ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΚΟΙΝΩΝΙΚΩΝ, ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΚΑΙ ΤΕΧΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΚΟΙΝΩΝΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΕΙΔΙΚΗΣ ΑΓΩΓΗΣ

Αξιολόγηση της κατανόησης των κλασμάτων μαθητών Ε' και Στ' δημοτικού με τυπική ανάπτυξη και μαθητών με ήπιες εκπαιδευτικές ανάγκες: Είδη γνώσης και Τρόποι αναπαράστασης

Παπαθεοδώρου Ευγενία Α.Μ.: 02/15

Επιβλέπων Καθηγητής: Ιωάννης Αγαλιώτης

Θεσσαλονίκη, 2016

Πίνακας περιεχομένων

Πίνακας περιεχομένων διαγραμμάτων 4
Πίνακας περιεχομένων εικόνων 5
Πίνακας περιεχομένων πινάκων 5
Περίληψη 6
Ευχαριστίες 7
Εισαγωγή 8
1. ΘΕΩΡΗΤΙΚΌ ΜΕΡΟΣ
1.1. Κατηγορίες και χαρακτηριστικά της μαθηματικής γνώσης 12
1.2. Τα κλάσματα 14
1.2.1. Η έννοια του κλάσματος 14
1.2.2. Οι υποέννοιες της έννοιας του κλάσματος 17
1.3. Αξιολόγηση 27
1.3.1. Αξιολόγηση στα κλάσματα 28
1.4. Εννοιολογική και διαδικαστική γνώση 34
1.4.1. Εννοιολογική και διαδικαστική γνώση στα μαθηματικά 36
1.4.2. Εννοιολογική και διαδικαστική γνώση στα κλάσματα 39
1.5. Αναπαραστάσεις 43
1.5.1. Η έννοια της αναπαράστασης 43
1.5.2. Αναπαραστάσεις και μαθηματικά 45
1.5.3. Αναπαραστάσεις και κλάσματα 51
1.6. Συχνότερες δυσκολίες 56
1.6.1. Μαθητών τυπικής ανάπτυξης 56
1.6.2. Μαθητών με ήπιες εκπαιδευτικές ανάγκες 61
1.6.2.1. Ειδικές μαθησιακές δυσκολίες 62
1.6.2.2. Νοητική καθυστέρηση 63
1.6.2.3. Προβλήματα συμπεριφοράς 64
1.6.2.4. Διαταραχή Ελλειμματικής Προσοχής και Υπερκινητικότητας (ΔΕΠΥ) 65
1.6.2.5. Αισθητηριακά προβλήματα 66
1.7. Συχνότερα λάθη 68
1.7.1. Διαμοιρασμός 68
1.7.2. Σειροθέτηση 69
1.7.3. Πρόσθεση-Αφαίρεση 69
1.7.4. Πολλαπλασιασμός-Διαίρεση 70
1.7.5. Επικέντρωση στη διαφορά αριθμητή-παρονομαστή 71
1.8. Ερευνητικά ερωτήματα και υποθέσεις 72
2. ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΌ ΜΈΡΟΣ
2.1. Μεθοδολογία 75

2.1.1. Ερευνητική στρατηγική 75
2.1.2. Δείγμα 75
2.1.3. Διαδικασίες και εργαλεία της έρευνας 76
2.1.4. Αναλύσεις της έρευνας 78
2.2. Αποτελέσματα 79
2.2.1. Έλεγχος κανονικότητας της κατανομής 79
2.2.1.1. 1η φάση 80
2.2.1.2. 2η φάση 82
2.2.1.3. 3η φάση 83
2.2.2. Διπαραγοντική ανάλυση διακύμανσης ανεξαρτήτων δειγμάτων 85
2.2.2.1. Φύλο, Τάξη και Ομάδα 86
2.2.2.2. Είδος αναπαράστασης 92
2.2.2.3. Είδος γνώσης 93
2.2.3. Διπαραγοντική ανάλυση διακύμανσης επαναλαμβανομένων μετρήσεων 95
2.2.3.1. Φάση 1 και φάση2 96
2.2.3.2. Φάση 1, φάση 2 & φάση 3 98
2.2.4. Συγκρίσεις ομάδων ανά ερώτηση 99
2.2.4.1. Αναπαράσταση 100
2.2.4.2. Αναγνώριση 100
2.2.4.3. Σημείο αναφοράς 100
2.2.4.4. Διαμοιρασμός 100
2.2.4.5. Σύγκριση (κοινοί αριθμητές ή παρονομαστές) 101
2.2.4.6. Πρόβλημα με αναγωγή στην κλασματική μονάδα 101
2.2.4.7. Σύγκριση (μη κοινοί αριθμητές και παρονομαστές) 101
2.2.4.8. Διάταξη 101
2.2.4.9. Ισοδυναμία και Απλοποίηση 101
2.2.4.10. Τέσσερις πράξεις 102
2.2.5. Ανάλυση παλινδρόμησης 102
2.2.5.1. 1η φάση 102
2.2.5.2. 2η φάση 104
2.2.5.3. 3η φάση 106
2.2.6. Ποιοτική ανάλυση λαθών 107
2.2.6.1. 1η φάση 107
2.2.6.2. 2η φάση 114
2.2.6.3. 3η φάση 120
2.3. Συζήτηση 124
2.4. Συμπεράσματα 137
2.5. Περιορισμοί 138

2.6. Προτάσεις για τη διδασκαλία 139
2.7. Μελλοντικές έρευνες 140
2.8. Βιβλιογραφικές αναφορές 141
2.8.1. Ξενόγλωσση 141
2.8.2. Ελληνόγλωσση 151
2.9. Παράρτημα 154
2.9.1. Εργαλείο πρώτης φάσης 154
2.9.2. Εργαλείο δεύτερης φάσης 156
2.9.3. Εργαλείο τρίτης φάσης 159

Πίνακας περιεχομένων διαγραμμάτων

Διάγραμμα 1.1. Θεωρητικό μοντέλο για την κατανόηση της έννοιας των ρητών αριθμών 16
Διάγραμμα 1.2. Συστήματα εξωτερικών αναπαραστάσεων 47
Διάγραμμα 1.3. Σαφήνεια αναπαραστατικών συστημάτων 48
Διάγραμμα 1.4. Σχέση μεταξύ αναπαράστασης-γλώσσας-συμβόλων 48
Διάγραμμα 2.5. Επιδόσεις πρώτης φάσης 80
Διάγραμμα 2.6. Q-Q plot πρώτης φάσης 80
Διάγραμμα 2.7. Διορθωμένο Q-Q plot πρώτης φάσης 81
Διάγραμμα 2.8. Θηκόγραμμα πρώτης φάσης 81
Διάγραμμα 2.9. Επιδόσεις δεύτερης φάσης 82
Διάγραμμα 2.10. Q-Q plot δεύτερης φάσης 82
Διάγραμμα 2.11. Διορθωμένο Q-Q plot δεύτερης φάσης 83
Διάγραμμα 2.12. Θηκόγραμμα δεύτερης φάσης 83
Διάγραμμα 2.13. Επιδόσεις τρίτης φάσης 84
Διάγραμμα 2.14. Q-Q plot τρίτης φάσης 84
Διάγραμμα 2.15. Διορθωμένο Q-Q plot τρίτης φάσης 84
Διάγραμμα 2.16. Θηκόγραμμα τρίτης φάσης 85
Διάγραμμα 2.17. Επίδοση αγοριών και κοριτσιών τυπικής ανάπτυξης 87
Διάγραμμα 2.18. Επίδοση αγοριών και κοριτσιών με ήπιες εκπαιδευτικές ανάγκες 87
Διάγραμμα 2.19. Σφάλματα αγοριών και κοριτσιών τυπικής ανάπτυξης 87
Διάγραμμα 2.20. Σφάλματα αγοριών και κοριτσιών με Η.Ε.Α. 87
Διάγραμμα 2.21. Επίδοση αγοριών και κοριτσιών τ.α. 89
Διάγραμμα 2.22. Επίδοση αγοριών και κοριτσιών με Η.Ε.Α. 89
Διάγραμμα 2.23. Σφάλματα αγοριών και κοριτσιών τ.α. 89
Διάγραμμα 2.24. Σφάλματα αγοριών και κοριτσιών με Η.Ε.Α. 89
Διάγραμμα 2.25. Επίδοση αγοριών και κοριτσιών τ.α. 91
Διάγραμμα 2.26. Επίδοση αγοριών και κοριτσιών με Η.Ε.Α. 91
Διάγραμμα 2.27. Σφάλματα αγοριών και κοριτσιών τ.α. 91
Διάγραμμα 2.28. Σφάλματα αγοριών και κοριτσιών με Η.Ε.Α. 91
Διάγραμμα 2.29. Επιδόσεις στο τεστ των συμβόλων 93
Διάγραμμα 2.30. Επιδόσεις στο τεστ των σχημάτων 93
Διάγραμμα 2.31. Επιδόσεις στο τεστ των αντικειμένων 93
Διάγραμμα 2.33. Επιδόσεις συμβολικού-διαδικαστικού κομματιού 94
Διάγραμμα 2.34. Επιδόσεις σχηματικού-εννοιολογικού κομματιού 94
Διάγραμμα 2.35. Επιδόσεις σχηματικού-διαδικαστικού κομματιού 94
Διάγραμμα 2.32. Επιδόσεις συμβολικού-εννοιολογικού κομματιού 94
Διάγραμμα 2.36. Επιδόσεις πρακτικού-εννοιολογικού κομματιού 95
Διάγραμμα 2.37. Επιδόσεις πρακτικού-διαδικαστικού κομματιού 95
Διάγραμμα 2.38. Επίδοση σε κάθε φάση των μαθητών τ.α. 97
Διάγραμμα 2.39. Επίδοση σε κάθε φάση των μαθητών με Η.Ε.Α. 97
Διάγραμμα 2.40. Επίδοση σε κάθε φάση μαθητών τ.α. 99
Διάγραμμα 2.41. Επίδοση σε κάθε φάση μαθητών με Η.Ε.Α. 99
Διάγραμμα 2.42. Διάγραμμα διασποράς πρώτης φάσης 104
Διάγραμμα 2.43. Διάγραμμα διασποράς δεύτερης φάσης 105
Διάγραμμα 2.44. Ποσοστά σωστών-λάθος απαντήσεων στην ερώτηση 1.2. 108
Διάγραμμα 2.45. Ποσοστά σωστών-λάθος απαντήσεων στην ερώτηση 1.3. 108

Διάγραμμα 2.46. Ποσοστά σωστών-λάθος απαντήσεων στην ερώτηση 1.4. 109
Διάγραμμα 2.47. Ποσοστά σωστών-λάθος απαντήσεων στην ερώτηση 1.6 110
Διάγραμμα 2.48. Ποσοστά σωστών-λάθος απαντήσεων στην ερώτηση 1.8. 111
Διάγραμμα 2.49. Ποσοστά σωστών-λάθος απαντήσεων στην ερώτηση 2.2. 114
Διάγραμμα 2.50. Ποσοστά σωστών-λάθος απαντήσεων στην ερώτηση 2.3. 115
Διάγραμμα 2.51. Ποσοστά σωστών-λάθος απαντήσεων στην ερώτηση2.4. 115
Διάγραμμα 2.52. Ποσοστά σωστών-λάθος απαντήσεων στην ερώτηση 2.6. 116

Πίνακας περιεχομένων εικόνων

Εικόνα 1.1. Μοντέλο επιφάνειας 52
Εικόνα 1.2. Μοντέλο συνόλου αντικειμένων 53
Εικόνα 1.3. Μοντέλο αριθμητικής γραμμής 53
Εικόνα 1.5. Μοντέλο διαίρεσης 54
Εικόνα 1.4. Μοντέλο αναλογίας 53
Εικόνα 2.6. Παράδειγμα λάθος απάντησης στην ερώτηση 2.2. 115
Εικόνα 2.7. Παράδειγμα λάθος απάντησης στην ερώτηση 2.3. 115
Εικόνα 2.8. Παράδειγμα λάθος απάντησης στην ερώτηση 2.4. 116

Πίνακας περιεχομένων πινάκων

Πίνακας 1.1. Διαφορές ανάμεσα στους φυσικούς και στα κλάσματα 15
Πίνακας 1.2. Χάρτης δεξιοτήτων παιδιών ανά ηλικιακή ομάδα 33
Πίνακας 2.3. Είδος ήπιας εκπαιδευτικής ανάγκης 75
Πίνακας 2.4. Γενικά στοιχεία δείγματος 76
Πίνακας 2.5. Θεματολογία και παραδείγματα ασκήσεων εργαλείων 78
Πίνακας 2.6. Επίδοση πρώτης φάσης 86
Πίνακας 2.7. Επίδοση δεύτερης φάσης 88
Πίνακας 2.8. Επίδοση τρίτης φάσης 90
Πίνακας 2.9. Επιδόσεις ανά φάση 92
Πίνακας 2.10. Επιδόσεις εννοιολογικού-διαδικαστικού κομματιού 94
Πίνακας 2.11. Διαφορές εννοιολογικού-διδικαστικού ανά φάση 95
Πίνακας 2.12. Σύγκριση επίδοσης πρώτης και δεύτερης φάσης 96
Πίνακας 2.13. Σύγκριση επίδοσης πρώτης, δεύτερης και τρίτης φάσης 98
Πίνακας 2.14. Ποσοστά σωστών-λάθος απαντήσεων στην ερώτηση 1.1. 107
Πίνακας 2.15. Παραδείγματα λάθος απαντήσεων στην ερώτηση 1.1 108
Πίνακας 2.16. Παραδείγματα λάθος απαντήσεων στην ερώτηση 1.2. 108
Πίνακας 2.17. Παραδειγματα λάθος απαντήσεων στην ερώτηση 1.3. 109
Πίνακας 2.18. Παραδείγματα λάθος απαντήσεων στην ερώτηση 1.4. 109
Πίνακας 2.19. Ποσοστά σωστών-λάθος απαντήσεων στην ερώτηση 1.5. 110
Πίνακας 2.20. Παραδείγματα λάθος απαντήσεων στην ερώτηση 1.6. 110
Πίνακας 2.21. Ποσοστά σωστών-λάθος απαντήσεων στην ερώτηση 1.7. 111
Πίνακας 2.22. Παραδείγματα λάθος απαντήσεων στην ερώτηση 1.8. 111
Πίνακας 2.23. Ποσοστά λάθος-σωστών απαντήσεων και παραδείγματα λάθών στην ερώτηση 1.9. 112
Πίνακας 2.24. Ποσοστά λάθος-σωστών απαντήσεων και παραδείγματα λαθών στην ερώτηση 1.10 113
Πίνακας 2.25. Ποσοστά σωστών-λάθος απαντήσεων στην ερώτηση 2.1 114
Πίνακας 2.26. Παραδείγματα λάθος απαντήσεων στην ερώτηση 2.1. 114
Πίνακας 2.27. Ποσοστά σωστών-λάθος απαντήσεων στην ερώτηση 2.5. 116
Πίνακας 2.28. Παραδείγματα λάθος απαντήσεων στην ερώτηση 2.6. 117
Πίνακας 2.29. Ποσοστά σωστών-λάθος απαντήσεων στην ερώτηση 2.7. 117
Πίνακας 2.30. Ποσοστά σωστών-λάθος απαντήσεων στην ερώτηση 2.8. 117
Πίνακας 2.31. Παραδείγματα λάθος απαντήσεων στην ερώτηση 2.8. 118
Πίνακας 2.32. Ποσοστά σωστών-λάθος απαντήσεων και παραδείγματα λαθών στην ερώτηση 2.9. 119
Πίνακας 2.33. Ποσοστά σωστών-λάθος απαντήσεων και παραδείγματα λαθών στην ερώτηση 2.10 120
Πίνακας 2.34. Ποσοστά σωστών-λάθος απαντήσεων στην ερώτηση 3.1. 120
Πίνακας 2.35. Ποσοστά σωστών-λάθος απαντήσεων στην ερώτηση 3.2. 121
Πίνακας 2.36. Ποσοστά σωστών-λάθος απαντήσεων στην ερώτηση 3.3. 122
Πίνακας 2.37. Ποσοστά σωστών-λάθος απαντήσεων στην ερώτηση 3.4. 122
Πίνακας 2.38. Ποσοστά σωστών-λάθος απαντήσεων στην ερώτηση 3.5. 123
Πίνακας 2.39. Ποσοστά σωστών-λάθος απαντήσεων στην ερώτηση 3.6. 123

Περίληψη

Η παρούσα έρευνα πραγματοποιήθηκε με στόχο τη διερεύνηση της κατανόησης των εννοιών και διαδικασιών που αφορούν τα κλάσματα σε μαθητές δημοτικού με ήπιες εκπαιδευτικές ανάγκες και τυπική ανάπτυξη. Ζητήθηκε από 187 μαθητές συνολικά να απαντήσουν στις ερωτήσεις τριών αυτοσχέδιων εργαλείων, βασισμένων στα Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών, σε φάσεις ανάλογα με την επίδοσή τους. Τα τεστ είχαν ουσιαστικά έξι μεταβλητές, αφού διέφεραν ως προς τα είδη της γνώσης (εννοιολογικό-διαδικαστικό) και ως προς τους τρόπους αναπαράστασης (σύμβολα, σχήματα, αντικείμενα). Ακολουθήθηκε δηλαδή η αντίστροφη ταξινομία, από το δυσκολότερο προς το ευκολότερο μέσο αναπαράστασης, ώστε να αναδειχθεί το πεδίο στο οποίο συναντώνται οι περισσότερες δυσκολίες. Διαπιστώθηκε ότι τα κλάσματα δυσκολεύουν την πλειονότητα των μαθητών, με τους μαθητές με ήπιες εκπαιδευτικές ανάγκες να αντιμετωπίζουν πρόσθετες δυσκολίες. Γίνεται ιδιαίτερη αναφορά στη σχέση εννοιολογικής-διαδικαστικής γνώσης, στην επίδραση των αναπαραστατικών συστημάτων και στα είδη των λαθών σε κάθε είδος άσκησης.

Λέξεις-Κλειδιά: ήπιες μαθησιακές δυσκολίες, μαθητές δημοτικού σχολείου, κλάσματα, εννοιολογική γνώση, διαδικαστική γνώση, τρόπος αναπαράστασης

Ευχαριστίες

Πριν την παρουσίαση της παρούσας διπλωματικής εργασίας θα ήθελα να ευχαριστήσω όσους με στήριξαν στην προσπάθειά μου αυτή.

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κύριο Ιωάννη Αγαλιώτη, αναπληρωτή καθηγητή του τμήματος Εκπαιδευτικής και Κοινωνικής Πολιτικής του Πανεπιστημίου Μακεδονίας. Του είμαι ευγνώμων για την αρμονική συνεργασία, την καθοδήγηση, τις πολύτιμες συμβουλές, τη γνώση που αποκόμισα σε μεθοδολογικά κυρίως ζητήματα, τη βοήθεια και την πίστη του σε εμένα, ακόμα και όταν εγώ δεν πίστευα στον εαυτό μου. Επίσης, ευχαριστώ τα μέλη της τριμελούς επιτροπής, την κυρία Λευκοθέα Καρτασίδου, αναπληρώτρια καθηγήτρια και την κυρία Βασιλική Γιαννούλη, επίκουρη καθηγήτρια του ίδιου τμήματος.

Σημαντική ήταν και η βοήθεια του διευθυντή Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης Ν. Δράμας, Ανδρέα Σαλπιγγίδη, του Σχολικού Συμβούλου της 4ης Περιφέρειας Ν. Δράμας, Κυριαζή Παρασχίδη και των διευθυντών και εκπαιδευτικών των δημοτικών σχολείων της Δράμας που δέχθηκαν να συμμετέχουν στο ερευνητικό κομμάτι της παρούσας εργασίας. Πάνω από όλα όμως ευχαριστώ τους μαθητές που δέχθηκαν με προθυμία να συμμετέχουν σε όλες τις φάσεις της έρευνας και να αφιερώσουν μέρος του πολύτιμου χρόνου τους.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου και τους φίλους μου, οι οποίοι μοιράστηκαν μαζί μου την αγωνία και τους προβληματισμούς μου. Αποτέλεσαν ένα στήριγμα για την προσπάθεια αυτή και μου έδωσαν το κουράγιο να συνεχίσω. Ιδιαίτερα ευχαριστώ και τους συνοδοιπόρους-συμφοιτητές μου στο πρόγραμμα μεταπτυχιακών σπουδών.

Εισαγωγή

«Οι πέντε στους τέσσερις ανθρώπους
δεν καταλαβαίνουν τα κλάσματα».
Ανώνυμος

Τα κλάσματα αποτελούν μια σύνθετη μαθηματική κατασκευή, η πολυπλοκότητα της οποίας ξεπερνά την αντίληψη των περισσοτέρων ανθρώπων. Αυτή η πολυπλοκότητα των κλασμάτων φαίνεται και στο γεγονός ότι μέχρι πριν κάποια χρόνια η πολύ καλή γνώση τους δε θεωρούνταν προαπαιτούμενο για την είσοδο στην τριτοβάθμια εκπαίδευση. Εντούτοις, σήμερα, τα κλάσματα εμφανίζονται συχνά στην καθημερινή ζωή, με τη μορφή ποσοστών, ρυθμών και αναλογιών (Tucker, 2008). Η πρώτη επαφή των παιδιών με τους κλασματικούς αριθμούς γίνεται πολύ πριν αυτά δεχθούν οποιαδήποτε συστηματική διδασκαλία. Ήδη από την προσχολική τους ηλικία ακούνε φράσεις όπως: «Θα επιστρέψω σε τρία τέταρτα», «Έφαγα τη μισή σοκολάτα» κ.ο.κ. Εντούτοις, η επαφή των παιδιών με τα κλάσματα σε αυτήν την ηλικία δεν προϋποθέτει και την κατανόηση τους, αφού δεν έχουν μια ολοκληρωμένη εικόνα για την έννοια και δεν έρχονται σε επαφή με σύμβολα, ισότητες ή πράξεις με αυτά.

Οι μαθητές αντιμετωπίζουν την τυπική αριθμητική ως μια ξένη γλώσσα όταν τη συναντούν για πρώτη φορά και γι' αυτό χρειάζονται ειδικές διαδικασίες «μετάφρασης» όσων ξέρουν σε αυτήν την καινούργια γλώσσα. Το να μάθει κανείς αριθμητική, λοιπόν, δεν είναι μια διαδικασία που αποκτιέται χωρίς κόπο. Τα παιδιά πριν ακόμα πάνε σχολείο μπορούν να κατανοήσουν τις αρχές του αριθμητικού συμβολισμού, εφόσον αυτές παρουσιαστούν με κατάλληλο τρόπο. Μέσα από παιχνίδια, παραδείγματος χάρη, τα παιδιά αντιλαμβάνονται τη χρησιμότητα των αριθμητικών συμβόλων, αφού διευκολύνουν την επικοινωνία. Όταν όμως ζητείται από τα παιδιά να κατακτήσουν έναν καινούργιο, ελεύθερο πλαισίου, κώδικα τους ζητείται να κάνουν κάτι που έρχεται σε αντίθεση με το φυσικό τρόπο σκέψης (Δημοσθένους, 2012).

Η διαδικασία της μάθησης είναι δυσκολότερη στην περίπτωση των μαθητών με ήπιες εκπαιδευτικές ανάγκες, οι οποίοι παρουσιάζουν περιορισμένες δεξιότητες. Οι περιπτώσεις αυτές αποτελούν ένα πρόβλημα αιχμής για την ελληνική εκπαιδευτική πραγματικότητα, αφού αφορούν χιλιάδες μαθητές, τους γονείς και τους εκπαιδευτικούς τους. Μεγάλος αριθμός μαθητών μάλιστα αποτυγχάνει καθημερινά, στερείται έγκυρης ανίχνευσης των μαθησιακών δυσκολιών ή αποτελεσματικής εκπαιδευτικής στήριξης.

Η παρούσα έρευνα αφορά την αξιολόγηση της κατανόησης μαθητών Ε' και Στ' δημοτικού που φοιτούν σε γενικά τμήματα ή τμήματα ένταξης στη θεματική ενότητα των κλασμάτων. Το δείγμα αποτελείται από παιδιά τυπικής ανάπτυξης και με ήπιες εκπαιδευτικές ανάγκες και εξετάζεται σε έργα σχετικά με τα κλάσματα. Τα ερευνητικά εργαλεία περιλαμβάνουν ερωτήματα που αφορούν την αναπαράσταση, τη σχετικότητα μεγέθους ανάλογα με το σημείο αναφοράς, τον διαμοιρασμό, τη σύγκριση, τη διάταξη, την αναγωγή στην κλασματική μονάδα, τις τέσσερις πράξεις, την ισοδυναμία και την απλοποίηση των κλασμάτων. Η επίδοση εξετάζεται τόσο σε εννοιολογικό όσο και σε διαδικαστικό επίπεδο, ενώ χρησιμοποιούνται διαφορετικοί τρόποι αναπαράστασης της γνώσης (σύμβολο, σχέδιο, αντικείμενα), οι οποίοι καθιστούν τα εργαλεία διαβαθμισμένης δυσκολίας από το δυσκολότερο (σύμβολα) προς το ευκολότερο (αντικείμενα), με κριτήριο επιτυχίας το 75%.

Τα ερευνητικά ερωτήματα είναι τα εξής:

1. Υπάρχει διαφορά στην κατανόηση των κλασμάτων μεταξύ μαθητών τυπικής ανάπτυξης και μαθητών με Η.Ε.Α. ανάλογα με τον **τρόπο αναπαράστασης** (πραξιακός, σχηματικός, συμβολικός);
2. Υπάρχει διαφορά μεταξύ μαθητών τυπικής ανάπτυξης και μαθητών με Η.Ε.Α. στην κατανόηση της εννοιολογικής και της διαδικαστικής γνώσης των κλασμάτων; (**είδη γνώσης**)
3. Υπάρχει διαφορά μεταξύ μαθητών τυπικής ανάπτυξης και μαθητών με Η.Ε.Α. στη **συχνότητα** και στη **φύση** των παρατηρούμενων λαθών;

Στο πρώτο, βιβλιογραφικό, μέρος της εργασίας παρουσιάζεται το θεωρητικό πλαίσιο της έρευνας. Αρχικά, αναφέρονται κάποια χαρακτηριστικά της μαθηματικής και της κλασματικής γνώσης, τα οποία τις καθιστούν δύσκολες για τους μαθητές. Στη συνέχεια, αναλύεται περαιτέρω η έννοια του κλάσματος και οι υποέννοιες της.

Μετά από μία σύντομη αναφορά στην αξιολόγηση, παρατίθενται θεωρίες και έρευνες σχετικά με την εννοιολογική και διαδικαστική γνώση γενικότερα και ειδικότερα στα μαθηματικά. Ακολουθεί η θεματική ενότητα των αναπαραστάσεων, η οποία περιλαμβάνει την έννοια της αναπαράστασης, τις αναπαραστάσεις στα μαθηματικά και τις αναπαραστάσεις στα κλάσματα. Η επόμενη ενότητα αφορά τις συχνότερες δυσκολίες των μαθητών τυπικής ανάπτυξης και των μαθητών με ήπιες εκπαιδευτικές ανάγκες στα μαθηματικά και στα κλάσματα και τα συχνότερα λάθη στη θεματική ενότητα των κλασμάτων. Τέλος, παρατίθενται τα ερευνητικά ερωτήματα και οι υποθέσεις της παρούσας έρευνας, στα οποία θα επιχειρηθεί να δοθούν απαντήσεις.

Στο δεύτερο μέρος περιγράφεται η ερευνητική διαδικασία που πραγματοποιήθηκε για τους σκοπούς της παρούσας εργασίας. Παρουσιάζονται η μεθοδολογία, δηλαδή η ερευνητική στρατηγική, το δείγμα, οι διαδικασίες, τα εργαλεία και οι αναλύσεις της έρευνας. Στη συνέχεια, ακολουθούν τα αποτελέσματα που συγκεντρώθηκαν σε κάθε φάση και η μέθοδος επεξεργασίας τους. Αρχικά, έγινε ένας έλεγχος κανονικότητας της κατανομής και στη συνέχεια διπαραγοντική ανάλυση διακύμανσης ανεξαρτήτων δειγμάτων για τις μεταβλητές φύλο, τάξη, ομάδα, φάσεις και εννοιολογική και διαδικαστική γνώση. Πραγματοποιήθηκε και μία διπαραγοντική ανάλυση διακύμανσης επαναλαμβανομένων μετρήσεων για τις φάσεις 1&2 και για τις φάσεις 1&2&3 ξεχωριστά. Τέλος έγιναν αναλύσεις ανά ερώτηση, ανάλυση παλινδρόμησης μεταξύ εννοιολογικού και διαδικαστικού κομματιού και ποιοτική ανάλυση λαθών με παραδείγματα. Στο τελευταίο μέρος γίνεται μια συζήτηση μεταξύ των παρόντων ευρημάτων και των ευρημάτων άλλων ερευνών και αναλύονται τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τη συζήτηση αυτή. Ακολουθούν οι προτάσεις προς τους εκπαιδευτικούς για τη διδασκαλία των κλασματικών αριθμών και οι περιορισμοί της παρούσας έρευνας. Σε επόμενη ενότητα αναφέρονται κάποια ερωτήματα που ενδεχομένως να λάβουν απαντήσεις μέσα από μελλοντικές έρευνες. Στη συνέχεια, αναγράφονται οι ξενόγλωσσες και οι ελληνόγλωσσες βιβλιογραφικές αναφορές που χρησιμοποιήθηκαν. Τέλος, στο παράτημα, παρατίθενται τα εργαλεία που χρησιμοποιήθηκαν σε κάθε φάση της ερευνητικής διαδικασίας για τη συλλογή των δεδομένων.

1ο Κεφάλαιο
Θεωρητικό μέρος

1.1. Κατηγορίες και χαρακτηριστικά της μαθηματικής γνώσης
1.2. Τα κλάσματα
1.2.1. Η έννοια του κλάσματος
1.2.2. Οι υποέννοιες της έννοιας του κλάσματος
1.3. Αξιολόγηση
1.3.1. Αξιολόγηση στα κλάσματα
1.4. Εννοιολογική και διαδικαστική γνώση
1.4.1. Εννοιολογική και διαδικαστική γνώση στα μαθηματικά
1.4.2. Εννοιολογική και διαδικαστική γνώση στα κλάσματα
1.5. Αναπαραστάσεις
1.5.1. Η έννοια της αναπαράστασης
1.5.2. Αναπαραστάσεις και μαθηματικά
1.5.3. Αναπαραστάσεις και κλάσματα
1.6. Συχνότερες δυσκολίες
1.6.1. Μαθητών τυπικής ανάπτυξης
1.6.2. Μαθητών με ήπιες εκπαιδευτικές ανάγκες
1.6.2.1. Ειδικές μαθησιακές δυσκολίες
1.6.2.2. Νοητική καθυστέρηση
1.6.2.3. Προβλήματα συμπεριφοράς
1.6.2.4. Διαταραχή Ελλειμματικής Προσοχής και Υπερκινητικότητας (ΔΕΠΥ)
1.6.2.5. Αισθητηριακά προβλήματα
1.7. Συχνότερα λάθη
1.7.1. Διαμοιρασμός
1.7.2. Σειροθέτηση
1.7.3. Πρόσθεση-Αφαίρεση
1.7.4. Πολλαπλασιασμός-Διαίρεση
1.7.5. Επικέντρωση στη διαφορά αριθμητή-παρονομαστή
1.8. Ερευνητικά ερωτήματα και υποθέσεις

1.1. Κατηγορίες και χαρακτηριστικά της μαθηματικής γνώσης

«Όταν οι νόμοι των μαθηματικών ανταποκρίνονται στην πραγματικότητα, δεν είναι σαφείς,
και όταν είναι σαφείς, δεν ανταποκρίνονται στην πραγματικότητα».
Αλβέρτος Αϊνστάιν

Η μαθηματική γνώση είναι περίπλοκη και προκειμένου να μελετηθεί ευκολότερα, το περιεχόμενό της έχει κατηγοριοποιηθεί με διάφορους τρόπους, ένας από τους οποίους περιλαμβάνει τις εξής κατηγορίες: (1) διατήρηση και ανάκληση δεδομένων, (2) χρήση αλγορίθμων, (3) μάθηση εννοιών και (4) επίλυση προβλήματος (Orton, 2004). Κάθε μία από τις παραπάνω κατηγορίες προϋποθέτει την ύπαρξη συγκεκριμένων γνωστικών χαρακτηριστικών από πλευράς των μαθητών.

Πιο συγκεκριμένα, η **διατήρηση** και **ανάκληση** δεδομένων (αριθμοί, όροι, σύμβολα, τύποι) προϋποθέτει μακρόχρονη διατήρηση και αυτοματοποιημένη χρήση των πληροφοριών με σκοπό τη λειτουργική χρήση των σχετικών γνώσεων σε σχολικό και πρακτικό πλαίσιο. Επομένως, κάθε νέα γνώση πρέπει να εντάσσεται σε ένα οργανωμένο δίκτυο αλληλένδετων γνώσεων, ώστε να αφομοιωθεί, να κατανοηθεί και να απομνημονευτεί. Τα δεδομένα πρέπει να είναι σαφή ως προς τη σημασία και ως προς τις μεταξύ τους σχέσεις, τις λειτουργίες και τις χρήσεις τους. Πέρα από την αρχική μηχανιστική απομνημόνευση των συμβόλων, έμφαση πρέπει να δίνεται στην κατανόηση και στη συγκρότηση μιας λειτουργικής εννοιολογικής δομής.

Αναφορικά με τη χρήση **αλγόριθμων**, δηλαδή των διαδικασιών που εφαρμόζονται για την επίλυση ενός προβλήματος, απαιτείται μνήμη της ακολουθίας των βημάτων. Οι αλγόριθμοι μπορούν να κατακτηθούν με «εργαλειακή-μηχανιστική κατανόηση», δηλαδή με κανόνες χωρίς λογική, οι οποίοι βέβαια επιβαρύνουν τη μνήμη με ενέργειες που στερούνται νοήματος και δυσκολεύουν την ανάκληση. Παρά τις αδυναμίες της, ωστόσο, αυτού του είδους η κατανόηση προσφέρει άμεση επιτυχία και επομένως θετική ενίσχυση, αφού αν ακολουθηθούν τα βήματα προκύπτει σωστό αποτέλεσμα. Η χρήση αλγορίθμων προϋποθέτει καλές οπτικο-χωρικές ικανότητες, σωστή αντίληψη του συντακτικού

μέρους των αριθμών, έναρξη διαδικασίας και τοποθέτηση αριθμητικών συμβόλων στο σωστό σημείο.

Σχετικά με τη μάθηση **εννοιών**, μπορεί να λεχθεί ότι αυτές αποτελούν το κύριο στοιχείο της συμβολικής δύναμης των μαθηματικών, αφού περιγράφουν μια κανονικότητα ή σχέση και παριστάνονται με ένα σχήμα ή σύμβολο. Αποτελούν μια από τις συχνότερες πηγές δυσκολιών και συχνά την αιτία της χαμηλής επίδοσης (Αγαλιώτης, 2011). Η εννοιολογική ανάπτυξη προκύπτει μόνο μέσω της ενεργούς κατασκευής, από τον ίδιο τον μαθητή, σχέσεων μεταξύ παλαιότερων και νεότερων πληροφοριακών μονάδων. Ο ενεργητικός ρόλος του μαθητή δεν πρέπει σε καμιά περίπτωση να υποβαθμίζεται αλλά αντίθετα να υποβοηθείται και να ενθαρρύνεται από τις συνθήκες που διαμορφώνει ο εκπαιδευτικός τις διδακτικές μεθόδους που επιλέγει και τα θετικά και αρνητικά παραδείγματα που επικαλείται. Λόγω της αλυσιδωτής τους σύνδεσης, οι έννοιες προϋποθέτουν τη σταδιακή διδασκαλία τους, από τις απλούστερες-προϋποτιθέμενες προς τις συνθετότερες-υψηλής τάξης έννοιες.

Τέλος, για την **επίλυση προβλήματος**, προϋποτίθεται γλωσσική, πραγματολογική, στρατηγική, αλγοριθμική γνώση, αλλά και γνώση υποδειγμάτων των προβλημάτων. Λανθασμένες αντιλήψεις, εννοιολογικές ανεπάρκειες και ελλιπής γνώση διαδικασιών δημιουργούν δυσκολία κατασκευής της αναπαράστασης της κατάστασης που αναφέρεται στο πρόβλημα και προκαλούν λανθασμένες απαντήσεις. Η επιτυχής επίλυση προβλήματος επηρεάζεται από την ικανότητα εκτέλεσης πράξεων, το επίπεδο κατάκτησης του μαθηματικού λεξιλογίου και τον βαθμό επιβάρυνσης της βραχυπρόθεσμης μνήμης από τους όρους και την έκταση του προβλήματος. Επίσης, η επίδοση στην επίλυση προβλήματος εξαρτάται από τη μεταγνωστική ικανότητα, τη στάση και τον χαρακτήρα του προβλήματος (καθημερινός-τεχνητός) (Αγαλιώτης, 2000, 28-42).

Όλα τα παραπάνω χαρακτηριστικά της μαθηματικής γνώσης, και οι προϋποθέσεις κατάκτησης των επιμέρους κατηγοριοποιήσεών της, την καθιστούν εξαιρετικά πολύπλοκη και δύσκολη για τους περισσότερους μαθητές. Ιδιαίτερα όμως για τους μαθητές με ήπιες εκπαιδευτικές ανάγκες, οι οποίοι χαρακτηρίζονται από κάποιους περιορισμούς.

1.2. Τα κλάσματα

«Το πλεονέκτημα του να μεγαλώνεις με αδέλφια είναι ότι γίνεσαι πολύ καλός στα κλάσματα».
Robert Brault

1.2.1. Η έννοια του κλάσματος

Τα κλάσματα διαφέρουν από τους φυσικούς αριθμούς στη συμβολική αναπαράσταση και στη διάταξη, αφού τα κλάσματα δεν απαριθμούνται με γνωστούς αλγόριθμους (όπως στους φυσικούς στους οποίους ο επόμενος προκύπτει με την πρόσθεση της μονάδας στον προηγούμενο) και δεν υπάρχουν συγκεκριμένα διαδοχικά κλάσματα, μια και υπάρχουν άπειρα κλάσματα μεταξύ δύο δοθέντων κλασμάτων. Επιπρόσθετα, δεν υπάρχει ένας μοναδικός μικρότερος ρητός αριθμός και τέλος υπάρχουν σημαντικές διαφορές στον τρόπο εκτέλεσης των πράξεων. Το επεξηγηματικό πλαίσιο των φυσικών αριθμών, μάλιστα, περιορίζει την κατάκτηση του πλαισίου των κλασμάτων, προκαλώντας συστηματικές παρανοήσεις, αφού οι μαθητές επιχειρούν να αφομοιώσουν τη νέα γνώση στις ήδη υπάρχουσες εννοιολογικές δομές (Stafylidou & Vosniadou, 2004). Όταν η μάθηση απαιτεί αναδιοργάνωση της δομής της προηγούμενης γνώσης δεν πρέπει να αναμένονται άμεσα αποτελέσματα, ακόμα και μετά το πέρας μιας προσεκτικά οργανωμένης διδασκαλίας. Η εννοιολογική αλλαγή μπορεί να απαιτεί χρόνο, αλλά τα οφέλη της από άποψη κατανόησης καθιστούν την προσπάθεια αξιόλογη (Vamvakoussi & Vosniadou, 2004).

Διαφορές ανάμεσα στους φυσικούς αριθμούς και στα κλάσματα		
	ΦΥΣΙΚΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ	**ΚΛΑΣΜΑ**
ΣΥΜΒΟΛΟ	Ένας αριθμητικό σύμβολο	Περιλαμβάνει δύο φυσικούς αριθμούς που τους χωρίζει μια γραμμή
ΔΙΑΤΑΞΗ	Υποστηρίζεται από την ακολουθία των φυσικών αριθμών (απαρίθμηση) Ύπαρξη επόμενου ή προηγούμενου αριθμού Δεν υπάρχει αριθμός μεταξύ δύο διαδοχικών	Δεν υποστηρίζεται από την ακολουθία των φυσικών αριθμών Ανάμεσα σε δύο αριθμούς υπάρχει πάντα ένας άλλος αριθμός
ΣΧΕΣΗ ΜΕ ΤΗ ΜΟΝΑΔΑ	Η μονάδα είναι ο μικρότερος αριθμός	Δεν υπάρχει μοναδικός μικρότερος αριθμός

ΠΡΟΣΘΕΣΗ/ ΑΦΑΙΡΕΣΗ	Υποστηρίζεται από την ακολουθία των φυσικών αριθμών	Δεν υποστηρίζεται από την ακολουθία των φυσικών αριθμών
ΠΟΛ/ΣΜΟΣ	Μεγαλώνει τον αριθμό	Μεγαλώνει ή μικραίνει τον αριθμό
ΔΙΑΙΡΕΣΗ	Μικραίνει τον αριθμό	Μικραίνει ή μεγαλώνει τον αριθμό

Πίνακας 1.1. Διαφορές ανάμεσα στους φυσικούς και στα κλάσματα

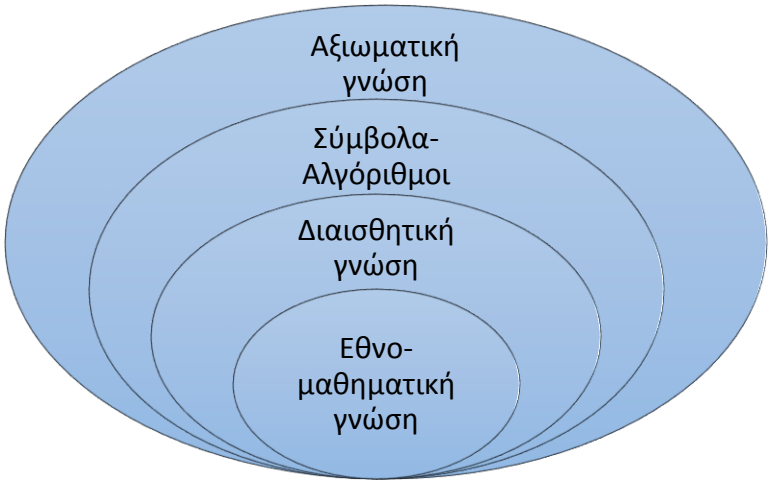
Η «προκατάληψη του φυσικού αριθμού» που υποστηρίζει ότι οι διαφορές των φυσικών και των κλασματικών αριθμών εμποδίζουν τη μάθηση των δεύτερων, χρησιμοποιείται ευρέως για να εξηγήσει τις δυσκολίες των παιδιών με τα κλάσματα (Resnick & Omanson, 1987; Gelman, 1991; Mack, 1995; Stafylidou & Vosniadou, 2004; Ni & Zhou, 2005; Vamakoussi & Vosniadou, 2010). Ωστόσο, ένας άλλος τρόπος να δει κανείς τα δεδομένα, είναι να υποστηρίξει ότι η δυσκολία στην εκμάθηση των κλασμάτων προκύπτει από τη δημιουργία ανακριβών αναλογιών με τους φυσικούς και όχι γενικότερα από την αναζήτηση αναλογιών per se. Η ενθάρρυνση των παιδιών να κάνουν σωστές αναλογίες με τους φυσικούς μπορεί να αυξήσει την κατανόηση την κλασμάτων, αφού αποτελεί έναν από τους πολλούς τομείς στους οποίους επιφανειακές αναλογίες γίνονται ευκολότερα αποδεκτές σε σχέση με λιγότερο εμφανείς, αλλά βαθύτερες (Siegler, Thompson & Schneider, 2011).

Οι Siegler, Thompson και Schneider (2011), προτείνουν μια μεικτή θεωρία για την κατάκτηση της γνώσης των φυσικών αριθμών και των κλασμάτων, αντίθετη με αυτή της «προκατάληψης του φυσικού αριθμού». Υποστηρίζουν πως τα δύο είδη αριθμών, αν και διαφέρουν σε τόσους τομείς, ώστε να επηρεάζεται η ανάπτυξή τους, ωστόσο παρουσιάζουν μία σημαντική ομοιότητα, τη γνώση των αριθμητικών μεγεθών, κεντρική για την κατανόηση και των δύο ειδών αριθμών. Σε έρευνα με εντεκάχρονους και δεκατριάχρονους μαθητές, αναδείχθηκε ότι, όπως και με τους φυσικούς αριθμούς, έτσι και με τα κλάσματα, η ακρίβεια στην αναπαράσταση του μεγέθους των κλασμάτων σχετίζεται στενά με την ευχέρεια στη χρήση των κλασμάτων και με γενικότερα αποτελέσματα σε τεστ ελέγχου της μαθηματικής επίδοσης. Επίσης, προέκυψε ότι η διακύμανση της επάρκειας δεν μπορούσε να εξηγηθεί μόνο από την επάρκεια στα κλάσματα και ότι οι αναπτυσσόμενες αποτελεσματικές στρατηγικές παίζουν έναν σημαντικό ρόλο στην βελτιωμένη κλασματική γνώση.

Η βαθιά εννοιολογική κατανόηση μιας μαθηματικής έννοιας προϋποθέτει τις ικανότητες: (1) αναγνώρισης της έννοιας σε ποικιλία αναπαραστάσεων της, (2) ευέλικτου χειρισμού της έννοιας ανάμεσα στις ποιοτικά διαφορετικές αναπαραστάσεις της και (3) μετάφρασης της έννοιας από τη μία μορφή αναπαράστασης σε κάποια άλλη. Η τελευταία ικανότητα αφορά την αμφίδρομη μετάφραση ανάμεσα στη μαθηματική συμβολική αναπαράσταση και στην αναπαράσταση ενσωμάτωσης (Γαγάτσης, Ιωάννου, Σιημητρά-Κωνσταντίνου, & Χριστοδουλίδου, 2006).

Ο Kieren (1988) παρουσιάζει ένα θεωρητικό μοντέλο για την κατανόηση της έννοιας των ρητών αριθμών. Το μοντέλο αυτό συνίσταται σε τέσσερις ομόκεντρους δακτυλίους (Ορφανός, 2003):

a. Εσωτερικός δακτύλιος: βασική γνώση που αποκτά κανείς ζώντας σε ένα ορισμένο περιβάλλον, δηλαδή η εθνομαθηματική. Δεν είναι γνώση που αποκτά κανείς στο σχολείο και δεν μπορεί να χαρακτηρισθεί ότι είναι μαθηματική. Τα μόνα γνωστά κλάσματα είναι τα ½ , ¼ , και 1/3.
b. Δεύτερος δακτύλιος: διαισθητική γνώση. Η γνώση που αποκτάται στο σχολείο και συνδέεται με την καθημερινή μας εμπειρία (π.χ. να μοιρασθεί μια πίτσα σε φίλους).
c. Τρίτος δακτύλιος: τεχνική συμβολική διάλεκτος, η οποία περικλείει σύμβολα και αλγόριθμους.
d. Εξωτερικός δακτύλιος: αξιωματική γνώση του σώματος των ρητών αριθμών, η οποία διδάσκεται σε παιδιά μεγαλύτερα των 15 ετών.



Διάγραμμα 1.1. Θεωρητικό μοντέλο για την κατανόηση της έννοιας των ρητών αριθμών

Ένας καλός γνώστης του σώματος των ρητών αριθμών είναι ικανός να κινείται μεταξύ των δακτυλίων πηγαίνοντας από οποιονδήποτε σε οποιονδήποτε δακτύλιο. Επομένως, η πλήρης κατανόηση όλων των εννοιολογικών μορφών του κλάσματος λαμβάνει χώρα στο ανώτερο επίπεδο της γνωστικής θεωρίας του Piaget, δηλαδή στο επίπεδο των τυπικών ενεργειών. Σε αυτό το επίπεδο, επικρατούν οι νοητικές ενέργειες, οι οποίες είναι πράξεις, οι οποίες είναι πράξεις γιατί εκτελούνται πάνω σε αντικείμενα πριν εκτελεστούν σε σύμβολα. Με λίγα λόγια, οι νοητικές πράξεις δημιουργούνται από τον χειρισμό των αντικειμένων, ενώ διατηρούνται και αναπτύσσονται όσο συνεχίζεται αυτή η επαφή.

Σε όλη την διάρκεια της αναπτυξιακής αυτής διαδικασίας, οι νοητικές ενέργειες χρειάζονται περιβαλλοντική υποστήριξη, επομένως, ο ρόλος του περιβάλλοντος είναι αναπόσπαστος με την πλήρη κατανόηση της έννοιας του κλάσματος. Η περιβαλλοντική υποστήριξη που χρειάζονται οι νοητικές ενέργειες γίνεται με την βοήθεια της οπτικοποίησης των πληροφοριών. Η οπτικοποίηση είναι απαραίτητη, καθώς ερμηνεύει και σχηματοποιεί τις πληροφορίες του προβλήματος με σαφήνεια, επιτρέπει την κατανόηση των διαφόρων περιορισμών που ισχύουν σε προβλήματα που έχουν μεγάλο πλήθος συσχετισμένων πληροφοριών και προσφέρει βοηθήματα, ώστε να ελαττωθεί το φορτίο μνήμης (Ορφανός, 2003).

