pricing Under GARCH Processes Using PDE Methods', *Operations Research*, 58(4), pp. 1148-1157.
- Chiang, M. and Huang, H. (2011) 'Stock market momentum, business conditions, and GARCH option pricing models', *Journal Of Empirical Finance*, 18(3), pp. 488-505.
- Christoffersen, P., Elkamhi, R., Feunou, B. and Jacobs, K. (2010) 'Option Valuation with Conditional Heteroskedasticity and Nonnormality', *Review Of Financial Studies*, 23(5), pp. 2139-2183.
- Christoffersen, P. and Jacobs, K. (2004) 'The importance of the loss function in option valuation', *Journal of Financial Economics*, 72(2), pp. 291-318.
- Christoffersen, P. and Jacobs, K. (2004) 'Which GARCH model for option valuation?', *Management Science*, 50(9), pp. 1204-1221.

- Cont, R. (2007) 'Volatility Clustering in Financial Markets: Empirical Facts and Agent-Based Models', in Teyssière, G. & Kirman, A.P. (eds.) *Long Memory in Economics*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, pp. 289-309.
- Duan, J. (1995) 'The GARCH Option Pricing Model', *Journal of Mathematical Finance*, 5(1), pp. 13-32.
- Duan, J., Gauthier, G. and Simonato, J. (2001) 'Asymptotic distribution of the EMS option price estimator', 47, pp. 1122-1132.
- Duan, J. and Simonato, J. (1998) 'Empirical martingale simulation for asset prices', *Management Science*, 44(9), pp. 1218-1233.
- Duan, J. and Zhang, H. (2001) 'Pricing Hang Seng Index options around the Asian financial crisis - A GARCH approach', *Journal Of Banking & Finance*, 25(11), pp. 1989-2014.
- Duan, J. c., Ritchken, P. and Sun, Z. (2006) 'Approximating GARCH-Jump Models, Jump-Diffusion processes, and option pricing.', *Mathematical Finance*, 16(1), pp. 21-52.
- Dumas, B., Fleming, J. and Whaley, R. E. (1998) 'Implied Volatility Functions: Empirical Tests', *Journal of Finance*, 53(6), pp. 2059-2016.
- Engle, R. F. (1982) 'Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation', *Econometrica*, 50(4), pp. 987-1007.
- Engle, R. F. and Mustafa, C. (1992) 'Implied ARCH models from options prices', *Journal of Econometrics*, 52(1-2), pp. 289-311.
- Engle, R. and Ng, V. (1993) 'Measuring and testing the impact of news on volatility', *Journal Of Finance*, 48(5), pp. 1749-1778.
- Fama, E. F. (1965) 'Tomorrow on the New York Stock Exchange', *The Journal of Business*, 38(3), pp. 285-299.
- French, K. R., Schwert, G. W. and Stambaugh, R. F. (1987) 'Expected stock returns and volatility', *Journal of Financial Economics*, 19(1), pp. 3-29.
- Glosten, L., Jagannathan, R. and Runkle, D. (1993) 'On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks', *Journal of finance*, 48(5), pp. 1779-1801.
- Härdle, W. and Hafner, C. M. (2000) 'Discrete time option pricing with flexible volatility estimation', *Finance and Stochastics*, 4(2), pp. 189-207.
- Heston, S. and Nandi, S. (2000) 'A closed-form GARCH option valuation model', *Review Of Financial Studies*, 13(3), pp. 585-625.
- Hsieh, K. C. and Ritchken, P. (2006) 'An empirical comparison of GARCH option pricing models', *Review of Derivatives Research*, 8(3), pp. 129-150.

- Lehar, A., Scheicher, M. and Schittenkopf, C. (2002) 'GARCH vs. stochastic volatility: Option pricing and risk management', *Journal Of Banking & Finance*, 26(2-3), pp. 323-345.
- Lehnert, T. (2003) 'Explaining Smiles: GARCH Option Pricing with Conditional Leptokurtosis and Skewness', *The Journal of Derivatives*, 10(3), pp. 27-39.
- Maheu, J. and McCurdy, T. (2004) 'News arrival, jump dynamics, and volatility components for individual stock returns', *Journal Of Finance*, 59(2), pp. 755-793.
- Mandelbrot, B. (1966) 'Forecasts of Future Prices, Unbiased Markets, and "Martingale" Models', *The Journal of Business*, 39(1), pp. 242-255.
- Nandi, S. (2000) 'Asymmetric information about volatility: How does it affect implied volatility, option prices and market liquidity?', *Review of Derivatives Research*, 3(3), pp. 215-236.
- Pagan, A. and Schwert, G. (1990) 'Alternative Models for Conditional Stock Volatility', *Journal Of Econometrics*, 45(1-2), pp. 267-290.
- Ritchken, P. and Trevor, R. (1999) 'Pricing options under generalized GARCH and stochastic volatility processes', *Journal Of Finance*, 54(1), pp. 377-402.
- Rubinstein, M. (1976) 'The Strong Case for the Generalized Logarithmic Utility Model as the Premier Model of Financial Markets', *The Journal of Finance*, 31(2), pp. 551-571.
- Rubinstein, M. (1985) 'Nonparametric Tests of Alternative Option Pricing Models Using All Reported Trades and Quotes on the 30 Most Active CBOE Option Classes from August 23, 1976 through August 31, 1978', *The Journal of Finance*, 40(2), pp. 455-480.
- Sabbatini, M. and Linton, O. (1998) 'A GARCH model of the implied volatility of the Swiss market index from option prices', *International Journal of Forecasting*, 14(2), pp. 199-213.
- Sheikh, A. M. (1991) 'Transaction Data Tests of S&P 100 Call Option Pricing', *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 26(4), pp. 459-475.
- Stentoft, L. (2005) 'Pricing American options when the underlying asset follows GARCH processes', *Journal of Empirical Finance*, 12(4), pp. 576-611.
- Su, Y. C., Chen, M. and Huang, H. C. (2010) 'An application of closed-form GARCH option-pricing model on FTSE 100 option and volatility', *Applied Financial Economics*, 20(11), pp. 899-910.
- Yung, H. and Zhang, H. (2003) 'An empirical investigation of the GARCH option pricing model: Hedging performance', *Journal Of Futures Markets*, 23(12), pp. 1191-1207.

Βιβλία

- Αγγελόπουλος Π. (2010) *Εισαγωγή στα Παράγωγα Χρηματοοικονομικά Προϊόντα*.
Αθήνα: Σταμούλης.
- Brooks, C. (2014) *Introductory econometrics for finance*. Third edition. edn. Cambridge ;
New York: Cambridge University Press.
- Dubofsky, D. A. and Miller, T. W. (2003) *Derivatives : valuation and risk management*. New
York: Oxford University Press.
- Enders, W. (2010) *Applied econometric time series. Wiley series in probability and statistics*
3rd edn. Hoboken, NJ: Wiley.
- Francq, C. and Zakoian, J.-M. (2010) *GARCH models : structure, statistical inference, and
financial applications*. Chichester, West Sussex: Wiley.
- Garcia, R., Ghysels, E. and Renault, E. (2010) *The Econometrics of Option Pricing*.
- Hull, J. (2015) *Options, futures, and other derivatives*. Ninth edition. edn. Boston: Pearson.
- Rouah, F. (2013) *The Heston model and its extensions in Matlab and C#*. *Wiley finance series*
Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.