1.2.2. Οι υποέννοιες της έννοιας του κλάσματος

Τα μαθηματικά, σύμφωνα με την εκπαιδευτική παράδοση, έχουν μια απολύτως ιεραρχημένη δομή, στην οποία όλες οι νέες έννοιες ακολουθούν λογικά προηγουμένως αποκτηθείσες έννοιες. Εντούτοις, τα συστηματικά λάθη των παιδιών, που παρατηρούνται σε σχετικές έρευνες, δείχνουν ότι υπάρχουν περιπτώσεις όπου η ιεραρχημένη αυτή δομή αναιρείται. Ενώ υπάρχουν μαθηματικές έννοιες που η απόκτησή τους υποβοηθείται από την προηγούμενη γνώση, υπάρχουν και έννοιες στις οποίες η προϋπάρχουσα γνώση δημιουργεί εμπόδια στην πρόσκτησή τους. Η εξεταζόμενη έννοια αποτελεί παράδειγμα μαθηματικής έννοιας, στην οποία η προϋπάρχουσα γνώση δεν βοηθά τα παιδιά να αποκτήσουν την νέα, αφού τα κλάσματα προϋποθέτουν από τα παιδιά την αναδόμηση των ιδεών τους για την έννοια του αριθμού (Σταφυλίδου, 2001).

Από πρακτική άποψη, η ικανότητα αποτελεσματικού χειρισμού των κλασμάτων, βελτιώνει την ικανότητα κατανόησης και χειρισμού προβλημάτων της καθημερινής ζωής. Από ψυχολογική άποψη, καθώς παρέχουν στους μαθητές τη δυνατότητα να αναπτύξουν και να επεκτείνουν νοητικές δομές, οι οποίες είναι απαραίτητες για τη συνεχή πνευματική ανάπτυξη των μαθητών. Και από μαθηματική άποψη, αφού η κατανόηση τους αποτελεί το θεμέλιο λίθο, πάνω στον οποίο βασίζονται οι στοιχειώδεις αλγεβρικές πράξεις (Behr, Lesh, Post & Silver, 1983). Εντούτοις, παρά τη σημασία τους, οι ρητοί αριθμοί αποτελούν, όπως επισημαίνεται ερευνητικά, μια από τις πιο περίπλοκες μαθηματικές έννοιες που συναντούν οι μαθητές τόσο στην πρωτοβάθμια όσο και στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση (Δεληγιάννη, Γαγάτσης, Αμπράζης, Παναούρα, Ηλία, Καρανίκκης, & Χρυσοστόμου, 2008). Σε έρευνα των Contreras και Martinez-Cruz (2001) προέκυψε ότι μόνο το 28% των εκπαιδευτικών μπορούσαν να δώσουν μια ρεαλιστική απάντηση στο πρόβλημα με τη διαίρεση κλασμάτων που τους είχε δοθεί και μόνο το 6% ήταν σε θέση να δικαιολογήσει την απάντησή του. Κανένας μάλιστα δε σχολίασε την προβληματική φύση του προβλήματος που τους είχε δοθεί.

Τα κλάσματα, λοιπόν, αποτελούν μια από τις πιο σημαντικές και ταυτόχρονα πιο πολύπλοκες έννοιες στη διδασκαλία των Μαθηματικών. Ο Pluvinage (1988), μάλιστα αναρωτιέται κατά πόσο είναι αναγκαίο να διδάσκονται, αφού πλέον στις οθόνες των διαφόρων ηλεκτρονικών μέσων που χρησιμοποιούμε στην καθημερινότητά μας εμφανίζονται μόνο δεκαδικοί αριθμοί. Ωστόσο, όπως αναφέρει ο ίδιος παρακάτω, πρέπει να αντισταθούμε στην τάση να σταματήσουμε ή να καθυστερήσουμε τη διδασκαλία των κλασμάτων, γιατί τα κλάσματα εκφράζουν έννοιες που προηγούνται με φυσικό τρόπο αυτών που εκφράζονται με δεκαδική μορφή (Γαγάτσης, Ιωάννου, Σιημητρά-Κωνσταντίνου, & Χριστοδουλίδου, 2006).

Ένα μεγάλο μέρος του αναλυτικού προγράμματος των μαθηματικών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης αφορά τη διδασκαλία των θετικών ρητών αριθμών. Αν και οι ρητοί αριθμοί αποτελούν θεμελιώδη μαθηματική έννοια, η οποία μάλιστα είναι δύσκολο να κατανοηθεί από τους μαθητές, παρά την έμφαση που δίνεται σε αυτούς στα αναλυτικά προγράμματα. Η παραπάνω θέση προκύπτει από τις επιδόσεις των μαθητών σε σχετικές ασκήσεις αλλά και από τα αποτελέσματα ερευνητικών εργασιών. Οι δυσκολίες των μαθητών με τα κλάσματα οφείλονται

αφενός στη φύση του αντικειμένου και αφετέρου στον τρόπο διδασκαλίας του (Γαγάτσης, Ιωάννου, Σιημητρά-Κωνσταντίνου, & Χριστοδουλίδου, 2006).

Έχοντας ως θεωρητικό υπόβαθρο το αθροιστικό μοντέλο ανάπτυξης της γνώσης, μπορεί κανείς να υποστηρίξει ότι η κατανόηση της έννοιας του κλάσματος ισοδυναμεί με την κατανόηση κάποιων υποεννοιών (subconcepts), οι οποίες θεωρούνται αναγκαίες για μια συνολική κατανόηση του κλάσματος (Σταφυλίδου, 2001). Η διδασκαλία των κλασμάτων, λοιπόν, καθίσταται πολύπλοκη καθώς πρέπει να βασίζεται στο θεωρητικό μοντέλο που περιλαμβάνει διάφορες διαστάσεις της έννοιας. Ακολουθούν κάποιες κατηγοριοποιήσεις που προτάθηκαν από διάφορους ερευνητές σε χρονολογική σειρά:

Αρχικά, οι Behr, Lesh, Post και Silver (1983), έχουν προτείνει τις παρακάτω επτά υποέννοιες-νοητικές υποκατασκευές των κλασμάτων (Σταφυλίδου, 2001):

- Κλασματικό μέτρο: το μέρος μιας ποσότητας σε σχέση με την ιδιαίτερη μονάδα αυτής της ποσότητας, δηλαδή ο μετασχηματισμός της έννοιας του μέρους-όλου.
- Αναλογία
- Λόγος: ορίζει μια νέα ποσότητα ως σχέση δύο άλλων ποσοτήτων. Αυτό που διακρίνει το λόγο από την αναλογία είναι ότι οι λόγοι προστίθενται ενώ οι αναλογίες όχι.
- Πηλίκο: ο ρητός αριθμός ως αποτέλεσμα διαίρεσης
- Γραμμική συντεταγμένη: σημείο στην ευθεία των πραγματικών αριθμών
- Δεκαδικός: έμφαση στις ιδιότητες του δεκαδικού αριθμητικού συστήματος
- Τελεστής: το κλάσμα ως μετασχηματισμός

Ακολουθώντας την κονστρουκτιβιστική παράδοση μια άλλη ερευνήτρια, η Nesher (1985, 1989), υποστηρίζει ότι η χρήση φυσικών αντικειμένων βοηθά στην κατανόηση της έννοιας του κλάσματος από το παιδί, το οποίο και βαθμιαία ανεξαρτητοποιείται από αυτά. Η Nesher προτείνει μια ανάλυση των κλασμάτων στις εξής τέσσερις έννοιες (1) κλάσμα-σχέση μέρους ενός όλου, (2) κλάσμα-αναλογία, (3) κλάσμα-τελεστής και (4) κλάσμα-πιθανότητα.

Από την άλλη, και η Kieren (1988) διακρίνει επτά διαφορετικές ερμηνείες των ρητών αριθμών, που είναι (1) κλάσματα που μπορούμε να τα συγκρίνουμε, να τα προσθέτουμε, να τα αφαιρούμε, κ.α., (2) δεκαδικά κλάσματα, που σχηματίζουν

μια φυσική επέκταση των ακεραίων αριθμών στο αριθμητικό σύστημα, (3) κλάσεις ισοδυναμίας των κλασμάτων. (4) αριθμοί της μορφής p/q, όπου τα p, q είναι ακέραιοι με q≠0, δηλαδή λόγοι, (5) πολλαπλασιαστικοί τελεστές, (6) στοιχεία ενός απειροστού διατεταγμένου σώματος, δηλαδή ενός συνόλου πηλίκων, αριθμοί της μορφής x = p/q, όπου το x ικανοποιεί την εξίσωση qx=p και (7) μέτρα ή σημεία της ευθείας των αριθμών.

Ο Ohlsson (1988) από την πλευρά του, αναφέρει ότι το σημαντικό δεν είναι να διακρίνουμε απλά τις υποέννοιες αλλά να δούμε πώς αυτές συνδέονται και σε ποιο πλαίσιο. Πιο συγκεκριμένα, πιστεύει ότι απαραίτητο στοιχείο για την ανάπτυξη μιας θεωρίας αποτελεί η αναγνώριση των σχέσεων ανάμεσα στις διαφορετικές ερμηνείες του κλάσματος. Προσπαθώντας να προσδιορίσει μια δομή των ερμηνειών του κλάσματος και να απαντήσει στο ερώτημα ποια είναι τα όρια του συνόλου αυτών των ερμηνειών, προτείνει ότι η ερμηνεία του κλάσματος είναι μια συνάρτηση της ερμηνείας του αριθμητή και του παρονομαστή, και εφόσον και οι δυο αυτοί είναι ακέραιοι αριθμοί, θα μπορούσαν να ερμηνεύονται είτε ως ποσότητες είτε ως παράμετροι πράξεων. Συνεπώς, τα κλάσματα μπορούν να έχουν τέσσερις βασικές ερμηνείες: (1) Όταν και οι δύο αριθμοί ερμηνεύονται ως ποσότητες, τότε το κλάσμα εκφράζει μια *σύγκριση*, δηλαδή η μια ποσότητα περιγράφεται σε σχέση με μια άλλη ποσότητα. (2) Σε περίπτωση που ο αριθμητής ερμηνεύει μια ποσότητα και ο παρονομαστής μια παράμετρο, το κλάσμα αντιστοιχεί στην ιδέα του *μερισμού*. (3) Στην τρίτη περίπτωση, όπου και οι δύο αριθμοί ερμηνεύονται ως παράμετροι, το κλάσμα αντιστοιχεί στην ιδέα των *σύνθετων πράξεων*, αφού ο αριθμητής είναι πολλαπλασιαστής και ο παρονομαστής είναι διαιρέτης, ενώ και οι δυο εφαρμόζονται στην ίδια ποσότητα. (4) Τέλος, όταν ο αριθμητής ερμηνεύεται ως μια παράμετρος και ο παρονομαστής ως μια ποσότητα, το κλάσμα είναι *αδύνατον* να ερμηνευτεί.

Οι υπόλοιπες ερμηνείες των κλασμάτων, κατά τον Ohlsson, αποτελούν ειδικές περιπτώσεις των παραπάνω ερμηνειών. Έτσι, η αναλογία αποτελεί ένα είδος σύγκρισης, το ίδιο και ο λόγος δύο αριθμών. Ο ερευνητής αυτός, τονίζει τη σημασία την οποία έχουν οι καθημερινές καταστάσεις εφαρμογής των κλασμάτων και επισημαίνει την αναγκαιότητα αντιστοίχισης των καθημερινών καταστάσεων με τα κλάσματα. Τα παιδιά δυσκολεύονται να κατανοήσουν ότι ο αριθμητής και ο

παρονομαστής ενός κλάσματος, που είναι δυο αριθμοί που έχουν νόημα καθαυτοί, σχετίζονται και ορίζουν έναν νέο αριθμό, ο οποίος διαφέρει τόσο στον συμβολισμό όσο και στη σημασία του από τους αρχικούς. Ακόμη περισσότερα προβλήματα δημιουργούνται επειδή χρησιμοποιείται το ίδιο μαθηματικό σύμβολο για τις διαφορετικές εκφράσεις, που έχουν σχέση αλλά εν μέρει μόνο συμπίπτουν με τον κλασματικό αριθμό (Σταφυλίδου, 2001).

Τέλος, η Marshall (1993), δίνει μια πιο αναλυτική, και ίσως χρήσιμη, άποψη για τις όψεις του ρητού και του κλάσματος. Ενδεικτικά οι πέντε διαστάσεις του κλάσματος είναι (Γαγάτσης, Ιωάννου, Σιημητρά-Κωνσταντίνου, & Χριστοδουλίδου, 2006; Σταματόπουλος, 2011; Κυριώτη, 2014):

- Το κλάσμα ως <u>μέρος όλου</u> (part-whole): κατάσταση στην οποία μια συνεχής ποσότητα ή ένα σύνολο διακριτών αντικειμένων διαμερίζεται σε ίσα μέρη. Το κλάσμα αναπαριστά μια σύγκριση μεταξύ ενός αριθμού μερών μιας μονάδας, η οποία έχει διαμεριστεί, και του συνολικού αριθμού μερών στα οποία η μονάδα έχει διαμεριστεί. Ο αριθμητής του κλάσματος πρέπει να είναι μικρότερος ή ίσος με τον παρονομαστή και στην ερμηνεία αυτή εμπεριέχεται η έννοια της συμπερίληψης κλάσης. Βασίζεται τόσο σε συνεχείς όσο και σε διακριτές ποσότητες, ενώ συχνά αναπαρίσταται ως μέρος μιας επιφάνειας ενός γεωμετρικού σχήματος, χωρισμένης σε ομοιόμορφα τμήματα ή ως μέρος ενός συνόλου αντικειμένων. Για την ανάπτυξη των αρχικών κλασματικών εννοιών οι συνεχείς ποσότητες θεωρούνται πιο κατάλληλες από τα σύνολα διακριτών αντικειμένων, αλλά η ερμηνεία γεωμετρικών περιοχών για την αναπαράσταση της σχέσης μέρους-όλου προϋποθέτει κάποια κατανόηση της έννοιας του εμβαδού. Επομένως, το κλάσμα ως μέρος επιφάνειας αποτελεί συνήθως και την πρώτη επαφή των παιδιών με τα κλάσματα, ενώ συνήθως ακολουθεί η διδασκαλία του κλάσματος ως μέρος ενός συνόλου αντικειμένων. Για την κατανόηση αυτής της ερμηνείας εκτός από τη διαμέριση, απαιτείται και η κατανόηση της μοναδοποίησης και της εκ νέου μοναδοποίησης, δηλαδή της σύνθεσης της ακέραιας μονάδας από τα μέρη της και της ανασύνθεσης των μερών για τη δημιουργία νέας μονάδας, αντίστοιχα (Baturo, 2004). Ως πλεονεκτήματα της ερμηνείας αυτής αναφέρονται: (1) η χρήση σε ένα ευρύ φάσμα υλικών και καταστάσεων από το οικείο περιβάλλον των μαθητών, (2) η

δημιουργία δραστηριοτήτων κατανόησης εννοιών (κλασματική μονάδα, ισοδυναμία, διάταξη, πολλαπλασιασμός κλασμάτων) και (3) η προσέγγιση της πρόσθεσης και αφαίρεσης ομώνυμων κλασμάτων με συνεχή μέσα. Στα μειονεκτήματα αναφέρονται: (1) ο περιορισμός και (2) η εξάρτηση από την ακέραια μονάδα και κατά συνέπεια (3) η δυσκολία αντίληψης του κλάσματος ως αριθμού.

- Το κλάσμα ως λόγος (ratio): δηλαδή ως σύγκριση-σχέση μεταξύ δύο ποσοτήτων, παρά ως αριθμός. Περιγράφει τη σχέση μεταξύ δύο μεγεθών, τα οποία μπορεί να είναι ομοειδή ή ετερογενή και εμπεριέχει την έννοια της σταθερότητας και της συμμεταβολής. Ως προ-απαιτούμενη γνώση θεωρείται η έννοια των σχετικών ποσών και η κατανόηση ότι οι δύο ποσότητες που βρίσκονται σε σχέση αναλογίας, αλλάζουν μαζί (πολλαπλασιάζονται ή διαιρούνται), ώστε η σχέση τους να παραμένει πάντα σταθερή. Από μαθηματική σκοπιά, αναφερόμαστε σε δύο χώρους μέτρησης, οι οποίοι μπορούν να συνδεθούν είτε με μία «μεταξύ» των χώρων στρατηγική, οπότε και αναφερόμαστε σε λόγο υπό μορφή ρυθμού μεταβολής, είτε με μια «εντός» του ίδιου χώρου στρατηγική, οπότε και αναφερόμαστε σε «εσωτερικό» λόγο. Η ερμηνεία των ρητών ως λόγων μπορεί να ενισχύσει την κατανόηση της έννοιας της ισοδυναμίας και κατ' επέκταση στην εύρεση ισοδύναμων κλασμάτων, που εμπλέκονται στις πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης κλασμάτων. Ο ρόλος της έννοιας της διαμέρισης εδώ δεν είναι το ίδιο σαφής, οπότε δε μπορεί να λειτουργήσει σε συνεχή μέσα και είναι κατάλληλη μόνο για την εισαγωγή στην εξεταζόμενη έννοια. Η ερμηνεία αυτή είναι σημαντική για την κατανόηση της ισοδυναμίας των κλασμάτων και την κατανόηση των διάφορων αναπαραστάσεων του ρητού αριθμού ως κλάσματος, δεκαδικού και ποσοστού. Στις διάφορες εφαρμογές των λόγων εντάσσονται η έκφραση ενός νέου μεγέθους ή έννοιας, που προκύπτει από τη σύγκριση δύο μεγεθών ή ποσοτήτων, η γραφική αναπαράσταση σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, η έκφραση της κλίσης ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και η γραφική επίλυση προβλημάτων ή με τη βοήθεια αναλογιών με έναν άγνωστο όρο.
- Το κλάσμα ως μέτρο-μέτρηση (measure): εκφράζεται μέσω της αριθμητικής γραμμής, δηλαδή της έννοιας του αριθμού ως μέτρο, ως απόσταση, όταν οι

ρητοί χρησιμοποιούνται για να αποδοθεί ένα αριθμητικό μέτρο σε διαστήματα, επιφάνειες ή τρισδιάστατα αντικείμενα. Οι ρητοί αναπαρίστανται ως σημεία ή διανύσματα στην αριθμογραμμή και χαρακτηρίζουν την απόσταση των σημείων από το μηδέν, με βάση κάποια μονάδα μέτρησης. Το κλάσμα παρουσιάζεται, λοιπόν, ως ένα σημείο πάνω στην αριθμητική γραμμή μεταξύ δύο ακεραίων. Η δεξιότητα αυτή είναι πολύ χρήσιμη για την εννοιολογική κατανόηση των κλασμάτων, εντούτοις καθίσταται αρκετά αφηρημένη για τους μαθητές. Πάνω στην αριθμητική γραμμή μπορούν να αναπαρασταθούν θεμελιώδεις έννοιες των κλασματικών αριθμών, όπως η πυκνότητα, η διαδοχικότητα, η μοναδικότητα και το άπειρο των κλασματικών αριθμών. Η μονάδα μέτρησης της αριθμητικής γραμμής, μπορεί να διαιρείται συνεχώς σε μικρότερες μονάδες, παρουσιάζοντας διαφορετικά ονόματα στα κλάσματα. Όταν διαφορετικές μονάδες καλύπτουν την ίδια απόσταση, παρουσιάζεται το φαινόμενο της ισοδυναμίας των κλαμάτων. Με λίγα λόγια, η αριθμητική γραμμή επιλύει το πρόβλημα των ενδιάμεσων αριθμών αφού αναπαριστά το κλάσμα που βρίσκεται ανάμεσα στα δύο αρχικά κλάσματα. Θεωρείται ότι οι μαθητές κατανοούν την ερμηνεία του κλάσματος ως μέτρο όταν είναι σε θέση να πραγματοποιήσουν οποιαδήποτε ισοδιαμέριση, να βρουν οποιοδήποτε αριθμό κλασμάτων μεταξύ δύο δοθέντων κλασμάτων, να συγκρίνουν οποιαδήποτε κλάσματα, να διατάσσουν κλάσματα και να υπολογίζουν ισοδύναμα κλάσματα. Δομικά στοιχεία-έννοιες της ερμηνείας αυτής αποτελούν η διαμέριση και η μοναδοποίηση, η μονάδα αναφοράς/μέτρησης, η οποία επιλέγεται αυθαίρετα και η αριθμογραμμή, δηλαδή ο βασικός τρόπος αισθητοποίησης της έννοιας. Επιπλέον, σε αυτήν την ερμηνεία διαφοροποιείται η έννοια της διαμέρισης, αφού υπάρχουν περισσότερες της μίας διαμερίσεις της μονάδας (Yanik et al., 2008). Σε πρόσφατη έρευνα (Noparit & Saengpun, 2013) προέκυψε ότι η χρήση της αριθμογραμμής βελτίωσε την μάθηση και τη σκέψη των μαθητών αφού ο αναλογικός τρόπος σκέψης αποτελεί την πιο περίπλοκη πτυχή των μαθηματικών του δημοτικού σχολείου. Η ερμηνεία αυτή των κλασματικών αριθμών είναι κατάλληλη αποκλειστικά για συνεχή μέσα και κρίνεται σημαντική για την κατανόηση της πρόσθεσης κλασμάτων και την επίλυση προβλημάτων.

- Το κλάσμα ως διαίρεση-πηλίκο (quotient): το κλάσμα ως αποτέλεσμα της διαίρεσης του αριθμητή διά του παρονομαστή, δηλαδή ως πηλίκο. Οι μαθητές καλούνται να κατανοήσουν το ρόλο του διαιρετέου και του διαιρέτη και το γεγονός ότι ο διαιρετέος αναφέρεται στον αριθμό των αντικειμένων που θα μοιραστούν ενώ ο διαιρέτης, στον αριθμό των ίσων κομματιών/ατόμων που θα μοιραστεί το κάθε αντικείμενο. Δηλαδή, η έννοια του πηλίκου βασίζεται στην έννοια της ισοδιαμέρισης μιας απλής ή σύνθετης μονάδας, πλαίσιο μέσα στο οποίο αποκτά νόημα ο ρητός ως πηλίκο. Η ισοδιαμέριση είναι μια διαδικασία μέσα από την οποία προκύπτουν τα κλάσματα, μια διαδικασία διαίρεσης ενός ή περισσότερων αντικειμένων σε έναν αριθμό ξεχωριστών μεριδίων που δεν επικαλύπτονται, έχουν το ίδιο μέγεθος (ανεξάρτητα από το σχήμα τους) και εξαντλούν το όλο. Ενώ αν η μονάδα είναι σύνθετη, δηλαδή αποτελείται από περισσότερα από ένα αντικείμενα, αυτά πρέπει να έχουν το ίδιο μέγεθος. Τα ίσα μερίδια μπορεί να είναι μικρότερα, ίσα ή μεγαλύτερα από τη μονάδα και συνεπώς ο αριθμητής μπορεί να είναι μικρότερος, ίσος ή μεγαλύτερος από τον παρονομαστή, άρα η ερμηνεία των ρητών ως πηλίκο οδηγεί στα καταχρηστικά κλάσματα. Αυτή η ερμηνεία σχετίζεται και με τις αλγεβρικές ιδιότητες των ρητών. Οι καταστάσεις διαίρεσης χωρίζονται σε δύο τύπους, σε αυτές που απαιτούν διαμέριση/μοίρασμα (ισόποση κατανομή μιας δοθείσας ποσότητας σε έναν αριθμό ατόμων ή αποδεκτών) και σε αυτές που απαιτούν τμηματοποίηση/μέτρηση (κατανομή μιας ποσότητας σε ίσα μέρη, το μέγεθος των οποίων είναι προκαθορισμένο). Οι δύο αυτές καταστάσεις διαίρεσης είναι αμφίδρομες, αφού η εφαρμογή της μιας επιφέρει αυτόματα και την εφαρμογή της άλλης (Thompson & Saldanha, 2003). Τα πλεονεκτήματα της ερμηνείας αυτής είναι (1) η λειτουργία της τόσο σε συνεχή όσο και σε διακριτά μέσα και (2) η παροχή καλύτερης κατανόησης για τη σύγκριση και την ισοδυναμία. Στα μειονεκτήματα εντάσσονται το γεγονός ότι ο αριθμός που προκύπτει είναι το πηλίκο της διαίρεσης, οπότε δεν είναι απαραίτητα φυσικός και δεν είναι πάντα μικρότερος από τη μονάδα, ενώ οι όροι του κλάσματος δεν αναφέρονται κατ' ανάγκη στο ίδιο μέγεθος ή μονάδα.
- Το κλάσμα ως πολλαπλασιαστής-τελεστής (operator): το κλάσμα νοείται ως μία συνάρτηση που εφαρμόζεται σε αντικείμενα (αριθμούς, συλλογές διακριτών

αντικειμένων, γεωμετρικά σχήματα) και τα μετασχηματίζει ως προς κάποιο μέγεθος, δηλαδή λειτουργεί ως ένας μηχανισμός πολλαπλασιαστικής αντιστοίχισης μεταξύ δύο συνόλων ή επιφανειών. Επιπλέον, εμφανίζεται ως σύνθεση δύο πολλαπλασιαστικών συναρτήσεων ή ως δύο συναρτήσεις που εφαρμόζονται διαδοχικά και βοηθά στην κατανόηση του πολλαπλασιασμού των κλασμάτων. Η μετασχηματιστική λειτουργία έχει δύο ερμηνείες, τη μεγέθυνση-σμίκρυνση σε περίπτωση συνεχών μέσων και τον πολλαπλασιασμό-διαίρεση, σε περίπτωση διακριτών μέσων. Αυτό σημαίνει, επίσης, ότι προηγείται ο πολλαπλασιασμός ή η μεγέθυνση ενός αριθμού με τον αριθμητή του κλάσματος, πριν τη διαίρεση ή σμίκρυνση με τον παρονομαστή (π.χ. 4*3/5=4X3 και στη συνέχεια 12:5). Τέλος, αφορά τη γνώση ότι το γινόμενο των κλασμάτων, σε αντίθεση με το γινόμενο ακεραίων, μπορεί να δίνει αποτέλεσμα μικρότερο από τους παράγοντες που πολλαπλασιάζονται. Ενώ, το πηλίκο των κλασμάτων, σε αντίθεση με το πηλίκο ακεραίων, μπορεί να δίνει αποτέλεσμα μεγαλύτερο από τον διαιρετέο και τον διαιρέτη. Η συγκεκριμένη ερμηνεία λειτουργεί σε συνεχή και διακριτά μέσα και θεωρείται κατάλληλη για την κατανόηση της ισοδυναμίας, της σύγκρισης και του πολλαπλασιασμού.

Η πλήρης κατανόηση των ρητών αριθμών απαιτεί αφενός την κατανόηση κάθε μιας από τις πέντε παραπάνω ερμηνείες-διαστάσεις και αφετέρου του τρόπου με τον οποίο αυτές συσχετίζονται. Όλες οι ερμηνείες δεν παρέχουν το ίδιο βαθιά κατανόηση και καμιά ερμηνεία δεν είναι πανάκεια. Κάποιες από τις συνδέσεις δε συμβαίνουν αυθόρμητα και απαιτούν διδασκαλία. Εντούτοις, ακόμα και η καλύτερη διδασκαλία που θα εμπεριείχε και τις πέντε υποέννοιες δε θα επαρκούσε για τη βαθιά κατανόηση των ρητών αριθμών (Lamon, 2005, 225-229).

Επιπλέον, απαιτείται η κατανόηση της έννοιας της μοναδοποίησης, δηλαδή της γνωστικής ανάθεσης μιας μονάδας μέτρησης σε μια δοθείσα ποσότητα. Η έμφαση όμως στην μέρος-όλου ερμηνεία και η παρουσίαση της με το μοντέλο του εμβαδού χωρίς την κατανόηση της ισοδυναμίας των μερών και της έννοιας της μονάδας, οδηγεί σε δυσκολία κατανόησης της έννοιας της μοναδοποίησης. Επίσης, σημαντική κρίνεται η κατανόηση της ποσοτικής αντίληψης του αριθμού και των πολλαπλών αναπαραστάσεων που προκύπτουν από τις διάφορες ερμηνείες του. Οι μαθητές πρέπει να κατανοούν πως η διάταξη των αριθμών μπορεί να γίνει σε

συμβολικό επίπεδο, ως σημεία στην αριθμογραμμή και ως προς το σχετικό ή απόλυτο μέγεθός τους. Συγκεκριμένα, η σύγκριση και η διάταξη κλασμάτων καθίσταται πολύ πιο σύνθετη, αφού απαιτεί συσχέτιση των όρων του κλάσματος και τη διαφοροποίηση των στρατηγικών. Βασικές μέθοδοι σύγκρισης κλασμάτων είναι η αναπαραστατική μέθοδος, η μέθοδος της διαίρεσης των όρων του κλάσματος, η μετατροπή σε ομώνυμα και η μέθοδος του σύνθετου κλάσματος (Κυριώτη, 2014).

Για τη σύγκριση και τη διάταξη κλασμάτων οι μαθητές επιστρατεύουν συνήθως στρατηγικές που βασίζονται σε πληροφορίες του αριθμητή και του παρονομαστή, μόνο του παρονομαστή, κάποιου σημείου αναφοράς, συγκεκριμένου υλικού ή εικόνας. Γενικά, οι μαθητές όταν μαθαίνουν να διατάσσουν τα κλάσματα αποκτούν μια ποσοτική αντίληψη για το κλάσμα, ενώ όταν επεκτείνουν την αντίληψη για τον αριθμό για να συμπεριλάβει τα κλάσματα, μαθαίνουν να τα διατάσσουν. Εξίσου σημαντικά κρίνονται η πυκνή δομή, που συνδέεται με τη διάταξη και ο τρόπος αναπαράστασης τους (κλάσμα, δεκαδικός, ποσοστό). Η μορφή του κλάσματος πηγάζει από την ερμηνεία ως μέρος-όλου, ενώ η μορφή του δεκαδικού απαιτεί συνδυασμό γνώσεων φυσικών και κλασμάτων. Απαραίτητα για την επαρκή γνώση κρίνονται η ευελιξία της σκέψης και του συντονισμού μεταφράσεων μεταξύ των τρόπων αναπαράστασης, ο μετασχηματισμός σε ένα συγκεκριμένο τρόπο αναπαράστασης και ο συλλογισμός που απελευθερώνεται αυξητικά σε εξάρτηση με συγκεκριμένες υλοποιήσεις (Κυριώτη, 2014).

Τέλος, σημαντική παράμετρος κρίνεται η εννοιολογική και διαδικαστική γνώση, που εξετάζονται σε ξεχωριστό κεφάλαιο της παρούσας εργασίας. Και τα δύο είδη κρίνονται απαραίτητα για την επίλυση προβλημάτων και τον χειρισμό αλγόριθμων (Ketterlin-Geller & Chard, 2011). Εντούτοις, η επιμονή των αναλυτικών προγραμμάτων να εστιάζουν στη διαδικαστική γνώση, χωρίς όμως να δίνεται η απαραίτητα έμφαση και στην αντίστοιχη εννοιολογική γνώση, οδηγεί τους μαθητές να έχουν δυσκολίες με την εκτέλεση των πράξεων. Εξάλλου, η εκτέλεση πράξεων με κλάσματα απαιτεί τη γνώση των τεσσάρων βασικών πράξεων, της διάκρισης των κλασμάτων σε ομώνυμα-ετερώνυμα, της μετατροπής ετερωνύμων σε ομώνυμα, του υπολογισμού του Ελάχιστου Κοινού Πολλαπλάσιου και της εύρεσης του αντίστροφου κλάσματος (Τζακάκη et al., 2008).

1.3. Αξιολόγηση

«Εκπαίδευση είναι να μαθαίνεις εκείνα
που ποτέ δεν υποψιαζόσουν ότι αγνοούσες».
Daniel Boorstin

Η αξιολόγηση μπορεί να αποτελέσει ένα δυναμικό εργαλείοδιερεύνησης της μαθηματικής σκέψης των μαθητών. Μπορεί να αποκαλύψει τις παρανοήσεις των μαθητών και να καλύψει μαθησιακά κενά. Επιπλέον, μπορεί να αποκαλύψει επιτυχημένες στρατηγικές που έχουν νόημα από πλευράς μαθητών. Παρέχει επίσης στους εκπαιδευτικούς μια βαθύτερη κατανόηση και αναστοχασμό πάνω στις μαθηματικές ιδέες και έννοιες που βρίσκονται πίσω από τους κανόνες και τις διαδικασίες που διέπουν τα σχολικά βιβλία. Η επιτυχημένη αξιολόγηση εγείρει ερωτήματα αναφορικά με την αλλαγή και τη βελτίωση της διδασκαλίας, ενώ οι διαγνωστικές και σχετικές με το πρόγραμμα σπουδών πληροφορίες παρέχουν ισχυρά εργαλεία για την καθοδήγηση και πληροφόρηση της διδασκαλίας (Fisher, 2007, 195). Παρακάτω γίνεται αναφορά στα διάφορα είδη αξιολόγησης και την πληροφοριακή τους αξία.

Η *διαμορφωτική* αξιολόγηση (formative) παρέχει στον δάσκαλο της τάξης πολλές πληροφορίες για την περιπλοκότητα της κατανόησης της έννοιας του κλάσματος και τους τύπους των εμπειριών που είναι απαραίτητες για να τα κατανοήσουν οι μαθητές. Εγείρει επίσης ζητήματα σχετικά με την αναγνώριση κλασματικών μερών και τη δημιουργία ακριβών κλασματικών αναπαραστάσεων για την επίλυση προβλήματος. Οι απαντήσεις των παιδιών και μια επιτυχημένη αξιολόγηση εγείρει ερωτήματα: Πώς μπορεί ο δάσκαλος να βοηθήσει τους μαθητές να αναπτύξουν την ιδέα των ίσων κομματιών και της μονάδας; Είναι κατάλληλη η χρήση περιττών παρονομαστών που παρουσιάζουν δυσκολίες στη δημιουργία αναπαράστασης; Υπάρχει μαθησιακό όφελος από τα παραδείγματα και τις επεξηγήσεις ή από την αντιπαράθεση και συζήτηση των παρανοήσεων; Ποια τα οφέλη και οι αδυναμίες κάθε μιας προσέγγισης; Οι αξιολογήσεις αυτού του είδους παρέχουν μια εικόνα για τα κενά στη σκέψη των μαθητών, εικόνα που δεν μπορεί

να προκύψει όταν η διδασκαλία εστιάζεται μονομερώς στις διαδικασίες (Fisher, 2007, 195-197).

Η *ανακεφαλαιωτική* αξιολόγηση (final, summative) επιτρέπει την προσεκτική καταγραφή των τάσεων που διατηρούνται με την πάροδο του χρόνου. Αν, παραδείγματος χάριν, πολλές από τις παρανοήσεις εμφανίζονται ανθεκτικές στο πέρασμα του χρόνου, προκύπτουν σημαντικά ερωτήματα σχετικά με τη διδασκαλία και τα υλικά. Βοηθούν οι εικόνες των βιβλίων την ανάπτυξη των σχετικών εννοιών; Θα βοηθούσε η χρήση εναλλακτικών εικόνων; Θα έπρεπε μήπως να εξετάσουμε τα υλικά που χρησιμοποιούνται στην Ιαπωνία και στη Κίνα, οι οποίες αλλάζουν γρήγορα την εστίαση από κομμάτια ενός αντικειμένου (πίτσα), σε μέρη συλλογών αντικειμένων (βόλοι) και ποσοτήτων (αποστάσεις, ζάχαρη) διαφορετικού είδους; (Fisher, 2007, 197-200).

Ερωτήσεις αυτού του είδους μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε κάθε στάδιο της αξιολόγησης και να παρέχουν πληροφορίες σχετικά με τον τρόπο σκέψης κάθε μαθητή ατομικά, αλλά και των δυνατοτήτων και αδυναμιών που προκύπτουν από τα προγράμματα σπουδών συλλογικά. Οι δάσκαλοι μπορούν να καταλάβουν τις στρατηγικές που χρησιμοποιούνται από τους μαθητές και να αναπτυχθούν επαγγελματικά. Να αποκτήσουν γνώση όχι μόνο του σωστού και λάθους αλλά και του πώς και γιατί δόθηκαν αυτές οι απαντήσεις. Τα αποτελέσματα και οι πληροφορίες αυτές μπορούν να οδηγήσουν σε αποτελεσματικότερη διδασκαλία και βελτιωμένη μάθηση. Γενικά, από τις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής και σύντομης απάντησης μπορούν να προκύψουν χρήσιμες πληροφορίες, ωστόσο με κάποια επιφύλαξη καθώς η σωστή απάντηση μπορεί να προκύψει στην τύχη. Πληροφορίες θα έπρεπε να συλλέγονται και από τις λάθος απαντήσεις και όχι μόνο από τις σωστές, που χρησιμοποιούνται για την εξαγωγή ενός σκορ (Fisher, 2007, 207-211).

1.3.1. Αξιολόγηση στα κλάσματα

Καθώς η σκέψη των μαθητών για βασικές μαθηματικές έννοιες αναπτύσσεται, διέρχεται από μία σειρά χαρακτηριστικών φάσεων. Η αναγνώριση αυτών των κοινών μοτίβων σκέψης βοηθά την αποκωδικοποίηση των απαντήσεων των μαθητών και την κατανόηση του γιατί οι μαθητές είναι σε θέση να κάνουν

κάποια πράγματα και όχι άλλα και γιατί αντιμετωπίζουν δυσκολία στην κατάκτηση ορισμένων στόχων. Επιτρέπει, τέλος, τη δημιουργία προκλητικών δραστηριοτήτων για την ανάπτυξη της σκέψης των μαθητών, την ανάδειξη ημι-διαμορφωμένων ιδεών και την υπερπήδηση παρανοήσεων. Παρακάτω ακολουθεί, σε αδρές γραμμές, ένας διαγνωστικός χάρτης, στον οποίο αναφέρονται οι δεξιότητες των παιδιών σε έξι αναπτυξιακά στάδια που καλύπτουν το φάσμα τα 2 περίπου μέχρι τα 13 έτη:

Φάσεις	**Αναδυόμενη** **Emergent**	**Αντιστοιχίας** **Matching** **Μεταξύ 3 και 5**	**Προσδιορισμού ποσότητας** **Quantifying** **Μεταξύ 5 και 6**
Κατά τη διάρκεια της φάσης	• Επιχειρηματολογούν για μικρές ποσότητες απτών αντικειμένων. • Ξεχωρίζουν μικρά σύνολα αντικειμένων από το πλήθος και καταλαβαίνουν αυξήσεις και μειώσεις σε αυτές. • Αναγνωρίζουν και επαναλαμβάνουν τις αριθμολέξεις και ξεχωρίζουν τους αριθμούς από τα υπόλοιπα σύμβολα. • Αυξάνουν την κατανόηση σχετικά με το τι κοινό έχουν τα σύνολα που φέρουν την ίδια αριθμολέξη και αντίστοιχα τι διαφορετικό έχουν τα σύνολα με διαφορετικό όνομα. *Ως αποτέλεσμα, κατανοούν ότι οι αριθμολέξεις και τα σύμβολα χρησιμοποιούνται για να εκφράσουν το πλήθος ενός συνόλου.*	• Χρησιμοποιούν τους αριθμούς ως επίθετα για την περιγραφή πραγματικών ποσοτήτων αντικειμένων. • Μέσω ιστοριών, παιχνιδιών και καθημερινών ασχολιών, χρησιμοποιούν σχέσεις ένας-προς-έναν για την επίλυση προβλημάτων, κατά την οποία πραγματοποιούν ή φαντάζονται τις ενέργειες που απαιτούνται κάθε φορά. • Μαθαίνουν να διορθώνουν μικρές ποσότητες ώστε να ταιριάζουν με δοθείσες ποσότητες και να σέβονται τους κανόνες της απαρίθμησης. *Ως αποτέλεσμα, μαθαίνουν τι αναμένεται από αυτά να κάνουν μετά από συγκεκριμένες εντολές (μοιράσου, φέρε έξι, πόσα έμειναν;)*	• Επιχειρηματολογούν για ποσότητες και κατανοούν ότι αν δεν προστεθεί ή αφαιρεθεί κάτι από ένα πλήθος ή μία ποσότητα αυτά παραμένουν ίδια, ακόμα και αν η διάταξη ή η εμφάνισή τους έχει αλλάξει. *Ως αποτέλεσμα, κατανοούν ότι η σημασία του τελικού αριθμού μιας απαρίθμησης δεν αλλάζει εξαιτίας της αλλαγής διάταξης ή της στρατηγικής απαρίθμησης.* *Επιπλέον, αναπτύσσουν την ιδέα ότι η δίκαια μοιρασιά απαιτεί τη διαίρεση του όλου σε ίσα κομμάτια χωρίς να αλλάζει την αρχική ποσότητα, επομένως αρχίζουν να βλέπουν τις σχέσεις μέρους-όλου, οι οποίες συνδέουν τον διαμοιρασμό με τα κλάσματα.*
Μέχρι το τέλος της φάσης	• Χρησιμοποιούν λέξεις όπως «μικρότερο», «μεγαλύτερο» και «ίσο» για την περιγραφή των διαφορών μεταξύ μικρών συνόλων όμοιων	• Ανακαλούν τη σειρά των αριθμολέξεων τουλάχιστον μέχρι τους πρώτους διψήφιους • Γνωρίζου πώς να	• Χρησιμοποιούν την στρατηγική της απαρίθμησης για την επίλυση προβλημάτων, χωρίς παρότρυνση. • Χρησιμοποιούν υλικά ή

	αντικειμένων και μεταξύ εύκολα συγκρινόμενων ποσοτήτων. • Κάνουν εκτιμήσεις σχετικά με το αν μια αλλαγή σε ένα σύνολο ή μια ποσότητα θα τα κάνει μεγαλύτερα, μικρότερα ή θα τα αφήσει όπως είναι. • Ξεχωρίζουν τις προφορικές αριθμολέξεις από άλλες λέξεις. • Ξεχωρίζουν τους αριθμούς από άλλα γραπτά σύμβολα. • Μπορούν με μια ματιά να δουν το πλήθος ενός μικρού συνόλου και να του αποδώσουν μια αριθμολέξη • Συσχετίζουν τις αλλαγές που βλέπουν μεταξύ ολοένα αυξανόμενων συνόλων με την ακολουθία των αριθμών. • Καταλαβαίνουν προτροπές για μοίρασμα και κατανέμουν αντικείμενα σε μερίδια. *Κατανοούν ότι οι αριθμοί μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να εκφράσουν μια ποσότητα.*	απαριθμούν ένα πλήθος αντικειμένων, σεβόμενα τους περισσότερους από τους κανόνες. • Κατανοούν ότι ο τελευταίος αριθμός δίνει το όνομα στο πλήθος. • Συγκρίνουν δύο πλήθη και αποφασίζουν ποιο είναι μεγαλύτερο και κατά πόσο. • Λύνουν σύντομα προφορικά αριθμητικά προβλήματα που απαιτούν πρόσθεση ή αφαίρεση. • Μοιράζονται δίνοντας ίσες μερίδες σε κάθε αποδέκτη, δίνοντας ένα, δύο ή τρία αντικείμενα σε κάθε μοίρασμα. *Χρησιμοποιούν σχέσεις ένας-προς-έναν για το μοίρασμα και την απαρίθμηση.*	την φαντασία για την αποσύνθεση μικρών αριθμών με εμπειρικό τρόπο. • Θεωρούν προφανές το γεγονός ότι η ένωση δύο συλλογών αντικειμένων θα δώσει το ίδιο αποτέλεσμα με το άθροισμα των υποομάδων που περιέχει. • Κατανοούν την ιδέα ότι υπάρχουν κάποια βασικά δεδομένα, ασχέτως διάταξης. • Επιλέγουν είτε την θετική απαρίθμηση είτε την αρνητική για την επίλυση προβλημάτων αφαίρεσης, ανάλογα με το ποια ταιριάζει κάθε φορά. • Σκέφτονται την πρόσθεση και την αφαίρεση με όρους του όλου και των μερών. • Γράφουν ακολουθίες αριθμών που δείχνουν τον τρόπο σκέψης για εύκολα προβλήματα (εννοιολογική δομή). • Κατανοούν ότι η επαναλαμβανόμενη πρόσθεση ή το μέτρημα ανά ομάδες δίνει το ίδιο αποτέλεσμα. • Κατανοούν ότι αν μοιράσουν ένα πλήθος σε μερίδες με διανομή είτε με επαναλαμβανόμενη διαίρεση στα δύο, οι μερίδες θα είναι ίσες, ανεξαρτήτως του πώς φαίνονται. • Κατανοούν ότι όσο περισσότερες μερίδες προέλθουν από μία ποσότητα, τόσο μικρότερες θα είναι. *Χρησιμοποιούν σχέσεις μέρους-μέρους-όλου για τις αριθμητικές ποσότητες.*
Φάσεις	**Διχοτόμησης** **Partitioning**	**Παραγοντική** **Factoring**	**Λειτουργική** **Operating**

	Μεταξύ 6 και 9	**Μεταξύ 9 και 11**	**Μεταξύ 11 και 13**
Κατά τη διάρκεια της φάσης	• Αρχίζουν να κατανοούν τη σημασία των ακεραίων ανεξαρτήτως των μετρήσιμων αντικειμένων. • Μαθαίνουν να χρησιμοποιούν συλλογιστική μέρους-όλου χωρίς την ανάγκη να δουν ή να φανταστούν απτά αντικείμενα. *Ως αποτέλεσμα, βλέπουν ότι οι αριθμοί έχουν μεγέθη σε σχέση με άλλους, μεταφράζουν κάθε φυσικό αριθμό σε συνδυασμό δύο άλλων και βλέπουν τις σχέσεις μεταξύ διαφόρων τύπων καταστάσεων πρόσθεσης και αφαίρεσης.* *Επιπλέον, βλέπουν ότι οι αριθμοί χρησιμοποιούνται για την απαρίθμηση συνόλων και ότι μπορούν να χρησιμοποιήσουν ένα σύνολο ως αντιπροσωπευτικό κάποιου άλλου ίσου συνόλου. Πιστεύουν ότι κατάλληλος διαμερισμός ποσοτήτων θα παράγει ισόποσες μερίδες.*	• Επεκτείνουν τις προσθετικές σκέψεις σχετικά με τους ακεραίους για να συμπεριλάβουν τον συντονισμό δύο παραγόντων που απαιτούνται για τον πολλαπλασιαστικό τρόπο σκέψης. • Μαθαίνουν να δομούν και να συντονίζουν ομάδες ίδιου μεγέθους, αριθμό ομάδων και τελική ποσότητα. • Οπτικοποιούν πολλαπλασιαστικές καταστάσεις με όρους ποσοτήτων διατεταγμένων σε στήλες και γραμμές. *Ως αποτέλεσμα, κατανοούν τη σημασία της σχέσης μεταξύ ομάδων των 10 ή 100 και του τρόπου γραφής των ακεραίων. Συσχετίζουν διαφόρους τύπους καταστάσεων πολλαπλασιασμού και διαίρεσης που περιλαμβάνουν ακεραίους. Συνδέουν τις ιδέες της επανάληψης ίσων ομάδων, της διαίρεσης σε ίσα κομμάτια και των κλασμάτων.*	• Μεταφράζουν τους παράγοντες των γινομένων ως «φορές το/του» παρά σαν αριθμούς που δείχνουν ομάδες, επομένως μπορούν να σκεφτούν το ενδεχόμενο να μην είναι ακέραιοι. • Κατανοούν ότι κάθε αριθμός μπορεί να νοηθεί ως μονάδα, η οποία μπορεί να επαναληφθεί ή να χωριστεί πολλές φορές. *Ως αποτέλεσμα, κατανοούν πώς τα μεσοδιαστήματα μπορούν να επαναχωριστούν και κατανοούν τη σχέση μεταξύ δύο διαδοχικών αριθμών.* *Επίσης, μαθαίνουν να εκτελούν πολλαπλασιαστικές συγκρίσεις μεταξύ των αριθμών, να διαχειρίζονται αναλογικές καταστάσεις και να ενσωματώσουν τις ιδέες των δεκαδικών και των κλασματικών αριθμών.*
Μέχρι το τέλος της φάσης	• Συγκρίνουν ακεραίους χρησιμοποιώντας τη γνώση της αριθμητικής ακολουθίας και σκέφτονται κινήσεις μεταξύ των αριθμών χωρίς να τους αναπαριστούν στην πραγματικότητα ή στη σκέψη τους με απτά αντικείμενα. • Κατανοούν το γιατί κάθε ακέραιος μπορεί να γραφτεί σαν άθροισμα άλλων αριθμών. • Χωρίζουν διψήφιους και	• Χρησιμοποιούν τη γνώση τους για να παράγουν διαφορετικού είδους διχοτομήσεις. • Διατηρούν μια σωστή αντίληψη της αξίας θέσης ψηφίου ακόμα και με αντικρουόμενες πληροφορίες. • Είναι ευέλικτα με τη διχοτόμηση ακεραίων και σίγουρα ότι η ποσότητα δεν έχει	• Αναπαριστούν γνήσια και καταχρηστικά κλάσματα πάνω στην αριθμητική γραμμή. • Γενικεύουν το κυκλικό μοτίβο της αξίας θέσης ψηφίου για να διαβάζουν, να γράφουν και να προφέρουν κάθε ακέραιο αριθμό. • Χρησιμοποιούν τη γνώση της σχέσης μεταξύ των διαδοχικών θέσεων για να τοποθετούν τους δεκαδικούς

	τριψήφιους αριθμούς σε μονάδες, δεκάδες και εκατοντάδες χωρίς αναφορά σε πραγματικά αντικείμενα. • Μετρούν προς τα πάνω και προς τα κάτω με έναρξη από αριθμούς όπως το 23 ή το 79. • Γράφουν κατάλληλες αριθμητικές ακολουθίες για εύρος καταστάσεων πρόσθεσης και αφαίρεσης. • Χρησιμοποιούν την αντιθετική σχέση μεταξύ πρόσθεσης και αφαίρεσης και τη μέτρηση ανά δεκάδες. • Μετρούν πολλαπλασιαστικά έχοντας υπόψιν των αριθμό των ομάδων και τον αριθμό των αντικειμένων σε κάθε ομάδα. • Θεωρούν προφανές το γεγονός ότι δύο μισά διαφορετικού σχήματος, που προέρχονται από το ίδιος όλο, έχουν το ίδιο μέγεθος, και δεν μπερδεύονται από τα αντιληπτά χαρακτηριστικά τους. • Χρησιμοποιούν διαδοχικές διχοτομήσεις για να δείξουν ότι 1/2 είναι ίσο με 2/4, 4/8 κ.ο.κ. και αναμένουν ότι όταν ο αριθμός των μερίδων διπλασιάζεται, μειώνεται κατά το ήμισυ το μέγεθος κάθε μερίδας. • Χωρίζουν μια ποσότητα σε έναν αριθμό ίσων κομματιών για να δείξουν τις κλασματικές μονάδες και συμπεραίνουν για το σχετικό μέγεθός τους. *Χρησιμοποιούν προσθετική συλλογιστική για τη διαχείριση πολλών-με-ένα σχέσεων.*	αλλάξει. • Θεωρούν προφανές ότι η σειρά των αριθμών δεν έχει σημασία στον πολλαπλασιασμό. • Κάνουν νοητές εικόνες καταστάσεων πολλαπλασιασμού. • Σκέφτονται ή δημιουργούν δικά τους διαγράμματα για τη σύγκριση ομώνυμων ή ετερώνυμων κλασμάτων. • Χρησιμοποιούν την ιδέα της διχοτόμησης του όλου για να κατανοήσουν καταχρηστικά κλάσματα και δεκαδικούς αριθμούς. • Συσχετίζουν τα κλάσματα με τη διαίρεση. • Ξέρουν ότι μπορούν να χρησιμοποιήσουν τον πολλαπλασιασμό ή τη διαίρεση για να απλοποιήσουν τον υπολογισμό. • Κατανοούν γιατί τα προβλήματα ομαδοποίησης ή διαμοιρασμού μπορούν να επιλυθούν από την ίδια διαδικασία διαίρεσης. • Μεταφράζουν τον πολλαπλασιασμό ως «τόσες φορές ο τάδε αριθμός». • Επιλέγουν την κατάλληλη πράξη για προβλήματα που δεν αναφέρουν ρητά «ομάδες των», όπως αυτά του συνδυασμού και της σύγκρισης	ανεξαρτήτως του αριθμού των θέσεων. • Χρησιμοποιούν το κυκλικό μοτίβο των θέσεων για να μετρούν πάνω και κάτω στα δέκατα, εκατοστά και χιλιοστά. • Είναι ευέλικτα στη διχοτόμηση δεκαδικών αριθμών. • Κατανοούν ότι για παράγοντες μικρότερων του 1, ο πολλαπλασιασμός μικραίνει τον αριθμό, ενώ για διαιρέτες μικρότερων του 1, η διαίρεση μεγαλώνει τον αριθμό. • Επιλέγουν τον κατάλληλο διαιρέτη, ώστε να μοιραστεί η ποσότητα σε δύο διαφορετικές μερίδες. • Δομούν διαδοχικούς μερισμούς για να εξηγήσουν καταστάσεις πολλαπλασιασμού κλασμάτων. • Δημιουργούν διαγράμματα για τη σύγκριση και σύνδεση κλασμάτων, σίγουρα ότι τα κλάσματα που αναπαρίστανται αναφέρονται στο ίδιο όλο. • Χωρίζουν και ξανασυνθέτουν κλάσματα νοητά ή γραπτά. • Αναγνωρίζουν την ανάγκη για πολλαπλασιασμό σε καταστάσεις στις οποίες ο παράγοντας είναι κλάσμα. • Γράφουν κατάλληλες αριθμητικές ακολουθίες για πολλαπλασιασμούς και διαιρέσεις, συμπεριλαμβανομένων ακεραίων, δεκαδικών και κλασμάτων. *Σκέφτονται τους*

		ποσοτήτων. • Καταλαβαίνουν γιατί ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα. *Σκέφτονται αφενός προσθετικά και αφετέρου πολλαπλασιαστικά σχετικά με αριθμητικές ποσότητες.*	*πολλαπλασιασμούς και τις διαιρέσεις με όρους τελεστών.*

Πίνακας 1.2. Χάρτης δεξιοτήτων παιδιών ανά ηλικιακή ομάδα

Ο παραπάνω χάρτης μπορεί να βοηθήσει κατά την αξιολόγηση των κλασματικών γνώσεων των παιδιών σε διάφορα στάδια της ανάπτυξής τους και να επισημάνει τυχόν επιτάχυνση ή επιβράδυνση κατά την κατάκτηση εννοιών και δεξιοτήτων. Οι παραπάνω κατευθυντήριες γραμμές δεν πρέπει να χρησιμοποιούνται ως πανάκεια αφού κάθε παιδί εμφανίζει το δικό του ρυθμό και στυλ ανάπτυξης.

1.4. Εννοιολογική και διαδικαστική γνώση

Αν δεν ξέρεις τι είναι, πες το «σύστημα».
Αν δεν ξέρεις τι κάνει, πες το «διαδικασία».
Ανώνυμος

Η διάκριση μεταξύ εννοιολογικής και διαδικαστικής γνώσης, έχει τις ρίζες της στο χώρο της Γνωστικής Ψυχολογίας, αλλά χρησιμοποιείται ευρέως και στο χώρο της μάθησης των Μαθηματικών (Μπεμπένη, 2011).

Η **εννοιολογική** γνώση (knowing that) σχετίζεται με την άδηλη ή μη, κατανόηση των αρχών που διέπουν ένα γνωστικό πεδίο, όπως επίσης και με την ικανότητα δημιουργίας διασυνδέσεων μεταξύ σχετικών «μονάδων» γνώσης (Rittle-Johnson, Siegler, & Alibali, 2001), όπως η ικανότητα μετάφρασης ανάμεσα σε διαφορετικές αναπαραστάσεις μιας έννοιας. Η εννοιολογική γνώση αποτελεί ένα δίκτυο, μέσα στο οποίο οι σχέσεις μεταξύ των μαθηματικών εννοιών είναι εξίσου σημαντικές με τις ίδιες τις μαθηματικές έννοιες. Η εννοιολογική γνώση, λοιπόν, εκτείνεται πέρα από τη στείρα απομνημόνευση κανόνων και αλγορίθμων και περιλαμβάνει την πραγματική μαθηματική κατανόηση ενός δεδομένου προβλήματος και τη σχέση του με ένα ευρύτερο σύμπλεγμα μαθηματικών εννοιών. Το είδος αυτό της γνώσης είναι η ικανότητά μας να κάνουμε διασυνδέσεις στη γνώση κι όχι να απομνημονεύουμε ασύνδετες πληροφορίες. Με λίγα λόγια, η εννοιολογική γνώση αφορά την ικανότητα να κάνουμε διασυνδέσεις στη γνώση, να αντιλαμβανόμαστε πολλαπλές αναπαραστάσεις μιας έννοιας, να επιλέξουμε τη διαδικασία για τη λύση ενός προβλήματος, να κάνουμε συσχετίσεις, να αναπτύξουμε τη διαισθητική και την τυπική γλώσσα σε μία προσωπική βάση (Μπεμπένη, 2011).

Ως **διαδικαστική** γνώση (knowing how) μπορεί να οριστεί η ικανότητα εκτέλεσης μιας καθορισμένης σειράς βημάτων που οδηγούν στην επίλυση συγκεκριμένων προβλημάτων. Η γνώση αυτή περιλαμβάνει συγκεκριμένες διαδικασίες για την επίλυση προβλημάτων, που καλούνται αλγόριθμοι ή στρατηγικές. Η χρήση της διαδικαστικής γνώσης δεν απαιτεί σημαντικό επίπεδο κατανόησης από το μέρος του μαθητή, αφού καλείται απλά να εκτελέσει σωστά μία

διαδικασία για να βρει τη σωστή λύση. Μπορεί, λοιπόν, να αυτοματοποιηθεί σε διαφορετικούς βαθμούς, κάτι που εξαρτάται από το βαθμό εξάσκησης. Αυτό το είδος γνώσης δεν απαιτεί ιδιαίτερη γνώση ή ιδιαίτερη προσοχή. Εντούτοις, δεν είναι ευέλικτη και συνδέεται με συγκεκριμένα είδη προβλημάτων. Αποτελεί ένα σύνολο αλγορίθμων, κανόνων, για την ολοκλήρωση μιας δραστηριότητας, μία καθοδηγούμενη από το στόχο πράξη που περιέχει μνημονικές στρατηγικές, αλγορίθμους και κανόνες. Περιλαμβάνει μια αλληλουχία συγκεκριμένων πράξεων, που θεωρείται ότι παράγουν σωστό αποτέλεσμα, κάτι που στην περίπτωση των μαθηματικών αποτελεί η σωστή απάντηση σε ένα πρόβλημα. Σε γενικές γραμμές, η διαδικαστική γνώση αναφέρεται στην ικανότητα του μαθητή να εκτελεί συγκεκριμένες διαδικασίες για να λύσει ένα συγκεκριμένο τύπο προβλήματος, χωρίς να καταλαβαίνει γιατί βγάζει σωστά αποτελέσματα η διαδικασία (Μπεμπένη, 2011).

Πώς όμως το ένα είδος γνώσης επηρεάζει το άλλο κατά την ανάπτυξή τους; Υπάρχουν τέσσερις θεωρητικές απόψεις για τη συσχέτιση των δύο ειδών γνώσης, που αναφέρθηκαν παραπάνω. Η σχέση αυτή μπορεί να είναι *μονόδρομη προς τη διαδικαστική γνώση* (concepts-first approach), *μονόδρομη προς την εννοιολογική γνώση* (procedures-first approach), *αμφίδρομη* (iterative model), ή τέλος τα δύο γνώσης μπορεί να *μη σχετίζονται* (Resnick, 1982). Οι περισσότερες έρευνες εξετάζουν ποιο είδος γνώσης προηγείται (Μπεμπένη, 2011):

- Σύμφωνα με τις *μονόδρομες προς τη διαδικαστική* γνώση θεωρίες, τα παιδιά αναπτύσσουν αρχικά ή γεννιούνται με βασικές εννοιολογικές αρχές σε ένα πεδίο και στη συνέχεια τις χρησιμοποιούν για να γενικεύσουν και να επιλέγουν διαδικασίες για να λύσουν συγκεκριμένα προβλήματα. Προτείνεται, λοιπόν, μια διδασκαλία που εστιάζει στην εννοιολογική γνώση πριν διδαχθεί η διαδικαστική (Geary, 1994; Gelman, & Williams, 1998; Halford, 1993).
- Οι *μονόδρομες προς την εννοιολογική* γνώση θεωρίες, υποστηρίζουν ότι η διαδικαστική γνώση επιτρέπει την ανάπτυξη της εννοιολογικής. Με λίγα λόγια, η εννοιολογική γνώση αναπτύσσεται μετά τη διαδικαστική, δηλαδή τα παιδιά μαθαίνουν διαδικασίες για να λύνουν προβλήματα και μετά εξάγουν τις έννοιες από την εμπειρία τους από την επίλυση προβλημάτων (Fuson, 1988; Karmiloff-Smith, 1992; Siegler, & Stern, 1998).

- Κατά το *αμφίδρομο* μοντέλο, η αύξηση στο ένα είδος γνώσης μπορεί να οδηγήσει σε αύξηση του άλλου είδους γνώσης, το οποίο με τη σειρά του οδηγεί σε αύξηση στο πρώτο είδος γνώσης. Άλλωστε, τα παιδιά συχνά έχουν μία μερική γνώση διαδικασιών και εννοιών, ενώ υπάρχει θετική συσχέτιση μεταξύ των δύο ειδών γνώσης, δηλαδή όσο μεγαλύτερο είναι το ένα είδος γνώσης τόσο μεγαλύτερο είναι και το άλλο. Η διαδικαστική και εννοιολογική γνώση, λοιπόν, αναπτύσσονται παράλληλα, επηρεάζουν η μία την άλλη αυξητικά, χωρίς να προηγείται αυστηρά το ένα είδος γνώσης, αφού η βελτίωση του ενός τύπου γνώσης μπορεί να οδηγήσει σε βελτίωση και του άλλου. Με τη βοήθεια του μοντέλου αυτού αντιμετωπίζονται δύο πολύ σημαντικά θέματα. Αφενός, το ένα είδος γνώσης μπορεί να είναι περισσότερο ανεπτυγμένο από το άλλο, ωστόσο δεν έχει νόημα να λέμε ότι κάποιος κατέχει ή όχι το ένα από τα δύο είδη και αφετέρου είναι πιθανό να προηγείται στην ανάπτυξή του ένα από τα δύο είδη γνώσης, εντούτοις δε μπορούμε να ξέρουμε ποιο είναι αυτό (Rittle-Johnson et al., 2001, Rittle-Johnson, Schneider & Star, 2015).

1.4.1. Εννοιολογική και διαδικαστική γνώση στα μαθηματικά

Το θέμα των εννοιών και των διαδικασιών αρχικά απασχόλησε τους επιστήμονες της Γνωστικής Ψυχολογίας. Στη συνέχεια όμως, απασχόλησε και την επιστημονική κοινότητα της μαθηματικής εκπαίδευσης. Αυτό που οι ψυχολόγοι ονομάζουν διαδικαστική γνώση, οι επιστήμονες της μαθηματικής εκπαίδευσης θεωρούν ότι συμπληρώνει την εννοιολογική γνώση και τονίζουν ότι σε καμία περίπτωση τα δύο είδη δε μπορούν να θεωρηθούν ανεξάρτητα, αφού υπάρχει μία συνεχής αλληλεπίδραση μεταξύ τους. Διατυπώθηκαν τρεις σημαντικές θεωρίες (Μπεμπένη, 2011):

1. Σε ένα άρθρο της, η Sfard (1991) διατυπώνει τη θεωρία της υποστασιοποίησης, σύμφωνα με την οποία οι έννοιες μπορούν να αντιμετωπιστούν είτε ως *αφηρημένα αντικείμενα* (objects) είτε ως *διεργασίες* (processes). Αναφέρεται στη δομική (operational) και λειτουργική (structural) επινόηση μιας έννοιας αντίστοιχα, ενώ βασική συνιστώσα της κατανόησης των μαθηματικών θεωρείται η ικανότητα να μπορεί κανείς να κατανοήσει τις μαθηματικές έννοιες και ως

διεργασίες και ως αντικείμενα. Παραδείγματος χάριν, αν κάποιος αντιμετωπίζει το σύμβολο του συν σαν μία οδηγία για την εκτέλεση της πράξης, εστιάζει την προσοχή του στη διεργασία της πρόσθεσης, αγνοώντας το αντικείμενο του αποτελέσματος της πρόσθεσης που κρύβεται πίσω από την πράξη. Δίνεται έμφαση, λοιπόν, στη δυϊκότητα των λειτουργικών (διεργασία) και δομικών (αντικείμενο) εννοιών. Για να αντιληφθεί ο μαθητής τις υψηλού επιπέδου μαθηματικές έννοιες, πρέπει να σκέφτεται και με τους δύο τρόπους, ώστε να αντιλαμβάνεται μία μαθηματική έννοια με τα δικά της χαρακτηριστικά (στάδιο υποστασιοποίησης-reification). Προϋπόθεση του σταδίου αποτελεί η εσωτερίκευση (interiozation), η εξοικείωση δηλαδή με τις αλγοριθμικές διαδικασίες (εκτέλεση πράξεων) χωρίς να σκέφτεται τον αλγόριθμο και η συμπύκνωση (condensation), το στάδιο κατά το οποίο μία διαδικασία συμπυκνώνεται σε μία μορφή που μπορούμε να τη σκεφτούμε και να συνδυάσουμε διαδικασίες. Η λειτουργική και δομική κατανόηση δεν είναι αντίθετες, αλλά συμπληρώνουν η μία την άλλη. Στη διαδικασία σχηματισμού μιας έννοιας, η λειτουργική αντίληψη προηγείται της δομικής (με εξαίρεση των κλάδο της γεωμετρίας), αφού στο χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης, η ικανότητα για δομική προσέγγιση θεωρείται ο απώτερος στόχος της μαθησιακής διαδικασίας.

2. Από την άλλη, οι Gray και Tall (1994, 1995) αναπτύσσουν τη θεωρία διεργασίας-έννοιας με βάση την οποία διακρίνουν στα μαθηματικά τη *διεργασία* (process), η οποία αναφέρεται στο σύνολο ενεργειών που επιδρούν πάνω στα αντικείμενα, από την *έννοια* (concept), η οποία αφορά τα μαθηματικά αντικείμενα και τις μεταξύ τους σχέσεις. Διαχωρίζεται έτσι ο όρος διεργασία από τον όρο διαδικασία (procedure), που αναφέρεται στον συγκεκριμένο αλγόριθμο για την επίτευξη του στόχου μια διεργασίας. Η διεργασία της πρόσθεσης, παραδείγματος χάριν, μπορεί να πραγματοποιηθεί με πολλούς τρόπους αλγοριθμικά (διαδικασίες), ανάλογα με τις στρατηγικές που επιλέγει κάθε φορά ο μαθητής. Δίνεται έτσι μια ερμηνεία του τρόπου με τον οποίο οι διεργασίες μετατρέπονται σε έννοιες κι αντίστροφα, με το ίδιο σύμβολο να εκφράζει άλλοτε μια διεργασία κι άλλοτε μια έννοια. Στην περίπτωση των κλασμάτων, που εξετάζεται, το κλάσμα 2/3 εκφράζει ταυτόχρονα τη διαίρεση

του 2 δια 3 (διεργασία), αλλά και το αποτέλεσμα της διαίρεσης με τη μορφή κλασματικού αριθμού. Θεωρούν λοιπόν ότι η σκέψη που στηρίζεται στην εννοιολογική γνώση είναι πιο ευέλικτη από αυτή που περιορίζεται στις διεργασίες, ενώ οι δεξιοτέχνες της μαθηματικής σκέψης μπορούν με ευελιξία να αναλύουν και να ανασυνθέτουν το ίδιο αντικείμενο σε διαφορετικές διαδικασίες. Οι εν λόγω ερευνητές δημιούργησαν τον όρο procept (process+concept) και ορίζουν ως σκέψη με διεργασίες-έννοιες (proceptual thinking) την ικανότητα του ατόμου να χειρίζεται το συμβολισμό ευέλικτα, άλλοτε ως διεργασία κι άλλοτε ως έννοια. Η ικανότητα αυτή ξεχωρίζει τους περισσότερο επιτυχημένους στα μαθηματικά μαθητές, που είναι σε θέση να αλλάζουν με άνεση διαφορετικούς συμβολισμούς για το ίδιο αντικείμενο. Η έννοια procept, η οποία αποτελεί μία γνωστική κατασκευή, επιτρέπει στον ανθρώπινο εγκέφαλο να μεταβαίνει από το «κάνω τη διεργασία» (doing the process) στο «σκέφτομαι για μία έννοια» (thinking about a concept). Αρχικά, ο μαθητής εξοικειώνεται με τη διεργασία ως μια βήμα-βήμα διαδικασία, ενώ στη συνέχεια την εκτελεί υποσυνείδητα.

3. Η θεωρία του Dubinsky (1991), η επονομαζόμενη *APOS (Action-Process-Object-Schema)* υποστηρίζει ότι η απόκτηση της γνώσης συνίσταται στην ικανότητα του ατόμου να κάνει νοητικές κατασκευές, που ως στόχο έχουν την αντιμετώπιση καταστάσεων προβληματισμού. Σύμφωνα με αυτή τη θεωρία η κατανόηση μιας μαθηματικής έννοιας ξεκινά με τη δράση (action), δηλαδή την αντίδραση του ατόμου σε ένα φυσικό νοητικό αντικείμενο που το λαμβάνει ως εξωτερικό. Στη συνέχεια, το άτομο στοχάζεται πάνω σε μία δράση, η οποία με τη σειρά της εσωτερικεύεται με τη μορφή νοητικής διεργασίας. Το άτομο αποκτά έτσι τον έλεγχο πάνω στη δράση, δηλαδή μπορεί να αναστοχαστεί και να περιγράψει όλα τα βήματα, χωρίς να χρειάζεται να τα εκτελέσει. Έπειτα, οι διεργασίες εσωτερικεύονται σε αντικείμενα (objects) και επιτρέπουν στο άτομο να αντιλαμβάνεται τη διεργασία ως μία ολότητα και να κρίνει πώς θα ενεργήσει για να σκεφτεί πάνω στη διεργασία σαν ένα αυτόνομο αντικείμενο. Στο τελικό στάδιο, οι διεργασίες και τα αντικείμενα οργανώνονται σε σχήματα (schemas), τα οποία δίνουν τη δυνατότητα στο υποκείμενο να αποφασίσει ποιο είδος νοητικών δομών θα χρησιμοποιήσει στο δεδομένο πρόβλημα.

Και οι τρεις θεωρίες που προαναφέρθηκαν εμφανίζουν ως κοινό χαρακτηριστικό μια γνωστική ανάπτυξη που ξεκινάει από τη δράση και καταλήγει στη σχηματοποίηση εννοιών, οι οποίες συμπεριφέρονται ως νοητικές οντότητες. Επιπλέον, περιλαμβάνουν τη σύνδεση διεργασίας-αντικειμένου, σύμφωνα με την οποία οι δράσεις επάνω σε υπάρχοντα αντικείμενα, εσωτερικεύονται ως διεργασίες και στη συνέχεια μετατρέπονται σε νοητά αντικείμενα της σκέψης κατά την προσπάθεια του ατόμου να κατανοήσει την παρεχόμενη πληροφορία και να κάνει συνδέσεις με τις γνωστικές δομές που έχει στη διάθεσή του.

Συνοψίζοντας, η σχέση διαδικαστικής και εννοιολογικής γνώσης είναι περίπλοκη, ενώ το γεγονός ότι τα αποτελέσματα των ερευνών στο χώρο της ψυχολογίας για το ποιο είδος προηγείται δε συμφωνούν, ενισχύει την άποψη ότι πρέπει να ληφθούν σοβαρά υπόψη οι κριτικές που έχουν ασκηθεί. Ένα θέμα που ανακύπτει είναι το πώς μετράται η διαδικαστική και η εννοιολογική γνώση και σε ποιο βαθμό είναι δυνατό να επινοηθούν έργα που μετρούν αποκλειστικά μόνο το ένα από τα δύο είδη γνώσης. Επίσης, υπάρχουν ατομικές διαφορές στον τρόπο που τα παιδιά συνδυάζουν τα δύο είδη γνώσης, οι οποίες ενδεχομένως να αποτελούν μία εξήγηση για το ότι τα ευρήματα των προηγούμενων ερευνών, σχετικά με το ποιο είδος γνώσης προηγείται ή είναι περισσότερο ανεπτυγμένο αποκλίνουν (Μπεμπένη, 2011).

1.4.2. Εννοιολογική και διαδικαστική γνώση στα κλάσματα

Τα δεδομένα ερευνών προτείνουν ότι ακόμα και όσοι έχουν ευχέρεια με τη συμβολική αναπαράσταση των κλασμάτων και η γλώσσα τους προδίδει ότι μπορούν να σκεφτούν για αυτά ως αναπαραστάσεις του τομέα των ρητών αριθμών, δυσκολεύονται κατά τη διαδικασία προσαρμογής των νοητικών εικόνων των κλασμάτων με τα κλάσματα-σε-διαδικασίες (fractions-in-processes). Αυτό αποδεικνύει ότι, γι’ αυτούς, η αναπτυξιακή διαδρομή προς το κλάσμα ως αντικείμενο στο οποίο μπορούν να εφαρμοστούν διαδικασίες, δε σχετίζεται άμεσα με την έννοια της διαίρεσης. Προκύπτει λοιπόν, μια δυαδική φύση του σύνθετου συμβόλου αριθμός-κλασματική γραμμή-αριθμός, το οποίο μπορεί να αναπαριστά αφενός μια διαδικασία και αφετέρου ένα αντικείμενο, πάνω στο οποίο επιδρούν οι

διαδικασίες. Αυτό καταδεικνύει ότι οι διαδρομές προς τη δυαδικότητα αυτή μπορεί να είναι γνωστικά διαφορετικοί. Ο Dubinsky υποστηρίζει ότι η κατασκευή αντικειμένων από διαδικασίες είναι μία από τις πιο δύσκολες γενικές μαθηματικές δραστηριότητες, αφού περιλαμβάνει την περίληψη διαδικασιών σε αντικείμενα και την εκ νέου απόσπαση των αντικειμένων από τις διαδικασίες από τις οποίες προήλθαν. Αυτή η δυσκολία, στον τομέα των κλασμάτων τουλάχιστον, τα αντικείμενα δεν αποτελούν την περίληψη ή απόδοση των διαδικασιών εξ αρχής (Herman et al., 2004).

Η «έννοια του κλάσματος» δεν είναι ένας ξεκάθαρα ορισμένος όρος, ωστόσο χρησιμοποιείται ευρύτατα στην έρευνα και την εκπαιδευτική λογοτεχνία. Αναφέρεται σε μια ομάδα βασικών αντιλήψεων και εννοιών σχετικά με τα κλάσματα και όχι σε μία μοναδική μαθηματική ιδέα. Ωστόσο, η έννοια του κλάσματος σχετίζεται στενά με την κατασκευή εννοιολογικής κατανόησης και λειτουργεί ως βάση για την ανάπτυξη κατάλληλων στρατηγικών για μαθηματικά έργα, παρά με τη διαδικαστική κατανόηση. Τα συστατικά της συσσωρεύονται διαχρονικά μέσω εμπειρίας και πειραματισμού, παρά με διδασκαλία διαδικασιών και κανόνων. Κάποιες από τις βασικές ιδέες σχετικά με τα κλάσματα που θα μπορούσαν να θεωρηθούν συστατικά είναι τα ακόλουθα:

1. Κατανόηση του ότι, ειδικά στο μοντέλο μέρους-όλου, τα κλάσματα αναφέρονται σε ίσα κομμάτια του όλου και δυνατότητα ονομασίας κλασμάτων προφορικά και συμβολικά. Προσοχή πρέπει να δοθεί κατά την ανάγνωση κλασμάτων, αφού όταν αριθμητής και παρονομαστής διαβάζονται ξεχωριστά (δύο από τα τρία) δημιουργούνται εμπόδια στην κατανόηση του κλάσματος ως μιας ολότητας (δύο τρίτα).
2. Κατανόηση της σχέσης μεταξύ του αριθμού των μερών και του σχετικού τους μεγέθους, δηλαδή ότι όσο μεγαλύτερος ο παρονομαστής τόσο μικρότερα τα κομμάτια. Η στρατηγική αυτή βοηθάει περισσότερο κατά την σύγκριση κλασματικών μονάδων.
3. Αίσθηση του μεγέθους των κλασμάτων σε σχέση με το όλο, δηλαδή αν είναι μικρότερο, ίσο ή μεγαλύτερο από τη μονάδα. Αυτή η αίσθηση συχνά υποστηρίζει τεχνικές σχετικές με τη χρήση μονάδων αναφοράς κατά τον υπολογισμό, ειδικά κατά την διάταξη των κλασμάτων.

4. Δυνατότητα άμεσης αναγνώρισης και ονομασίας των συχνά χρησιμοποιούμενων κλασμάτων ακόμα και αν μόνο ένα μέρος τους είναι ορατό. Μια μεγάλη ποικιλία στρατηγικών μπορεί να βοηθήσει προς αυτήν την κατεύθυνση.
5. Δυνατότητα οπτικοποίησης, υπολογισμού και δημιουργίας αναπαραστάσεων των κλασμάτων μέσω της μεριδοποίησης όλων, με τη χρήση διαφόρων μοντέλων (επιφάνειας, συνόλου, μέτρησης). Είναι σημαντικό να αποφεύγεται η χρήση στερεότυπων προ-κατασκευασμένων αναπαραστάσεων, καθώς με τον τρόπο αυτό αναπτύσσονται αυτόματες αντιδράσεις και όχι η σκέψη και η οπτικοποίηση. Ιδιαίτερη δυσκολία αντιμετωπίζουν οι μαθητές κατά την αναπαράσταση κλασμάτων με περιττούς παρονομαστές, επειδή δε μπορούν να χρησιμοποιήσουν τη διχοτόμηση ως πρώτο βήμα, για το λόγο αυτό απαιτείται περισσότερη εξάσκηση με κλάσματα αυτού του είδους.

Τα παιδιά που έχουν αναπτύξει αυτά τα βασικά συστατικά στοιχεία της έννοιας του κλάσματος θα έχουν τη δυνατότητα να εφαρμόσουν τις νοητικές τους εικόνες και την εννοιολογική τους γνώση για την κατασκευή πιο πολύπλοκων εννοιών και διαδικασιών. Η εφαρμογή της έννοιας αυτής επιτρέπει την εξέταση των σχέσεων και των συγκρίσεων μεταξύ των κλασμάτων, η οποία μπορεί να αποδοθεί μέσα από τη δημιουργία λογικών υπολογισμών και εξηγήσεων κατά την επίλυση προβλημάτων (Way, 2011, 154-157).

Υπάρχει μια μεθοδολογική δυσκολία στον εμπειρικό έλεγχο της εννοιολογικής και της διαδικαστικής γνώσης, αφού τα όρια της διάκρισης των έργων που χρησιμοποιούνται σε εννοιολογικά/διαδικαστικά δεν είναι σαφή. Ωστόσο, υπάρχουν αρκετοί ερευνητές που μελέτησαν τις διαδικαστικές και τις εννοιολογικές στρατηγικές που χρησιμοποιούν τα άτομα αναφορικά με τα κλάσματα. Πιο συγκεκριμένα, οι Yang et al. (2007) κάνουν λόγο για στρατηγικές οι οποίες στηρίζονται σε διαδικασίες και μνημονικούς κανόνες (rule-based strategies) και σε στρατηγικές οι οποίες στηρίζονται στα εννοιολογικά χαρακτηριστικά της αίσθησης του αριθμού (number sense-based strategies). Παρόμοια, ο Smith (1995), αναφέρεται σε μία διάκριση στρατηγικών σε σχέση με τους ρητούς. Αναφέρεται σε διδαχθείσες στρατηγικές (instructed strategies), οι οποίες στηρίζονται σε διαδικασίες και σε στρατηγικές που αποτελούν το αποτέλεσμα της ικανότητας των

μαθητών να σκέφτονται με λογικό τρόπο για τους ρητούς (constructed strategies) (Μπεμπένη, 2011).

Στην παρούσα εργασία, υιοθετείται η διάκριση των στρατηγικών σε διαδικαστικές και εννοιολογικές. Πιο συγκεκριμένα, οι εννοιολογικές στρατηγικές αναφέρονται στην αναπαράσταση, στην αναγνώριση, στην εύρεση του σημείου αναφοράς, στον διαμοιρασμό και στη σύγκριση κλασμάτων με κοινούς αριθμητές ή παρονομαστές, οι οποίες βασίζονται σε εννοιολογικά χαρακτηριστικά της έννοιας του αριθμού. Ενώ οι διαδικαστικές στρατηγικές περιλαμβάνουν ένα πρόβλημα με αναγωγή στην κλασματική μονάδα, σύγκριση (μη κοινοί αριθμητές και παρονομαστές), διάταξη, ισοδυναμία και απλοποίηση και τις τέσσερις πράξεις, δηλαδή διαδικασίες και μνημονικούς κανόνες που έχουν αποτελέσει αντικείμενο διδασκαλίας. Παραδείγματα των ασκήσεων παρατίθενται στην υποενότητα εργαλεία της μεθοδολογίας και στο παράρτημα.

1.5. Αναπαραστάσεις

«Τα μαθηματικά είναι η τέχνη να δίνεις το ίδιο όνομα σε διαφορετικά πράγματα».
Ανρί Πουανκαρέ

1.5.1. Η έννοια της αναπαράστασης

Η αναπαράσταση είναι αυτό που παίρνει τη θέση κάποιου άλλου στοιχείου και αποκτά περισσότερες δυνατότητες και όχι το ίδιο το αντικείμενο. Η αναπαράσταση είναι δηλαδή αυτόνομη και ανεξάρτητη από το αντικείμενο που αναπαριστά και το άτομο μπορεί να την τροποποιήσει και να την επεξεργαστεί χωρίς περιορισμούς (Gagatsis & Elia, 2003). Οι αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούνται στη μαθησιακή διαδικασία καθορίζουν σε σημαντικό βαθμό όσα μαθαίνει ο μαθητής και πόσο εύκολα επιτυγχάνεται η κατανόηση των εννοιών (Cheng, 2000). Με άλλα λόγια, λειτουργούν ως χρήσιμα εργαλεία για την οικοδόμηση της μαθηματικής γνώσης, για την εννοιολογική κατανόηση και για την επικοινωνία των μαθηματικών εννοιών. Με τον όρο αναπαράσταση αναφερόμαστε σε ένα νοητικό σύμβολο ή έννοια το οποίο αντιπροσωπεύει ένα συγκεκριμένο υλικό σύμβολο και περιλαμβάνει πέντε ολότητες. Πιο συγκεκριμένα, περιλαμβάνει την ολότητα που αναπαρίσταται, την ολότητα που αναπαριστά, τις συγκεκριμένες πτυχές της ολότητας της αναπαράστασης που αναπαρίστανται, τις συγκεκριμένες πτυχές της ολότητας που αναπαριστά, οι οποίες σχηματίζουν την αναπαράσταση και την αντιστοιχία ανάμεσα στις δύο ολότητες (Kaput, 1987).

Ο Vergnaud (1998) θεωρεί ότι οι αναπαραστάσεις είναι μια δύσκολη έννοια και αναφέρει ότι χρήζουν επιστημονικής μελέτης. Πρώτον, επειδή τις χρησιμοποιούμε ως έκφραση εσωτερικών εικόνων, χειρονομιών και λέξεων και δεύτερον επειδή οι λέξεις και τα σύμβολα που χρησιμοποιούμε στην επικοινωνία δεν αναφέρονται άμεσα στην πραγματικότητα, αλλά αντιπροσωπεύουν τις οντότητες (αντικείμενα, ιδιότητες, σχέσεις, διαδικασίες, ενέργειες και κατασκευάσματα) για τις οποίες δεν υπάρχει καμία αυτόματη συμφωνία μεταξύ δύο ατόμων. Οι γνωστικοί ψυχολόγοι μάλιστα πιστεύουν πως ο τρόπος με τον

οποίο ένας οργανισμός αποκτά πληροφορίες από το περιβάλλον εξαρτάται από τρεις βασικές ικανότητες. (1) Την ικανότητα αναπαράστασης του περιβάλλοντος, (2) την ικανότητα χειρισμού και αλλαγών αυτών των αναπαραστάσεων και (3) την ικανότητα αξιοποίησης των αποτελεσμάτων της γνωστικής διαδικασίας (Gutiérrez, 1996; Phillips et al, 2010). Ο νους αποτελεί ένα σύστημα που οικοδομεί και χειρίζεται σύμβολα, επομένως καταβάλλονται προσπάθειες κατανόησης του πώς αναπαρίστανται και πώς χρησιμοποιούντα τα σύμβολα αυτά και πώς σχετίζονται με την ανθρώπινη δραστηριότητα, ιδιαίτερα τη νοητική (Βοσνιάδου, 2002).

Οι αναπαραστάσεις αποτελούν έναν τρόπο μοντελοποίησης μαθηματικών, έναν τρόπο για να δείξουν οι μαθητές τη σκέψη τους, ενώ καθιστούν τις μαθηματικές ιδέες πιο συγκεκριμένες και διαθέσιμες για στοχασμό (Coulombe & Berenson, 2001). Επιπλέον, υποστηρίζουν και επεκτείνουν τον συλλογισμό, βοηθούν τους μαθητές να επικεντρωθούν σε βασικά χαρακτηριστικά των μαθηματικών καταστάσεων και να αναγνωρίσουν τα κοινά μαθηματικά στοιχεία διαφόρων καταστάσεων (Fennell & Rowan, 2001). Κανένας όμως από τους παραπάνω ορισμούς δεν είναι ικανοποιητικός, καθώς κάθε αναπαράσταση δεν μπορεί να θεωρηθεί μεμονωμένα, αφού οι αναπαραστάσεις ανήκουν σε εξαιρετικά δομημένα συστήματα και είτε έχουν έναν υποκειμενικό χαρακτήρα είτε έναν πιο συμβατικό και πολιτισμικό (Goldin & Kaput, 1996). Τα συστήματα αυτά ονομάζονται συμβολικά σχήματα (Kaput, 1987) ή αναπαραστατικά συστήματα (Goldin, 1987; Lesh, Landau & Hamilon, 1983).

Οι αναπαραστάσεις χωρίζονται σε δύο κατηγορίες: τις εσωτερικές/νοητικές και τις εξωτερικές/σημειωτικές. Οι **εσωτερικές** αναπαραστάσεις αποτελούνται από νοητικές εικόνες, που κατασκευάζουν οι μαθητές, για να αναπαραστήσουν την εξωτερική πραγματικότητα και δεν είναι προσβάσιμες από άλλους, λειτουργούν δε στο επίπεδο του σημαινόμενου (Dufour-Janvier, Bednarz, & Belanger, 1987). Είναι νοητικοί σχηματισμοί που οικοδομούν οι μαθητές, για να αναπαραστήσουν την πραγματικότητα. Η ύπαρξη τους δηλώνεται από την εξωτερική συμπεριφορά των υποκειμένων. Με τη σύνδεση των διαφορετικών εσωτερικών αναπαραστάσεων, δημιουργούνται νέες νοητικές μονάδες, οι οποίες περιλαμβάνουν σχέσεις ανάμεσα στις ικανότητες και στις διαδικασίες που ανήκουν σε διαφορετικά γνωστικά πεδία. Έτσι τα υποκείμενα αναπτύσσουν ικανότητες, οι οποίες σχετίζονται με την

επιτυχημένη μετάβαση από τη μια αναπαράσταση μιας έννοιας σε μία άλλη και συμβάλλουν στην ολοκληρωμένη κατανόηση της έννοιας και στην ανάπτυξη της ικανότητας επίλυσης προβλήματος, αφού η σωστή αναπαράσταση του προβλήματος οδηγεί στην ορθή επίλυσή του (Δημητρίου, 1993).

Αντίθετα, ο όρος **εξωτερικές/σημειωτικές** αναπαραστάσεις αναφέρεται σε όλους τους εξωτερικούς φορείς (σύμβολο, σχήμα, διάγραμμα), οι οποίοι ως στόχο έχουν την εξωτερική αναπαράσταση μιας συγκεκριμένης μαθηματικής πραγματικότητας, λειτουργώντας στο επίπεδο του σημαίνοντος (Dufour-Janvier Bednarz & Belanger, 1987). Οι εξωτερικές αναπαραστάσεις αποτελούν τις παρατηρήσιμες ενσωματώσεις των εσωτερικών εννοιολογικών δομών των μαθητών, δηλαδή του τρόπου με τον οποίο κατανοούν τις έννοιες εσωτερικά οι μαθητές (Lesh, Post & Behr, 1987).

Ο Bruner (1966) υποστηρίζει την ενεργό εμπλοκή των μαθητών στη μάθηση, ώστε να ανακαλύψουν μόνοι τους αρχές και έννοιες καθώς και ότι το άτομο έχει τρεις ιεραρχημένους τρόπους αναπαράστασης για να σκεφτεί μια συγκεκριμένη έννοια ή ιδέα. Αρχικά τον πραξιακό (enactive), ο οποίος περιλαμβάνει την άμεση εμπειρία, δράση και εμπλοκή, τον οπτικό (iconic), ο οποίος αφορά τη χρήση μέσων οπτικοποίησης και τέλος τον συμβολικό (symbolic), στον οποίο γίνεται χρήση αφηρημένων συμβόλων. Κάθε τρόπος αναπαράστασης της σκέψης αντιστοιχεί σε ένα επίπεδο μάθησης. Προτείνεται λοιπόν να ακολουθούνται κατά τη διδασκαλία τα τρία αυτά στάδια, δηλαδή αρχικά να χρησιμοποιούνται απτικά υλικά, στη συνέχεια εικονιστικές αναπαραστάσεις και τέλος σύμβολα (Φεσάκης, 2014). Στην παρούσα εργασία υιοθετούνται μεν τα τρία αυτά είδη αναπαράστασης, ακολουθείται δε η αντίστροφη πορεία, ώστε να υπάρξει μια ολοένα ευκολότερη αξιολόγηση.

1.5.2. Αναπαραστάσεις και μαθηματικά

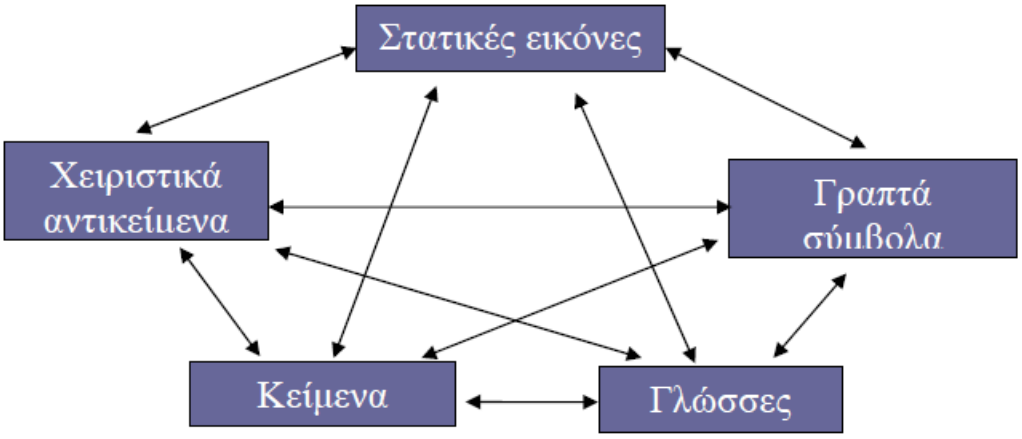
Τα τελευταία χρόνια η μαθηματική εκπαιδευτική κοινότητα υποστηρίζει τη χρήση των εικονικών αναπαραστάσεων στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος. Το NCTM (2000), στο Principles and Evaluation Standards for School Mathematics, ενθαρρύνει τη χρήση αναπαραστάσεων στην επίλυση προβλήματος στο δημοτικό

και στο γυμνάσιο. Επιχειρήματα για τη χρήση των εικόνων προβάλλονται και από γνωστικούς ψυχολόγους, οι οποίοι υποστηρίζουν ότι η χρήση εικονικών αναπαραστάσεων μπορεί να διευκολύνει την επίλυση μαθηματικού προβλήματος σε όλες τις φάσεις της διαδικασίας. Δύο υποθέσεις μπορούν να γίνουν σε σχέση με το πού οφείλεται η τόσο έντονη παρουσία των εικονικών αναπαραστάσεων. Η πρώτη έχει να κάνει με θεωρίες μάθησης που εμπλέκουν την έννοια των νοερών αναπαραστάσεων (Gagatsis & Shiakalli, 2004), και που υποστηρίζουν τη θέση ότι άτομα που διακρίνονται για την ποικιλία και τον πλούτο των νοερών αναπαραστάσεών τους έχουν αυξημένη ικανότητα κατανόησης και μάθησης των μαθηματικών και επομένως της επίλυσης μαθηματικού προβλήματος. Η δεύτερη υπόθεση, είναι ότι κάθε εικόνα ή αναπαράσταση βοηθάει την κατανόηση. Επομένως, χρησιμοποιούνται συνεχώς εικόνες στα βιβλία των μαθηματικών γιατί αυξάνουν την «αναγνωσιμότητα» των μαθηματικών κειμένων, δηλαδή την ικανότητα του αναγνώστη να αντλήσει πληροφορίες από ένα μαθηματικό κείμενο (Θεοδούλου & Γαγάτσης, 2003).

Υπάρχουν πέντε διαφορετικά είδη συστημάτων εξωτερικών αναπαραστάσεων στη μάθηση των μαθηματικών και στην επίλυση προβλήματος (Lesh, Post & Behr, 1987):

1. Κείμενα: η γνώση είναι οργανωμένη με βάση γεγονότα της καθημερινής ζωής, τα οποία αποτελούν το πλαίσιο για την ερμηνεία και επίλυση άλλων καταστάσεων του προβλήματος.
2. Χειριστικά αντικείμενα/μοντέλα: τα επιμέρους στοιχεία του συστήματος/ μοντέλου δεν έχουν νόημα αυτά καθ' αυτά, ωστόσο οι σχέσεις και οι λειτουργίες που προκύπτουν από το χειρισμό και το συνδυασμό των επιμέρους στοιχείων ταιριάζουν με πολλές καταστάσεις της καθημερινής ζωής (κύβοι αριθμητικής, ράβδοι κλασμάτων, αριθμητική γραμμή, κύβοι Dienes)
3. Εικόνες/διαγράμματα: στατικά εικονικά μοντέλα, τα οποία είναι δυνατόν να εσωτερικευθούν ως νοητικές εικόνες, όπως συμβαίνει και τα χειριστικά μοντέλα
4. Γλώσσες: συμπεριλαμβανομένων και των εξειδικευμένων, οι οποίες σχετίζονται με τα διάφορα επιμέρους πεδία

5. Γραπτά σύμβολα: μπορεί να περιλαμβάνουν εξειδικευμένες προτάσεις και φράσεις, καθώς επίσης συνηθισμένες προτάσεις και φράσεις στην ομιλούμενη γλώσσα

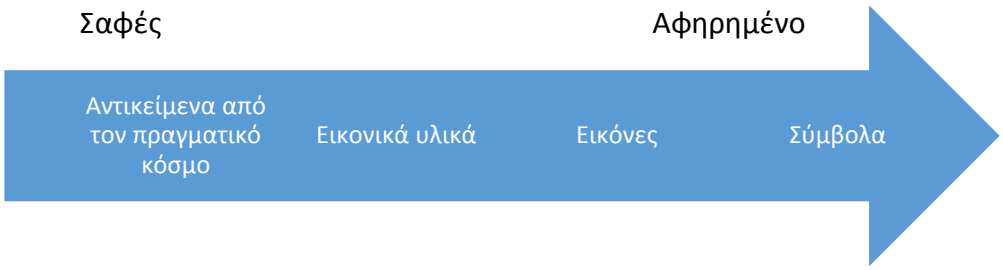


Διάγραμμα 1.2. Συστήματα εξωτερικών αναπαραστάσεων

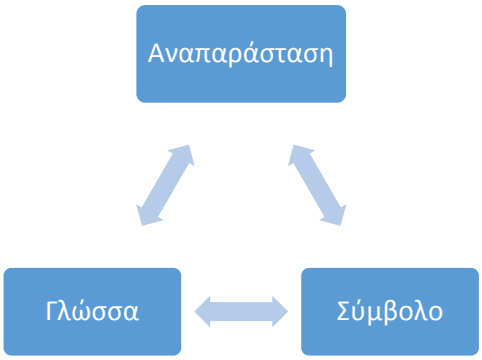
Όταν υπάρχει μετάβαση από μια αναπαράσταση σε άλλη, για παράδειγμα, από μια εξίσωση σε μια γραφική παράσταση, χρησιμοποιείται ο όρος μετάφραση, ο οποίος αναφέρεται στις ψυχολογικές διαδικασίες που εμπλέκονται στη διαδικασία αυτή (Janvier, 1987). Η διαδικασία της μετάφρασης από μια εξωτερική αναπαράσταση σε μία άλλη, ενισχύει τη σύνδεση ανάμεσα στις εξωτερικές αναπαραστάσεις. Η ερμηνεία των εξωτερικών αναπαραστάσεων και των σχέσεων αναπαράστασης δεν είναι αντικειμενική ή απόλυτη, αφού εξαρτάται από τις εσωτερικές αναπαραστάσεις των ατόμων που δίνουν την ερμηνεία (Goldin & Kaput, 1996). Μια αναπαράσταση δεν αναπαριστά κάτι από μόνη της, αλλά χρειάζεται ερμηνεία και για να ερμηνευθεί πρέπει να υπάρχει το άτομο που θα την ερμηνεύσει (Von Glaserfeld, 1987). Κάθε άτομο μάλιστα αντιλαμβάνεται και ερμηνεύει μια εξωτερική αναπαράσταση με βάση τις προϋπάρχουσες νοητικές αναπαραστάσεις, ενώ η ερμηνεία μπορεί να επέλθει και με το συνδυασμό επιμέρους γνωστών στοιχείων, με αποτέλεσμα να οικοδομηθεί μια νέα έννοια (Παπαϊωάννου, 2014).

Σύμφωνα με τον Halford (1993) η κατανόηση στα μαθηματικά περιλαμβάνει την αναπαράσταση μιας μαθηματικής δομής από μία άλλη και τον καθορισμό του τι μένει ίδιο και τι αλλάζει μεταξύ των δύο δομών. Οι μαθητές μεταφράζουν τις εξωτερικές αναπαραστάσεις (χειροπιαστές, εικονικές, διαγραμματικές, γραπτά σύμβολα, προφορικές λέξεις) σε εσωτερικές (νοητικά μοντέλα/αντιλήψεις).

Παρόμοια αποθηκεύουν κιναισθητικές ενέργειες που εμπλέκονται για την αναπαράσταση των σχέσεων και των μεταφράσεων στη μνήμη. Επομένως, η χρήση εξωτερικών αναπαραστάσεων παρέχει μια νοητική εικόνα που λειτουργεί ως σκαλωσιά για τη συνακόλουθη ανάπτυξη της έννοιας και του αφαιρετικού συμβολισμού. Πολλές φορές οι μαθητές είναι σε θέση να αναπαράγουν νοητικά τις σχέσεις και τις μεταφράσεις μεταξύ σαφών και αφηρημένων αναπαραστάσεων, υπάρχει όμως ένα κενό μεταξύ δράσης και έκφρασης, το οποίο είναι δύσκολο να γεφυρωθεί. Τα εικονικά υλικά είναι πιο αφηρημένα από τα αντικείμενα, επομένως βοηθούν το γεφύρωμα μεταξύ αντικειμένων και πιο αφηρημένων αναπαραστάσεων (εικόνες, σύμβολα). Τα πραγματικά αντικείμενα είναι πολύ-αισθητηριακά, ενώ τα εικονικά υλικά δι-αισθητηριακά. Ως αποτέλεσμα, τα πραγματικά αντικείμενα αναπτύσσουν πιο λεπτομερείς μνημονικές δομές-σχήματα, αλλά τα εικονικά υλικά αναπτύσσουν βαθύτερη μαθηματική κατανόηση (Baturo, Cooper & Thompson, 2003).



Διάγραμμα 1.3. Σαφήνεια αναπαραστατικών συστημάτων



Διάγραμμα 1.4. Σχέση μεταξύ αναπαράστασης-γλώσσας-συμβόλων

Πιο συγκεκριμένα, τα μαθηματικά παρουσιάζουν μια ιδιαιτερότητα σε σχέση με τα άλλα γνωστικά αντικείμενα, επειδή η μαθηματική γνώση δε μπορεί να γίνει κατανοητή με εμπειρικό τρόπο, αφού μια έννοια των μαθηματικών δεν είναι δυνατόν να έχει άμεση δίοδο πρόσβασης (Duval, 2006). Έχει αναγνωριστεί πλέον

ευρέως η κεντρική θέση που κατέχουν οι διάφορες μορφές αναπαράστασης στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών (Gagatsis & Elia, 2005). Ενδεικτικά, ένα από τα κριτήρια που αναφέρεται στο Principles and Evaluation Standards for School Mathematics (2000) σχετίζεται με τη χρήση αναπαραστάσεων κατά τη μαθησιακή διαδικασία. Επισημαίνεται μάλιστα ότι είναι πολύ σημαντικό οι μαθητές να αναπαριστούν τις μαθηματικές έννοιες με τρόπο που να έχει νόημα για τους ίδιους, ακόμα και αν οι αναπαραστάσεις που πιθανόν να χρησιμοποιήσουν να μην είναι οι συμβατικές. Επιπρόσθετα, πρέπει να μαθαίνουν να χρησιμοποιούν τις συμβατικές μορφές αναπαράστασης κατά τρόπο που να διευκολύνει τη μάθηση και την επικοινωνία με χρήση μαθηματικών εννοιών (NCTM, 2000).

Οι αναπαραστάσεις καθορίζουν σε σημαντικό βαθμό όσα μαθαίνει ο μαθητής και πόσο εύκολα επιτυγχάνεται η κατανόηση των εννοιών στα μαθηματικά (Cheng, 2000). Με άλλα λόγια, οι αναπαραστάσεις λειτουργούν ως χρήσιμα εργαλεία για την οικοδόμηση της μαθηματικής γνώσης, την εννοιολογική κατανόηση και την επικοινωνία μαθηματικών εννοιών (Greeno & Hall, 1997). Εντούτοις, έρευνα των Rau, Aleven & Rummel (2009) έδειξε ότι οι μαθητές επωφελούνται από πολλαπλές γραφικές αναπαραστάσεις (multiple graphical representations-MGR) σε σχέση με τη χρήση μιας αναπαράστασης, μόνο όταν καλούνται να εξηγήσουν οι ίδιοι πώς σχετίζονται τα γραφήματα και τα σύμβολα.

Η ανάγκη χρήσης ποικιλίας αναπαραστάσεων συνδέεται με την οικονομία επεξεργασίας, τη συμπληρωματικότητα των πεδίων αναπαράστασης και τη δομή της αναπαράστασης σε σχέση με την κατανόηση. Επισημαίνεται ότι κάθε πεδίο αναπαράστασης χαρακτηρίζεται από διαφορετικές δυνατότητες. Κάθε αναπαράσταση είναι γνωστικά μερική ως προς αυτό που παριστάνει και το κάθε πεδίο αναπαριστά διαφορετικές πτυχές του πεδίου μιας κατάστασης, οπότε η όσο το δυνατόν πληρέστερη κατανόηση μιας έννοιας βασίζεται στο συνδυασμό τουλάχιστον δύο πεδίων αναπαράστασης (Γαγάτσης et al., 2001). Επομένως, ο συντονισμός των διαφόρων σημειωτικών συστημάτων δεν αποτελεί συνέπεια, αλλά προϋπόθεση της κατανόησης στα μαθηματικά (Duval, 2006). Εντούτοις, η πολλαπλότητα των αναπαραστάσεων αυξάνει τη δυσκολία και την πολυπλοκότητα, αφού αναμένεται από το μαθητή να αντιληφθεί τις κοινές ιδιότητες των διαφορετικών αναπαραστάσεων που αναφέρονται στην ίδια έννοια, ώστε να

κατορθώσει να την οικοδομήσει (Γαγάτσης et al., 2001). Επομένως, η αναγνώριση και αξιοποίηση των σχέσεων δομής ανάμεσα σε αναπαραστάσεις που διαφέρουν όσον αφορά τα εξωτερικά χαρακτηριστικά είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με τη μαθηματική γνώση (Greer & Harel, 1998). Η δυσκολία ορισμένων μαθητών να συνδέσουν τα διάφορα πεδία αναπαράστασης υποδηλώνει την ύπαρξη γνωστικής δυσκολίας στην ευέλικτη μετάβαση μεταξύ διαφορετικών αναπαραστάσεων για την ίδια μαθηματική έννοια (Duval, 2002).

Ο ρόλος των αναπαραστάσεων στη μάθηση των μαθηματικών εννοιών αποτελεί ένα σημείο αιχμής των ερευνών της διδακτικής των μαθηματικών και της ψυχολογίας. Η ιδέα της αναπαράστασης αποτελεί ένα βασικό εργαλείο της σύγχρονης Διδακτικής των Μαθηματικών και κυριαρχεί στη Θεωρίας Γνώσης και Γνωστικής Ψυχολογίας (Billman 1999; Stufflebeam 1999). Οι εξωτερικές αναπαραστάσεις βοηθούν τους μαθητές να συλλάβουν το νόημα των μαθηματικών εννοιών. Εντούτοις, η κατανόηση των μαθηματικών εννοιών δεν προωθείται πάντα από την απλή παρουσία αναπαραστάσεων. Σημαντικό ρόλο διαδραματίζει η προϋπάρχουσα γνώση, η επεξήγηση και η κατάλληλη ερμηνεία των σχετικών εξωτερικών αναπαραστάσεων, το νόημα των οποίων μπορεί να διαστρεβλωθεί, ιδιαίτερα σε περιπτώσεις που αυτές έρχονται σε σύγκρουση με τις προηγούμενες πεποιθήσεις του μαθητή.

Η ανθρώπινη σκέψη χαρακτηρίζεται από τη χρήση πολλών ειδών αναπαράστασης για την ίδια έννοια, ενώ υπογραμμίζεται ότι η πρόοδος των γνώσεων συνοδεύεται από τη δημιουργία και την ανάπτυξη νέων ειδικών σημειωτικών συστημάτων, που συνυπάρχουν και λειτουργούν παράλληλα με το πρώτο σύστημα, αυτό της φυσικής γλώσσας (Gagatsis & Shiakalli, 2004). Η δυνατότητα προσφυγής σε πολλαπλά συστήματα αναπαράστασης αποτελεί βασικό χαρακτηριστικό της ανθρώπινης σκέψης. Επομένως, η εκπαιδευτική πράξη, η οποία είναι μια από τις εκφράσεις της ανθρώπινης σκέψης, χαρακτηρίζεται από τη χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων, που ως στόχο έχουν την απόδοση ιδεών με διαφορετικούς τρόπους. Η μαθηματική εκπαίδευση, ως αναπόσπαστο μέρος της εκπαιδευτικής πράξης, αποτελεί επίσης τομέα της ανθρώπινης δραστηριότητας και σκέψης, ο οποίος χαρακτηρίζεται από τη χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων. Η ανάγκη μελέτης της έννοιας της αναπαράστασης προκύπτει τόσο για πρακτικούς

όσο και για θεωρητικούς λόγους (Kaput, 1985, 1987). Οι *πρακτικοί* λόγοι αφορούν τις δυσκολίες των μαθητών στη μετάφραση από τη μια αναπαράσταση στην άλλη, σε σχέση με τις μαθηματικές έννοιες, καθώς επίσης ανάμεσα στην καθημερινή εμπειρία και τα μαθηματικά. Οι *θεωρητικοί* λόγοι αφορούν την ανάγκη για ύπαρξη ενός συστηματικού θεωρητικού πλαισίου αναφορικά με τα διάφορα συστήματα αναπαράστασης, ώστε να μπορούν να αντιμετωπιστούν αποτελεσματικά οι πρακτικές δυσκολίες, που προκύπτουν σε σχέση με την κατανόηση και τη χρήση των αναπαραστάσεων (Παπαϊωάννου, 2014).

Τα παιδιά έρχονται καθημερινά σε επαφή με μεγάλη ποικιλία εξωτερικών αναπαραστάσεων από μικρή ηλικία. Στόχος της διδασκαλίας είναι η σε βάθος κατανόηση μαθηματικών εννοιών μέσα από τη δημιουργία καλά οργανωμένων νοητικών αναπαραστάσεων. Η κατανόηση μιας έννοιας άλλωστε προϋποθέτει την ικανότητα αναγνώρισης της, όταν αυτή παρουσιάζεται με μια ποικιλία ποιοτικά διαφορετικών συστημάτων αναπαράστασης, την ικανότητα ευέλικτου χειρισμού της έννοιας μέσα στα συγκεκριμένα συστήματα αναπαράστασης και την ικανότητα μετάφρασης της από το ένα σύστημα στο άλλο (Lesh, Post & Behr, 1987; Lesh et al., 1987; Seeger, 1998). Οι αναπαραστάσεις είναι «σύμφυτες» με τα Μαθηματικά (Dufour-Janvier, Bednarz & Belanger, 1987). Υπάρχουν μάλιστα περιπτώσεις στις οποίες οι αναπαραστάσεις είναι τόσο στενά συνδεδεμένες με μια έννοια, όπως για παράδειγμα οι συναρτήσεις και η γραφική παράσταση, ώστε είναι δύσκολο να γίνει κατανοητή η έννοια, χωρίς τη χρήση της συγκεκριμένης αναπαράστασης. Σύμφωνα με τους Καλδρυμίδου και Οικονόμου (1992) κάθε αναπαράσταση παρέχει πληροφορίες για ορισμένες πτυχές της έννοιας, χωρίς να μπορεί να την περιγράψει ολοκληρωτικά. Επομένως, οι διάφορες αναπαραστάσεις της ίδιας έννοιας αλληλοσυμπληρώνονται.

1.5.3. Αναπαραστάσεις και κλάσματα

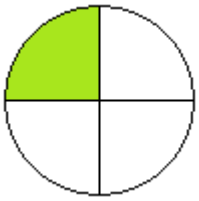
Οι αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούνται για την προσέγγιση των κλασματικών εννοιών παίζουν καθοριστικό ρόλο στη σημασία της έννοιας, ενώ επίσης θεωρούνται συστατικό των εννοιών. Οι αναπαραστάσεις διακρίνονται ανάλογα με τη λειτουργία τους σε αναπαραστάσεις συγκεκριμένων καταστάσεων ή

περιπτώσεων, οι οποίες λειτουργούν άλλοτε ως πρότυπα παραδείγματα των εννοιών, άλλοτε ως αντιπρόσωποι της έννοιας και άλλοτε ως αντικείμενο μελέτης. Επιπλέον, ανάλογα με τον τρόπο παρουσίασης διακρίνονται σε εμπράγματες (αντικείμενα) και εικονικές ή διαγραμματικές (εικόνες αντικειμένων, αναπαραστάσεις). Η διδασκαλία των κλασματικών εννοιών στο δημοτικό σχολείο γίνεται κυρίως με τη χρήση εικονικών και διαγραμματικών αναπαραστάσεων (Γαγάτσης, Ιωάννου, Σιημητρά-Κωνσταντίνου, & Χριστοδουλίδου, 2006).

Πιο συγκεκριμένα, το κλάσμα μπορεί να αποδοθεί με πέντε διαφορετικούς τρόπους με τη χρήση διαφορετικών μοντέλων-αναπαραστάσεων, γεγονός που δυσκολεύει την κατανόηση του από τους μαθητές. Τα μοντέλα αυτά διακρίνονται σε *διακριτά*, όταν αναπαριστούν το μέρος των αντικειμένων ενός συνόλου, σε *συνεχή*, όταν αναπαριστούν το κλάσμα ως μέρος μιας μονάδας μέτρησης π.χ. μιας επιφάνειας και στην *αριθμητική γραμμή*.

Πιο αναλυτικά (Δημοσθένους, 2012):

a) Μέρος μιας <u>επιφάνειας</u> η οποία είναι χωρισμένη σε ομοιόμορφα μέρη: Οι αναπαραστάσεις αυτού του είδους χρησιμοποιούνται συχνότερα στη διδασκαλία των κλασμάτων (πίτες, σοκολάτες, τετράγωνα κ.τ.λ.) και ως εκ τούτου οι μαθητές είναι περισσότερο εξοικειωμένοι με αυτές. Ωστόσο, οι συγκεκριμένες αναπαραστάσεις κρύβουν αρκετούς κινδύνους, όπως την ενδυνάμωση της συνήθους παρανόησης αρκετών μαθητών ότι το κλάσμα είναι πάντα μικρότερο από τη μονάδα. Πολλοί μαθητές, μάλιστα, δυσκολεύονται στην αναγνώριση του κλάσματος ως μέρος επιφάνειας, καθώς στρέφουν την προσοχή τους στο μέρος που χρωματίζεται ή αποκόπτεται χωρίς να δίνουν σημασία στο όλο. Τέλος, η χρήση γεωμετρικών σχημάτων σε καταστάσεις μέσα από τις οποίες θα αποκτήσουν την αριθμητική τους σημασία τα κλάσματα, προϋποθέτει μια πολύ καλή γνώση, τόσο των σχημάτων όσο των ιδιοτήτων τους και των σχέσεων των μερών τους.



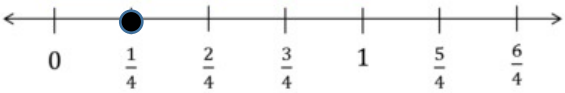
Εικόνα 1.1. Μοντέλο επιφάνειας

b) Μέρος ενός <u>συνόλου αντικειμένων</u>: Περιλαμβάνει ένα σύνολο αντικειμένων τα οποία δεν είναι απαραίτητο να έχουν το ίδιο σχήμα ή μέγεθος. Σε αυτά, το σύνολο αποτελεί τη μονάδα αναφοράς, ενώ τα μέρη εκφράζονται ως υποσύνολα του αρχικού συνόλου. Μεγάλη δυσκολία παρουσιάζεται όταν το

Εικόνα 1.2. Μοντέλο συνόλου αντικειμένων

πλήθος των αντικειμένων δεν συμπίπτει με τον παρονομαστή, κάτι που ενισχύει την υπόθεση ότι όταν παρουσιάζονται στους μαθητές στερεότυπες αναπαραστάσεις με αριθμό μερών ίσο με τον παρονομαστή, ενισχύεται η διαδικασία καταμέτρησης για την εξαγωγή συμπεράσματος.

c) Σημείο πάνω στην <u>αριθμητική γραμμή</u>: Σημείο ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς πάνω σε μία ευθεία. Η συγκεκριμένη αναπαράσταση είναι αρκετά αφηρημένη αλλά ταυτόχρονα πάρα πολύ χρήσιμη κατά τη διδασκαλία των πράξεων των κλασμάτων καθώς και στη σύγκριση κλασμάτων. Η αριθμητική γραμμή διαφέρει από τα άλλα μοντέλα, επειδή η μονάδα αναπαρίσταται από ένα μήκος και η αριθμητική γραμμή υποβάλλει την ιδέα όχι μόνο της επανάληψης της μονάδας αλλά και της υποδιαίρεσης όλων των επαναλαμβανόμενων μονάδων και επειδή στην αριθμητική γραμμή δεν υπάρχει διαχωρισμός μεταξύ των μονάδων. Επίσης, δεν υπάρχει κενό μεταξύ των μονάδων, σε αντίθεση με αυτό που υπάρχει μεταξύ των επαναλαμβανόμενων επιφανειών, επομένως, το μοντέλο αυτό θεωρείται εντελώς συνεχές. Τέλος, κάθε σημείο στην αριθμητική γραμμή δεν έχει αριθμητικό νόημα, μέχρι να καθορισθεί το νόημα τουλάχιστον άλλων δύο σημείων αναφοράς. Η χρήση όμως σημείων αναφοράς μεταθέτει το επίκεντρο της προσοχής των μαθητών σε αυτά τα σημεία, και όχι στην εικονική αναπαράσταση του κλάσματος, επομένως οδηγεί τους μαθητές σε μια καλύτερη κατανόηση της συμβολικής αναπαράστασης του κλάσματος.



Εικόνα 1.3. Μοντέλο αριθμητικής γραμμής

Εικόνα 1.4. Μοντέλο αναλογίας

d) <u>Αναλογία</u>: Σε αυτήν την περίπτωση, το κλάσμα δεν έχει να κάνει με ολότητες, ομάδες ή σημεία, αλλά με συγκρίσεις. Γίνεται, με λίγα λόγια, μια σύγκριση των σχημάτων χωρίς να λαμβάνεται υπόψη η ολότητα.

Π.χ. 1 θηλυκό προς 4 αρσενικά σκυλάκια

e) <u>Διαίρεση</u>: Η περίπτωση αυτή θεωρείται η πιο δύσκολη, αφού το κλάσμα προκύπτει συνήθως μέσα από προβλήματα της καθημερινής ζωής. Ωστόσο, όταν το κλάσμα παρουσιάζεται μέσα από τέτοια προβλήματα, οι μαθητές μπορεί να βοηθηθούν στην κατανόηση της έννοιας του κλάσματος και των επιμέρους ιδιοτήτων του.

Εικόνα 1.5. Μοντέλο διαίρεσης

«Πόσα κομμάτια σοκολάτας θα φάνε τέσσερα άτομα, αν έχουν μόνο μία σοκολάτα;».

Τα αναπαραστατικά συστήματα έχουν καθιερωθεί στα σχολεία γιατί έχουν πολλά πλεονεκτήματα όπως ότι μπορούν να διευκολύνουν τη διδασκαλία και τη μάθηση διαφόρων μαθηματικών εννοιών και δεν απαιτούν νοητική ωριμότητα, όπως οι αφηρημένες μαθηματικές έννοιες που παρουσιάζονται με λόγια ή σύμβολα. Εντούτοις απαιτούν πολλές εμπειρίες με φυσικά υλικά, για να γίνουν κατανοητές. Οι πρώτες εμπειρίες και αλληλεπιδράσεις με τα συστήματα αναπαράστασης δημιουργούν τη βάση για την κατανόηση των αφηρημένων εννοιών που θα συναντήσουν οι μαθητές σε μεγαλύτερες ηλικίες. Ωστόσο, τα αναπαραστατικά συστήματα έχουν τα εξής μειονεκτήματα, (1) δεν είναι «μαγικά», δεν είναι δηλαδή φορείς νοημάτων από μόνα τους, για να μπορέσουν οι μαθητές να τα χρησιμοποιήσουν αποτελεσματικά χωρίς να απαιτούνται αυξημένες ανάγκες επεξεργασίας, (2) πρέπει να τα γνωρίζουν καλά, ώστε να τα χρησιμοποιήσουν αυτόματα. Τέλος, (3) οι μαθητές μαθαίνουν μερικές φορές να τα χρησιμοποιούν μηχανικά, με λίγη έως καθόλου γνώση των μαθηματικών εννοιών που κρύβονται πίσω από τις διαδικασίες, αποσπούν την προσοχή τους, είναι ευάλωτα σε παρερμηνείες. Επίσης, (4) πολλοί δάσκαλοι τα υπερεκτιμούν, επειδή οι έννοιες που παρουσιάζουν τους είναι ήδη γνωστές και έτσι εύκολα τις «βλέπουν» μέσα στα συστήματα αυτά, και η απλή παρουσία τους δεν εγγυάται την απόκτηση εννοιολογικής κατανόησης. Ωστόσο, τα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα ενός

συστήματος εμφανίζονται κατά την χρήση του, δηλαδή ένα σύστημα που δεν χρησιμοποιείται δεν έχει πλεονεκτήματα ούτε μειονεκτήματα (Ορφανός, 2003).

Η χρήση διαφόρων μοντέλων για τη διδασκαλία των κλασμάτων εμφανίζει περιορισμούς σε σχέση με το βαθμό δυσκολίας στη χρήση τους ή με την έννοια που διδάσκεται. Πιο συγκεκριμένα, η χρήση των μοντέλων επιφάνειας ή εμβαδού θεωρείται πιο εύκολη από τη χρήση των διακριτών μοντέλων, επομένως η χρήση τους πρέπει να προηγείται κατά τη διδασκαλία (Κολέζα, 2000; Van de Walle, 2005). Η δυσκολία στη χρήση μοντέλων συνόλων έγκειται στην ανάγκη αναγνώρισης ενός συνόλου ως μία μονάδα και καθενός από τα ισοπληθή υποσύνολά του ως ένα μέρος του όλου (Behr & Post, 1992; Κολέζα, 2000). Ο περιορισμός σε ένα από αυτά τα δύο είδη μοντέλων μάλιστα είναι δυνατόν να περιορίσει την αντίληψη των μαθητών για τα κλάσματα (Pitkethly & Hunting, 1996). Όσον αφορά τη χρήση της αριθμογραμμής, αυτή ενέχει τις περισσότερες δυσκολίες, καθώς οι μαθητές δυσκολεύονται να αντιστοιχίσουν ένα κλάσμα σε αυτήν, ιδίως όταν ο αριθμός των ίσων μερών που έχει διαμεριστεί η αριθμογραμμή είναι πολλαπλάσιος ή υποπολλαπλάσιος του παρονομαστή του κλάσματος (Behr et al., 1983; Van deWalle, 2005; Charalambous & Pitta-Pandazi, 2007). Κάποιοι υποστηρίζουν ότι η χρήση του συνεχούς μοντέλου των κυκλικών δίσκων ενδείκνυται τόσο για την κατανόηση βασικών κλασματικών εννοιών, όσο και για την κατανόηση της πρόσθεσης κλασμάτων (Cramer, Post & delMas, 2002; Cramer, Wyberg, & Leavitt, 2008), ενώ άλλοι υποστηρίζουν ότι χρησιμοποιώντας διαφορετικούς κυκλικούς τομείς ως μονάδα αναφοράς παρακάμπτεται η πιθανότητα να ενισχυθεί η σκέψη που βασίζεται σε ακέραιους αριθμούς (Cramer, Post & delMas, 2002).

1.6. Συχνότερες δυσκολίες

«Τα προβλήματα μου άρχισαν από νωρίς.
Μικρός πήγα σε σχολείο για δασκάλους με ειδικές ανάγκες».
Woody Allen

1.6.1. Μαθητών τυπικής ανάπτυξης

Οι τυπικοί μαθητές παρουσιάζουν πολλές αδυναμίες στην κατανόηση και χρήση των κλάσματων αν και δίνεται μεγάλη έμφαση στη διδασκαλία τους, επειδή αυτά αποτελούν ένα περίπλοκο κατασκεύασμα. Ωστόσο, η ανάπτυξη της ικανότητας χειρισμού των κλασματικών αριθμών αποτελεί ανάγκη της καθημερινής ζωής και το θεμέλιο πάνω στο οποίο στηρίζονται οι στοιχειώδεις αλγεβρικές πράξεις. Γενικά οι δυσκολίες αποδίδονται στην εννοιολογική φύση των ρητών αριθμών, στο συμβολισμό και στις αναπαραστάσεις τους, στις διαδικασίες συλλογισμού με κλασματικούς αριθμούς και σε επιστημολογικά εμπόδια (Γαγάτσης, Ιωάννου, Σιημητρά-Κωνσταντίνου, & Χριστοδουλίδου, 2006).

Αναλυτικότερα, οι δυσκολίες που είναι σχετικές με την **εννοιολογική φύση** των ρητών αριθμών, οφείλονται στην πυκνή δομή τους σε αντίθεση με τη διακριτή δομή των φυσικών αριθμών, οι οποίοι αποτελούν το μοντέλο πάνω στο οποίο οργανώνεται η οικοδόμηση της έννοιας του κλασματικού αριθμού. Στις σημαντικότερες δυσκολίες εννοιολογικής φύσης συμπεριλαμβάνονται η σύνδεση των συστατικών αριθμών ενός κλάσματος (αριθμητής, παρονομαστής) με την απόλυτη αξία των φυσικών αριθμών, η αντίληψη ότι ανάμεσα σε δύο διαδοχικά κλάσματα (π.χ. 1/4 και 2/4) δεν υπάρχει άλλος κλασματικός αριθμός και η αντίληψη ότι η κλασματική μονάδα είναι σταθερό μέγεθος (1/2=1/3). Επιπρόσθετα, κυριαρχεί η αντίληψη της σχέσης μέρους-μέρους, αντί της σχέσης μέρους-όλου, ο λογιστικός χειρισμός των αριθμητών ανεξάρτητα από τους παρονομαστές, η δυσκολία των παιδιών να υπερβούν την κλασματική ποσότητα (Γαγάτσης, Ιωάννου, Σιημητρά-Κωνσταντίνου, & Χριστοδουλίδου, 2006).

Όσον αφορά τα λάθη-παρανοήσεις **αναπαραστατικής φύσης**, αυτά αναφέρονται σε λάθη των μαθητών στην αναγνώριση κλασμάτων ως μέρος

συνεχούς επιφάνειας, δηλαδή αναγνώρισης του κλάσματος μέσα από συνεχή επιφάνεια, αφού τείνουν να στρέφουν την προσοχή τους μόνο στο μέρος που χρωματίζεται ή αποκόπτεται και δεν συγκρατούν και τις δύο διαστάσεις που απεικονίζει ένας κλασματικός αριθμός ή δεν κατανοούν ότι τα μέρη πρέπει να είναι ισοδύναμα, για να ισχύει η σχέση που αναπαριστά το κλάσμα. Τα λάθη των μαθητών μπορεί να αφορούν και την αναγνώριση κλασμάτων ως μέρος ενός συνόλου αντικειμένων, δηλαδή να απαντούν με κλάσμα, αλλά να αναφέρονται σε λόγο και όχι σε μέρος από σύνολο αντικειμένων. Επιπλέον, δυσκολία παρουσιάζουν οι μαθητές και στην προσπάθειά τους να απαντήσουν σε παρόμοιες ασκήσεις όπου το σύνολο των αντικειμένων είναι πιο μεγάλο από τον παρονομαστή του κλάσματος που τους ζητείται να επιλέξουν. Σχετικά με την αναγνώριση του κλάσματος ως λόγου, οι μαθητές δυσκολεύονται να κατανοήσουν ότι οι συγκρίσεις γίνονται μεταξύ επιμέρους ομάδων εντός μιας ολότητας, ενώ παίζει ρόλο και η σειρά αναφοράς του κάθε επιμέρους συνόλου (π.χ. ¾ ως λόγος σημαίνει 3 κόκκινα προς 4 πράσινα μήλα, σύνολο 7 ενώ έχει σημασία ποιος αριθμός θα αναφερθεί πρώτος αλλιώς ανατρέπεται η αναλογία) (Γαγάτσης, Ιωάννου, Σιημητρά-Κωνσταντίνου, & Χριστοδουλίδου, 2006).

Αναφορικά με τα λάθη των μαθητών στην αναγνώριση του κλάσματος ως μέτρου, δηλαδή στην χρήση της **αριθμητικής γραμμής**, αναφέρονται δυσκολίες στην αναγνώριση της μονάδας αναφοράς του κλάσματος και στην επίλυση προβλημάτων στα οποία οι υποδιαιρέσεις στην αριθμητική γραμμή δεν ισούνται με τον παρονομαστή του κλάσματος. Επιπλέον, δυσκολίες προκύπτουν κατά την επίλυση προβλημάτων στα οποία οι υποδιαιρέσεις της αριθμητικής γραμμής δεν είναι παράγοντες ή πολλαπλάσια του παρονομαστή του κλάσματος αλλά και στη μετάφραση ανάμεσα στη συμβολική και εικονική αναπαράσταση των πληροφοριών της αριθμητικής γραμμής. Σε αυτά τα έργα συνήθως σημειώνονται οι χαμηλότερες επιδόσεις (Γαγάτσης και Ηλία, 2004), αφού αρκετές φορές οι μαθητές μετρούν τα σημεία αντί για τα διαστήματα πάνω στην αριθμητική γραμμή. Κάποιοι (Ni, 2002) μάλιστα υποστηρίζουν ότι η αριθμητική γραμμή περιλαμβάνει παραπλανητικά στοιχεία για τους μαθητές οι οποίοι έχουν παρανοήσεις ή δεν έχουν αναπτύξει πλήρως την έννοια των κλασματικών αριθμών, για αυτό αποτελεί όχι απλώς μοντέλο για διδασκαλία, αλλά και αξιολογικό εργαλείο για τον εντοπισμό των

αντιφάσεων εκ μέρους των μαθητών. Τέλος, σχετικά με τα λάθη των μαθητών στην αναγνώριση κλασμάτων ως διαίρεση, αναφέρεται η δυσκολία των μαθητών να δουν το κλάσμα ως διαίρεση ανάμεσα σε δύο αριθμούς (Γαγάτσης, Ιωάννου, Σιημητρά-Κωνσταντίνου, & Χριστοδουλίδου, 2006).

Αν αναλογιστεί κανείς το πρόβλημα από τη **διδακτική σκοπιά** θα καταλήξει στο γεγονός ότι η αλγοριθμική προσέγγιση και η έμφαση στην διαδικαστική γνώση και στην παραδοσιακή διδασκαλία δημιουργεί δυσκολίες στην κατανόηση των κλασμάτων, αφού οι διαδικασίες και οι κανόνες εφαρμόζονται μηχανικά. Επιπρόσθετα, κατά τη διδασκαλία γενικότερα, δεν επιχειρείται η συνειδητοποιημένη σύνδεση και η συσχέτιση της έννοιας των κλασμάτων με τους δεκαδικούς και τους ακεραίους ή ακόμα και μία σύγκριση, ώστε οι μαθητές να εντοπίζουν ποιες πρότερες γνώσεις ισχύουν ή όχι όταν εξετάζονται τα κλάσματα. Επιπλέον, η παραδοσιακή διδασκαλία των κλασμάτων περιλαμβάνει την πρόωρη χρήση συμβολικών αναπαραστάσεων και δίνει έμφαση στην υπο-έννοια μέρος-όλο και στο εμβαδόν κύκλου ενώ αρκετοί δάσκαλοι προσεγγίζουν τα κλάσματα με τον τρόπο σκέψης ενός ενήλικα και όχι ενός παιδιού, δίνοντας έμφαση στον τυπικό συμβολικό τρόπο παρουσίασης, όπως αυτός έχει οικοδομηθεί πλήρως σε έναν ενήλικα (Γαγάτσης, Ιωάννου, Σιημητρά-Κωνσταντίνου, & Χριστοδουλίδου, 2006).

Από την ανασκόπηση της βιβλιογραφίας προκύπτει πως η διδακτική προσέγγιση των κλασμάτων είναι συχνά ανεπαρκής. Οι Moss & Case (1999) υποστηρίζουν πως γίνονται **τρία βασικά σφάλματα κατά τη διδασκαλία** των κλασμάτων και τα οποία είναι ανάγκη να διερευνηθούν διεξοδικά είναι τα κάτωθι (Κωνσταντινίδου, 2015):

1. Δε γίνονται ορατές στα παιδιά οι διαφορές μεταξύ των φυσικών και των ρητών αριθμών αλλά αντίθετα, δίνεται έμφαση στις επιφανειακές ομοιότητες μεταξύ τους, με αποτέλεσμα να προκαλείται σύγχυση.
2. Δε δίνεται η απαραίτητη σημασία στις δυσκολίες των παιδιών που σχετίζονται με τη συμβολική αναπαράσταση των κλασμάτων, αλλά αντίθετα, θεωρείται ότι γίνονται άμεσα αντιληπτές.
3. Δε δίνεται τόση έμφαση στην εννοιολογική κατανόηση των κλασμάτων, αλλά κυρίως στη διαδικαστική γνώση που τα αφορά.

Ο τρόπος παρουσίασης των **αναπαραστάσεων** για τα κλάσματα συνήθως είναι συγκεκριμένος, στερεότυπος και συχνά πολύ καθοδηγούμενος, γεγονός που οδηγεί τον διαχωρισμό των σχημάτων να εξελιχθεί σε στερεότυπο. Επίσης, όταν τα σχήματα δίνονται ήδη χωρισμένα σε μέρη, οι μαθητές απλά καταμετρούν και χρωματίζουν τόσα μέρη, όσα υπαγορεύει ο αριθμητής του κλάσματος μηχανιστικά. Εντούτοις, η επικέντρωση της προσοχής μόνο στον αριθμητή και η αγνόηση τον παρονομαστή, οδηγεί στην ενίσχυση της δυσκολίας των μαθητών να αντιληφθούν το κλάσμα ως μία ποσότητα, δηλαδή ως έναν αριθμό, του οποίου η σημασία προέρχεται από τη σχέση που έχει ο αριθμητής με τον παρονομαστή. Επιπρόσθετα, οι αναπαραστάσεις εμβαδού επιφάνειας, οι οποίες χρησιμοποιούνται κατά κόρον για τη διδασκαλία της υπό εξέταση έννοιας προϋποθέτουν την πολύ καλή γνώση των σχημάτων, των ιδιοτήτων τους και των σχέσεων των μερών τους (Γαγάτσης, Ιωάννου, Σιημητρά-Κωνσταντίνου, & Χριστοδουλίδου, 2006).

Ωστόσο, μπορεί συχνά να υπάρχει έλλειψη του **γνωσιολογικού υποβάθρου** των γεωμετρικών εννοιών και της επιφάνειας, με αποτέλεσμα οι μαθητές να επικεντρώνονται κάθε φορά στη συγκεκριμένη περίπτωση που έχουν να επεξεργαστούν και όχι στην έννοια των κλασμάτων που αναπαρίστανται μέσω της επιφάνειας. Ως αποτέλεσμα οι γεωμετρικές αναπαραστάσεις, αντί για μέσο οργάνωσης πληροφοριών προς κατανόηση, μετατρέπονται οι ίδιες σε αντικείμενο επεξεργασίας, δηλαδή οι μαθητές επικεντρώνονται στην ίδια την αναπαράσταση του αντικειμένου. Συγκεκριμένα για την πρόσθεση, η ύπαρξη δύο σχημάτων δημιουργεί προϋποθέσεις για εννοιολογική σύγχυση, αφού η πράξη εμφανίζεται ως ένωση των μερών, αλλά όχι ως ένωση του όλου. Τέλος, η χρήση της αριθμητικής γραμμής μπορεί να ενισχύει την αναπαραγωγή της οργάνωσης των φυσικών αριθμών και τη διακριτή θεώρηση και για το σύνολο των κλασματικών αριθμών (Γαγάτσης, Ιωάννου, Σιημητρά-Κωνσταντίνου, & Χριστοδουλίδου, 2006).

Στα λάθη και στις παρανοήσεις **επιστημολογικής φύσης**, εντάσσονται αυτά που οφείλονται στο επιστημολογικό εμπόδιο των φυσικών αριθμών σε αντιδιαστολή με τους κλασματικούς. Αναφορικά με την πρόσθεση κλασμάτων, συχνά οι μαθητές προσθέτουν εκτός από τους αριθμητές και τους όμοιους παρονομαστές, οδηγούμενοι έτσι σε ένα αποτέλεσμα με κλάσμα διαφορετικής ονομασίας (π.χ. ½+1/2=2/4). Το ίδιο λάθος συχνά γίνεται ωστόσο και στα

ετερώνυμα κλάσματα. Τέλος, στη διαίρεση με κλάσμα πολλές φορές οι μαθητές δεν αντιστρέφουν το δεύτερο κλάσμα και καταλήγουν σε ένα αποτέλεσμα μικρότερο από τον διαιρετέο και τον διαιρέτη, όμοια με αυτό που συμβαίνει στους φυσικούς (Γαγάτσης, Ιωάννου, Σιημητρά-Κωνσταντίνου, & Χριστοδουλίδου, 2006). Γενικά, σύμφωνα με τις έρευνες των τελευταίων τεσσάρων δεκαετιών, τα πιο σημαντικά και ευρέως αναφερόμενα λάθη και δυσκολίες των μαθητών στα κλάσματα είναι οι εξής: δυσκολία με την διάταξη, τις πράξεις, την αναγνώριση ακόμα και των πιο κοινών σχημάτων, την αντίληψη του επιθέτου ίσα και των ισοδυναμιών, την απλοποίηση, τα μη συμβατικά σχήματα, τη μετάβαση από το κλάσμα στη μονάδα που το παρήγαγε και τον αυτόνομο χειρισμό διαγραμμάτων, σχημάτων και μοντέλων (Pinilla, 2007).

Ιδιαίτερες δυσκολίες και με τις πιο μακροπρόθεσμες δυσμενείς επιπτώσεις αναδεικνύονται οι εξής (Bobis, 2011):

- Η γενίκευση ακατάλληλων αποφάσεων βασισμένων σε κανόνες. Π.χ. «Όσο μεγαλύτερος ο παρονομαστής, τόσο μικρότερο το κλάσμα»
- Λάθος επικέντρωση στον αριθμό των κομματιών της σχηματικής αναπαράστασης χωρίς την αναζήτηση του αν τα κομμάτια είναι ίσα.
- Χρήση μονάδων αναφοράς διαφορετικού μεγέθους για τη σύγκριση δύο κλασμάτων
- Χρήση προσθετικών και όχι πολλαπλασιαστικών στρατηγικών σκέψης για την ισότητα κλασμάτων
- Μη χρήση σημείων αναφοράς για την υποστήριξη της κατανόησης του σχετικού μεγέθους κλασμάτων
- Χρήση πολλαπλών μοντέλων κατά τη σύγκριση κλασμάτων
- Μέτρηση των γραμμών και όχι των κομματιών σε καταστάσεις μερισμού, ειδικά όταν δίνονται έτοιμα χωρισμένα σχήματα
- Γενική έλλειψη οικειότητας με ερωτήσεις που αφορούν τις διαστάσεις της μέτρησης και της διαίρεσης
- Εφαρμογή στρατηγικών που αφορούν τους ακεραίους, που σύμφωνα με άλλους ερευνητές έχει θετικά (Lamon, 2007 και Steffe, 2010) και σύμφωνα με άλλους αρνητικά αποτελέσματα (Roche, Sparrow et al.; Steinle et al.).

Γενικά, στους **ενδοσχολικούς** παράγοντες που επιδρούν στην επίδοση και στην ύπαρξη δυσκολιών, περιλαμβάνονται (1) τα γνωστικά και ψυχολογικά χαρακτηριστικά των *μαθητών* (προϋπάρχουσες γνωστικές δομές, εννοιολογικές γνώσεις, βραχύχρονη μνήμη, νοητικές αναπαραστάσεις, κίνητρα, γενικές στρατηγικές μάθησης, τρόπος μάθησης, εξειδικευμένες στρατηγικές, γνώση εαυτού, συναισθηματική κατάσταση, στάσεις, βαθμός εμπλοκής στο σχολείο, άγχος), (2) οργανωτικά και λειτουργικά χαρακτηριστικά *σχολείου* (κοινωνική προέλευση μαθητών, καθεστώς λειτουργίας, αναπτυξιακός σχεδιασμός και μέγεθος σχολικής μονάδας, αναλογία μαθητών ανά εκπαιδευτικό, προγραμματισμός εκπαιδευτικού έργου, προσδοκίες εκπαιδευτικών, διδακτικό συμβόλαιο και σχολικό κλίμα τάξης, συναισθηματικές σχέσεις συμμαθητών, τρόπος διδασκαλίας, διδακτικές πρακτικές, χρήση ενεργητικών τεχνικών μάθησης, ψυχολογική διάθεση εκπαιδευτικών, συχνότητα ανάθεσης/διόρθωσης κατ' οίκων εργασιών). Στους **εξωσχολικούς** παράγοντες περιλαμβάνονται βιογραφικά και λειτουργικά στοιχεία της *οικογένειας* (καταγωγή, κοινωνική προέλευση, εκπαίδευση, επαγγελματικό επίπεδο, γονική εμπλοκή, βοήθεια στις κατ' οίκων εργασίες, συναισθηματική στήριξη, στάσεις, κοινωνικό κεφάλαιο) (Σιδηρόπουλος, 2008, 75-79).

1.6.2. Μαθητών με ήπιες εκπαιδευτικές ανάγκες

Οι εκπαιδευτικές δυσκολίες ταξινομούνται από τον παγκόσμιο οργανισμό Υγείας σε ήπιες, μέτριες, σοβαρές και βαθιές. Η κατηγοριοποίηση αυτή γίνεται με βάση τον δείκτη IQ, τη συμπεριφορά και την ανάγκη για ειδική μεταχείριση. Πιο συγκεκριμένα, οι ήπιες εκπαιδευτικές ανάγκες περιλαμβάνουν τις ειδικές μαθησιακές δυσκολίες, την ήπια νοητική καθυστέρηση, τα ήπια προβλήματα συμπεριφοράς, τη διαταραχή ελλειμματικής προσοχής και υπερκινητικότητας και τα ήπια αισθητηριακά προβλήματα (Αλτιπαρμάκη, 2013). Τα μαθηματικά αποτελούν έναν κώδικα με εγγενή χαρακτηριστικά τα οποία τους προσδίδουν μια ιδιαιτερότητα, ενώ αν δε ληφθούν υπόψη κατά τη διδασκαλία μπορεί να αποδειχθούν πηγή δυσκολιών. Τα στοιχεία αυτά είναι η εποικοδομιστική-δυαδική φύση της γνώσης, ο αφηρημένος-γενικευτικός χαρακτήρας του κώδικα, η ιεραρχική

οργάνωση των δεξιοτήτων και η πολλαπλή και επάλληλη αναπαράσταση των εννοιών (Αγαλιώτης, 2011, 40-50).

1.6.2.1. Ειδικές μαθησιακές δυσκολίες

Οι ειδικές μαθησιακές δυσκολίες αποτελούν μια κατηγορία δυσκολιών που αφορούν τη μάθηση, δηλαδή την επεξεργασία του συμβολικού γραπτού λόγου και εκφράζονται με έντονη και επίμονη αδυναμία απόκτησης αναγνωστικής και γραφημικής ικανότητας. Τέτοιου είδους δυσκολίες είναι η δυσαριθμησία, η δυσγραφία και η δυσλεξία, η συχνότερη ειδική μαθησιακή δυσκολία. Οι δυσκολίες εμφανίζονται συνήθως κατά την αποκωδικοποίηση συμβόλων, κατά την επεξεργασία της γλώσσας και στην αντίληψη και επεξεργασία του χώρου και των αριθμών (δυσκολίες αντίληψης μορφής-πλαισίου και διάκρισης αντιληπτικών μορφών). Οι μαθητές με τέτοιου είδους δυσκολίες είναι ευφυείς αλλά δυσκολεύονται στην ανάγνωση, στην γραφή και στον συλλαβισμό. Γενικά, εμφανίζουν διάσπαση προσοχής και δυσκολία στη συγκέντρωση και τα καταφέρνουν καλύτερα στα προφορικά. Δυσκολίες επίσης αντιμετωπίζουν κατά την εκμάθηση διαδοχικά τοποθετημένων πληροφοριών (χωρο-χρονική οργάνωση), την αφομοίωση συμβόλων, μορφών και βασικών πράξεων από μνήμης (προβλήματα βραχυπρόθεσμης, μακροπρόθεσμης και μνήμης ακολουθιών). Συνήθεις είναι επίσης αδυναμίες αφηρημένης σκέψης, διαταραχές γνωστικού ύφους, ανεπαρκείς γνωστικές και μεταγνωστικές στρατηγικές και συναισθηματικά προβλήματα. Συχνά, τέλος, εμφανίζουν αδυναμίες λεπτής κινητικότητας, οπτικο-χωρικού συντονισμού και δυσκολίες ολοκλήρωσης, δηλαδή εξαγωγής συμπερασμάτων. Η ένταση της δυσκολίας και οι απαιτήσεις του γνωστικού αντικειμένου καθορίζουν το μέγεθος της δυσκολίας κατά τη μαθησιακή διαδικασία (Αγαλιώτης, 2000, 92-105; Πόρποδας, 2003).

Πιο συγκεκριμένα, τα άτομα με **δυσλεξία** εμφανίζουν τις εξής μαθηματικές δυσκολίες όσον αφορά βασικούς μηχανισμούς: δυσκολίες σχετικές με (1) την έννοια διατήρησης των μεγεθών, (2) την κατανόηση της θεσιακής αξίας των ψηφίων, (3) το νόημα των αλγορίθμων σε σχέση με πραγματικές ενέργειες. Αναφορικά με την *αποκωδικοποίηση* γραπτού/προφορικού λόγου, (1) δυσκολεύονται στην κατανόηση των ζητουμένων των προβλημάτων και των οδηγών του εκπαιδευτικού, (2) συγχέουν τα σύμβολα που μοιάζουν οπτικά κατά τη σύνδεση των όρων με τα

σύμβολα και των συμβόλων με τα ονόματά τους. Όσον αφορά την *κατεύθυνση* και τον *προσανατολισμό*, (1) μπερδεύουν τη θέση αριθμών και άλλων συμβόλων στο χώρο, (2) δυσκολεύονται να εργαστούν κατά τη σωστή κατεύθυνση και να χρησιμοποιήσουν τα όργανα γεωμετρίας. Συχνά είναι τα λάθη κατά (3) την τήρηση αλγορίθμων και σχεδίων επίλυσης προβλήματος (οργάνωση εργασίας). Τέλος, αναφορικά με τη *μνήμη*, δυσκολεύονται κατά τη συγκράτηση (1) αριθμητικών δεδομένων, (2) διαδικασιών, (3) κανόνων αλλά και (4) πληροφοριών κατά την εκτέλεση πράξεων και την επίλυση προβλημάτων.

Μαθηματικά χαρακτηριστικά του συνδρόμου της **δυσαριθμησίας**, από την άλλη, είναι (1) η κανονική ή πάνω από το μέσο όρο γλωσσική ανάπτυξη, (2) η καλή οπτική μνήμη γραπτών λέξεων και (3) η ικανοποιητική επίδοση σε σχολικά αντικείμενα που δεν απαιτούν υψηλές μαθηματικές ικανότητες. Δυσκολίες προκύπτουν με τις έννοιες και τις δεξιότητες (1) του χρόνου και του προσανατολισμού, (2) του οικονομικού προγραμματισμού και (3) της χρήσης χρημάτων. Επιπλέον, συχνές είναι οι παραλείψεις, προσθέσεις, αντιμεταθέσεις και αντικαταστάσεις κατά τη γραφή και την ανάγνωση αριθμών συνοδευόμενες από αντιφατικά αποτελέσματα στις πράξεις και φτωχή ικανότητα νοερής εκτέλεσης πράξεων. Συχνά, αδυνατούν να κατανοήσουν και να ανακαλέσουν μαθηματικές έννοιες, κανόνες, τύπους και αλγόριθμους και να απομνημονεύσουν βασικά αριθμητικά δεδομένα, ενώ είναι ασυνεπείς στη χρήση των ήδη κατεκτημένων γνώσεών τους. Επιπλέον, εμφανίζουν δυσκολίες στο σχηματισμό εσωτερικών νοητικών αναπαραστάσεων (ρολογιών, τοποθεσιών, χαρτών, χώρων) και στον μυοκινητικό συντονισμό (Αγαλιώτης, 2000, 105-122).

1.6.2.2. Νοητική καθυστέρηση

Η διάγνωση νοητικής καθυστέρησης, σύμφωνα με το DSM, προϋποθέτει δείκτη νοημοσύνης ίσο ή μικρότερο του 70, έναρξη δυσκολιών πριν τα 18 και έκπτωση λειτουργικότητας σε δύο από τους εξής τομείς: (1) επικοινωνία, (2) αυτοεξυπηρέτηση, (3) διαβίωση, (4) κοινωνικές δεξιότητες, (5) χρήση πηγών κοινότητας, (6) αυτονομία, (7) λειτουργικές σχολικές δεξιότητες, (8) εργασία, (9) ελεύθερος χρόνος, (10) υγεία και (11) ασφάλεια. Γενικά, οι μαθητές αυτοί χρειάζονται περισσότερο χρόνο για την αυτόματη ανάκληση πληροφοριών και τον ταυτόχρονο χειρισμό πολλών γνωστικών πληροφοριών. Τα άτομα με νοητική

καθυστέρηση δυσκολεύονται (1) να ακολουθήσουν τα βήματα για την εκπόνηση μιας εργασίας, (2) να διατηρήσουν την προσοχή τους και (3) να χρησιμοποιήσουν νέες γνώσεις και δεξιότητες σε διαφορετικό πλαίσιο από το πλαίσιο διδασκαλίας. Τα περισσότερα άτομα που εμφανίζουν νοητική καθυστέρηση έχουν μια ήπια μορφή της, οπότε κάνουν τεράστιες προόδους στις προσαρμοστικές τους ικανότητες, εντούτοις συνήθως επηρεάζονται καθ' όλη τη διάρκεια της ζωής τους (Hawkins, Eklund, James & Foose, 2003).

Η νοητική αναπηρία προκαλεί περιορισμούς κατά την επεξεργασία των πληροφοριών και αποτελεί μία από τις σημαντικότερες αιτίες αποτυχίας κατά την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης. Στα μαθηματικά χαρακτηριστικά των ατόμων με ήπια νοητική καθυστέρηση εντάσσονται (1) η δυσκολία χρήσης νοητικών αναπαραστάσεων, (2) η παθητικότητα κατά τη μάθηση, (3) τα προβλήματα δόμησης εννοιών με βάση αισθησιοκινητικές εμπειρίες και (4) η αδυναμία προσοχής και μνήμης. Επιπλέον, συχνά είναι (1) τα προβλήματα ανάγνωσης και γραφής ορολογίας και συμβόλων, (2) οι δυσκολίες στην ανάπτυξη και χρήση στρατηγικών, (3) οι ατελείς μετρικές τεχνικές και (4) οι αδυναμίες κατά τη μεταφορά μάθησης και κατά τη γενίκευση της γνώσης. Επομένως, οι μαθητές αυτοί κατακτούν γνώσεις και δεξιότητες σε σημαντικά μεγαλύτερη ηλικία και συνήθως περιορίζονται στην κατάκτηση στοιχειωδών μαθηματικών δεξιοτήτων. Οι μαθητές με ήπια νοητική καθυστέρηση μπορούν να διδαχθούν με το πρόγραμμα του γενικού σχολείου, με τροποποιήσεις στις διδακτικές τεχνικές και στις μαθηματικές εφαρμογές (Αγαλιώτης, 2011, 72-73).

1.6.2.3. Προβλήματα συμπεριφοράς

Μια συμπεριφορά θεωρείται προβληματική, διαταραγμένη ή ανεπιθύμητη όταν ενοχλεί το ίδιο το άτομο ή τα πρόσωπα του περιβάλλοντός του και προκαλεί δυσάρεστα συναισθήματα. Ο τρόπος που αντιδρά το παιδί είναι αντίθετος με τους κανόνες ζωής και τα κοινωνικά αυτονόητα και οι συνέπειες της αντικοινωνικής συμπεριφοράς επιδρούν στην προσωπική, κοινωνική, εκπαιδευτική, ακαδημαϊκή και επαγγελματική τους πορεία. Τα προβλήματα συμπεριφοράς εξωτερικεύονται αφού τα παιδιά (1) σηκώνονται από τις θέσεις τους, (2) φωνάζουν, (3) αντιμιλούν, (4) βρίζουν, (5) ενοχλούν, (6) χτυπούν, (7) μαλώνουν, (8) αγνοούν, (9) παραπονιούνται, (10) κλέβουν, (11) ψεύδονται, (12) εκρήγνυνται από θυμό και (14)

δε συμμετέχουν στο μάθημα. Κατά την εφηβεία, συχνά εγκαταλείπουν το σχολείο, συλλαμβάνονται, κάνουν χρήση ναρκωτικών και αλκοόλ (Lipsey & Derzon, 1998).

Στην ομάδα αυτή ανήκουν άτομα που για σημαντικό χρονικό διάστημα και σε σημαντικό βαθμό έχουν ένα ή περισσότερα από τα παρακάτω συμπτώματα: (1) αδυναμία μάθησης που δε μπορεί να εξηγηθεί με άλλο τρόπο, (2) αδυναμία δημιουργίας ικανοποιητικών σχέσεων με συνομηλίκους και εκπαιδευτικούς, (3) ακατάλληλες συμπεριφορές σε συνήθεις κοινωνικές περιστάσεις, (4) κακή ψυχοσυναισθηματική κατάσταση ή κατάθλιψη, ως σταθερό και γενικό χαρακτηριστικό και (5) τάση να εμφανίζουν ψυχοσωματικές αντιδράσεις σε προσωπικά ή σχολικά προβλήματα. Στην κατηγορία αυτή περιλαμβάνονται και άτομα με σχιζοφρένεια, αλλά όχι άτομα με κοινωνική δυσπροσαρμογή που δεν οφείλεται σε συναισθηματικές διαταραχές (Αγαλιώτης, 2011).

1.6.2.4. Διαταραχή Ελλειμματικής Προσοχής και Υπερκινητικότητας (ΔΕΠΥ)

Η ΔΕΠΥ αποτελεί μια από τις συχνότερες νευροβιολογικές διαταραχές της παιδικής και εφηβικής ηλικίας (5-7%). Στα βασικά χαρακτηριστικά της διαταραχής αυτής περιλαμβάνονται (1) η απροσεξία, (2) η υπερκινητικότητα και (3) η παρορμητικότητα, οι οποίες ωστόσο εξελίσσονται και τροποποιούνται με την ωρίμανση του ατόμου. Τα παραπάνω συμπτώματα διακρίνονται σε τρεις τύπους της διαταραχής ανάλογα με το χαρακτηριστικό που είναι το κυρίαρχο. (1) Ο μαθητής που έχει τον τύπο της απροσεξίας δε συγκεντρώνεται, αποσπάται εύκολα, δε φαίνεται να ακούει, δε δίνει σημασία στις λεπτομέρειες, αποφεύγει εργασίες που προϋποθέτουν συστηματική πνευματική προσπάθεια, ξεχνά τις σχολικές εργασίες και γενικά είναι ανοργάνωτος. (2) Στα χαρακτηριστικά του παρορμητικού/ υπερκινητικού τύπου εντάσσονται συμπεριφορές όπως η δυσκολία να παραμείνει καθισμένος, να κουνάει χέρια-πόδια, να στριφογυρίζει στην καρέκλα, να κοιτάει γύρω του και να ενοχλεί τους άλλους, να σηκώνεται όταν δεν επιτρέπεται, να μην σκέφτεται πριν αντιδράσει, να απαντάει πριν ολοκληρωθεί η ερώτηση, να μιλάει συνεχώς και να δυσκολεύεται να περιμένει τη σειρά του. (3) Τέλος, εμφανίζεται και ο συνδυασμένος τύπος, κατά τον οποίο ένα παιδί εμφανίζει συνδυασμό των παραπάνω συμπτωμάτων. Η διαταραχή προκαλεί κακές επιδόσεις στο σχολείο και καθυστέρηση της μάθησης και της επικοινωνίας.

Η Διαταραχή Ελλειμματικής Προσοχής/Υπερκινητικότητα (ΔΕΠΥ) επηρεάζει κυρίως την εργαζόμενη μνήμη επεξεργασίας ακουστικών πληροφοριών και όχι τόσο των οπτικών. Επίσης, μπορεί να αντιμετωπίσουν δυσκολίες κατά τον χειρισμό τρισδιάστατων υλικών, δηλαδή με την κιναισθητική προσοχή. Αναφορικά με τα μαθηματικά χαρακτηριστικά των μαθητών αυτών, (1) διαθέτουν λιγότερο χρόνο για την επεξεργασία των συμβόλων των πράξεων και (2) δεν κατανέμουν σωστά στην προσοχή τους κατά την επεξεργασία, με αποτέλεσμα να κάνουν πολλά λάθη. Επιπλέον, (3) δεν επιμένουν στις επανειλημμένες επαφές με την ίδια πληροφορία, οπότε δυσκολεύονται στην απομνημόνευση και τη δόμηση εννοιών από άποψη ακρίβειας και ταχύτητας. (4) Δεν επικεντρώνουν επαρκώς την προσοχή τους σε εκτεταμένο λεκτικό υλικό για απομνημόνευση και μαθηματική επεξεργασία, επομένως δυσκολεύονται κατά την επίλυση προβλήματος. Επίσης, (5) δεν επεξεργάζονται λεπτομερώς τα παραδείγματα και τα αντιπαραδείγματα των εννοιών, οπότε δε συγκροτούν πλήρεις έννοιες και δυσκολεύονται στην οργάνωση συνεκτικού μαθηματικού συστήματος (Αγαλιώτης, 2011, 80-82).

1.6.2.5. Αισθητηριακά προβλήματα

Αισθητηριακά προβλήματα εμφανίζονται όταν ο οργανισμός δεν επεξεργάζεται σωστά τα ερεθίσματα του περιβάλλοντος και του ίδιου του οργανισμού. Η κατάσταση αυτή εντοπίζεται σε διάφορες αισθήσεις αλλά και σε εσωτερικά ερεθίσματα και οφείλεται είτε σε γενικευμένη διαταραχή είτε σε υπερκόπωση των αισθητηριακών οδών. Οι αισθητηριακές δυσκολίες μπορούν να εμφανίζονται σε παιδιά με (1) ανώριμη συμπεριφορά, (2) δυσκολίες επικοινωνίας και (3) μαθησιακές δυσκολίες. Η αισθητηριακή διαταραχή εμφανίζεται συνήθως στα πρόωρα παιδιά, στα παιδιά στο φάσμα του αυτισμού, στα παιδιά με τον τύπο της υπερκινητικότητας, στα κακοποιημένα ή παραμελημένα παιδιά, στα παιδιά με νευρολογικά προβλήματα, στα παιδιά με μαθησιακές ή κοινωνικές δυσκολίες ή αναπτυξιακή καθυστέρηση.

Τα αισθητηριακά προβλήματα προκαλούν συνήθως ανεπαρκείς, ατελείς, διαστρεβλωμένες ή συγκεχυμένες πληροφορίες, οι οποίες με τη σειρά τους προκαλούν γνώσεις αντίστοιχης ποιότητας. Όλες οι αισθητηριακές αντιληπτικές δίοδοι διαδραματίζουν ρόλο στην πρόσληψη, επεξεργασία και συγκράτηση μαθηματικών πληροφοριών, ενώ μαθητές οι οποίοι για διάφορους εγγενείς ή

περιβαλλοντικούς λόγους δε διαθέτουν ή δε μπορούν να ενεργοποιήσουν τις κατάλληλες αντιληπτικές διεργασίες αντιμετωπίζουν σημαντικές δυσκολίες στα μαθηματικά. Πιο συγκεκριμένα, οπτικά προβλήματα προκαλούν δυσκολίες στη συγκρότηση της έννοιας του αριθμού, αφού δεν επιτρέπουν τη διάκριση ποσοτήτων ή την επιβεβαίωση της σταθερότητας του πλήθους παρά τις αλλαγές στην τοποθέτηση. Προβλήματα ακουστικής αντίληψης δυσκολεύουν τη συμμετοχή στη μαθησιακή διαδικασία, αφού συχνά εμποδίζουν την πρόσληψη οδηγιών ή ερωτήσεων. Τέλος, αναφορικά με τις δυσκολίες κιναισθητικής φύσεως, αυτές δεν επιτρέπουν τον ακριβή και γρήγορο χειρισμό των αντικειμένων και οργάνων με τρόπο που να επιτρέπει τη σύνδεση της ενέργειας με τα σύμβολα και τους όρους της (Αγαλιώτης, 2011, 82-84).

1.7. Συχνότερα λάθη

«Κάνε ό,τι καλύτερο μπορείς μέχρι να μάθεις.
Μετά όταν μάθεις καλύτερα, καν' το καλύτερα».
Maya Angelou

Τα συχνότερα λάθη των μαθητών στα κλάσματα μπορούν να κατηγοριοποιηθούν στις εξής πέντε κατηγορίες:

1.7.1. Διαμοιρασμός

Ο όρος αυτός αναφέρεται στον χωρισμό ενός σχήματος σε ίσα κομμάτια. Η σχέση μέρους-όλου αποτελεί το επίκεντρο της διδασκαλίας των κλασματικών αριθμών, ενώ συχνά η πρώτη επαφή με αυτούς γίνεται μέσω παραδειγμάτων με σκιασμένα μέρη. Οι παρανοήσεις συχνά προέρχονται από την αδυναμία κατανόησης της σχέσης αριθμητή-παρονομαστή και την αντίληψη τους ως χωριστούς φυσικούς αριθμούς (Siebert & Gaskin, 2006). Οι μαθητές τείνουν να παραλείπουν τη σημασία του ίσου διαμοιρασμού και θεωρούν ότι και άνισα διαμοιρασμένες επιφάνειες μπορούν να αναπαραστήσουν επιτυχώς τα κλάσματα. Επίσης συχνά οι μαθητές πιστεύουν ότι τα μέρη εκτός από ίσα πρέπει να είναι και του ίδιου σχήματος, πράγμα που δεν ισχύει. Μια δραστηριότητα που εξηγεί την κατάσταση πρέπει να περιλαμβάνει παραδείγματα στα οποία τα μέρη έχουν άλλο σχήμα-ίδιο μέγεθος, άλλο σχήμα-ίδιο μέγεθος, άλλο σχήμα-άλλο μέγεθος και ίδιο σχήμα-άλλο μέγεθος. Ένας μαθητής με κατάλληλη και πλήρη γνώση μπορεί να κάνει τον διαχωρισμό των παραπάνω περιπτώσεων (Van de Walle et al., 2012, 296). Στους μαθητές πρέπει να είναι ξεκάθαρο ότι ο διαμοιρασμός κλασμάτων σημαίνει τη δημιουργία ίσων κομματιών και ότι ενέργειες όπως η διάταξη, η πρόσθεση ή η αφαίρεση μπορούν να γίνουν μόνο όταν τα ολόκληρα είναι χωρισμένα σε ίσα κομμάτια. Πρέπει, τέλος, να γίνεται χρήση πολλών παραδειγμάτων κάθε είδους (επιφάνεια, σύνολο, μήκος) (McNamara & Shaughnessy, 2010).

1.7.2. Σειροθέτηση

Ένας άλλος τομέας της κλασματικής γνώσης είναι η γνώση του ποιο κλάσμα είναι μεγαλύτερο. Οι μαθητές συνήθως έχουν ισχυρή την άποψη ότι μεγαλύτεροι αριθμοί σημαίνουν περισσότερο, κάτι που ισχύει για τους φυσικούς. Εντούτοις, αυτό δεν ισχύει πάντα στο κομμάτι των κλασμάτων (Mark, 1995). Κατά τη διάταξη κλασμάτων τείνουν να πιστεύουν ότι όσο μεγαλύτερος ο παρονομαστής τόσο μεγαλύτερο το κλάσμα, κάτι που τους οδηγεί σε λάθος διάταξη (Nunes et al., 2006). Για την αποφυγή του παραπάνω σφάλματος πρέπει να γίνει κατανοητό, μέσα από πολλαπλές οπτικές αναπαραστάσεις, ότι όσο περισσότερα τα κομμάτια τόσο μικρότερα γίνονται (Ball, 1993; Martinie & Bay-Williams, 2003). Αλλά και η υπεργενίκευση του παραπάνω κανόνα μπορεί να οδηγήσει σε λάθη (π.χ. 1/6>5/10) (Cramer, Wyberg, & Leavitt, 2008). Δεν πρέπει να υπάρχει καθήλωση σε κυκλικά μοντέλα, αλλά εμπλουτισμός με προβλήματα της καθημερινής ζωής, που είναι χρήσιμα και έχουν νόημα (Bray & Abreu-Sanchez, 2010).

1.7.3. Πρόσθεση-Αφαίρεση

Άλλη μια παρανόηση που έχει τη ρίζα της στους φυσικούς αριθμούς είναι η πρόσθεση/αφαίρεση κλασμάτων με την επιμέρους πρόσθεση/αφαίρεση των αριθμητών μεταξύ τους και των παρονομαστών μεταξύ τους (Lappan & Mouck, 1998; Cramer & Whitney, 2010). Οι μαθητές που κατέχουν ισχυρή εννοιολογική γνώση μπορούν να κάνουν τις απαραίτητες μετατροπές (ομώνυμα) για να καταστεί δυνατή η πρόσθεση/αφαίρεση και οι δάσκαλοι μπορούν να δώσουν έμφαση στις σχέσεις μέρους-όλου αντί να εισάγουν μονομιάς των κανόνα-διαδικασία (Taber, 2009). Έχοντας τη γνώση ότι μόνο ίσα κομμάτια μπορούν να προστεθούν ή να αφαιρεθούν, οι μαθητές μπορούν με τη χρήση υλικών να δουν ποια κομμάτια είναι ίσα και ποια όχι (Mack, 2004; Cramer & Henry, 2002; Bamberger et al., 2010). Η εμπλοκή του πολλαπλασιασμού στη διαδικασία της πρόσθεσης δημιουργεί πρόσθετα προβλήματα αφού δε γίνεται κατανοητό γιατί ο αριθμητής αλλάζει αλλά ο παρονομαστής μένει ίδιος στα δύο κλάσματα στην πρόσθεση αλλά αλλάζει στον πολλαπλασιασμό (Huinker, 2002). Αρχικά πρέπει να δίνονται παραδείγματα με

ίδιους παρονομαστές και στη συνέχεια να γίνεται η μετάβαση στους μη κοινούς (Mack, 2004).

1.7.4. Πολλαπλασιασμός-Διαίρεση

Η κατανόηση των κλασματικών αριθμών προϋποθέτει την κατανόηση ότι πολλές ιδιότητες που ισχύουν στους φυσικούς δεν ισχύουν στα κλάσματα (Siegler et al., 2011). Η κατανόηση μεμονωμένων κλασμάτων όμως δεν συνεπάγεται απαραίτητα και κατανόηση του πώς αυτά αλλάζουν με την επίδραση αριθμητικών πράξεων. Τα συχνότερα λάθη στις πράξεις του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης είναι δύο (Siegler & Pyke, 2013). Το ένα αφορά την λάθος εφαρμογή διαδικασιών από άλλες πράξεις, όπως παραδείγματος χάριν τη διατήρηση του παρονομαστή κατά τον πολλαπλασιασμό κλασμάτων (π.χ. 3/5*4/5=12/5). Ένα λάθος που συμβαίνει συχνά κατά τη διαίρεση κλασμάτων είναι η αντιστροφή του πρώτου αντί για το δεύτερο κλάσμα (π.χ. 2/3:1/3=3/2*1/3=3/6=1/2). Αυτά τα λάθη καταδεικνύουν ελλιπή κατανόηση των αριθμητικών μεγεθών που παράγονται από τις πράξεις και αποτρέπει τους μαθητές από το να απορρίψουν λάθος διαδικασίες αναγνωρίζοντας μη λογικά αποτελέσματα. Συχνά λάθος απαντήσεις φαίνονται πιο πιθανές από τις σωστές αν κάποιος πιστεύει ότι το γινόμενο πρέπει να είναι πάντα μεγαλύτερο και το πηλίκο πάντα μικρότερο (Siegler & Lortie-Forgues, 2015). Οι πιθανές εξηγήσεις για τα παραπάνω λάθη είναι η αντίληψη ότι οι πράξεις έχουν τις ίδιες επιπτώσεις ανεξαρτήτως του είδους των αριθμών που εμπλέκονται σε αυτές (πρόσθεση και πολλαπλασιασμός μεγαλώνουν τους αριθμούς, ενώ αφαίρεση και διαίρεση τους μικραίνουν, όπως στους φυσικούς). Μία άλλη εναλλακτική είναι η χρήση τη κατανόησης των φυσικών αριθμών ως προεπιλογή, όχι επειδή πιστεύουν ότι είναι η σωστή, αλλά επειδή δεν γνωρίζουν τι άλλο μπορεί να γίνει. Το παραπάνω αποτελεί συχνό φαινόμενο σε περιπτώσεις που τα άτομα έχουν έλλειψη γνώσης αλλά τους ζητείται να λύσουν ένα πρόβλημα (Rozenblit & Keil, 2002). Ωστόσο, η δυσκολία με τις δύο αυτές πράξεις όσον αφορά τα κλάσματα μπορεί να απορρέει και από ανάλογες δυσκολίες στις ίδιες πράξεις και στους φυσικούς (Lemaire & Siegler, 1995; Robinson et al., 2006; Dubé & Robinson, 2010; Robinson & Dubé, 2009). Ως προτάσεις για τη διδασκαλία αναφέρονται η έμφαση ότι οι πράξεις αυτές

παράγουν διαφορετικά αποτελέσματα, ανάλογα με το αν οι αριθμοί που εμπλέκονται είναι μεγαλύτεροι ή μικρότεροι από το ένα. Επίσης, προτείνεται οι δάσκαλοι και τα βιβλία να δίνουν περισσότερη προσοχή στην έννοια του όλου στους κλασματικούς αριθμούς και έμφαση στην κατανόηση των κοινών στις διαδικασίες φυσικών και κλασμάτων (Siegler & Lortie-Forgues, 2015).

1.7.5. Επικέντρωση στη διαφορά αριθμητή-παρονομαστή

Ο όρος αυτός (gap thinking) χρησιμοποιείται για την περιγραφή της σκέψης των παιδιών σύμφωνα με την οποία «όταν υπάρχει μικρή διαφορά μεταξύ αριθμητή και παρονομαστή το κλάσμα είναι μεγαλύτερο», παραδείγματος χάρη 3/5>5/8 (Pearn & Stephens, 2004) ή δύο κλάσματα είναι ίσα όταν ο αριθμητής απέχει το ίδιο από τον παρονομαστή, π.χ. ¾=2/3 (Cramer, 1987). Άλλοι (Clarke & Roche, 2009, 131) περιγράφουν περιπτώσεις στις οποίες οι μαθητές συγκρίνουν τους αριθμητές και τους παρονομαστές των κλασμάτων, π.χ. 7/9>3/4. Συχνά τέτοιου είδους τεχνικές θεωρείται ότι απορρέουν από τους φυσικούς αριθμούς και κάνουν την εμφάνισή τους πριν από την ανάπτυξη πιο εκλεπτυσμένων γνωστικών μοντέλων για τα κλάσματα. Αυτές οι παρανοήσεις πρέπει να λυθούν για την ενσωμάτωση της ολοένα αυξανόμενης κλασματικής γνώσης (Mitchell & Horne, 2010). Τη θέση τους μπορούν να πάρουν επιτυχείς στρατηγικές σύγκρισης, όπως η σκέψη των υπολειπόμενων (residual thinking) και η συγκριτική αξιολόγηση (benchmarking). Η σκέψη των υπολειπόμενων αφορά τη σύγκριση μέσω της σκέψης πόσο υπολείπεται για να φτάσει στη μονάδα (5/6<7/8, επειδή 1/6>1/8). Η συγκριτική αξιολόγηση, από την άλλη, συγκρίνει τα κλάσματα με ένα μέτρο σύγκρισης, συνήθως το μισό (3/7<1/2<5/8) (Behr et al., 1984; Clarke & Roche 2009). Η χρήση αυτών των στρατηγικών, ωστόσο δεν εσωτερικεύεται μέχρι την ηλικία των 12 ετών, αλλά η σύγκριση ζευγαριών κλασμάτων πρέπει να γίνεται σε όλα τα επίπεδα του δημοτικού σχολείου (Kieren, 1992).

1.8. Ερευνητικά ερωτήματα και υποθέσεις

«Υπάρχουν δύο πιθανές εξελίξεις:
Αν το αποτέλεσμα επαληθεύει την υπόθεση,
θα έχεις κάνει μια μέτρηση.
Αν το αποτέλεσμα δεν συμφωνεί με την υπόθεση,
τότε θα έχεις κάνει μια ανακάλυψη».
Enrico Fermi

Λαμβάνοντας υπόψη (α) τα ήδη γνωστά στοιχεία για τη μάθηση των κλασμάτων από μαθητές Δημοτικού Σχολείου με και χωρίς ειδικές εκπαιδευτικές ανάγκες, αλλά και (β) διαστάσεις του θέματος που χρήζουν περεταίρω διερεύνησης, διατυπώνονται τα παρακάτω ερωτήματα και οι ακόλουθες υποθέσεις (μηδενικές και εναλλακτικές) της παρούσας έρευνας.

Ερωτήματα:

1. Υπάρχει διαφορά στην κατανόηση των κλασμάτων μεταξύ μαθητών τυπικής ανάπτυξης και μαθητών με Η.Ε.Α. ανάλογα με τον **τρόπο αναπαράστασης**; (πραξιακός, σχηματικός, συμβολικός)
2. Υπάρχει διαφορά μεταξύ μαθητών τυπικής ανάπτυξης και μαθητών με Η.Ε.Α. στην κατανόηση της εννοιολογικής και διαδικαστικής γνώσης των κλασμάτων; (**είδη γνώσης**)
3. Υπάρχει διαφορά μεταξύ μαθητών τυπικής ανάπτυξης και μαθητών με Η.Ε.Α. στη **συχνότητα** και στη **φύση** των παρατηρούμενων λαθών;

Υποθέσεις:

1. H_0: Δεν υπάρχει διαφορά στην κατανόηση των κλασμάτων μεταξύ μαθητών τυπικής ανάπτυξης και μαθητών με Η.Ε.Α. ανάλογα με τον **τρόπο αναπαράστασης**.

   H_1: Υπάρχει διαφορά στην κατανόηση των κλασμάτων μεταξύ μαθητών τυπικής ανάπτυξης και μαθητών με Η.Ε.Α. ανάλογα με τον **τρόπο αναπαράστασης**.

2. H_0: Δεν υπάρχει διαφορά μεταξύ μαθητών τυπικής ανάπτυξης και μαθητών με Η.Ε.Α. στην κατανόηση της **εννοιολογικής** και **διαδικαστικής** γνώσης των κλασμάτων.

   H_1: Υπάρχει διαφορά μεταξύ μαθητών τυπικής ανάπτυξης και μαθητών με Η.Ε.Α. στην κατανόηση της **εννοιολογικής** και **διαδικαστικής** γνώσης των κλασμάτων.
3. H_0: Δεν υπάρχει διαφορά μεταξύ μαθητών τυπικής ανάπτυξης και μαθητών με Η.Ε.Α. στη **συχνότητα** και στη **φύση** των παρατηρούμενων λαθών.

   H_1: Υπάρχει διαφορά μεταξύ μαθητών τυπικής ανάπτυξης και μαθητών με Η.Ε.Α. στη **συχνότητα** και στη **φύση** των παρατηρούμενων λαθών.

Τα παραπάνω ερωτήματα διερευνώνται στο επόμενο, ερευνητικό κομμάτι της παρούσας εργασίας και επιχειρείται να δοθούν απαντήσεις σε αυτά στην ενότητα των συμπερασμάτων.

2ο Κεφάλαιο
Ερευνητικό μέρος

2.1. Μεθοδολογία
2.1.1. Ερευνητική στρατηγική
2.1.2. Δείγμα
2.1.3. Διαδικασίες και εργαλεία της έρευνας
2.1.4. Αναλύσεις της έρευνας
2.2. Αποτελέσματα
2.2.1. Έλεγχος κανονικότητας της κατανομής
2.2.2. Διπαραγοντική ανάλυση διακύμανσης ανεξαρτήτων δειγμάτων
2.2.3. Διπαραγοντική ανάλυση διακύμανσης επαναλαμβανομένων μετρήσεων
2.2.4. Συγκρίσεις ανά ερώτηση
2.2.5. Ανάλυση παλινδρόμησης
2.2.6. Ποιοτική ανάλυση λαθών
2.3. Συζήτηση
2.4. Συμπεράσματα
2.5. Περιορισμοί
2.6. Προτάσεις για τη διδασκαλία
2.7. Μελλοντικές έρευνες
2.8. Βιβλιογραφικές αναφορές
2.8.1. Ξενόγλωσση
2.8.2. Ελληνόγλωσση
2.9. Παράρτημα
2.9.1. Εργαλείο πρώτης φάσης
2.9.2. Εργαλείο δεύτερης φάσης
2.9.3. Εργαλείο τρίτης φάσης

2.1. Μεθοδολογία

«Αυτό που παρατηρούμε δεν είναι η ίδια η φύση, αλλά το κομμάτι της φύσης που αποκαλύπτεται στη μέθοδο έρευνας που χρησιμοποιούμε».
Werner Heisenberg

2.1.1. Ερευνητική στρατηγική

Η ερευνητική στρατηγική που χρησιμοποιήθηκε ήταν περιγραφική-νατουραλιστική-εθνογραφική έρευνα με έμφαση στην παρατήρηση και στην καταγραφή των καταστάσεων/φαινομένων στο φυσικό τους περιβάλλον. Η έρευνα είχε δημοσκοπικά και συσχετιστικά χαρακτηριστικά, καθώς επιχειρήθηκε να μελετηθεί η υπάρχουσα κατάσταση με συγκέντρωση πληροφοριών από το δείγμα, ώστε να διενεργηθούν συγκρίσεις στους υπο-πληθυσμούς (μαθητές τυπικής και μαθητές με ήπιες εκπαιδευτικές ανάγκες). Επιπλέον, μελετήθηκαν οι συσχετισμοί με σκοπό τον καθορισμό των σχέσεων μεταξύ τους (Cohen, Manion, & Morrison, 2008).

2.1.2. Δείγμα

Ήπια εκπαιδευτική ανάγκη (σύμφωνα με τη γνωμάτευση του ΚΕΔΔΥ)	**Πλήθος μαθητών δείγματος**
Γενικευμένες μαθησιακές δυσκολίες- Ήπια νοητική	9
Ήπιες μαθησιακές δυσκολίες	6
Σύνθετες μαθησιακές δυσκολίες (συνδυασμός των παραπάνω κ.α.)	11
Σύνολο	26

Πίνακας 2.3. Είδος ήπιας εκπαιδευτικής ανάγκης

Οι συμμετέχοντες στην έρευνα ήταν 187 μαθητές Ε’ και Στ’ τάξης, οι οποίοι φοιτούσαν σε σχολεία του Νομού Δράμας κατά το σχολικό έτος 2015-2016. Το 86% αποτελείται από παιδιά τυπικής ανάπτυξης και το 14% από μαθητές με ήπιες εκπαιδευτικές ανάγκες, σύμφωνα με τη γνωμάτευση του ΚΕΔΔΥ (οι εκπαιδευτικές τους ανάγκες αναφέρονται στον πίνακα 2.3.). Ο μέσος όρος ηλικίας του δείγματος ήταν 11,40 έτη και η τυπική απόκλιση 0,49.

Τα γενικά στοιχεία του δείγματος παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα:

	1η φάση		2η φάση		3η φάση	
Χαρακτηριστικά	Πλήθος	Ποσοστό	Πλήθος	Ποσοστό	Πλήθος	Ποσοστό
Δείγμα	187	100%	103	100%	56	100%
Γενική αγωγή	161	86%	84	81%	41	73%
Ειδική αγωγή	26	14%	20	19%	15	27%
Αγόρια	105	56%	68	66%	41	73%
Κορίτσια	82	44%	36	35%	15	27%
Ε' τάξη	111	59%	62	60%	35	62,5%
Στ' τάξη	76	41%	42	40%	21	37,5%
3ο δ.σ. Δράμας	83	44%	42	41%	19	34%
4ο δ.σ. Δράμας	32	17%	20	19%	11	20%
13ο δ.σ. Δράμας	56	30%	34	33%	22	39%
3ο δ.σ. Προσοτσάνης	16	9%	7	7%	4	7%
Επιτυχία	77	41%	46	45%	53	95%
Αποτυχία-Επανεξέταση	110	59%	57	55%	3	5%

Πίνακας 2.4. Γενικά στοιχεία δείγματος

2.1.3. Διαδικασίες και εργαλεία της έρευνας

Επιχειρήθηκε να αναδειχθούν οι γνώσεις και οι δεξιότητες που κατέχουν οι μαθητές στη γνωστική περιοχή των κλασμάτων μέσω του Αναλυτικού Προγράμματος Σπουδών και των Στόχων που έχουν αναρτηθεί και τεθεί από το Υπουργείο. Τα εργαλεία που χορηγήθηκαν ήταν τρία και διέφεραν ως προς τον τρόπο αναπαράστασης της γνώσης, καθώς το πρώτο έκανε χρήση του συμβολικού αναπαραστατικού συστήματος, το δεύτερο του εικονιστικού και το τρίτο ήταν ένα είδος συνέντευξης με πραγματικά αντικείμενα. Η διαφοροποίηση αυτή καθιστά τα εργαλεία διαβαθμισμένης δυσκολίας από το δυσκολότερο (σύμβολα) προς το ευκολότερο (αντικείμενα). Για τις ανάγκες τις έρευνας πραγματοποιήθηκαν τρεις αξιολογήσεις με τρία διαφορετικά εργαλεία, επομένως 346 επαναξιολογήσεις των παιδιών που αποτελούν το δείγμα. Τα 103 (55%) παιδιά που δεν κατάφεραν να φτάσουν το κριτήριο επίδοσης με την πρώτη αξιολόγηση επαναξιολογήθηκαν στη δεύτερη φάση. Όσα και πάλι δεν πληρούσαν το κριτήριο επίδοσης (56, 30%) επαναξιολογήθηκε μια τρίτη και τελευταία φορά.

Κατά την πρώτη φάση αξιολογήθηκαν συνολικά 187 μαθητές (161 τ.α. και 26 Η.Ε.Α.) από αυτούς επέτυχαν 77 (75 τ.α. και 2 η.ε.α, ποσοστά 46,6% και 7,69% αντίστοιχα), ενώ χρειάστηκε να επανεξεταστούν 110 (86 τ.α. και 24 Η.Ε.Α., ποσοστά 53,4% και 92,3% αντίστοιχα). Η δεύτερη φάση περιείχε συνολικά 103 μαθητές καθώς κάποιοι απουσίαζαν (83 τ.α. και 20 Η.Ε.Α.), από αυτούς επέτυχαν 46 (42 τ.α. και 4 Η.Ε.Α., ποσοστά 51% και 20% αντίστοιχα). Επανεξέταση χρειάστηκε για 57 (41 τ.α. και 16 Η.Ε.Α., 49% και 80%). Τέλος, κατά την τρίτη φάση το τεστ χορηγήθηκε σε 56 μαθητές (41 τ.α. και 15 Η.Ε.Α.), με 53 να σημειώνουν επιτυχία (40, 97,5% και 13, 86,6%) και 3 να απαιτούν επανεξέταση-αξιολόγηση του γιατί αποτυγχάνουν (1, 2,4% και 2, 13,3%). Και οι τρεις μαθητές που απέτυχαν είχαν διάγνωση ή πιθανή νοητική καθυστέρηση σύμφωνα με τους εκπαιδευτικούς του τμήματός τους.

Πριν τη χορήγηση των εργαλείων στο δείγμα πραγματοποιήθηκε πιλοτική έρευνα σε έξι μαθητές (3 τυπικής ανάπτυξης και 3 με ήπιες εκπαιδευτικές ανάγκες). Τα εργαλεία έχουν ένα εννοιολογικό (5 πρώτες ερωτήσεις) και ένα διαδικαστικό (5 επόμενες ερωτήσεις) κομμάτι και περιλαμβάνουν ερωτήματα που αφορούν (1) την αναπαράσταση, (2) τη σχετικότητα μεγέθους ανάλογα με το σημείο αναφοράς, (3) τον διαμοιρασμό, (4) τη σύγκριση, (5) τη διάταξη, (6) την αναγωγή στην κλασματική μονάδα, (7) τις τέσσερις πράξεις, (8) την ισοδυναμία και (9) την απλοποίηση των κλασμάτων. Όλες οι ερωτήσεις είναι ανοιχτού τύπου και μπορεί να υπάρχουν περισσότερες της μίας σωστές απαντήσεις. Παρακάτω παρατίθενται σε πίνακα η στοχοθεσία κάθε ερώτησης. Η διαδικασία συλλογής δεδομένων ξεκίνησε στις 03/03/16 και έληξε στις 23/03/16. Κάθε φορά παρεμβαλλόταν τουλάχιστον μία εβδομάδα μεταξύ των φάσεων. Τα πλήρη εργαλεία περιλαμβάνονται στο παράρτημα της παρούσας εργασίας.

Ερώτηση	**Θεματολογία**	**Παράδειγμα άσκησης**
1η	Αναπαράσταση	Δείξε με όποιον τρόπο θες (λόγια, σχήμα κ.α.) το 1/3
2η	Αναγνώριση	Αν κάποιος έφαγε το 1/4 μιας πίτσας, πόσα κομμάτια έφαγε και πόσα κομμάτια είχε όλη η πίτσα;
3η	Σημείο αναφοράς	Ο Γιάννης έφαγε το 1/3 μιας τούρτας. Ο Θανάσης έφαγε το 1/3 μιας άλλης τούρτας διαφορετικού μεγέθους. Ο Γιάννης είπε ότι έφαγε περισσότερη τούρτα, αλλά ο Θανάσης είπε ότι έφαγαν και οι δύο το ίδιο. Χρησιμοποίησε λέξεις και σχέδια για να δείξεις ποιος έχει δίκιο.
4η	Διαμοιρασμός	Η μητέρα σου σού έδωσε 4 κομμάτια κέικ ίδιου μεγέθους

		για να τα μοιράσεις εξίσου σε 3 άτομα. Πόσα κομμάτια κέικ θα πάρει ο καθένας;	
5η	Σύγκριση (κοινοί αριθμητές ή παρονομαστές)	Κύκλωσε το μεγαλύτερο κλάσμα από κάθε ζευγάρι κλασμάτων: 6/10 ή 6/12	
6η	Πρόβλημα με αναγωγή στην κλασματική μονάδα	Από τα 360 παιδιά μιας κατασκήνωσης τα 6/10 είναι κορίτσια. Ποιος είναι ο αριθμός των κοριτσιών;	
7η	Σύγκριση (μη κοινοί αριθμητές και παρονομαστές)	Κύκλωσε το μεγαλύτερο κλάσμα από κάθε ζευγάρι κλασμάτων: 2/3 ή 1/6	
8η	Διάταξη	Διάταξε τα κλάσματα 3/2, 1/5, 3/10 και ½ από το μικρότερο στο μεγαλύτερο.	
9η	Ισοδυναμία και Απλοποίηση	Συμπλήρωσε τα κενά ώστε να προκύψουν: Α) Ισοδύναμα κλάσματα 4/5= Β) Απλοποιημένα/Ανάγωγα κλάσματα 8/12=	
10η	Τέσσερις πράξεις (ομώνυμα και ετερώνυμα)	Κάνε τις παρακάτω πράξεις:	
		5/8 + 3/8 =	4/6*1/6=
		7/16-3/8=	2/5:4/9=

Πίνακας 2.5. Θεματολογία και παραδείγματα ασκήσεων εργαλείων

2.1.4. Αναλύσεις της έρευνας

Τα δεδομένα που συλλέχθηκαν αναλύθηκαν τόσο ποσοτικά όσο και ποιοτικά. Τα ποσοτικά στατιστικά εργαλεία που χρησιμοποιήθηκαν για τον έλεγχο της κανονικότητας της κατανομής παρατίθενται στη συνέχεια. Αρχικά διενεργήθηκαν κάποιοι εμπειρικοί έλεγχοι, μέσω γραφημάτων, προκειμένου να εξαχθεί μια εποπτική εικόνα για τα δεδομένα κάθε φάσης και έλεγχοι με στατιστικά κριτήρια, τα οποία ελέγχουν τη μηδενική υπόθεση ότι η μορφή της κατανομής των δεδομένων δε διαφέρει από την κανονική. Στη συνέχεια, ακολούθησε διπαραγοντική ανάλυση διακύμανσης ανεξαρτήτων δειγμάτων για τον καθορισμό της στατιστικής σημαντικότητας των παραγόντων φύλο, τάξη και ομάδα, για τη διαφορά μεταξύ των φάσεων και για τη διαφορά μεταξύ εννοιολογικής και διαδικαστικής γνώσης. Ακολουθούν συγκρίσεις επίδοσης μεταξύ των ομάδων, ανά ερώτηση για τις πρώτες δύο φάσεις της έρευνας. Στη συνέχεια, παρατίθενται πολλαπλές αναλύσεις παλινδρόμησης μεταξύ εννοιολογικού και διαδικαστικού κομματιού και το αντίστροφο για κάθε φάση της έρευνας. Τέλος, πραγματοποιήθηκε μια ποιοτική ανάλυση των λαθών των μαθητών σε κάθε ερώτημα και σε κάθε φάση της έρευνας.

2.2. Αποτελέσματα

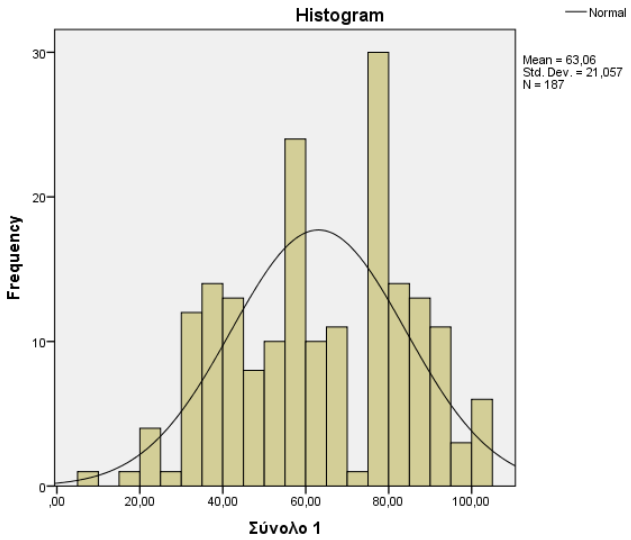
«Ο κόσμος χωρίζεται σε ανθρώπους που κάνουν πράγματα
και σε ανθρώπους που πιστώνονται τα αποτελέσματα.
Προσπάθησε να ανήκεις στην πρώτη κατηγορία.
Υπάρχει πολύ λιγότερος ανταγωνισμός».
Dwight Whitney Morrow

Για την εξαγωγή αποτελεσμάτων χρησιμοποιείται αφενός περιγραφική στατιστική, με σκοπό την περιγραφή και παρουσίαση αριθμητικών δεδομένων και αφετέρου επαγωγική στατιστική, για την εξαγωγή γενικών συμπερασμάτων με βάση δεδομένα από συγκεκριμένα δείγματα. Όλες οι στατιστικές αναλύσεις που ακολουθούν πραγματοποιήθηκαν με τη βοήθεια του προγράμματος SPSS και χρήσιμο οδηγό το βιβλίο «Στατιστική στις επιστήμες της συμπεριφοράς με τη χρήση του SPSS» των Ρούσσος και Τσαούσης.

2.2.1. Έλεγχος κανονικότητας της κατανομής

Η κανονική κατανομή είναι μια μαθηματική κατανομή, η οποία περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο κατανέμονται πολλές μεταβλητές. Για τον έλεγχο της κανονικότητας της κατανομής υπάρχουν αρκετά στατιστικά κριτήρια. Αρχικά διενεργήθηκαν κάποιοι εμπειρικοί έλεγχοι, μέσω γραφημάτων, προκειμένου να εξαχθεί μια εποπτική εικόνα για τα δεδομένα. Στη συνέχεια, διενεργήθηκαν έλεγχοι καλής προσαρμογής των δεδομένων στην κανονική κατανομή. Αυτή η διαδικασία ακολουθήθηκε και για τις τρεις φάσεις της έρευνας, ώστε να διαπιστωθεί αν οι κατανομές πληρούν τις προϋποθέσεις της κανονικής κατανομής πριν τη διενέργεια επιμέρους αναλύσεων.

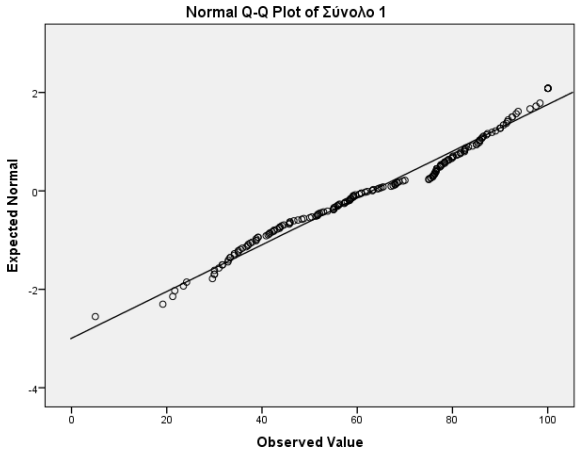
2.2.1.1. 1η φάση



Διάγραμμα 2.5. Επιδόσεις πρώτης φάσης

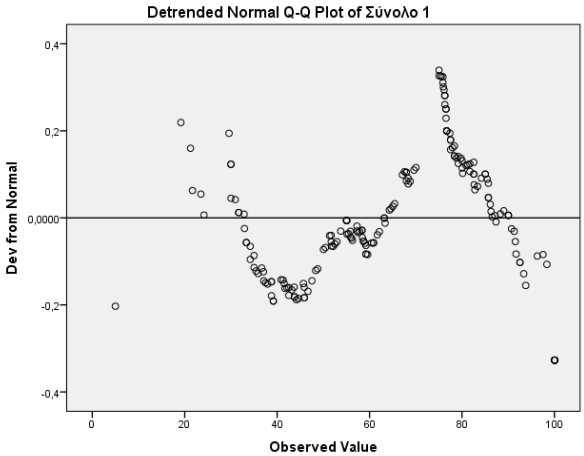
Από το παραπάνω διάγραμμα φαίνεται ότι πρόκειται για μία κατανομή πολύ κοντά στην κανονική, ελάχιστα ασύμμετρη αριστερά και σαφώς πλατύκυρτη. Ο βαθμός ασυμμετρίας της είναι -,186 και ο βαθμός κύρτωσής της είναι -,866. Οι τιμές των δύο μεγεθών που προαναφέρθηκαν πρέπει να είναι μηδέν, εδώ οι αρνητικές τιμές δείχνουν μια πεπλατυσμένη κατανομή.

Για τον έλεγχο της κανονικότητας βοηθά και το κανονικό γράφημα Q-Q, στο οποίο η διαγώνιος δείχνει τη θεωρητική κανονική κατανομή και τα σημεία που την πλαισιώνουν αντιστοιχούν στα δεδομένα. Παρατηρούμε ότι τα σημεία συγκεντρώνονται κατά μήκος της, δηλαδή πέφτουν πάνω της ή πολύ κοντά της, επομένως η κατανομή θεωρείται κανονική.



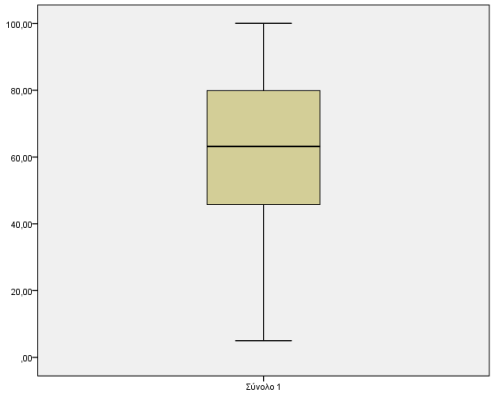
Διάγραμμα 2.6. Q-Q plot πρώτης φάσης

Ακολουθεί ένα «διορθωμένο-με απαλλαγή τάσης» Q-Q plot , το οποίο απεικονίζει τις πραγματικές αποκλίσεις των τιμών της μεταβλητής από την ευθεία οριζόντια γραμμή στο μηδέν. Το γεγονός ότι τα σημεία δε σχηματίζουν κάποιο συγκεκριμένο σχήμα και υπάρχει περίπου ίσος αριθμός σημείων πάνω και κάτω από τη γραμμή, μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι οι τιμές σχηματίζουν κανονική κατανομή.



Διάγραμμα 2.7. Διορθωμένο Q-Q plot πρώτης φάσης

Ένας ακόμα τελευταίος εμπερικός-γραφημικός έλεγχος που διενεργήθηκε ήταν η κατασκευή θηκογράμματος. Το αποτέλεσμα ήταν ένα συμμετρικό, χωρίς έκτοπες και ακραίες τιμές θηκόγραμμα, ενδεικτικό της κανονικής κατανομής.



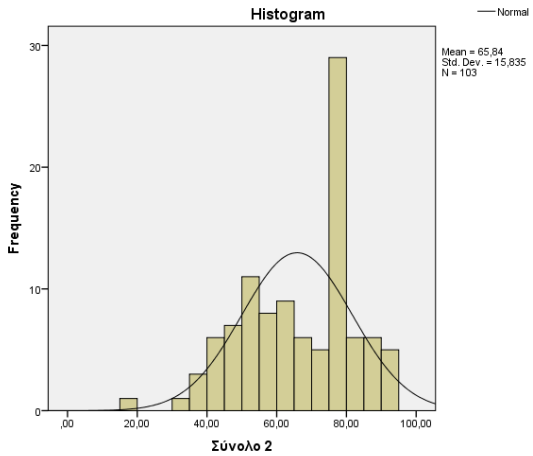
Διάγραμμα 2.8. Θηκόγραμμα πρώτης φάσης

Τέλος, διενεργήθηκαν δύο έλεγχοι με στατιστικά κριτήρια, οι Kolmogorov-Smornov (K-S) και Shapiro-Wilk (S-W), τα οποία ελέγχουν τη μηδενική υπόθεση ότι η μορφή της κατανομής των δεδομένων δε διαφέρει από την κανονική. Επιθυμούμε λοιπόν το αποτέλεσμα αυτών των τεστ να είναι στατιστικώς μη σημαντικό. Σύμφωνα με τη διόρθωση Lilliefors (για σύγκριση με κανονική κατανομή αγνώστων παραμέτρων) και τα αποτελέσματα του τεστ K-S η μεταβλητή δε σχηματίζει κανονική κατανομή

(sig. ,000). Η τιμή W από την άλλη, αποτελεί έναν συντελεστή συσχέτισης μεταξύ των δεδομένων που ελέγχονται και των αντίστοιχων κανονικών τους μετρήσεων, ιδανικός για μικρά δείγματα χωρίς προσδιορισμένο μέσο όρο και διακύμανση. Όσο πιο κοντά στο 1 βρίσκεται το κριτήριο αυτό, τόσο πιο κανονική είναι η κατανομή. Στην πρώτη φάση η τιμή του W είναι ,971, δηλαδή πολύ κοντά στο 1, άρα η κατανομή των τιμών της μεταβλητής μπορεί να θεωρηθεί κανονική.

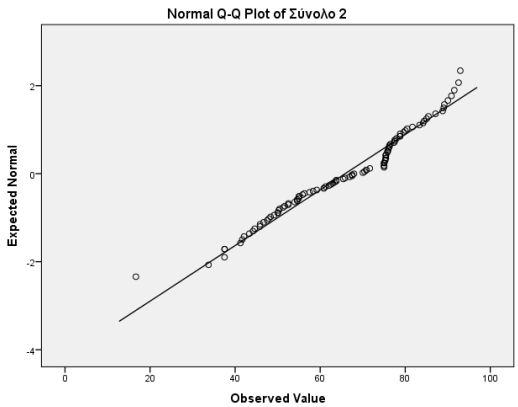
2.2.1.2. 2η φάση

Από το παρακάτω διάγραμμα φαίνεται ότι πρόκειται για μία κατανομή πολύ κοντά στην κανονική, ελάχιστα ασύμμετρη αριστερά και σαφώς πλατύκυρτη. Ο βαθμός ασυμμετρίας της είναι -,418 και ο βαθμός κύρτωσής της είναι -,388. Οι αρνητικές τιμές των δύο μεγεθών δείχνουν μια πεπλατυσμένη κατανομή.



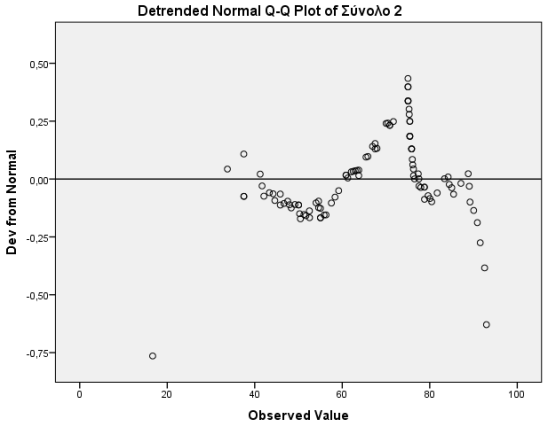
Διάγραμμα 2.9. Επιδόσεις δεύτερης φάσης

Ακολουθεί ένα γράφημα Q-Q, στο οποίο τα σημεία συγκεντρώνονται κατά μήκος της διαγώνιου, επομένως η κατανομή θεωρείται κανονική.



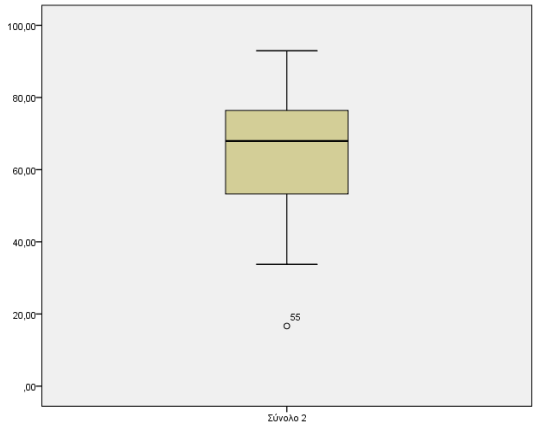
Διάγραμμα 2.10. Q-Q plot δεύτερης φάσης

Στη συνέχεια, ένα «διορθωμένο-με απαλλαγή τάσης» Q-Q plot, στο οποίο τα σημεία δε σχηματίζουν κάποιο συγκεκριμένο σχήμα και υπάρχει περίπου ίσος αριθμός σημείων πάνω και κάτω από τη γραμμή, καταδεικνύει ότι οι τιμές σχηματίζουν κανονική κατανομή.



Διάγραμμα 2.11. Διορθωμένο Q-Q plot δεύτερης φάσης

Το αποτέλεσμα από την κατασκευή θηκογράμματος ήταν ένα συμμετρικό με μία μόνο ακραία τιμή διάγραμμα, ενδεικτικό της κανονικής κατανομής.

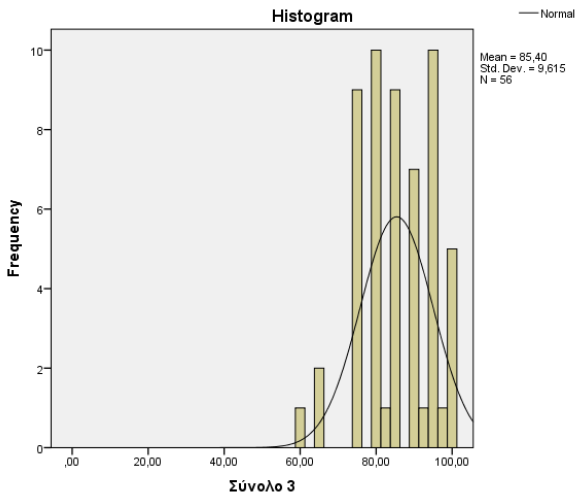


Διάγραμμα 2.12. Θηκόγραμμα δεύτερης φάσης

Τέλος, η τιμή W είναι ,963, δηλαδή πολύ κοντά στο 1, άρα η κατανομή των τιμών της μεταβλητής μπορεί να θεωρηθεί κανονική.

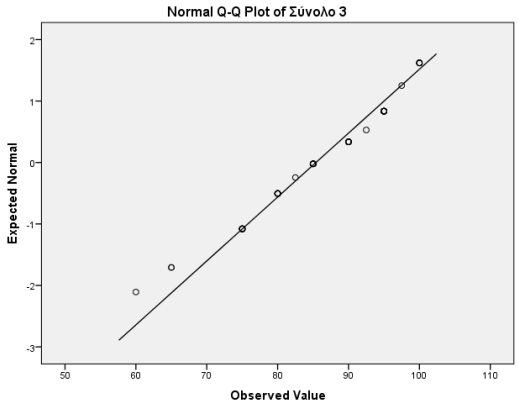
2.2.1.3. 3η φάση

Από το παρακάτω διάγραμμα φαίνεται ότι πρόκειται για μία κατανομή κοντά στην κανονική, ελάχιστα ασύμμετρη αριστερά και κάπως πλατύκυρτη, με βαθμό ασυμμετρίας -,380 και βαθμό κύρτωσής -,286.



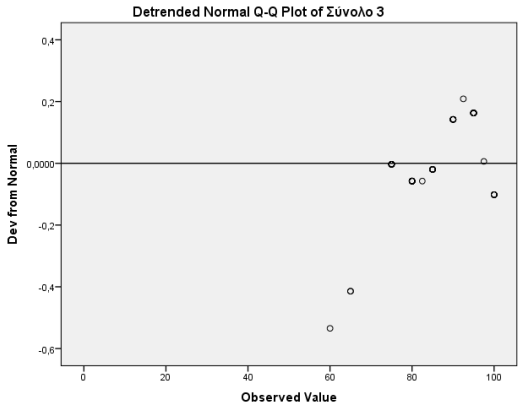
Διάγραμμα 2.13. Επιδόσεις τρίτης φάσης

Ακολουθεί ένα γράφημα Q-Q, στο οποίο τα σημεία συγκεντρώνονται κατά μήκος της οριζόντιας γραμμής, επομένως η κατανομή θεωρείται κανονική.



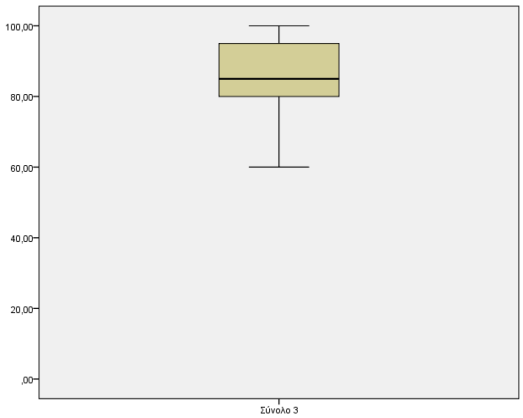
Διάγραμμα 2.14. Q-Q plot τρίτης φάσης

Το «διορθωμένο-με απαλλαγή τάσης» Q-Q plot, στο οποίο τα σημεία δε σχηματίζουν κάποιο συγκεκριμένο σχήμα και υπάρχει περίπου ίσος αριθμός σημείων πάνω και κάτω από τη γραμμή, δείχνει ότι οι τιμές σχηματίζουν κανονική κατανομή.



Διάγραμμα 2.15. Διορθωμένο Q-Q plot τρίτης φάσης

Και το αποτέλεσμα από την κατασκευή θηκογράμματος ήταν ένα συμμετρικό, χωρίς έκτοπες και ακραίες τιμές διάγραμμα, ενδεικτικό της κανονικής κατανομής.



Διάγραμμα 2.16. Θηκόγραμμα τρίτης φάσης

Η τιμή W είναι ,946, δηλαδή πολύ κοντά στο 1, άρα η κατανομή των τιμών της μεταβλητής μπορεί να θεωρηθεί κανονική.

Επομένως, και στις τρεις περιπτώσεις-φάσεις οι κατανομές μπορούν να θεωρηθούν κανονικές, αφού βρίσκονται πολύ κοντά στην κανονική κατανομή.

2.2.2. Διπαραγοντική ανάλυση διακύμανσης ανεξαρτήτων δειγμάτων

Η παραγοντική ανάλυση διακύμανσης αποτελεί ένα παραμετρικό κριτήριο για τη μελέτη των επιδράσεων περισσότερων της μιας ανεξάρτητων μεταβλητών στην εξαρτημένη, καθώς και των αλληλεπιδράσεών τους, δηλαδή του τρόπου με τον οποίο συνδυάζονται επηρεάζοντας τη συμπεριφορά των συμμετεχόντων. Στην παρούσα έρευνα οι δύο παράγοντες που εξετάστηκε αρχικά η επίδρασή τους στην επίδοση σε κλασματικά έργα ήταν το φύλο (αγόρι, κορίτσι) και η τάξη (Ε’, Στ’) στην ενότητα 2.2.2.1. Η επίδραση του τρόπου αναπαράστασης (σύμβολα, σχήματα, αντικείμενα), ο οποίος διέφερε σε κάθε φάση (ενότητα 2.2.2.2.). Τέλος, εξετάστηκε και η επίδραση του είδους γνώσης (εννοιολογική διαδικαστική) στην ενότητα 2.2.2.3. Τα ανεξάρτητα δείγματα ήταν οι μαθητές τυπικής ανάπτυξης και οι μαθητές με ήπια εκπαιδευτική ανάγκη.

2.2.2.1. Φύλο, Τάξη και Ομάδα

Στην παρούσα ενότητα εξετάζεται η επίδραση των παραγόντων φύλο, τάξη και ομάδα (ύπαρξη ήπιας εκπαιδευτικής ανάγκης ή όχι) στην επίδοση των μαθητών σε κάθε φάση της ερευνητικής διαδικασίας.

2.2.2.1.1. 1η φάση

Παρακάτω παρατίθεται ο πίνακας με τον μέσο όρο, την τυπική απόκλιση και το πλήθος των ατόμων ανά συνθήκη (φύλο, τάξη, διάγνωση) κατά την πρώτη φάση της ερευνητικής διαδικασίας:

Περιγραφικά στοιχεία					
Φύλο	Τάξη	Ομάδα	Μέσος όρος	Τυπική απόκλιση	N
αγόρια	Ε'	τυπικής	61,0026	19,09151	42
		ηεα	30,3525	12,12698	8
		Σύνολο	56,0986	21,32658	50
	Στ'	τυπικής	67,1559	21,16509	43
		ηεα	46,5458	20,21091	12
		Σύνολο	62,6592	22,48161	55
	Σύνολο	τυπικής	64,1155	20,28452	85
		ηεα	40,0685	18,89223	20
		Σύνολο	59,5351	22,08080	105
κορίτσια	Ε'	τυπικής	68,2351	18,21637	57
		ηεα	55,5300	5,85238	4
		Σύνολο	67,4020	17,92991	61
	Στ'	τυπικής	69,6532	22,05910	19
		ηεα	50,5650	17,85445	2
		Σύνολο	67,8352	22,06464	21
	Σύνολο	τυπικής	68,5896	19,10335	76
		ηεα	53,8750	9,53311	6
		Σύνολο	67,5129	18,93093	82
Σύνολο	Ε'	τυπικής	65,1668	18,84189	99
		ηεα	38,7450	16,01878	12
		Σύνολο	62,3104	20,24530	111
	Στ'	τυπικής	67,9212	21,29242	62
		ηεα	47,1200	19,29480	14
		Σύνολο	64,0894	22,34187	76
	Σύνολο	τυπικής	66,2275	19,80156	161
		ηεα	43,2546	18,01732	26
		Σύνολο	63,0334	21,08172	187

Πίνακας 2.6. Επίδοση πρώτης φάσης

Στη συνέχεια ακολούθησε ένας έλεγχος της ομοιογένειας των διακυμάνσεων των μετρήσεων κάθε ερευνητικής συνθήκης, ο οποίος ελέγχει την μηδενική υπόθεση ότι η διακύμανση των λαθών της εξαρτημένης μεταβλητής είναι ίση σε όλες τις ομάδες. Αφού το κριτήριο είναι μη σημαντικό (sig. ,087) δεχόμαστε ότι η προϋπόθεση της ισότητας των διακυμάνσεων πληρείται.

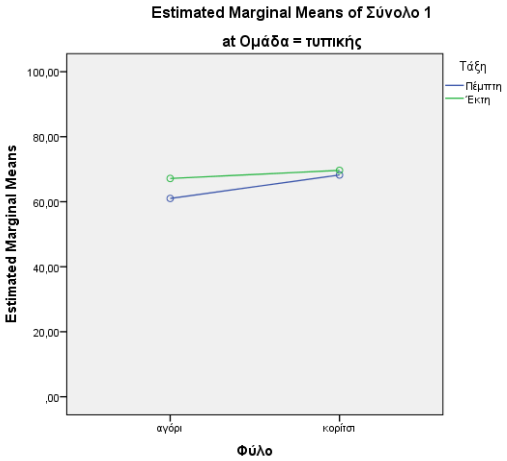
Από τον ανακεφαλαιωτικό πίνακα της διπαραγοντικής διακύμανσης προέκυψε ότι οι επιδράσεις του παράγοντα ομάδα ήταν σημαντικές (sig. ,000) στην επίδοση αλλά οι επιδράσεις του φύλου (sig. ,057), της τάξης (sig. ,055) και των συνδυασμών φύλο-

τάξη (sig. ,069), φύλο-ομάδα (sig. 085), τάξη-ομάδα (sig. 060) και φύλο-τάξη-ομάδα (sig. 074) ήταν μη σημαντικές.

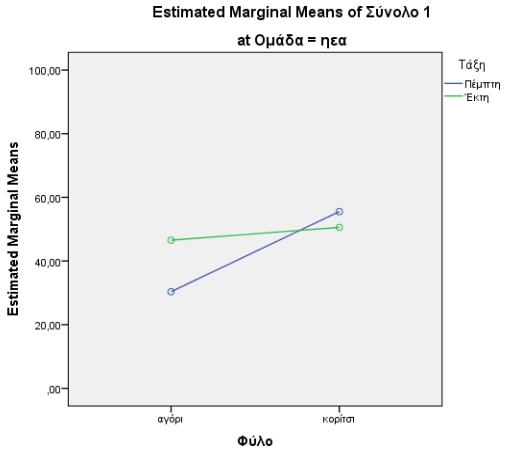
Τέλος, παρουσιάζονται τα διαγράμματα της αλληλεπίδρασης των μεταβλητών, ξεχωριστά για κάθε ομάδα:

Τα κορίτσια (ηεα και τυπικής) είχαν ελαφρώς καλύτερη επίδοση σε σχέση με τα αγόρια της αντίστοιχης ομάδας και τα παιδιά της έκτης σημείωσαν σχετικά καλύτερες βαθμολογίες.

Παρακάτω ακολουθούν διαγράμματα σφαλμάτων με τα διαστήματα 95% των

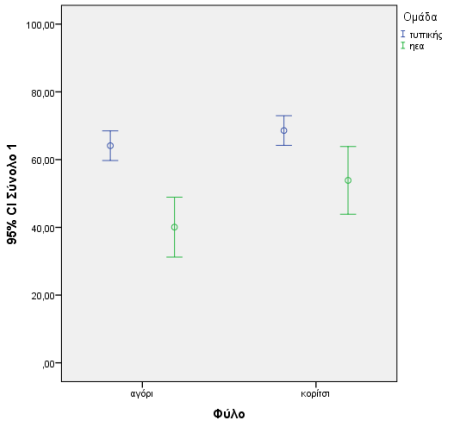


Διάγραμμα 2.17. Επίδοση αγοριών και κοριτσιών τυπικής ανάπτυξης

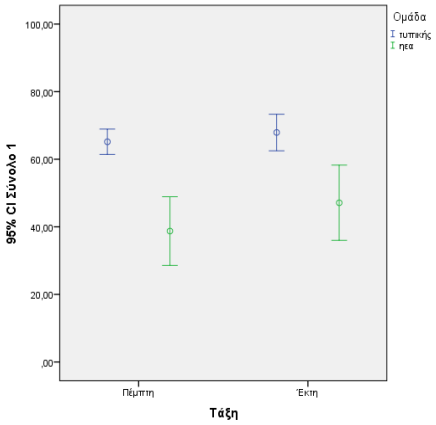


Διάγραμμα 2.18. Επίδοση αγοριών και κοριτσιών με ήπιες εκπαιδευτικές ανάγκες

μέσων όρων της επίδοσης για καθεμιά από τις συνθήκες των μεταβλητών:



Διάγραμμα 2.19. Σφάλματα αγοριών και κοριτσιών τυπικής ανάπτυξης



Διάγραμμα 2.20. Σφάλματα αγοριών και κοριτσιών με Η.Ε.Α.

Προκύπτει ότι η ύπαρξη ή όχι διάγνωσης και όχι το φύλο ή η τάξη προκάλεσαν τη σημαντική διαφορά μεταξύ των ομάδων.

2.2.2.1.2. 2η φάση

Στη συνέχεια, παρατίθεται ο πίνακας με τον μέσο όρο, την τυπική απόκλιση και το πλήθος των ατόμων ανά συνθήκη για τη δεύτερη φάση:

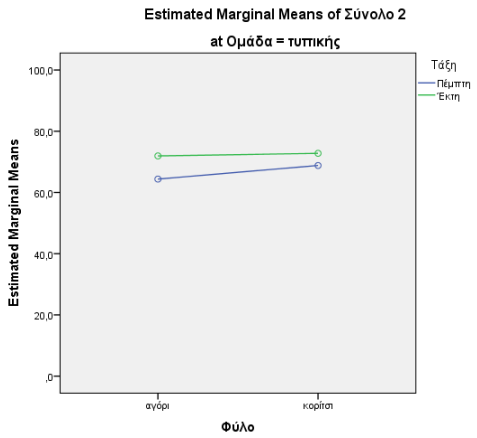
Περιγραφικά στοιχεία					
Φύλο	Τάξη	Ομάδα	Μέσος όρος	Τυπική απόκλιση	N
αγόρια	Ε΄	τυπικής	64,367	14,0601	27
		ηεα	47,514	12,7959	8
		Σύνολο	60,515	15,3764	35
	Στ΄	τυπικής	71,932	14,4347	25
		ηεα	56,686	11,7156	8
		Σύνολο	68,236	15,1763	33
	Σύνολο	τυπικής	68,004	14,6083	52
		ηεα	52,100	12,7632	16
		Σύνολο	64,262	15,6557	68
κορίτσια	Ε’	τυπικής	68,813	16,0925	23
		ηεα	66,270	21,0435	3
		Σύνολο	68,520	16,2483	26
	Στ’	τυπικής	72,786	14,6634	8
		ηεα	48,340	.	1
		Σύνολο	70,070	15,9543	9
	Σύνολο	τυπικής	69,839	15,5950	31
		ηεα	61,788	19,3802	4
		Σύνολο	68,919	15,9526	35
Σύνολο	Ε’	τυπικής	66,412	15,0392	50
		ηεα	52,629	16,7313	11
		Σύνολο	63,927	16,1219	61
	Στ’	τυπικής	72,139	14,2634	33
		ηεα	55,759	11,3066	9
		Σύνολο	68,629	15,1660	42
	Σύνολο	τυπικής	68,689	14,9164	83
		ηεα	54,038	14,2728	20
		Σύνολο	65,844	15,8347	103

Πίνακας 2.7. Επίδοση δεύτερης φάσης

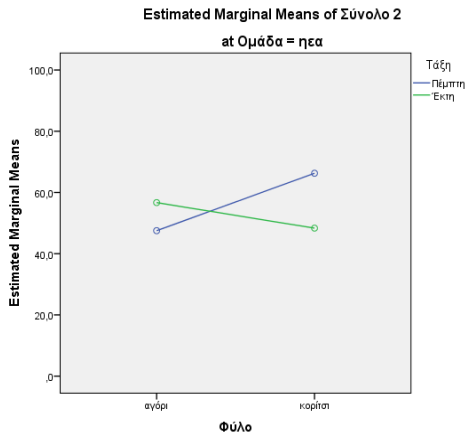
Από τον έλεγχο της ομοιογένειας των διακυμάνσεων των μετρήσεων κάθε ερευνητικής συνθήκης φαίνεται ότι πληρείται η προϋπόθεση της ισότητας των διακυμάνσεων, αφού το κριτήριο είναι μη σημαντικό (sig. ,795).

Από τη διπαραγοντική διακύμανση προέκυψε για άλλη μια φορά ότι οι επιδράσεις του παράγοντα ομάδα (ύπαρξη ή όχι διάγνωσης) ήταν σημαντικές στην επίδοση (sig. ,009) αλλά οι επιδράσεις του φύλου (sig. ,201), της τάξης (sig. ,060) και των συνδυασμών φύλο-τάξη (sig. ,065), φύλο-ομάδα (sig. ,382), τάξη-ομάδα (sig. ,061) και φύλο-τάξη-ομάδα (sig. ,075) ήταν μη σημαντικές.

Τέλος, παρατίθενται τα διαγράμματα της αλληλεπίδρασης των μεταβλητών σε κάθε ομάδα:



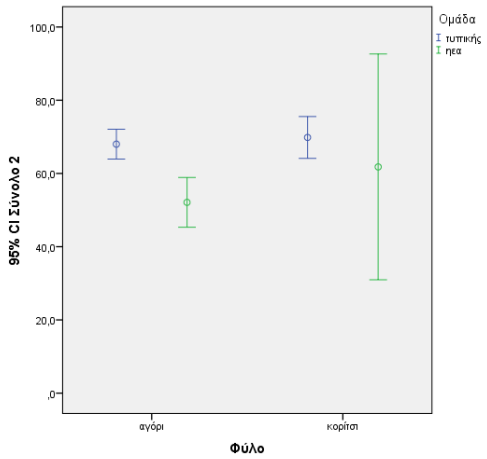
Διάγραμμα 2.21. Επίδοση αγοριών και κοριτσιών τ.α.



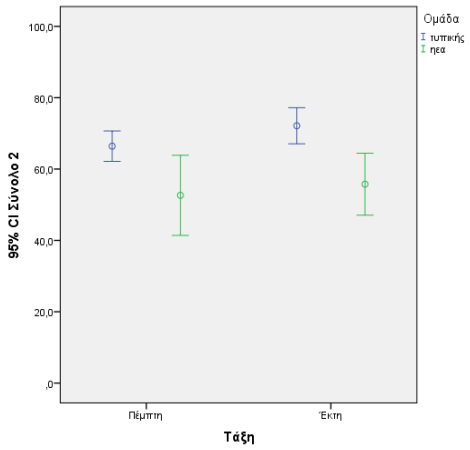
Διάγραμμα 2.22. Επίδοση αγοριών και κοριτσιών με Η.Ε.Α.

Φαίνεται να επηρεάζει την επίδοση περισσότερο η ύπαρξη διάγνωσης και όχι το φύλο ή η τάξη.

Τέλος, ακολουθούν διαγράμματα σφαλμάτων με τα διαστήματα 95% των μέσων όρων της επίδοσης για καθεμιά από τις συνθήκες των μεταβλητών:



Διάγραμμα 2.23. Σφάλματα αγοριών και κοριτσιών τ.α.



Διάγραμμα 2.24. Σφάλματα αγοριών και κοριτσιών με Η.Ε.Α.

Προκύπτει και πάλι ότι η ύπαρξη ή όχι διάγνωσης και όχι το φύλο ή η τάξη προκάλεσαν τη σημαντική διαφορά μεταξύ των ομάδων.

2.2.2.1.3. 3η φάση

Παρακάτω παρατίθεται ο πίνακας με τον μέσο όρο, την τυπική απόκλιση και το πλήθος των ατόμων ανά συνθήκη για την τρίτη και τελευταία φάση:

Περιγραφικά στοιχεία					
Φύλο	Τάξη	Ομάδα	Μέσος όρος	Τυπική απόκλιση	N
αγόρι	Ε’	τυπικής	88,47	7,819	18

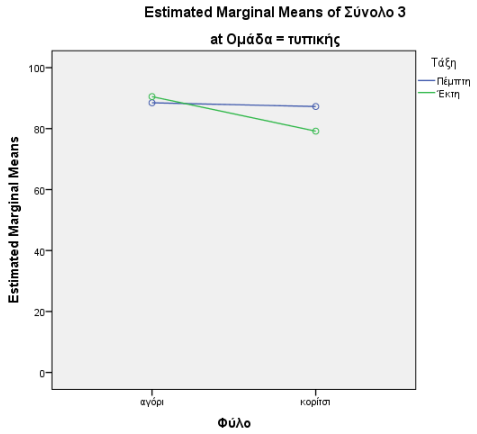
		ηεα	74,17	7,360	6
		Σύνολο	84,90	9,849	24
	Στ’	τυπικής	90,50	7,619	10
		ηεα	83,57	8,522	7
		Σύνολο	87,65	8,500	17
	Σύνολο	τυπικής	89,20	7,669	28
		ηεα	79,23	9,094	13
		Σύνολο	86,04	9,303	41
κορίτσι	Ε’	τυπικής	87,25	10,438	10
		ηεα	65,00	.	1
		Σύνολο	85,23	11,961	11
	Στ’	τυπικής	79,17	3,819	3
		ηεα	80,00	.	1
		Σύνολο	79,38	3,146	4
	Σύνολο	τυπικής	85,38	9,834	13
		ηεα	72,50	10,607	2
		Σύνολο	83,67	10,559	15
Σύνολο	Ε’	τυπικής	88,04	8,670	28
		ηεα	72,86	7,559	7
		Σύνολο	85,00	10,379	35
	Στ’	τυπικής	87,88	8,407	13
		ηεα	83,13	7,990	8
		Σύνολο	86,07	8,388	21
	Σύνολο	τυπικής	87,99	8,482	41
		ηεα	78,33	9,194	15
		Σύνολο	85,40	9,615	56

Πίνακας 2.8. Επίδοση τρίτης φάσης

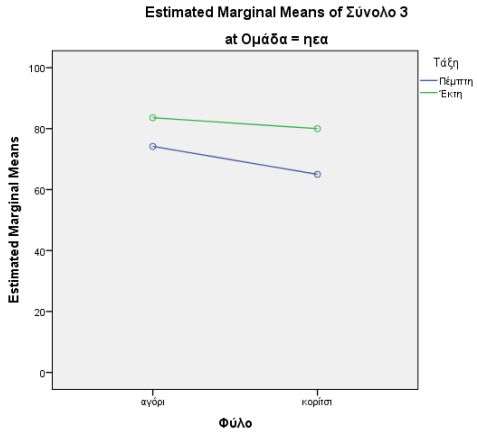
Ο έλεγχος της ομοιογένειας των διακυμάνσεων των μετρήσεων κάθε ερευνητικής συνθήκης (sig. ,270) μας οδηγεί στο να δεχθούμε ότι η προϋπόθεση της ισότητας των διακυμάνσεων πληρείται.

Στην τρίτη φάση, άνηκε ότι οι επιδράσεις των παραγόντων ομάδα (ύπαρξη ή όχι διάγνωσης) (sig. ,002) ήταν σημαντικές στην επίδοση αλλά οι επιδράσεις του φύλου (sig. ,146) της τάξης (sig. ,074) και του συνδυασμού τάξη-ομάδα (sig. ,089), φύλο-τάξη (sig. ,082), φύλο-ομάδα (sig. ,167) και φύλο-τάξη-ομάδα (sig. ,165) ήταν μη σημαντικές.

Τέλος, παρουσιάζεται το διάγραμμα της αλληλεπίδρασης των μεταβλητών:



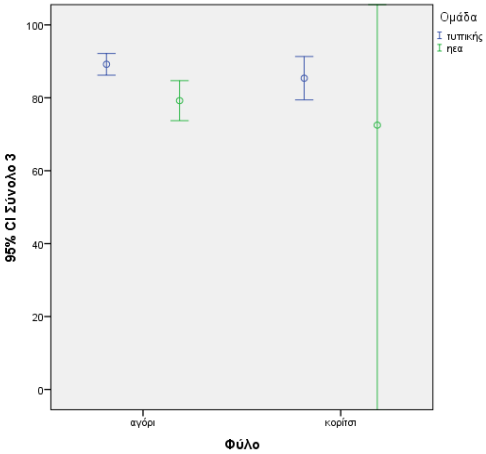
Διάγραμμα 2.25. Επίδοση αγοριών και κοριτσιών τ.α.



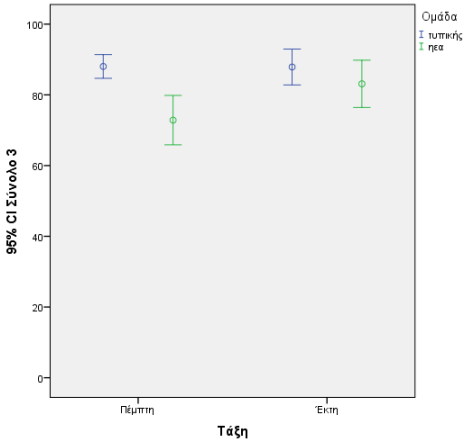
Διάγραμμα 2.26. Επίδοση αγοριών και κοριτσιών με Η.Ε.Α.

Στην πρακτική αυτή φάση τα αγόρια πέτυχαν ελαφρώς καλύτερες επιδόσεις σε αντίθεση με τις προηγούμενες φάσεις.

Τέλος, ακολουθεί τα διαγράμματα σφαλμάτων με τα διαστήματα 95% των μέσων όρων της επίδοσης για καθεμιά από τις συνθήκες των μεταβλητών:



Διάγραμμα 2.27. Σφάλματα αγοριών και κοριτσιών τ.α.



Διάγραμμα 2.28. Σφάλματα αγοριών και κοριτσιών με Η.Ε.Α.

Γενικά, προκύπτει ότι σε όλες τις φάσεις της έρευνας η ύπαρξη ή όχι ήπιας εκπαιδευτικής ανάγκης και όχι το φύλο ή η τάξη προκάλεσαν τη σημαντική διαφορά μεταξύ των ομάδων.

2.2.2.2. Είδος αναπαράστασης

Στην ενότητα αυτή εξετάζεται το κατά πόσο το είδος αναπαράστασης κάθε φάσης (σύμβολα, σχήματα, αντικείμενα) έπαιξε καθοριστικό ρόλο στην επίδοση των μαθητών σε κλασματικά έργα.

Παρακάτω παρατίθενται οι μέσοι όροι και οι τυπικές αποκλίσεις ανά ομάδα και ανά φάση:

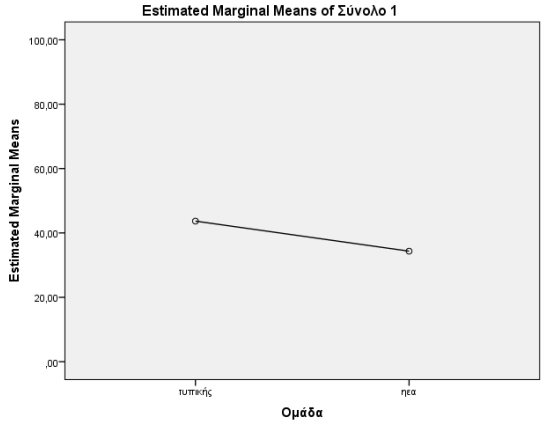
Περιγραφικά στοιχεία				
	Ομάδα	Μέσος όρος	Τυπική απόκλιση	N
Σύνολο 1	τυπικής	43,6702	10,95354	41
	ηεα	34,3360	12,00052	15
	Σύνολο	41,1700	11,88753	56
Σύνολο 2	τυπικής	56,540	10,9960	41
	ηεα	48,152	9,5312	15
	Σύνολο	54,293	11,1852	56
Σύνολο 3	τυπικής	87,99	8,482	41
	ηεα	78,33	9,194	15
	Σύνολο	85,40	9,615	56

Πίνακας 2.9. Επιδόσεις ανά φάση

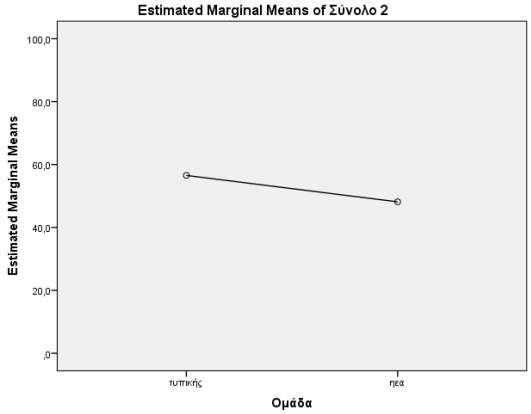
Οι μαθητές της τυπικής σκόραραν υψηλότερα σε όλες τις φάσεις της ερευνητικής διαδικασίας.

Το κριτήριο Levene ως στατιστικά μη σημαντικό και στις τρεις φάσεις (sigα'. ,603; sigβ'. ,525; sigγ'. ,839) δείχνει ότι πρέπει να δεχτούμε την ισότητα των διακυμάνσεων.

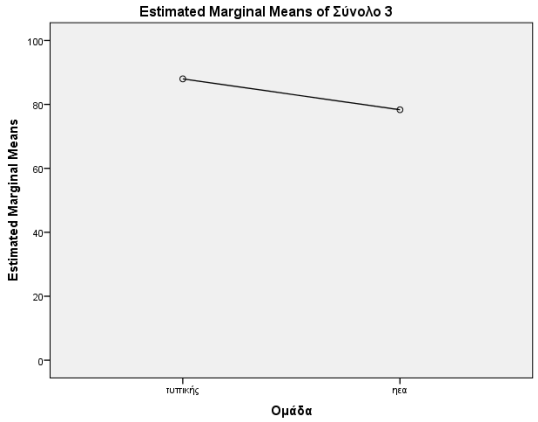
Η διαφορά στην κατανόηση μεταξύ των δύο υπο-ομάδων ήταν στατιστικά σημαντική ανεξαρτήτως του είδους αναπαράστασης (sig1. ,008; sig2. ,012; sig. ,001 αντίστοιχα).



Διάγραμμα 2.29. Επιδόσεις στο τεστ των συμβόλων



Διάγραμμα 2.31. Επιδόσεις στο τεστ των σχημάτων



Διάγραμμα 2.30. Επιδόσεις στο τεστ των αντικειμένων

Τα τρία διαγράμματα δείχνουν ότι οι επιδόσεις γίνονται ολοένα καλύτερες με την αλλαγή του είδους αναπαράστασης από τα σύμβολα, στα σχήματα και τέλος στα πραγματικά αντικείμενα.

2.2.2.3. Είδος γνώσης

Στην ενότητα αυτή εξετάζεται η επιρροή του είδους γνώσης (εννοιολογικό διαδικαστικό) στην επίδοση των μαθητών σε κλασματικά έργα.

Ακολουθεί ο πίνακας με τις επιδόσεις ανά φάση της ερευνητικής διαδικασίας για κάθε ομάδα:

Περιγραφικά στοιχεία				
	Ομάδα	Μέσος όρος	Τυπική απόκλιση	N
εννι1	τυπικής	27,9639	8,54950	41
	ηεα	23,7200	8,49738	15
	Σύνολο	26,8271	8,66805	56
διαδ1	τυπικής	15,7063	7,40835	41
	ηεα	10,7827	6,56339	15
	Σύνολο	14,3875	7,46468	56
εννι2	τυπικής	40,1766	7,85332	41
	ηεα	38,5120	4,20578	15
	Σύνολο	39,7307	7,06471	56
διαδ2	τυπικής	17,0149	7,69586	41
	ηεα	10,3080	6,49941	15
	Σύνολο	15,2184	7,92516	56
εννι3	τυπικής	43,4756	5,99161	41
	ηεα	41,3333	3,99404	15

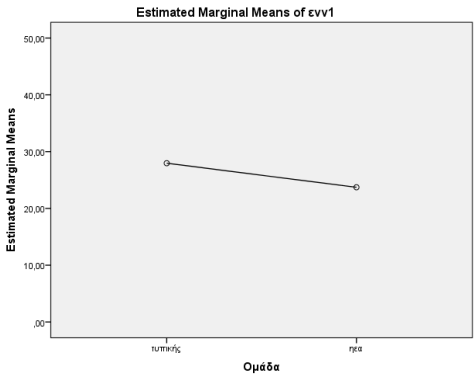
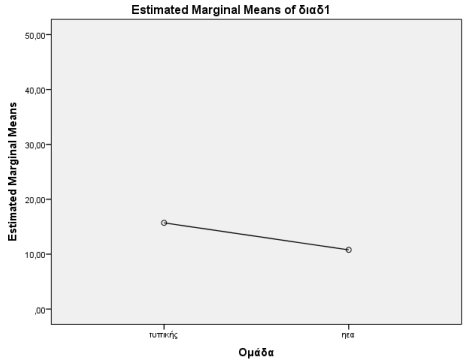
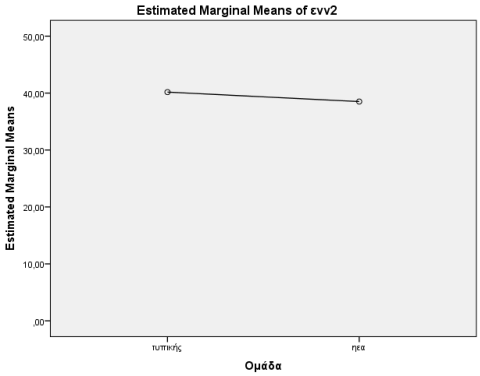
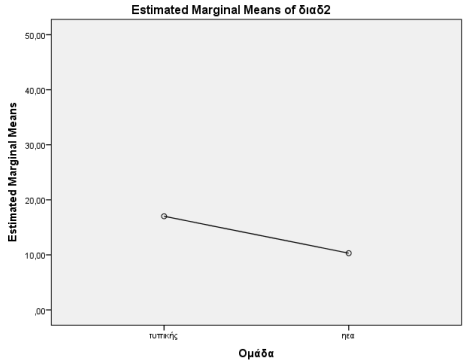
	Σύνολο	42,9018	5,57545	56
διαδ3	τυπικής	44,5122	4,61721	41
	ηεα	37,0000	9,21954	15
	Σύνολο	42,5000	6,95766	56

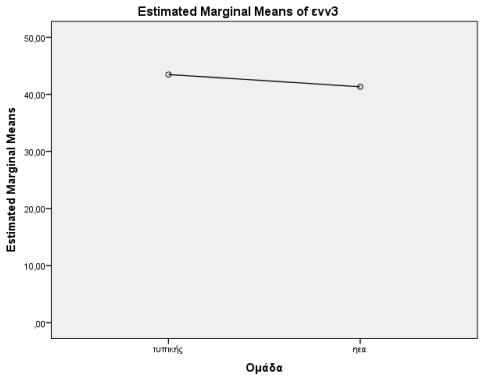
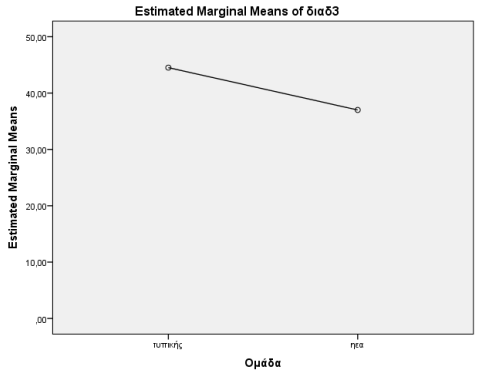
Πίνακας 2.10. Επιδόσεις εννοιολογικού-διαδικαστικού κομματιού

Σε όλες τις μετρήσεις το εννοιολογικό κομμάτι ήταν σε υψηλότερο επίπεδο σε σχέση με το διαδικαστικό εκτός από την επίδοση των μαθητών με ήπιες εκπαιδευτικές ανάγκες στην τρίτη φάση.

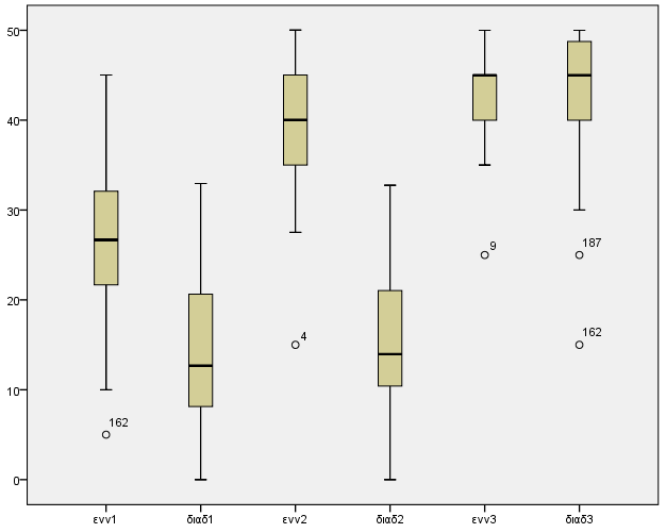
Το κριτήριο Levene ως στατιστικά μη σημαντικό στις περισσότερες φάσεις (sigεvv1. ,442; sigδιαδ1. ,125; sigδιαδ2. ,203; sigεvv3. ,074) δείχνει ότι πρέπει να δεχτούμε την ισότητα των διακυμάνσεων. Εξαίρεση αποτελούν το εννοιολογικό της δεύτερης (sigεvv2. ,014) και το διαδικαστικό κομμάτι της τρίτης φάσης (sigδιαδ3. ,009).

Προκύπτει ότι η διαφορά μεταξύ των υπο-ομάδων είναι στατιστικώς σημαντικές για τα τρία διαδικαστικά κομμάτια των τεστ (sig. ,027; ,004; ,000 για τις τρεις φάσεις αντίστοιχα) και όχι για τα εννοιολογικά (sig. ,105; ,440; ,206 αντίστοιχα).

	Εννοιολογικό	**Διαδικαστικό**
1η φάση	 *Διαγραμμα 2.32. Επιδόσεις συμβολικού-εννοιολογικού κομματιού*	 *Διάγραμμα 2.33. Επιδόσεις συμβολικού-διαδικαστικού κομματιού*
2η φάση	 *Διάγραμμα 2.34. Επιδόσεις σχηματικού-εννοιολογικού κομματιού*	 *Διάγραμμα 2.35. Επιδόσεις σχηματικού-διαδικαστικού κομματιού*

3η φάση	 *Διάγραμμα 2.36. Επιδόσεις πρακτικού-εννοιολογικού κομματιού*	 *Διάγραμμα 2.37. Επιδόσεις πρακτικού-διαδικαστικού κομματιού*

Σε όλες τις φάσεις οι μαθητές τυπικής ανάπτυξης είχαν καλύτερο σκορ σε σχέση με τους μαθητές με Η.Ε.Α. Επιπλέον, σε όλες τις φάσεις το εννοιολογικό σκορ ήταν υψηλότερο σε σχέση με το αντίστοιχο διαδικαστικό. Η διαφορά αυτή μειώθηκε κατά την τρίτη πρακτική φάση.



Πίνακας 2.11. Διαφορές εννοιολογικού-διδικαστικού ανά φάση

2.2.3. Διπαραγοντική ανάλυση διακύμανσης επαναλαμβανομένων μετρήσεων

Η ανάλυση αυτή αποτελεί ένα στατιστικό κριτήριο που εφαρμόζεται στα δεδομένα από ερευνητικούς σχεδιασμούς με περισσότερες από δύο ερευνητικές συνθήκες στις οποίες έχουν μετρηθεί οι ίδιοι συμμετέχοντες. Ο σχεδιασμός αυτός έχει το πλεονέκτημα ότι οι ατομικές διαφορές μεταξύ των συμμετεχόντων εξαλείφονται εφόσον πρόκειται για τα ίδια άτομα σε όλες τις συνθήκες και είναι πιο

ευαίσθητος στις επιδράσεις της ανεξάρτητης μεταβλητής. Η ανάλυση αυτή πραγματοποιήθηκε δύο φορές, την πρώτη για τους 103 συμμετέχοντες που συμμετείχαν στις δύο πρώτες φάσεις (ενότητα 2.2.3.1.) και τη δεύτερη για τους 56 που συμμετείχαν και στις τρεις ερευνητικές φάσεις (ενότητα 2.2.3.2.).

2.2.3.1. Φάση 1 και φάση2

Για την διπαραγοντική ανάλυση διακύμανσης επαναλαμβανόμενων μετρήσεων της πρώτης και δεύτερης φάσης της έρευνας ως δείγμα χρησιμοποιήθηκαν οι 103 μαθητές που συμπλήρωσαν και τις δύο αυτές φάσεις, όσοι δηλαδή απέτυχαν κατά το συμβολικό επίπεδο αναπαράστασης.

Οι τρόποι αναπαράστασης είναι δύο (σύμβολα, σχήματα) και τα είδη της γνώσης δύο (εννοιολογικό-διαδικαστικό) επομένως προκύπτουν τέσσερις μεταβλητές (μετρήσεις για τον κάθε συμμετέχοντα). Στην πρώτη φάση υπάρχει το συμβολικό-εννοιολογικό και το συμβολικό-διαδικαστικό κομμάτι, ενώ στη δεύτερη το σχηματικό εννοιολογικό και το σχηματικό-διαδικαστικό κομμάτι.

Ο μέσος όρος, η τυπική απόκλιση και το πλήθος των ατόμων για κάθε συνθήκη των ανεξάρτητων μεταβλητών παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα:

Περιγραφικά στοιχεία				
	Ομάδα	Μέσος όρος	Τυπική απόκλιση	N
1η φάση συμβολικό-εννοιολογικό	τυπικής	30,5336	7,78981	83
	ηεα	23,9595	8,37705	20
	Σύνολο	29,2571	8,28755	103
1η φάση συμβολικό-διαδικαστικό	τυπικής	19,8838	8,53431	83
	ηεα	13,1895	8,60719	20
	Σύνολο	18,5839	8,91257	103
2η φάση σχηματικό-εννοιολογικό	τυπικής	44,0725	7,00251	83
	ηεα	40,8890	5,63891	20
	Σύνολο	43,4544	6,85163	103
2η φάση σχηματικό-διαδικαστικό	τυπικής	25,3411	10,52965	83
	ηεα	13,9835	9,52607	20
	Σύνολο	23,1357	11,24363	103

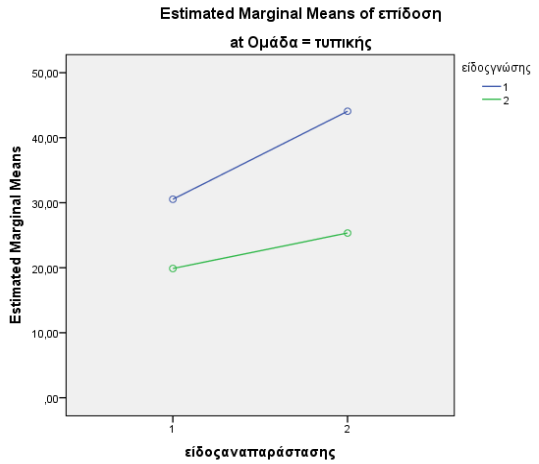
Πίνακας 2.12. Σύγκριση επίδοσης πρώτης και δεύτερης φάσης

Στη συνέχεια ακολουθούν τα αποτελέσματα του ελέγχου σφαιρικότητας μετά την εφαρμογή του κριτηρίου του Mauchly. Η προϋπόθεση της σφαιρικότητας μπορεί να συγκριθεί με την προϋπόθεση της ομοιογένειας της διακύμανσης στον ερευνητικό

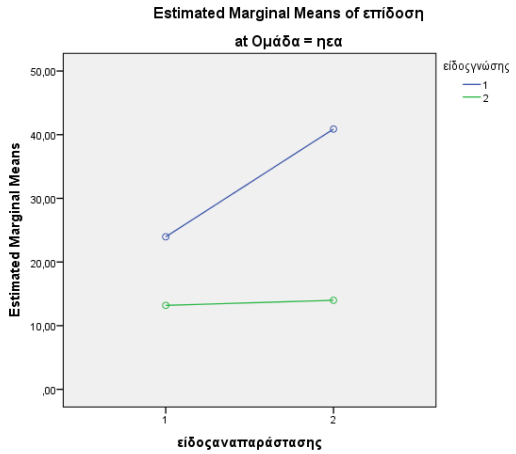
σχεδιασμό ανεξάρτητων δειγμάτων. Η σφαιρικότητα, έψιλον, αφορά την ισότητα των διακυμάνσεων των διαφορών μεταξύ των επιπέδων των ανεξάρτητων μεταβλητών (είδος γνώσης και είδος αναπαράστασης). Το αποτέλεσμα του κριτηρίου είναι στατιστικά μη σημαντικό, ενώ η υπόθεση που ελέγχεται είναι ότι οι διακυμάνσεις των διαφορών μεταξύ των μεταβλητών είναι ίσες.

Η αλληλεπίδραση των παραγόντων είδος γνώσης-ομάδα (sig. ,036), είδος αναπαράστασης-είδος γνώσης (sig. ,000) και είδος αναπαράστασης-είδος γνώσης-ομάδα (sig. ,009) είναι στατιστικώς σημαντικές, όπως επίσης και οι επιδράσεις του είδους αναπαράστασης (sig. ,000) και του είδους γνώσης (sig. ,000) στην επίδοση των μαθητών. Η αλληλεπίδραση του συνδυασμού είδος αναπαράστασης-ομάδα (sig. ,701) ήταν ο μόνος χωρίς σημαντική επίδραση στην επίδοση.

Τα επόμενα διαγράμματα αφορούν την αλληλεπίδραση των δύο ανεξάρτητων μεταβλητών:



Διάγραμμα 2.38. Επίδοση σε κάθε φάση των μαθητών τ.α.



Διάγραμμα 2.39. Επίδοση σε κάθε φάση των μαθητών με Η.Ε.Α.

Το εννοιολογικό είδος γνώσης ήταν υψηλότερο και στις δύο μετρήσεις, ενώ οι σχηματικές αναπαραστάσεις βελτίωσαν την επίδοση και στα δύο είδη, με μεγαλύτερη άνοδο στο εννοιολογικό.

Οι διαφορές μεταξύ των ειδών αναπαράστασης (σύμβολα-εικόνες) και των ειδών γνώσης (εννοιολογικό-διαδικαστικό) προέκυψε ότι είναι στατιστικά σημαντικές (sig. ,000 και στις δύο περιπτώσεις).

Συμπερασματικά, οι διαφορές στην επίδοση ήταν στατιστικά σημαντικές και η προσθήκη σχημάτων φάνηκε να βοηθά την κατανόηση των μαθητών. Οι καλύτερες επιδόσεις σημειώθηκαν στο σχηματικό-εννοιολογικό κομμάτι και οι χειρότερες στο συμβολικό-διαδικαστικό.

2.2.3.2. Φάση 1, φάση 2 & φάση 3

Για την διπαραγοντική ανάλυση διακύμανσης επαναλαμβανόμενων μετρήσεων της πρώτης, δεύτερης και τρίτης φάσης της έρευνας ως δείγμα χρησιμοποιήθηκαν οι 56 μαθητές που συμπλήρωσαν και τις τρεις φάσεις της έρευνας, όσοι δηλαδή απέτυχαν κατά το συμβολικό και σχηματικό επίπεδο αναπαράστασης και έφτασαν μέχρι το πρακτικό.

Οι τρόποι αναπαράστασης είναι τρεις (σύμβολα, σχήματα, αντικείμενα) και τα είδη της γνώσης δύο επομένως προκύπτουν έξι μεταβλητές (μετρήσεις για τον κάθε συμμετέχοντα).

Ο μέσος όρος, η τυπική απόκλιση και το πλήθος των ατόμων για κάθε συνθήκη των ανεξάρτητων μεταβλητών παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα:

Περιγραφικά στοιχεία				
	Ομάδα	Μέσος όρος	Τυπική απόκλιση	N
1η φάση συμβολικό-εννοιολογικό	τυπικής	27,9639	8,54950	41
	Η.ε.α	23,7200	8,49738	15
	Σύνολο	26,8271	8,66805	56
1η φάση συμβολικό-διαδικαστικό	τυπικής	15,7063	7,40835	41
	Η.Ε.Α.	10,7827	6,56339	15
	Σύνολο	14,3875	7,46468	56
2η φάση σχηματικό-εννοιολογικό	τυπικής	40,1766	7,85332	41
	Η.Ε.Α.	38,5120	4,20578	15
	Σύνολο	39,7307	7,06471	56
2η φάση σχηματικό-διαδικαστικό	τυπικής	17,0149	7,69586	41
	Η.Ε.Α.	10,3080	6,49941	15
	Σύνολο	15,2184	7,92516	56
3η φάση πρακτικό-εννοιολογικό	τυπικής	43,4756	5,99161	41
	Η.Ε.Α.	41,3333	3,99404	15
	Σύνολο	42,9018	5,57545	56
3η φάση πρακτικό-διαδικαστικό	τυπικής	44,5122	4,61721	41
	Η.Ε.Α.	37,0000	9,21954	15
	Σύνολο	42,5000	6,95766	56

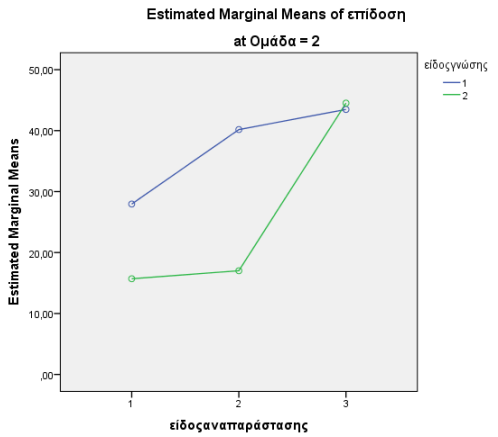
Πίνακας 2.13. Σύγκριση επίδοσης πρώτης, δεύτερης και τρίτης φάσης

Από τα αποτελέσματα του ελέγχου σφαιρικότητας προκύπτει ότι το κριτήριο του Mauchly δεν είναι στατιστικώς σημαντικό (sig. ,408), επομένως καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι πληρείται η προϋπόθεση της σφαιρικότητας.

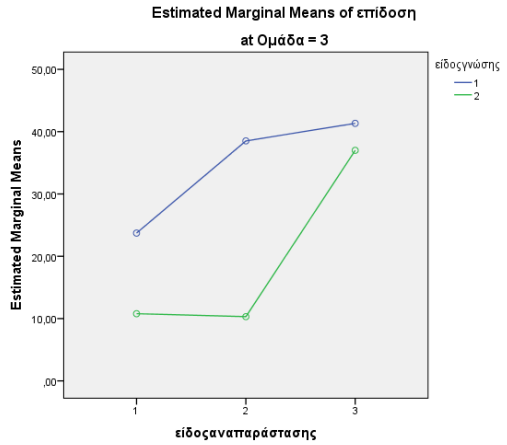
Προέκυψε ότι η αλληλεπίδραση των παραγόντων είδος γνώσης-ομάδα (sig. ,032), είδος και αναπαράστασης-είδος γνώσης (sig. ,000) είναι στατιστικώς σημαντικές,

όπως επίσης και οι επιδράσεις του είδους αναπαράστασης (sig. ,000) και του είδους γνώσης (sig. ,000) στην επίδοση των μαθητών. Αντίθετα, δεν έχουν σημαντική επίδραση ο συνδυασμός είδος αναπαράστασης-ομάδα (sig. ,937) και είδος αναπαράστασης-είδος γνώσης-ομάδα (sig. ,452).

Το επόμενο διάγραμμα αφορά την αλληλεπίδραση των δύο ανεξάρτητων μεταβλητών:



Διάγραμμα 2.40. Επίδοση σε κάθε φάση μαθητών τ.α.



Διάγραμμα 2.41. Επίδοση σε κάθε φάση μαθητών με Η.Ε.Α.

Οι επιδόσεις γίνονται ολοένα καλύτερες όσο γίνεται απλούστερος ο τρόπος αναπαράστασης της γνώσης. Και πάλι το εννοιολογικό είδος βρίσκεται σε υψηλότερο επίπεδο σε σχέση με το διαδικαστικό.

Οι διαφορές μεταξύ των ειδών αναπαράστασης (σύμβολα-εικόνες-αντικείμενα) και των ειδών γνώσης (εννοιολογικό-διαδικαστικό) είναι στατιστικά σημαντικές (sig. ,000 σε όλες τις περιπτώσεις).

Συνοψίζοντας, φάνηκε να υπάρχει επίδραση του είδους γνώσης και αναπαράστασης στην επίδοση. Καλύτερες επιδόσεις σημειώθηκαν στο εννοιολογικό και πρακτικό κομμάτι των διαδικασιών.

2.2.4. Συγκρίσεις ομάδων ανά ερώτηση

Οι συγκρίσεις που ακολουθούν αφορούν τις πρώτες δύο φάσεις της έρευνας καθώς σε αυτές μπορούσαν να είναι πιο άμεσες και εξαρτώμενες από τον τρόπο αναπαράστασης, αφού η εκφώνηση ήταν παρόμοια και το μόνο που άλλαζε ήταν η προσθήκη εικόνας ή σχήματος. Συγκρίνεται η επίδοση των μαθητών τυπικής

ανάπτυξης και των μαθητών με ήπιες εκπαιδευτικές ανάγκες για να καθοριστεί τα κατά πόσο ο τρόπος αναπαράστασης διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στην επίδοση.

2.2.4.1. Αναπαράσταση

Στην άσκηση αυτή οι μαθητές κλήθηκαν είτε να αναπαραστήσουν με όποιον τρόπο ήθελαν τα κλάσματα που τους ζητούνταν (1η φάση), είτε να κάνουν το αντίστροφο δηλαδή να αποκωδικοποιήσουν την αναπαράσταση που τους δινόταν αναφέροντας ένα κλάσμα (2η φάση). Κατά την πρώτη φάση, με τα σύμβολα, οι μαθητές τυπικής σημείωσαν στατιστικά σημαντική καλύτερη επίδοση (sig. ,000). Ωστόσο, στη δεύτερη φάση (σχήματα) οι διαφορές δεν είχαν στατιστική σημαντικότητα (sig. ,127).

2.2.4.2. Αναγνώριση

Η δεύτερη άσκηση καλούσε τους μαθητές να αναγνωρίσουν τη σημασία των παραγόντων ενός κλάσματος που τους δίνονταν. Στην πρώτη φάση με τη συμβολική αναπαράσταση και μόνο και στη δεύτερη με μία σχετική σχηματική αναπαράσταση. Στην αναγνώριση κλασμάτων οι μαθητές τυπικής και πάλι σκόραραν υψηλότερα σε σχέση με τους μαθητές με ήπιες εκπαιδευτικές ανάγκες. Ωστόσο οι διαφορές ήταν στατιστικά σημαντικές μόνο στην περίπτωση των συμβόλων (sig. ,000) και όχι των σχημάτων (sig. ,105).

2.2.4.3. Σημείο αναφοράς

Στην επόμενη, τρίτη, άσκηση, στους μαθητές δόθηκε ένα σύντομο πρόβλημα σύγκρισης δύο ποσοτήτων που αναφερόταν όμως σε διαφορετικό σημείο αναφοράς, κάτι που τις καθιστούσε άνισες. Παρόμοια με τις προηγούμενες ασκήσεις οι διαφορά στην επίδοση ήταν στατιστικώς σημαντική μόνο στην περίπτωση των συμβόλων (sig. ,014) και όχι των σχημάτων (sig. ,950).

2.2.4.4. Διαμοιρασμός

Στην άσκηση αυτή οι μαθητές κλήθηκαν να μοιράσουν διακριτές μονάδες σε έναν πληθυσμό, με ή χωρίς τη βοήθεια αντίστοιχων αναπαραστάσεων. Για άλλη μια φορά οι διαφορές στην επίδοση μεταξύ των ομάδων ήταν σημαντικές μόνο στο επίπεδο των συμβολικών αναπαραστάσεων (sig. ,029, έναντι ,622 του διαδικαστικού).

2.2.4.5. Σύγκριση (κοινοί αριθμητές ή παρονομαστές)

Στην τελευταία άσκηση του εννοιολογικού κομματιού του τεστ ζητήθηκε από τους μαθητές να συγκρίνουν ζευγάρια κλασμάτων τα οποία όμως είχαν είτε κοινούς αριθμητές, είτε κοινούς παρονομαστές. Και πάλι, μόνο ο συμβολικός τρόπος αναπαράστασης καθιστούσε τις διαφορές μεταξύ των ομάδων στατιστικά σημαντικές (sig. ,002, έναντι ,100 του διαδικαστικού).

Συνοψίζοντας, και στις πέντε ασκήσεις εννοιολογικού περιεχομένου οι διαφορές είχαν στατιστική σημαντικότητα μόνο στην πρώτη-συμβολική φάση και όχι όταν δινόταν κάποιου είδους σχηματική αναπαράσταση. Επομένως, η επίδοση των μαθητών με Η.Ε.Α. βελτιώθηκε με την προσθήκη σχημάτων, άρα αυτά φαίνεται να αποτελούν σημαντική βοήθεια.

2.2.4.6. Πρόβλημα με αναγωγή στην κλασματική μονάδα

Στην πρώτη άσκηση του διαδικαστικού είδους γνώσης οι μαθητές κλήθηκαν να επιλύσουν ένα πρόβλημα με τη μέθοδο της αναγωγής στην κλασματική μονάδα. Αυτή τη φορά οι διαφορές μεταξύ των ομάδων ήταν σημαντικές ανεξαρτήτως του είδους αναπαράστασης (sig. ,000 και στις δύο φάσεις).

2.2.4.7. Σύγκριση (μη κοινοί αριθμητές και παρονομαστές)

Στην έβδομη άσκηση οι μαθητές κλήθηκαν να συγκρίνουν ζευγάρια κλασμάτων με μη κοινούς αριθμητές και παρονομαστές. Κατά το συμβολικό επίπεδο αναπαράστασης οι διαφορές ήταν στατιστικά μη σημαντικές (sig. ,323), εντούτοις στο σχηματικό επίπεδο οι διαφορές κρίνονται στατιστικά σημαντικές (sig. ,001).

2.2.4.8. Διάταξη

Στην όγδοη άσκηση οι μαθητές κλήθηκαν να διατάξουν τέσσερα κλάσματα σε αύξουσα σειρά. Αυτή τη φορά οι διαφορές ήταν στατιστικά σημαντικές μόνο κατά τη συμβολική αναπαράσταση των κλασμάτων (sig. ,001) και όχι στη σχηματική (sig. ,244).

2.2.4.9. Ισοδυναμία και Απλοποίηση

Στην προτελευταία άσκηση οι μαθητές προσπάθησαν να βρουν ισοδύναμα και απλοποιημένα κλάσματα. Αυτή τη φορά οι διαφορές ήταν στατιστικά σημαντικές και στα δύο επίπεδα αναπαράστασης της γνώσης (sig. ,001 και ,004 αντίστοιχα).

2.2.4.10. Τέσσερις πράξεις

Στην τελευταία άσκηση του διαδικαστικού κομματιού στους μαθητές δόθηκαν προς επίλυση παραδείγματα των τεσσάρων πράξεων. Ένα παράδειγμα με ομώνυμα και ένα παράδειγμα με ετερώνυμα κλάσματα για κάθε πράξη. Και στην τελευταία άσκηση οι διαφορές ήταν στατιστικά σημαντικές και στις δύο περιπτώσεις αναπαράστασης (sig. ,000 και ,003 αντίστοιχα).

Συμπερασματικά, η εικόνα κατά το διαδικαστικό κομμάτι της γνώσης δεν ήταν τόσο ομοιόμορφη. Σε έργα διάταξης η σχηματική αναπαράσταση φάνηκε να βοηθά και να βελτιώνει την επίδοση των μαθητών με Η.Ε.Α. Στην επίλυση προβλήματος, στην ισοδυναμία-απλοποίηση και στις τέσσερις πράξεις οι διαφορές ήταν σημαντικές ανεξαρτήτως τρόπου αναπαράστασης. Τέλος, κατά τη σύγκριση ζευγαριών κλασμάτων με μη κοινούς αριθμητές και παρονομαστές οι μαθητές με Η.Ε.Α. είχαν μη σημαντικές διαφορές κατά το συμβολικό αλλά σημαντικές κατά το σχηματικό τρόπο αναπαράστασης. Μοιάζει δηλαδή οι εικόνες να τους μπερδεύουν, παρά να τους βοηθούν σε τέτοιου είδους έργα.

2.2.5. Ανάλυση παλινδρόμησης

Η ανάλυση παλινδρόμησης αφορά την πρόβλεψη των τιμών μιας μεταβλητής από τις τιμές μιας άλλης μεταβλητής. Η ερμηνευτική/προβλεπτική μεταβλητή είναι αυτή με τις γνωστές τιμές, ενώ η μεταβλητή κριτήριο αυτή της οποίας τις τιμές θέλουμε να προβλέψουμε. Για την ανάλυση της παλινδρόμησης μεταξύ εννοιολογικού και διαδικαστικού κομματιού και το αντίστροφο διενεργήθηκαν πολλαπλές αναλύσεις παλινδρόμησης προς τη μία και την άλλη κατεύθυνση και για κάθε φάση της έρευνας. Επομένως τα είδη γνώσης (εννοιολογικό-διαδικαστικό) αποτελούν τόσο προβλεπτική όσο και μεταβλητή κριτήριο εναλλακτικά για κάθε ανάλυση.

2.2.5.1. 1η φάση

2.2.5.1.1. Εννοιολογικό-διαδικαστικό

Σε πρώτη φάση η εννοιολογική γνώση θεωρήθηκε προβλεπτικό και η διαδικαστική μεταβλητή κριτήριο, για να αναδειχθεί το κατά πόσο η πρώτη μπορεί να προβλέψει τη δεύτερη.

Ο συντελεστής προσδιορισμού r^2 μας ενημερώνει για το ποσοστό της διακύμανσης της μεταβλητής κριτήριο που οφείλεται ή αποδίδεται στην προβλεπτική μεταβλητή. Στην προκειμένη περίπτωση το r^2 είναι ,419 που σημαίνει ότι το 42% της συνολικής διακύμανσης της συμβολικής διαδικαστικής γνώσης οφείλεται στη συμβολική εννοιολογική γνώση.

Το αποτέλεσμα της ανάλυσης διακύμανσης είναι σημαντικό (sig. ,000), οπότε απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση ότι δεν υπάρχει γραμμική συσχέτιση μεταξύ των μεταβλητών.

Ο συντελεστής παλινδρόμησης α είναι 21,70, δηλαδή όταν η τιμή της εννοιολογικής γνώσης είναι 0, η διαδικαστική γνώση είναι 21,70. Το b έχει τιμή ,545 και είναι στατιστικώς σημαντικό, άρα η εννοιολογική γνώση μπορεί πράγματι να προβλέψει τη διαδικαστική. Επομένως, υπάρχει θετική συσχέτιση μεταξύ των ειδών γνώσης και κάθε φορά που η εννοιολογική γνώση του ατόμου αυξάνεται κατά μία μονάδα, η διαδικαστική γνώση αυξάνεται και αυτή κατά 0,545 μονάδες.

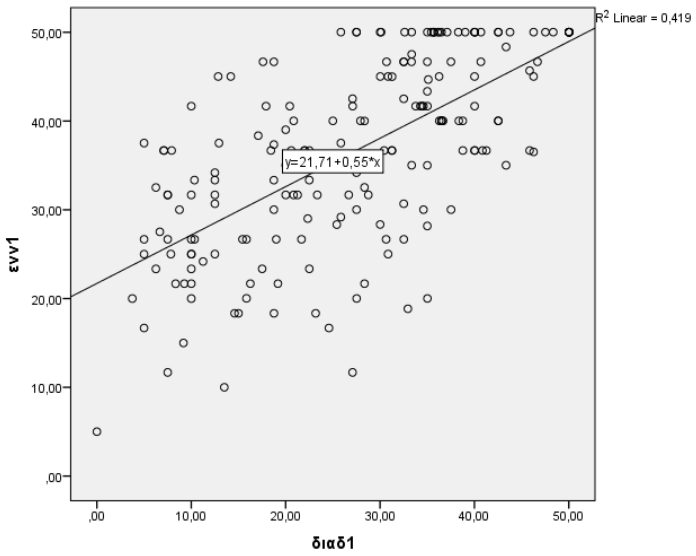
2.2.5.1.2. Διαδικαστικό-εννοιολογικό

Στη συνέχεια, η διαδικαστική γνώση θεωρήθηκε προβλεπτικό κριτήριο και η εννοιολογική μεταβλητή κριτήριο, για να αναδειχθεί το κατά πόσο η πρώτη μπορεί να προβλέψει τη δεύτερη.

Στην προκειμένη περίπτωση το r^2 είναι ,419 που σημαίνει ότι το 42% της συνολικής διακύμανσης της συμβολικής εννοιολογικής γνώσης οφείλεται στη διαδικαστική γνώση.

Το αποτέλεσμα της ανάλυσης διακύμανσης είναι σημαντικό (sig. ,000), οπότε απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση ότι δεν υπάρχει γραμμική συσχέτιση μεταξύ των μεταβλητών.

Η συνδιακύμανση των δύο ειδών γνώσης (εννοιολογικού και διαδικαστικού) φαίνεται και στο παρακάτω διάγραμμα διασποράς.



Διάγραμμα 2.42. Διάγραμμα διασποράς πρώτης φάσης

Ο συντελεστής παλινδρόμησης α είναι -1,161, δηλαδή όταν η τιμή της διαδικαστικής γνώσης είναι 0, η εννοιολογική γνώση είναι -1,161. Το b έχει τιμή ,769 και είναι στατιστικώς σημαντικό, άρα η διαδικαστική γνώση μπορεί πράγματι να προβλέψει την εννοιολογική. Επομένως, υπάρχει θετική συσχέτιση μεταξύ των ειδών γνώσης και κάθε φορά που η διαδικαστική γνώση του ατόμου αυξάνεται κατά μία μονάδα, η εννοιολογική γνώση αυξάνεται και αυτή κατά 0,769 μονάδες.

2.2.5.2. 2η φάση

2.2.5.2.1. Εννοιολογικό-διαδικαστικό

Σε πρώτη φάση η εννοιολογική γνώση της δεύτερης φάσης θεωρήθηκε προβλεπτικό και η διαδικαστική μεταβλητή κριτήριο, για να αναδειχθεί το κατά πόσο η πρώτη μπορεί να προβλέψει τη δεύτερη.

Σε αυτή τη φάση το r^2 είναι ,262 που σημαίνει ότι το 26% περίπου της συνολικής διακύμανσης της σχηματικής διαδικαστικής γνώσης οφείλεται στην εννοιολογική γνώση.

Το αποτέλεσμα της ανάλυσης διακύμανσης είναι σημαντικό (sig. ,000), οπότε απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση ότι δεν υπάρχει γραμμική συσχέτιση μεταξύ των μεταβλητών.

Ο συντελεστής παλινδρόμησης α είναι 36,243, δηλαδή όταν η τιμή της εννοιολογικής γνώσης είναι 0, η διαδικαστική γνώση είναι 36,243. Το b έχει τιμή ,312 και είναι στατιστικώς σημαντικό, άρα η εννοιολογική γνώση μπορεί πράγματι

να προβλέψει τη διαδικαστική. Επομένως, υπάρχει θετική συσχέτιση μεταξύ των ειδών γνώσης και κάθε φορά που η εννοιολογική γνώση του ατόμου αυξάνεται κατά μία μονάδα, η διαδικαστική γνώση αυξάνεται και αυτή κατά 0,312 μονάδες.

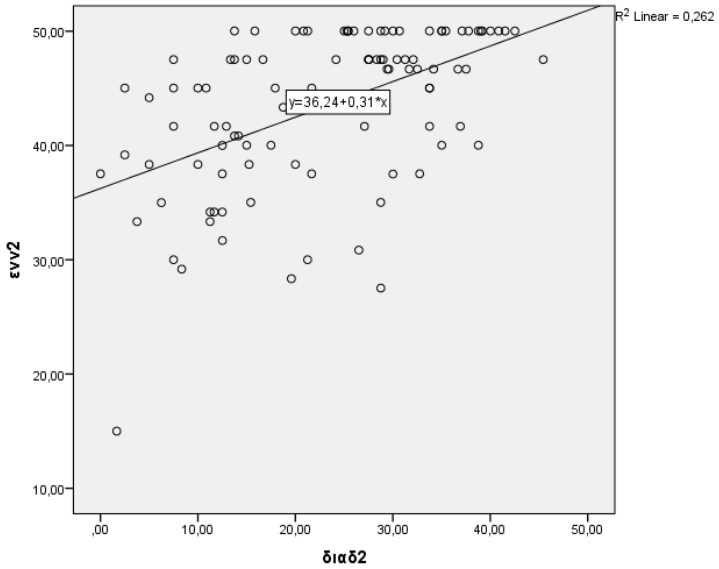
2.2.5.2.2. Διαδικαστικό-εννοιολογικό

Στη συνέχεια, η διαδικαστική γνώση θεωρήθηκε προβλεπτικό κριτήριο και η εννοιολογική μεταβλητή κριτήριο, για να αναδειχθεί το κατά πόσο η πρώτη μπορεί να προβλέψει τη δεύτερη.

Στην προκειμένη περίπτωση το r^2 είναι ,262 που σημαίνει ότι το 26% της συνολικής διακύμανσης της σχηματικής εννοιολογικής γνώσης οφείλεται στη διαδικαστική γνώση.

Το αποτέλεσμα της ανάλυσης διακύμανσης είναι σημαντικό (sig. ,000), οπότε απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση ότι δεν υπάρχει γραμμική συσχέτιση μεταξύ των μεταβλητών.

Η συνδιακύμανση γίνεται φανερή και στο παρακάτω διάγραμμα.



Διάγραμμα 2.43. Διάγραμμα διασποράς δεύτερης φάσης

Ο συντελεστής παλινδρόμησης α είναι -13,340, δηλαδή όταν η τιμή της διαδικαστικής γνώσης είναι 0, η εννοιολογική γνώση είναι -13,340. Το b έχει τιμή ,839 και είναι στατιστικώς σημαντικό, άρα η διαδικαστική γνώση μπορεί πράγματι να προβλέψει την εννοιολογική. Επομένως, υπάρχει θετική συσχέτιση μεταξύ των ειδών γνώσης και κάθε φορά που η διαδικαστική γνώση του ατόμου αυξάνεται κατά μία μονάδα, η εννοιολογική γνώση αυξάνεται και αυτή κατά 0, 839 μονάδες.

2.2.5.3. 3η φάση

2.2.5.3.1. Εννοιολογικό-διαδικαστικό

Σε πρώτη φάση η εννοιολογική γνώση της τρίτης φάσης θεωρήθηκε προβλεπτικό και η διαδικαστική μεταβλητή κριτήριο, για να αναδειχθεί το κατά πόσο η πρώτη μπορεί να προβλέψει τη δεύτερη.

Το r^2 είναι ,028 που σημαίνει ότι το 3% της συνολικής διακύμανσης της πρακτικής διαδικαστικής γνώσης οφείλεται στην εννοιολογική γνώση.

Το αποτέλεσμα της ανάλυσης διακύμανσης δεν είναι σημαντικό (sig. ,219), οπότε δε μπορούμε να απορρίψουμε τη μηδενική υπόθεση ότι δεν υπάρχει γραμμική σχέση, ο προβλεπτικό μοντέλο δεν είναι ισχυρό και κατά συνέπεια πρέπει να σταματήσει η περαιτέρω αξιολόγηση των αποτελεσμάτων για τη φάση αυτή.

2.2.5.3.2. Διαδικαστικό-εννοιολογικό

Στη συνέχεια, η διαδικαστική γνώση θεωρήθηκε προβλεπτικό κριτήριο και η εννοιολογική μεταβλητή κριτήριο, για να αναδειχθεί το κατά πόσο η πρώτη μπορεί να προβλέψει τη δεύτερη.

Στην προκειμένη περίπτωση το r^2 είναι ,028 που σημαίνει ότι το 3% της συνολικής διακύμανσης της πρακτικής εννοιολογικής γνώσης οφείλεται στη διαδικαστική γνώση.

Το αποτέλεσμα της ανάλυσης διακύμανσης δεν είναι σημαντικό (sig. ,219), οπότε δεν απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση ότι δεν υπάρχει γραμμική συσχέτιση μεταξύ των μεταβλητών και σταματάει η περαιτέρω αξιολόγηση των αποτελεσμάτων.

Συμπερασματικά, το αποτελέσματα της ανάλυσης διακύμανσης είναι στατιστικώς σημαντικά για την πρώτη και δεύτερη φάση, οπότε απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση ότι δεν υπάρχει γραμμική συσχέτιση μεταξύ των μεταβλητών εννοιολογική και διαδικαστική γνώση. Άρα η εννοιολογική γνώση μπορεί πράγματι να προβλέψει την διαδικαστική και το αντίστροφο στο συμβολικό και σχηματικό επίπεδο αναπαράστασης. Επομένως, υπάρχει θετική συσχέτιση μεταξύ των ειδών γνώσης και κάθε φορά που η εννοιολογική γνώση του ατόμου αυξάνεται, αυξάνεται και η διαδικαστική γνώση και το αντίστροφο. Κάτι τέτοιο δε φάνηκε να ισχύει για το πρακτικό κομμάτι των δύο ειδών γνώσης, ίσως λόγω κακής κατασκευής του εργαλείου.

2.2.6. Ποιοτική ανάλυση λαθών

Σε αυτό το σημείο της εργασίας παρατίθενται τα ποσοστά σωστών και λάθος απαντήσεων σε κάθε υποερώτημα των τριών φάσεων και κάποια παραδείγματα λάθος απαντήσεων που δόθηκαν από τους μαθητές.

2.2.6.1. 1η φάση

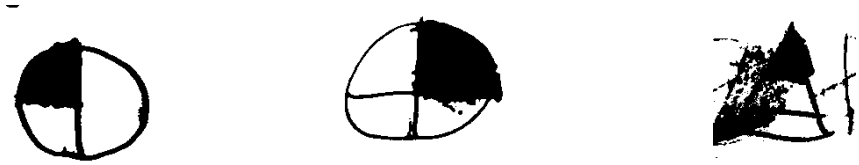
2.2.6.1.1. Αναπαράσταση

1/3 3/4 5/3

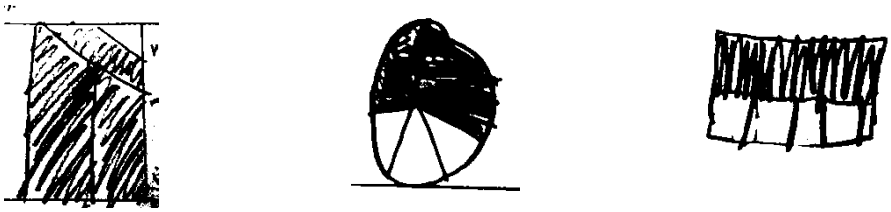
Πίνακας 2.14. Ποσοστά σωστών-λάθος απαντήσεων στην ερώτηση 1.1.

Το πρώτο υποερώτημα της πρώτης άσκησης του εννοιολογικού κομματιού του τεστ που ζητούσε την αναπαράσταση του 1/3 δυσκόλεψε αρκετούς μαθητές. Το συχνότερο λάθος ήταν η άνιση κατανομή των κομματιών, συχνό φαινόμενο κατά τον διαμοιρασμό σε περιττό αριθμό. Στο δεύτερο υποερώτημα, το οποίο είχε ζυγό παρονομαστή, σημειώθηκε ελαφρώς καλύτερη επίδοση. Τέλος, στο τρίτο υποερώτημα, στην αναπαράσταση καταχρηστικού κλάσματος, οι μισοί και παραπάνω μαθητές δεν κατάφεραν να συλλάβουν και να αποδώσουν το νόημα ενός κλάσματος μεγαλύτερου της μονάδας. Συχνότερα λάθη ήταν τα μη ίσα κομμάτια, η λάθος μετάφραση του κλάσματος και η αντιστροφή του καταχρηστικού.

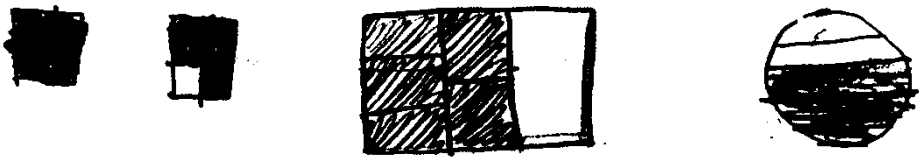
1/3



3/4

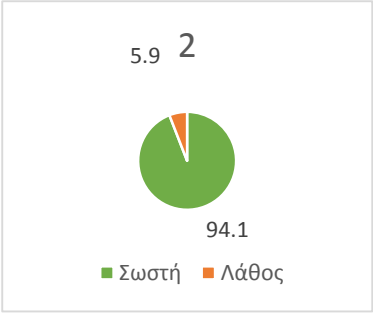


5/3



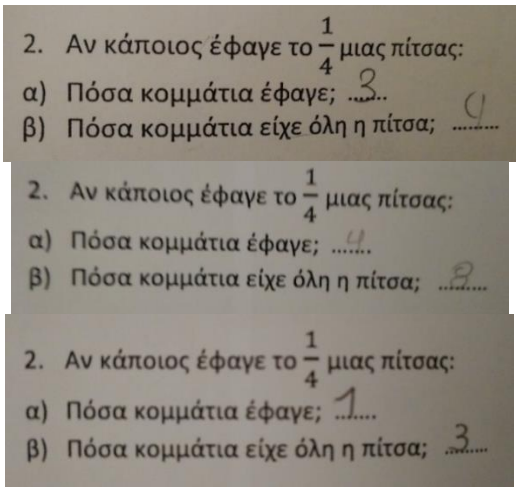
Πίνακας 2.15. Παραδείγματα λάθος απαντήσεων στην ερώτηση 1.1

2.2.6.1.2. Αναγνώριση



Διάγραμμα 2.44. Ποσοστά σωστών-λάθος απαντήσεων στην ερώτηση 1.2.

Στο δεύτερο ερώτημα, που αφορούσε την αναγνώριση και λεκτική απόδοση της συμβολικής αναπαράστασης ενός κλάσματος, η πλειονότητα των μαθητών απάντησε σωστά. Οι περισσότεροι μαθητές φαίνεται να είναι σε θέση να αναλύουν ένα κλάσμα στα συστατικά του και να κατανοούν π.χ. ότι το ¼ της πίτσας σημαίνει παίρνω το 1 από τα 4. Ωστόσο, κάποιοι σημείωσαν πόσα κομμάτια έμειναν ή στην προσπάθειά τους να καταφύγουν σε ισοδύναμο έκαναν λάθος.



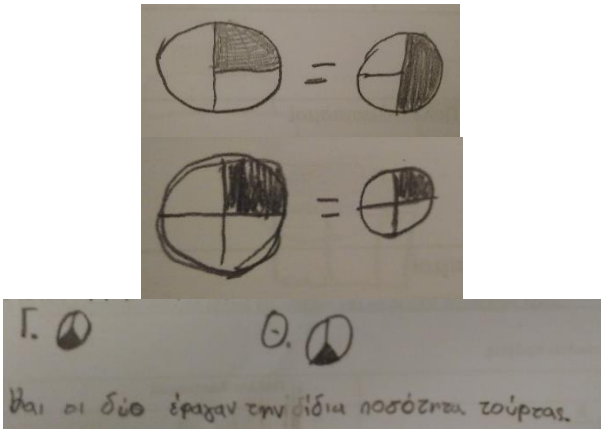
Πίνακας 2.16. Παραδείγματα λάθος απαντήσεων στην ερώτηση 1.2.

2.2.6.1.3. Σημείο αναφοράς

Διάγραμμα 2.45. Ποσοστά σωστών-λάθος απαντήσεων στην ερώτηση 1.3.

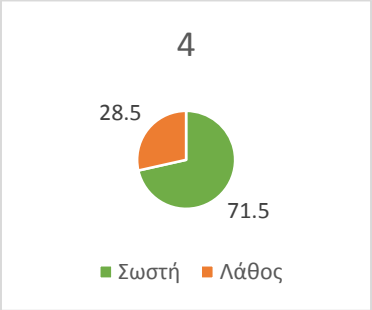
Το τρίτο ερώτημα αφορούσε ένα πρόβλημα στο οποίο ένα παιδί είχε φάει το 1/3 μιας τούρτας και το άλλο το 1/3 μιας άλλης τούρτας διαφορετικού μεγέθους. Η άσκηση αυτή δυσκόλεψε το 56% των μαθητών πού είτε δεν έδωσαν σημασία στη διαφορά

μεγέθους είτε ακόμα και όταν την απέδιδαν σχηματικά δεν καταλάβαιναν ότι το κομμάτι του ενός παιδιού ήταν μεγαλύτερο. Έδιναν δηλαδή έμφαση στον αριθμό και όχι το μέγεθος των κομματιών για τη σύγκριση.



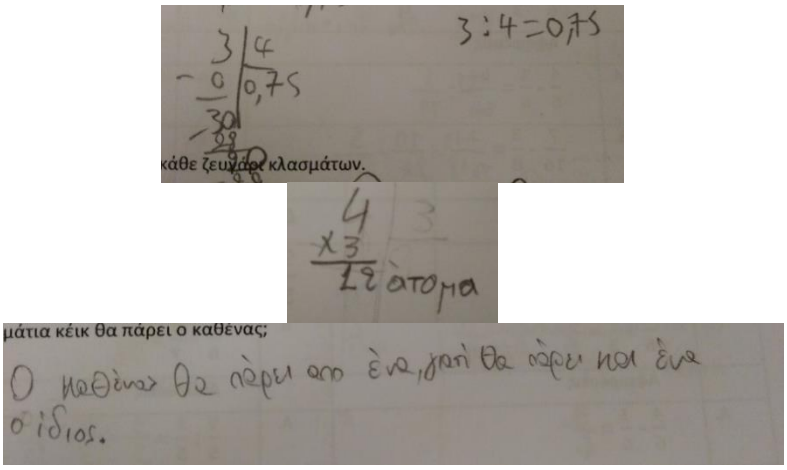
Πίνακας 2.17. Παραδειγματα λάθος απαντήσεων στην ερώτηση 1.3.

2.2.6.1.4. Διαμοιρασμός



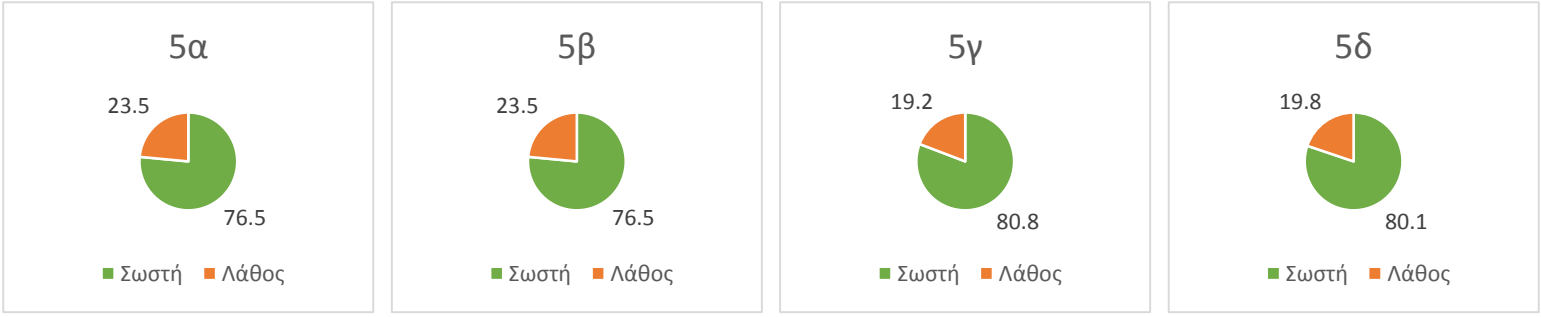
Διάγραμμα 2.46. Ποσοστά σωστών-λάθος απαντήσεων στην ερώτηση 1.4.

Τρία στα δέκα παιδιά περίπου δυσκολεύτηκαν σε ένα πρόβλημα διαμοιρασμού 4 κομματιών κέικ σε 3 παιδιά. Οι σωστές απαντήσεις δόθηκαν είτε με μορφή διαίρεσης είτε με τη μορφή γραφικής αναπαράστασης. Συχνότερη λάθος απάντηση ήταν ότι θα πάρουν και οι ίδιοι ένα κομμάτι, ότι ένα θα περισσέψει ή σημειώθηκαν λάθη υπολογιστικής φύσης που υποδηλώνουν αδυναμία διάκρισης μιας παράλογης απάντησης.



Πίνακας 2.18. Παραδείγματα λάθος απαντήσεων στην ερώτηση 1.4.

2.2.6.1.5. Σύγκριση (κοινοί αριθμητές ή παρονομαστές)



6/10	6/12	3/8	3/3	¼	2/4	5/7	4/7

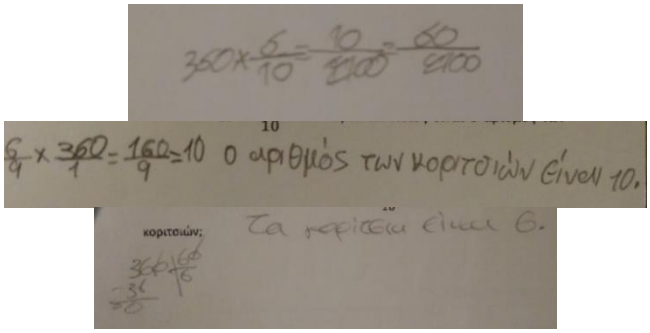
Πίνακας 2.19. Ποσοστά σωστών-λάθος απαντήσεων στην ερώτηση 1.5.

Στη σύγκριση κλασμάτων σημειώθηκε ελαφρώς καλύτερη επίδοση στα υποερωτήματα με κοινούς παρονομαστές. Η σύγκριση μεταξύ κομματιών διαφορετικού πλήθους αλλά ίδιου μεγέθους φαίνεται να είναι ευκολότερη σε σχέση με τη σύγκριση κομματιών ίδιου πλήθους αλλά διαφορετικού μεγέθους. Το 23,5% δεν κατάφερε στο δεύτερο υποερώτημα να συγκρίνει σωστά ένα δοθέν κλάσμα με τη μονάδα.

2.2.6.1.6. Πρόβλημα με αναγωγή στην κλασματική μονάδα

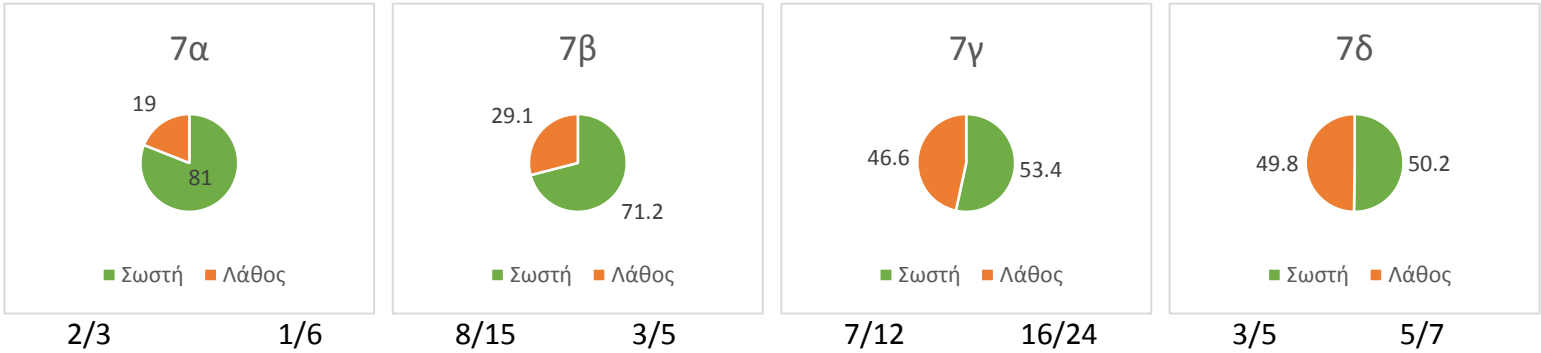
Διάγραμμα 2.47. Ποσοστά σωστών-λάθος απαντήσεων στην ερώτηση 1.6

Στο διαδικαστικό κομμάτι, τέσσερα στα δέκα παιδιά περίπου δε μπόρεσαν να λύσουν το πρόβλημα με αναγωγή στη μονάδα, να βρουν δηλαδή το μέρος μιας ποσότητας. Συχνά τα παιδιά δεν κατανοούν την έννοια του πολλαπλασιασμού στα κλάσματα, ότι δηλαδή δεν παράγει απαραίτητα μεγαλύτερο αποτέλεσμα, όταν ένας από τους παράγοντες είναι μικρότερος της μονάδας και ότι μπορεί να βρει το μέρος του όλου. Τα συχνότερα λάθη ήταν η μη απάντηση, η επιλογή λάθος πράξης και λάθη υπολογιστικής φύσης.



Πίνακας 2.20. Παραδείγματα λάθος απαντήσεων στην ερώτηση 1.6.

2.2.6.1.7. Σύγκριση (μη κοινοί αριθμητές και παρονομαστές)



2/3 1/6 8/15 3/5 7/12 16/24 3/5 5/7

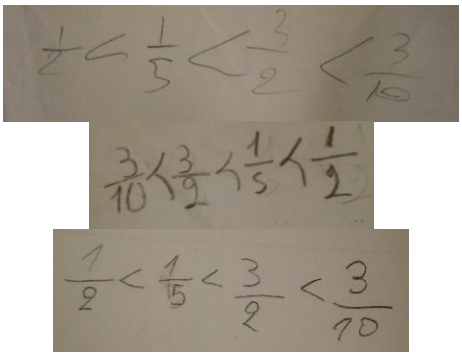
Πίνακας 2.21. Ποσοστά σωστών-λάθος απαντήσεων στην ερώτηση 1.7.

Στη σύγκριση με μη κοινούς αριθμητές και παρονομαστές σημειώθηκαν χειρότερες επιδόσεις σε σχέση με τη σύγκριση όπου ένας από τους δύο όρους ήταν κοινός. Οι περισσότεροι μαθητές έκαναν τη σύγκριση διαισθητικά-εννοιολογικά και δεν προχώρησαν σε μετατροπή σε ομώνυμα κλάσματα. Σχεδόν οι μισοί μαθητές έκαναν λάθος το τελευταίο υποερώτημα, στο οποίο και έχει μεγαλύτερη ισχύ το λεγόμενο “gap thinking”, θεωρώντας ότι τα κλάσματα είναι ίσα αφού το 3 απέχει από το 5, όσο απέχει το 5 από το 7, δηλαδή 2.

2.2.6.1.8. Διάταξη

Διάγραμμα 2.48. Ποσοστά σωστών-λάθος απαντήσεων στην ερώτηση 1.8.

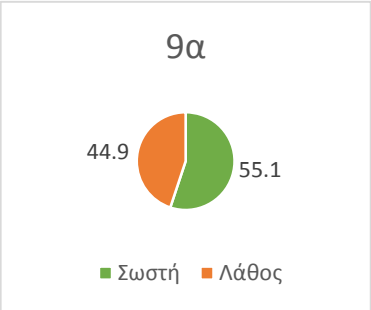
Η αύξουσα διάταξη των κλασμάτων φάνηκε να δυσκολεύει ιδιαίτερα τους μαθητές, αφού 6 στους 10 περίπου δεν κατάφεραν να την λύσουν σωστά. Και πάλι η πλειονότητα αυτών που έκαναν λάθος τη διάταξη βασίστηκαν στη διαίσθηση και στην εννοιολογική τους γνώση και δεν μετέτρεψαν τα κλάσματα σε ομώνυμα. Συνήθως τα κλάσματα με ίδιους αριθμητές θεωρούνταν κοντινά σε μέγεθος από τους μαθητές.

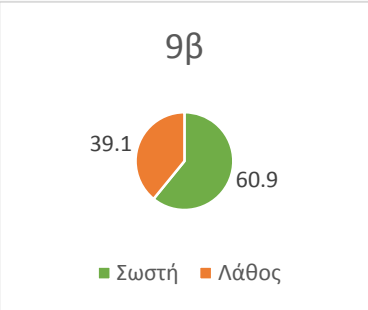


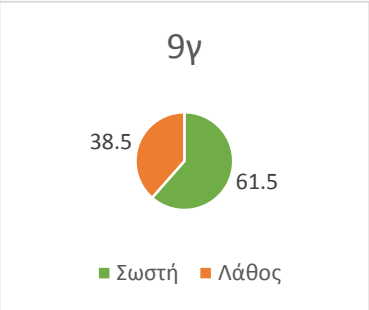
Πίνακας 2.22. Παραδείγματα λάθος απαντήσεων στην ερώτηση 1.8.

2.2.6.1.9. Ισοδυναμία και Απλοποίηση

Όπως φαίνεται παρακάτω περίπου 6 στους 10 μαθητές έλυσαν σωστά τα ερωτήματα που απαιτούσαν την εύρεση ενός ισοδύναμου κλάσματος. Η επίδοση ήταν παρόμοια και στα έργα απλοποίησης με εξαίρεση το τελευταίο υποερώτημα το οποίο διαιρούταν μόνο με το 3 και εμφάνιζε έναν μεγαλύτερο βαθμό δυσκολίας. Συχνότερα λάθη ήταν η γραφή ακριβώς των ίδιων κλασμάτων, τα αντίστροφα κλάσματα, πράξεις με διαφορετικό αριθμό σε αριθμητή και παρονομαστή ή μόνο με τον έναν από τους δύο παράγοντες και πρόσθεση ή αφαίρεση του ίδιου αριθμού στους παράγοντες αντί για πολλαπλασιασμό-διαίρεση. Εμφανές ήταν επίσης το "gap thinking" αφού κάποιοι μαθητές αναζήτησαν κλάσματα τα οποία οι παράγοντες να απέχουν τόσο όσο και στο δοθέν κλάσμα.

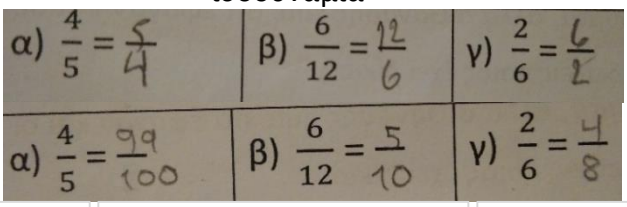


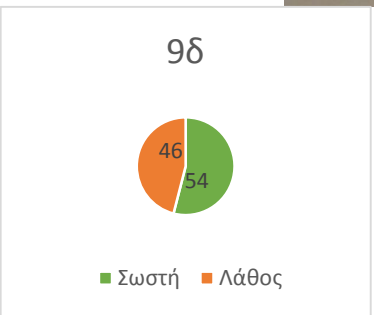


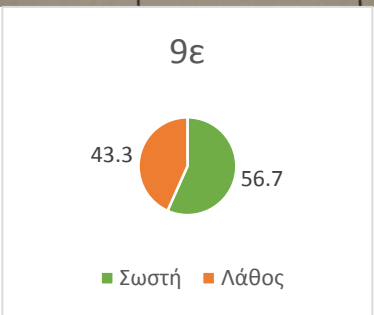


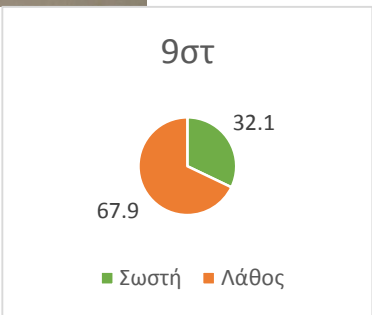
4/5 6/12 2/6

ισοδυναμία



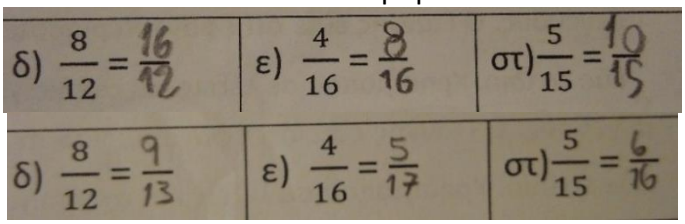






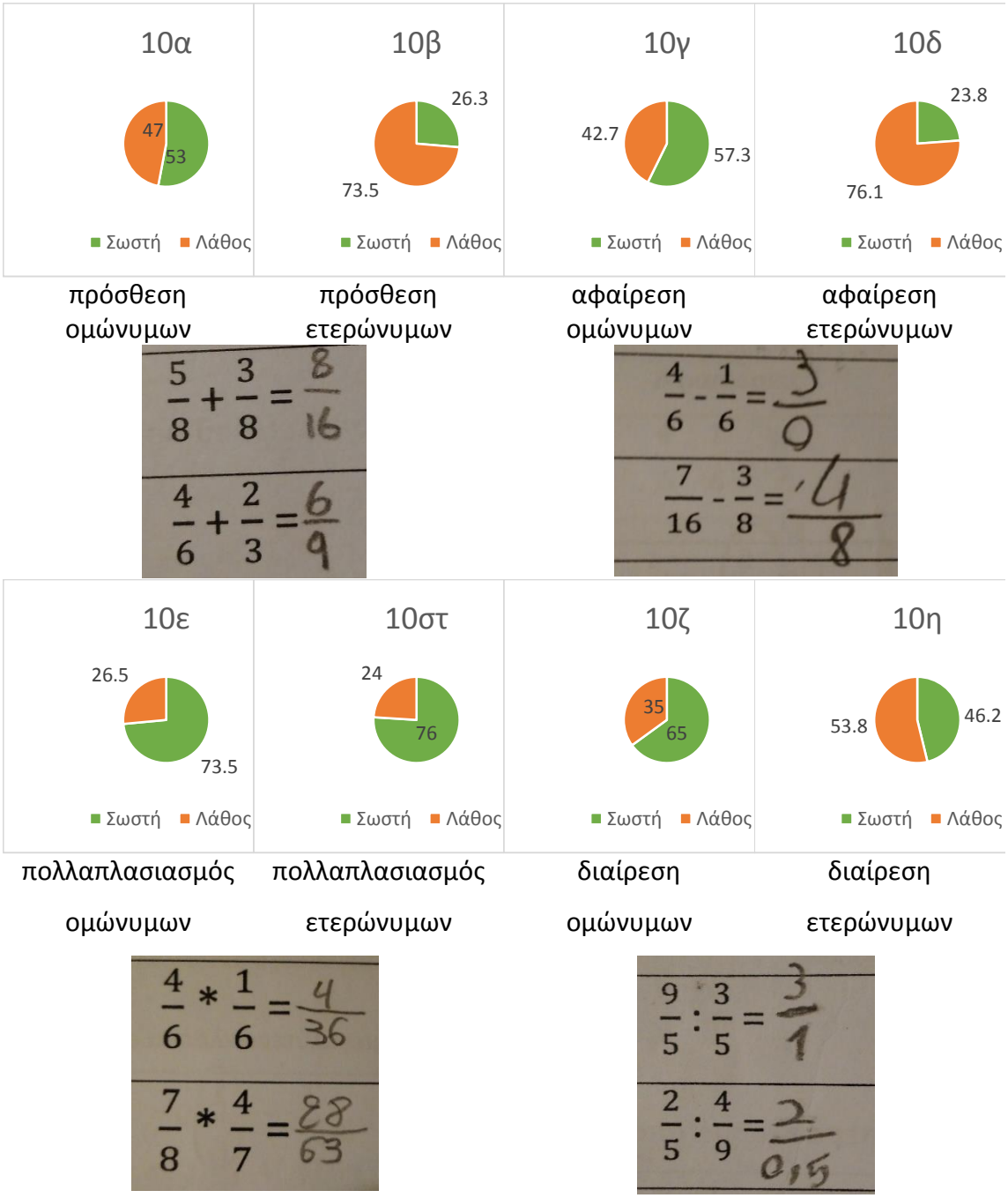
8/12 4/16 5/15

απλοποίηση



Πίνακας 2.23. Ποσοστά λάθος-σωστών απαντήσεων και παραδείγματα λάθών στην ερώτηση 1.9.

2.2.6.1.10. Τέσσερις πράξεις



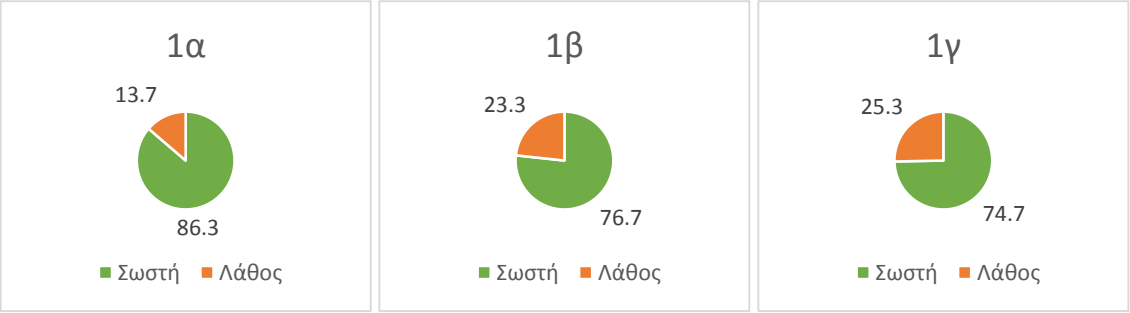
Πίνακας 2.24. Ποσοστά λάθος-σωστών απαντήσεων και παραδείγματα λαθών στην ερώτηση 1.10

Στην πρόσθεση και στην αφαίρεση γενικά σημειώθηκαν καλύτερες επιδόσεις στις πράξεις με ομώνυμα κλάσματα. Αντίθετα, όταν οι πράξεις ήταν μεταξύ ετερωνύμων μόνο 3 στους 10 μαθητές περίπου κατάφεραν να απαντήσουν σωστά. Συχνότερο λάθος ήταν η πρόσθεση/αφαίρεση των αριθμητών και των παρονομαστών μεταξύ τους.

Στον πολλαπλασιασμό οι επιδόσεις ήταν σχετικά καλύτερες αφού ακολουθείται η ίδια διαδικασία ανεξαρτήτως του είδους των κλασμάτων. Στη διαίρεση, αντίθετα, εμφανίστηκε και πάλι το φαινόμενο της καλύτερης επίδοσης στα ομώνυμα σε σχέση με τα ετερώνυμα. Συχνά λάθη προκάλεσε η διαίρεση των αριθμητών και των παρονομαστών, που πολλές φορές οδηγούσε σε μη λογικά αποτελέσματα (παρονομαστής 0). Αρκετά λάθη σημειώθηκαν και στην προπαίδεια

2.2.6.2. 2η φάση

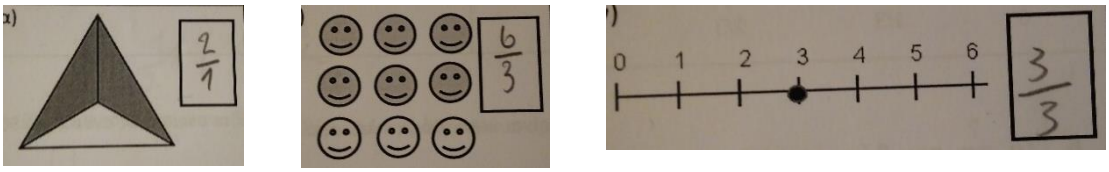
2.2.6.2.1. Αναπαράσταση



επιφάνεια σύνολο αριθμητική γραμμή

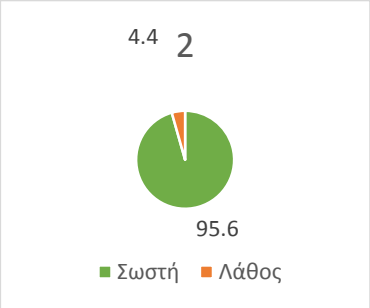
Πίνακας 2.25. Ποσοστά σωστών-λάθος απαντήσεων στην ερώτηση 2.1

Η πρώτη ερώτηση του εννοιολογικού κομματιού στο δεύτερο τεστ, παρείχε σχηματική αναπαράσταση και ζητούσε αναγνώριση. Καλύτερη επίδοση σημειώθηκε στο μοντέλο επιφάνειας, μετά στο μοντέλο συνόλου και τέλος στην αριθμογραμμή. Αυτό συνέβη πιθανώς λόγω της επικράτησης των μοντέλων του πρώτου είδους. Συχνό λάθος ήταν η καταγραφή των σχέσεων μέρους-μέρους (σκιασμένου-μη) και όχι των σχέσεων μέρους-όλου, όπως ζητούνταν.



Πίνακας 2.26. Παραδείγματα λάθος απαντήσεων στην ερώτηση 2.1.

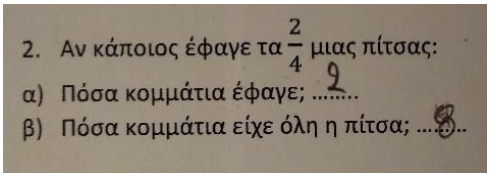
2.2.6.2.2. Αναγνώριση



Η σχηματική αναπαράσταση βελτίωσε την επίδοση στη δεύτερη άσκηση αναγνώρισης της σημασίας ενός κλάσματος. Επίσης, σημειώθηκαν περισσότερες απαντήσεις με ισοδύναμο κλάσμα παρά ακριβής

Διάγραμμα 2.49. Ποσοστά σωστών-λάθος απαντήσεων στην ερώτηση 2.2.

αποκωδικοποίηση του δοθέντος κλάσματος. Λάθη σημειώθηκαν όταν οι μαθητές χρησιμοποίησαν τον αριθμητή του ενός κλάσματος και τον παρονομαστή του ισοδύναμού του.

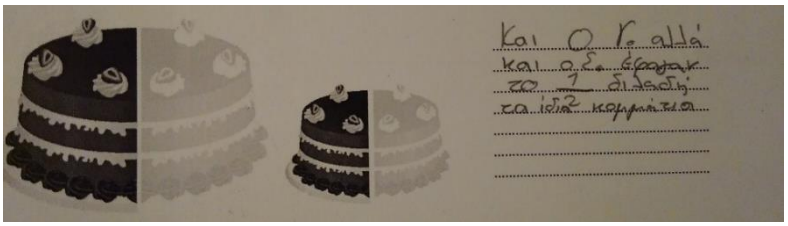


Εικόνα 2.6. Παράδειγμα λάθος απάντησης στην ερώτηση 2.2.

2.2.6.2.3. Σημείο αναφοράς

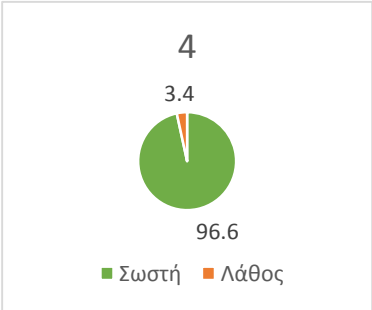
Διάγραμμα 2.50. Ποσοστά σωστών-λάθος απαντήσεων στην ερώτηση 2.3.

Το πρόβλημα της ερώτησης αυτής διέφερε από το αντίστοιχο της πρώτης φάσης μόνο ως προς τα ονόματα και τα κλάσματα. Η πλειονότητα κατάφερε να κατανοήσει τη διαφορά των κομματιών λόγω της διαφοράς μεγέθους του σημείου αναφοράς-μονάδας με τη βοήθεια της αναπαράστασης. Και πάλι όμως περίπου 15 στους 100 δεν πρόσεξαν την εμφανή διαφορά μεγέθους και επικεντρώθηκαν στη συμβολική αναπαράσταση που υπαγόρευε ίσα μεγέθη.



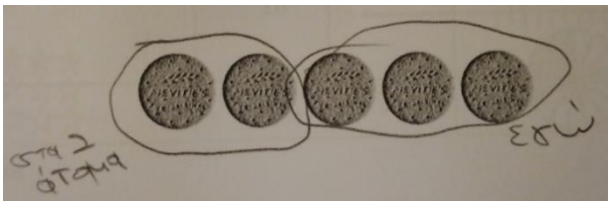
Εικόνα 2.7. Παράδειγμα λάθος απάντησης στην ερώτηση 2.3.

2.2.6.2.4. Διαμοιρασμός



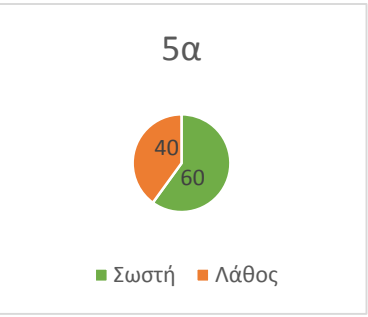
Διάγραμμα 2.51. Ποσοστά σωστών-λάθος απαντήσεων στην ερώτηση2.4.

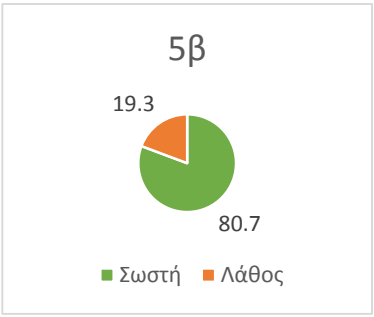
Η σχηματική αναπαράσταση βελτίωσε θεαματικά την επίδοση και σε αυτό το ερώτημα, αφού η πλειονότητα κατάφερε να χωρίσει σωστά 5 μπισκότα σε 2 άτομα. Τα ελάχιστα λάθη οφείλονταν πιθανώς σε ελλιπή κατανόηση των δεδομένων του προβλήματος.

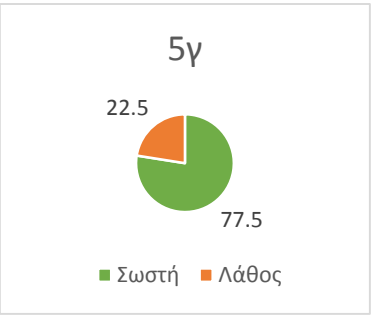


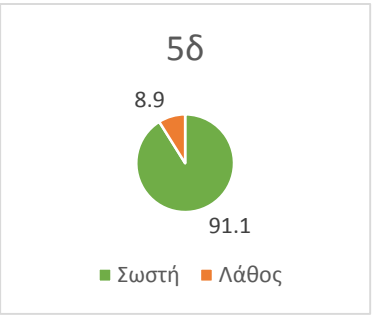
Εικόνα 2.8. Παράδειγμα λάθος απάντησης στην ερώτηση 2.4.

2.2.6.2.5. Σύγκριση (κοινοί αριθμητές ή παρονομαστές)









5/10	5/12	3/9	3/3	1/3	2/3	5/6	4/6
σύνολο		σύνολο		αριθμητική γραμμή		επιφάνεια	

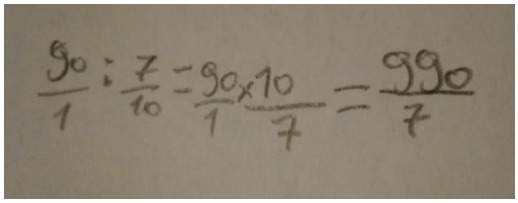
Πίνακας 27. Ποσοστά σωστών-λάθος απαντήσεων στην ερώτηση 2.5.

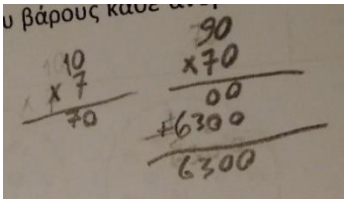
Το μοντέλο συνόλου δε φάνηκε να βοηθά ιδιαίτερα κατά τη σύγκριση κλασμάτων με ίδιους αριθμητές αφού οι μαθητές επικεντρώθηκαν στην καταμέτρηση των σκιασμένων μερών και δεν αναλογίστηκαν τη διαφορά στο μέγεθος του συνόλου. Η αριθμητική γραμμή αύξησε τα ποσοστά σφάλματος σε σχέση με την πρώτη φάση, γεγονός που καταδεικνύει πόσο δυσκολεύει τους μαθητές αφού δεν είναι συνήθης τρόπος αναπαράστασης στα δημοτικά σχολεία. Αντίθετα, το μοντέλο επιφάνειας που είναι ο συχνότερος τρόπος αναπαράστασης των κλασμάτων βελτίωσε την επίδοση στη σύγκριση.

2.2.6.2.6.Πρόβλημα με αναγωγή στην κλασματική μονάδα

Διάγραμμα 2.52. Ποσοστά σωστών-λάθος απαντήσεων στην ερώτηση 2.6.

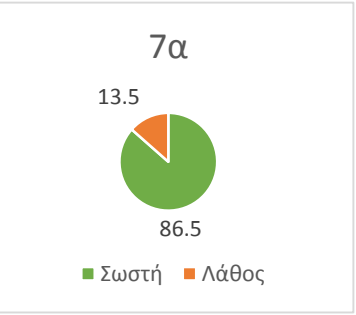
Παρά την ύπαρξη σχετικής αναπαράστασης η πλειονότητα των μαθητών δεν απάντησε σωστά στο πρόβλημα αυτό. Η επίδοση μάλιστα ήταν μικρότερη σε σχέση με την πρώτη φάση, γεγονός που μπορεί να αποδοθεί είτε στη φύση του προβλήματος (διακριτό έναντι συνεχούς ποσού), είτε στο διαφορετικό δείγμα που εκ των πραγμάτων έχει δυσκολίες, ειδικά σε ένα τόσο απαιτητικό έργο, όπως η επίλυση προβλήματος. Συχνότερα λάθη ήταν η επιλογή λάθος πράξεις και λάθη υπολογιστικής φύσης.

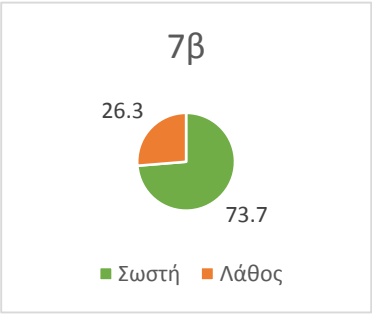


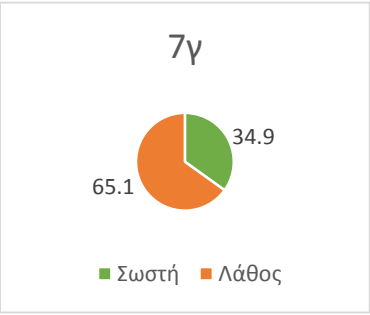


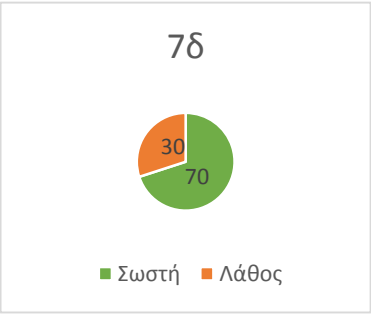
Πίνακας 2.28. Παραδείγματα λάθος απαντήσεων στην ερώτηση 2.6.

2.2.6.2.7. Σύγκριση (μη κοινοί αριθμητές και παρονομαστές)









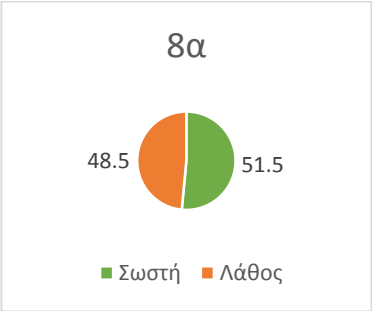
2/3 1/5 8/16 4/5 8/12 16/24 ¾ 4/7

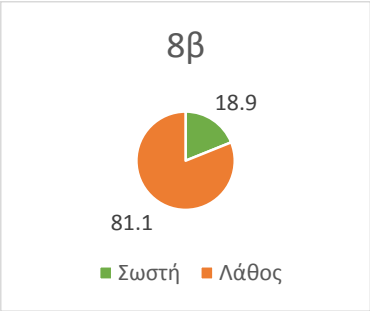
επιφάνεια σύνολο αριθμητική γραμμή επιφάνεια

Πίνακας 2.29. Ποσοστά σωστών-λάθος απαντήσεων στην ερώτηση 2.7.

Για άλλη μια φορά η επίδοση στα μοντέλα επιφάνειας και συνόλου ήταν καλύτερη σε σχέση με το μοντέλο της αριθμητικής γραμμής. Βέβαια το συγκεκριμένο υποερώτημα εμφάνιζε την πρόσθετη δυσκολία ότι παρουσίαζε ίσα κλάσματα, ενδεχόμενο ωστόσο που εμφανιζόταν ξεκάθαρα και στην εκφώνηση.

2.2.6.2.8. Διάταξη

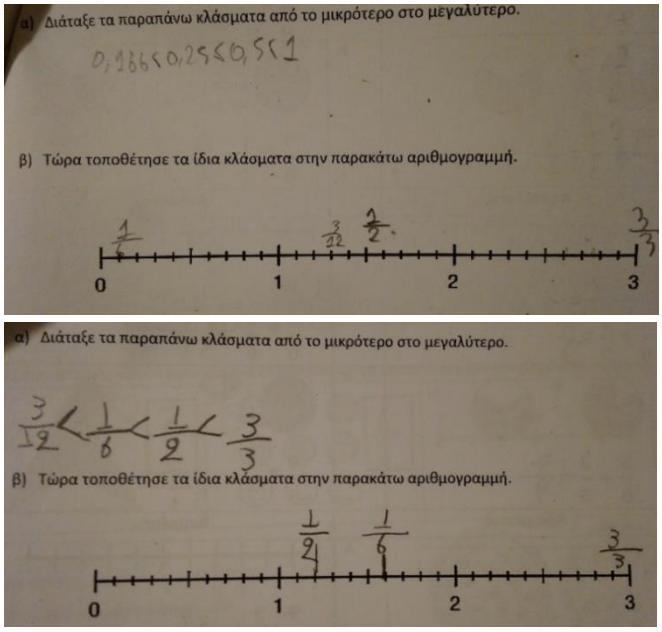




Πίνακας 2.30. Ποσοστά σωστών-λάθος απαντήσεων στην ερώτηση 2.8.

Η επίδοση στο έργο διάταξης βελτιώθηκε με την προσθήκη σχηματικής αναπαράστασης για κάθε κλάσμα. Εντούτοις, η τοποθέτηση των ίδιων κλασμάτων στην αριθμογραμμή έγινε σωστά μόλις από 8 στους 10 μαθητές περίπου. Πολλές φορές μάλιστα η θέση των κλασμάτων στην αριθμητική γραμμή ήταν αντίθετη με τη διάταξη που μόλις είχαν κάνει σωστά. Πολύ συχνά δεν κατανοούσαν ποια είναι η μονάδα με βάση την οποία θα τοποθετηθούν τα κλάσματα ή ακολουθούσαν την

τακτική να βάζουν ως ακέραιο τον αριθμητή και ως δεκαδικό μέρος τον παρονομαστή (π.χ. ½=1,2), να μετρούν δηλαδή σημεία και όχι διαστήματα.

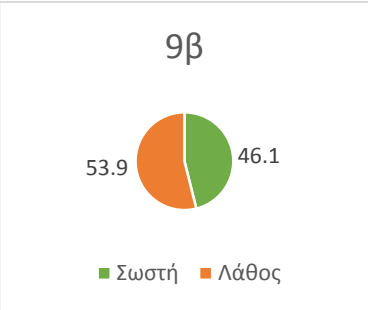


Πίνακας 2.31. Παραδείγματα λάθος απαντήσεων στην ερώτηση 2.8.

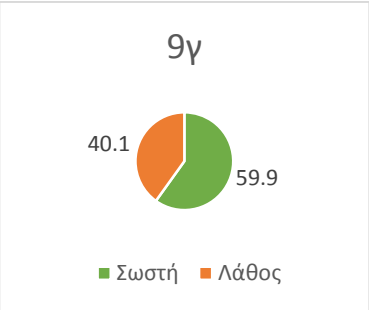
2.2.6.2.9. Ισοδυναμία και Απλοποίηση

Όπως φαίνεται παρακάτω οι μισοί μαθητές και παραπάνω έδωσαν λάθος απαντήσεις στα υποερωτήματα ισοδυναμίας και απλοποίησης, με εξαίρεση ένα μοντέλο συνόλου στην ισοδυναμία. Χειρότερη επίδοση σημειώθηκε και πάλι στο κλάσμα που μπορούσε να απλοποιηθεί μόνο με το 3. Συχνά οι μαθητές απαντούσαν με αντίστροφα κλάσματα ή πραγματοποιούσαν πράξεις μόνο σε έναν από τους παράγοντες του κλάσματος. Στο συγκεκριμένο έργο δε φάνηκε να βοηθούν ιδιαίτερα οι σχηματικές αναπαραστάσεις.

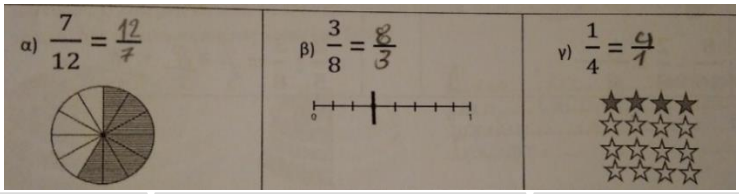
7/12
επιφάνεια

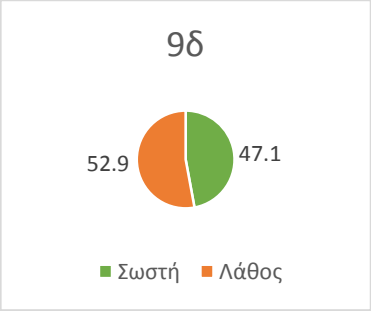


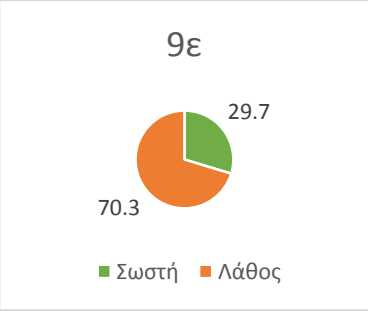
3/8
αριθμητική γραμμή
ισοδυναμία

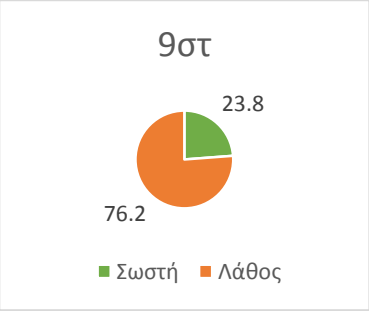


¼
σύνολο





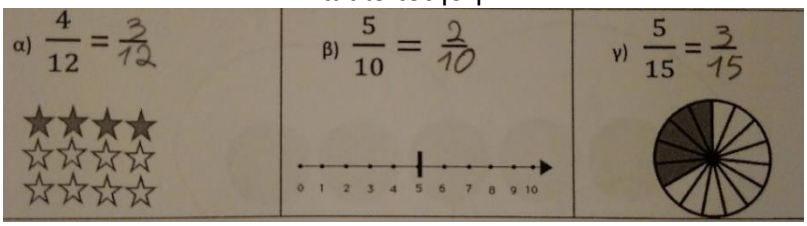




4/12
σύνολο

5/10
αριθμητική γραμμή
απλοποίηση

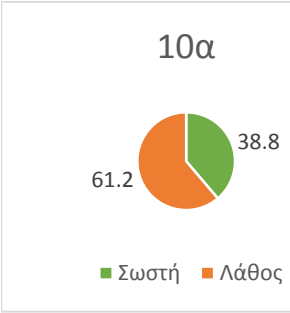
5/15
επιφάνεια

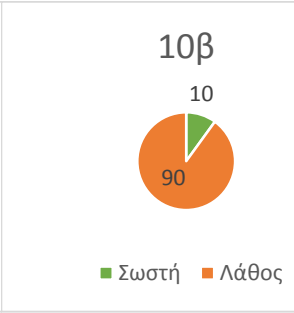


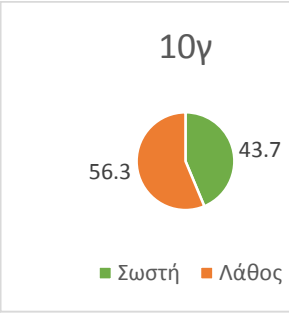
Πίνακας 2.32. Ποσοστά σωστών-λάθος απαντήσεων και παραδείγματα λαθών στην ερώτηση 2.9.

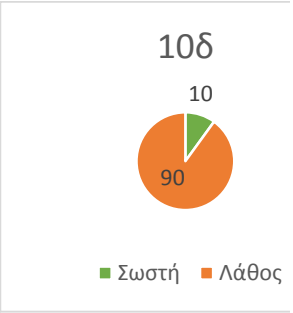
2.2.6.2.10. Τέσσερις πράξεις

Και πάλι οι πράξεις μεταξύ ομώνυμων ήταν αυτές στις οποίες σημειώθηκε η μεγαλύτερη επίδοση στην πρόσθεση και στην αφαίρεση. Πολλές φορές η αναπαράσταση φάνηκε να μπερδεύει και να μειώνει τις επιδόσεις των παιδιών. Στον πολλαπλασιασμό σημειώθηκαν ίδιες επιδόσεις ανεξαρτήτως αναπαράστασης και είδους των κλασμάτων. Στη διαίρεση οι μαθητές είχαν καλύτερη επίδοση σε σχέση με την πρόσθεση και την αφαίρεση ανεξαρτήτως αναπαράστασης. Σε γενικές γραμμές, πιθανότατα οι μαθητές δεν αποκωδικοποιούσαν σωστά την αναπαράσταση ή οι αναπαραστάσεις δεν προσφέρονταν για τα δοθέντα έργα.







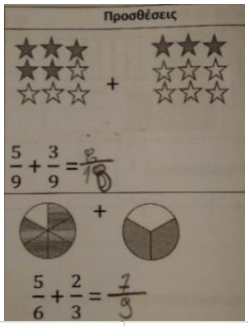


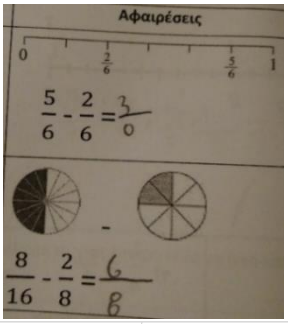
πρόσθεση
ομώνυμων
σύνολο

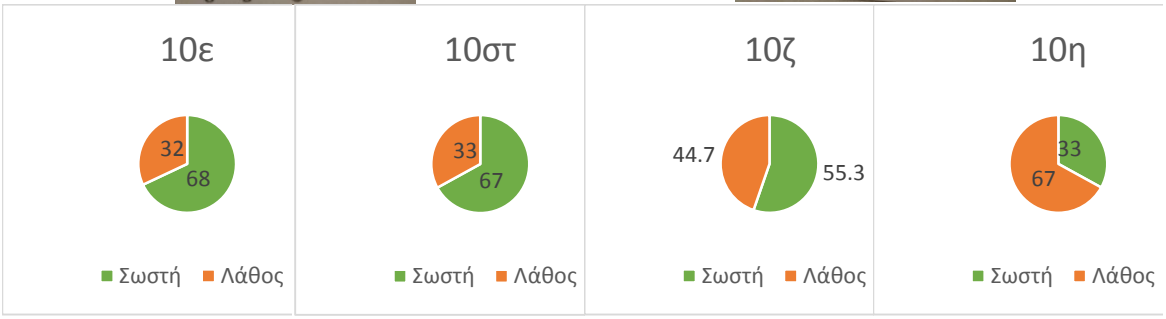
πρόσθεση
ετερώνυμων
επιφάνεια

αφαίρεση
ομώνυμων
αριθμητική γραμμή

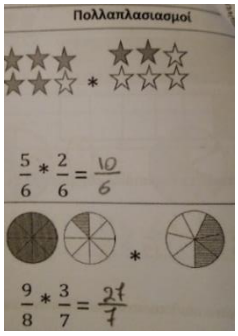
αφαίρεση
ετερώνυμων
επιφάνεια

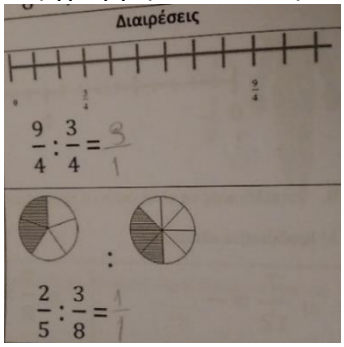






πολλαπλασιασμός ομώνυμων σύνολο | πολλαπλασιασμός ετερώνυμων επιφάνεια | διαίρεση ομώνυμων αριθμητική γραμμή | διαίρεση ετερώνυμων επιφάνεια

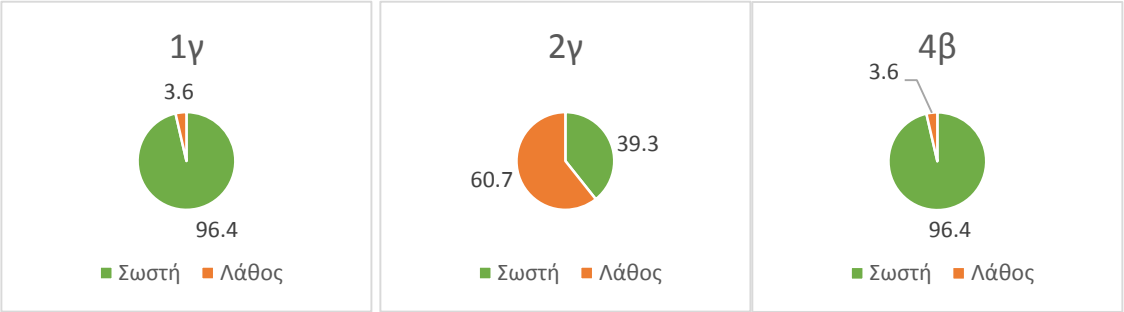




Πίνακας 2.33. Ποσοστά σωστών-λάθος απαντήσεων και παραδείγματα λαθών στην ερώτηση 2.10

2.2.6.3. 3η φάση

2.2.6.3.1. Αναπαράσταση



σοκολάτες | μπισκότα | ποτήρια με νερό

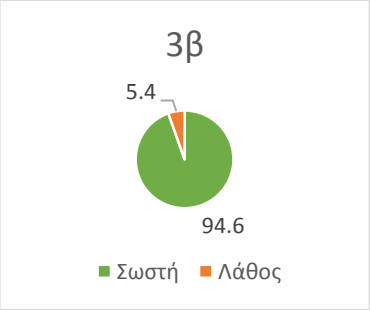
Πίνακας 2.34. Ποσοστά σωστών-λάθος απαντήσεων στην ερώτηση 3.1.

Η αναπαράσταση δε φάνηκε να προκαλεί ιδιαίτερο προβληματισμό στους μαθητές αφού η συντριπτική πλειονότητα απάντησε σωστά στα ερωτήματα που την αφορούσαν. Εξαίρεση αποτέλεσε ένα ερώτημα που ζητούσε ουσιαστικά από τα παιδιά να πουν το μισό με κλάσμα. Αν και αναγνώριζαν την ποσότητα και την απέδιδαν λεκτικά, 6 στους δέκα μαθητές περίπου δεν μπορούσαν να ανακαλέσουν το σωστό κλάσμα (1/2) για να την εκφράσουν. Απαντούσαν συνήθως λέγοντας «μισό» ή «,5».

2.2.6.3.2. Σημείο αναφοράς

Οι περισσότεροι μαθητές κατάφεραν να καταλάβουν ότι μία εμφανώς μεγαλύτερη κούπα θα περιέχει περισσότερο νερό ανεξαρτήτως αν είναι γεμάτη μέχρι τη μέση όπως μία μικρότερη κούπα. Αυτοί που απάντησαν λάθος υποστήριξαν ότι οι κούπες περιέχουν την ίδια ποσότητα νερού.

έχουν ίδια ποσότητα;

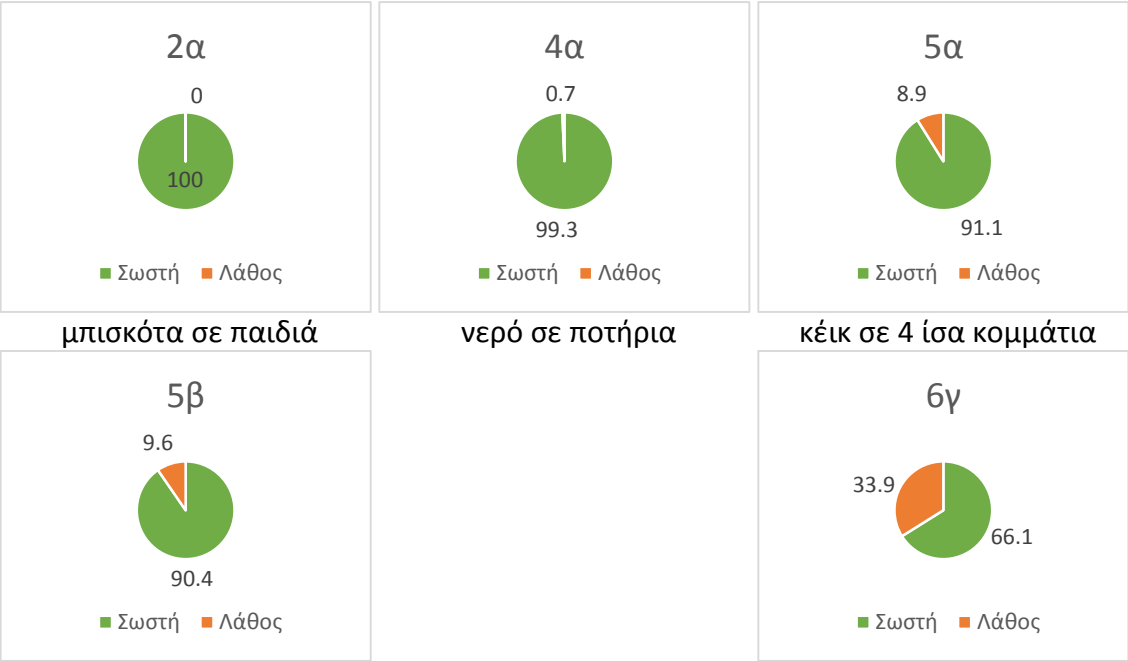


ποια έχει περισσότερο;

Πίνακας 2.35. Ποσοστά σωστών-λάθος απαντήσεων στην ερώτηση 3.2.

2.2.6.3.3. Διαμοιρασμός

Η καλύτερη επίδοση σημειώθηκε σε έργα που αφορούσαν τον διαμοιρασμό διακριτών και συνεχών ποσοτήτων σε προκαθορισμένα μεγέθη. Όταν ζητήθηκαν απλώς ίσα κομμάτια κάποια παιδιά (περίπου 10%) δεν κατάφεραν να ανταπεξέλθουν στο έργο επιτυχώς. Κάποια παιδιά δεν κατάφεραν να κόψουν το κέικ σε 4 ίσα κομμάτια ή δεν κατάλαβαν ότι στη συνέχεια, για να γίνουν τα 4 κομμάτια 8 αρκεί να κόψουν το καθένα στη μέση. Τέλος, το έργο με τον διαμοιρασμό έξι μαρκαδόρων σε τρεις ομάδες (3*2) δυσκόλεψε το 40% των μαθητών, με συχνότερο λάθος τον διαμοιρασμό σε δύο ομάδες των τριών μαρκαδόρων η καθεμία (2*3).

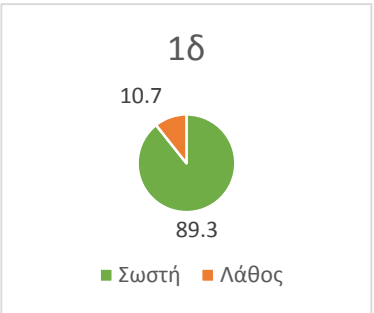


μπισκότα σε παιδιά | νερό σε ποτήρια | κέικ σε 4 ίσα κομμάτια

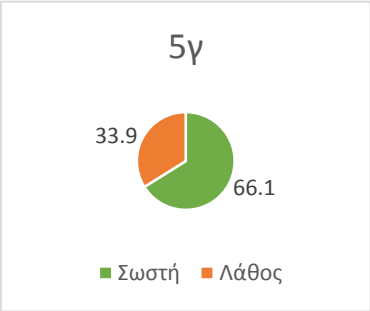
κέικ σε 8 ίσα κομμάτια | μαρκαδόροι σε ομάδες

Πίνακας 2.36. Ποσοστά σωστών-λάθος απαντήσεων στην ερώτηση 3.3.

2.2.6.3.4. Σύγκριση



6/10
4/10
ομώνυμα
κομμάτια
σοκολάτας



¼
1/8
ετερώνυμα
κομμάτια
κέικ

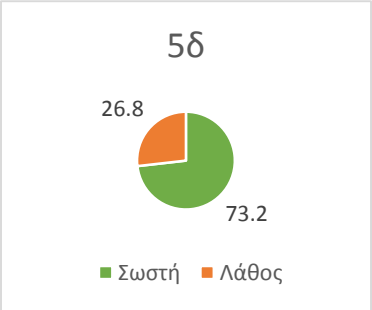
Πίνακας 2.37. Ποσοστά σωστών-λάθος απαντήσεων στην ερώτηση 3.4.

Στα ομώνυμα σημειώθηκε για άλλη μια φορά καλύτερη επίδοση παρά το γεγονός ότι τα κομμάτια του κέικ, στη σύγκριση ετερώνυμων κλασμάτων, τα είχαν κόψει οι ίδιοι οι μαθητές και γνώριζαν το μέγεθός τους και πώς από το ¼ προέκυψε το 1/8 με διαχωρισμό στη μέση.

2.2.6.3.5. Ισοδυναμία

Όλοι οι μαθητές κατανόησαν ότι αν ρίξουμε το νερό από τα ποτήρια που οι ίδιοι γεμίσαμε από το μπουκάλι πίσω στο μπουκάλι, αυτό θα γεμίσει μέχρι το ίδιοι σημείο που ήταν πριν, δείχνοντας να κατανοούν την ισοδυναμία και την αντιστρεψιμότητα της πράξης. Ωστόσο, περίπου 3 στους 10 διατύπωσαν την άποψη ότι κόβοντας το κέικ αυτό γίνεται περισσότερο.

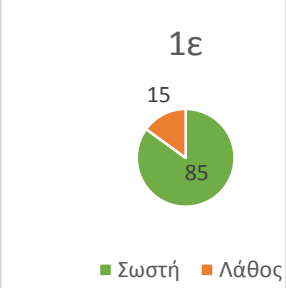
νερό από ποτήρια πίσω στην κανάτα



το κομμένο κέικ είναι συνολικά περισσότερο σε σχέση με πριν;

Πίνακας 2.38. Ποσοστά σωστών-λάθος απαντήσεων στην ερώτηση 3.5.

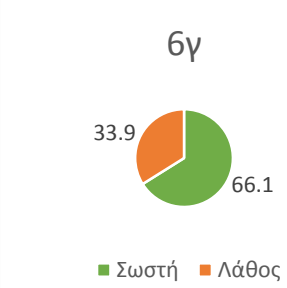
2.2.6.3.6. Πράξεις



4/10+6/10 σοκολάτες

6/6-2/6 μαρκαδόροι

4/6+1/6 μαρκαδόροι



6/6:3 μαρκαδόροι

Πίνακας 2.39. Ποσοστά σωστών-λάθος απαντήσεων στην ερώτηση 3.6.

Γενικά στις πράξεις σημειώθηκαν πολύ καλύτερες επιδόσεις μετά την προσθήκη πραγματικών αντικειμένων. Οι μαθητές ωστόσο απαντούσαν αρχικά με φυσικούς αριθμούς και χρειαζόταν παρότρυνση για να χρησιμοποιήσουν κλάσματα. Κάποια δυσκολία φάνηκε να υπάρχει όταν το άθροισμα είναι ίσο με τη μονάδα και στη διαίρεση έξι μαρκαδόρων σε τρεις ομάδες. Ακόμα και αν έβλεπαν ότι η σοκολάτα είναι ολόκληρη, κάποιοι μαθητές δυσκολεύτηκαν να το διατυπώσουν και να καταλήξουν στο συμπέρασμα του όλου-ολόκληρου-μονάδας-δε λείπει κανένα κομμάτι.

2.3. Συζήτηση

«Είναι αδύνατη η συζήτηση με κάποιον που προσποιείται πως δεν ψάχνει την αλήθεια αλλά την κατέχει ήδη».
Romain Rolland

Η παρούσα έρευνα αποσκοπούσε στη σύγκριση μαθητών με ήπιες εκπαιδευτικές ανάγκες και τυπικών συμμαθητών τους, Ε' και Στ' Δημοτικού, ως προς την κατανόηση διαστάσεων της έννοιας και χρήσης κλασμάτων, που παρουσιάστηκαν με τρεις διαφορετικούς τρόπους αναπαράστασης. Οι 187 μαθητές που αποτέλεσαν το δείγμα της έρευνας αξιολογήθηκαν με τρία εργαλεία. Το πρώτο εργαλείο είχε ως τρόπο αναπαράστασης τα σύμβολα, δηλαδή αποτελούταν αμιγώς από λέξεις και αριθμούς. Το δεύτερο εργαλείο, το οποίο συμπλήρωσαν μόνο όσοι δεν επέτυχαν τουλάχιστον 75% ορθές απαντήσεις στο πρώτο, είχε ως βοηθήματα εικόνες και σχήματα. Τέλος, το τρίτο και τελευταίο εργαλείο, το οποίο χορηγήθηκε σε όσους δεν σημείωσαν ελάχιστο σκορ 75% στο δεύτερο, προέβλεπε τη χρήση πραγματικών αντικειμένων.

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας, υπήρξε στατιστικά σημαντική διαφορά μεταξύ μαθητών τυπικής ανάπτυξης και μαθητών με Η.Ε.Α. ως προς τις εξετασθείσες διαστάσεις των κλασμάτων. Τα κλάσματα άλλωστε θεωρούνται διαχρονικά και κατά πολλούς ερευνητές ως ο πιο δύσκολος τομέας των μαθηματικών για όλους τους μαθητές (Mc Leod & Armstrong, 1982; Behr, Wachsmuth, Post & Lesh, 1984; Hiebert, 1985; Hope & Owens, 1987; Smith, 1995; Hecht, 1998; Ni, 2001; Hecht, Close, & Santisi, 2003; Hecht, Vagi, & Torgesen, 2007). Ο Streefland (1991) έφτασε μάλιστα στο σημείο να πει ότι τα κλάσματα αποτελούν χωρίς αμφιβολία την πιο προβληματική περιοχή στη διδακτική των μαθηματικών. Σε μειονεκτικότερη θέση με τα κλάσματα είναι οι μαθητές με ήπιες εκπαιδευτικές ανάγκες, αφού η επίδοση τους στα μαθηματικά βρίσκεται παραδοσιακά τουλάχιστον δύο τάξεις πιο κάτω από αυτή των συμμαθητών τους (Wagner & Blackorby, 1996; Misquitta, 2011).

Πολλοί ερευνητές έχουν αναρωτηθεί γιατί **όλοι οι μαθητές** έχουν ιδιαίτερες δυσκολίες αναφορικά με τα κλάσματα (Hiebert, 1985; Mack, 1995; Mix, Levine & Huttenlocker, 1999). Ο Hiebert (1985) αποδίδει τη δυσκολία στην έλλειψη διασυνδέσεων μεταξύ μορφής και εννοιολογικής κατανόησης. Οι μαθητές κατέχουν δηλαδή έμφυτη ή ανεπίσημη γνώση των κλασμάτων αλλά δεν τη συσχετίζουν απαραίτητα με την επίσημη αναπαράσταση των κλασματικών αριθμών (Mack 1990, 1995). Επιπλέον, «ενοχοποιήθηκαν» οι πρότερες γνώσεις των φυσικών αριθμών (προκατάληψη του φυσικού αριθμού), οι οποίες εμποδίζουν την κατανόηση των κλασμάτων (Pitkently & Hunting, 1996; Ni & Zhou, 2005). Οι Gallistel & Gelman (1992) αιτιολογώντας την προηγούμενη θέση, υποστηρίζουν ότι οι μαθητές εξαιτίας των προηγούμενων εμπειριών τους με την απαρίθμηση διακριτών όλων, δε μπορούν να κατανοήσουν πώς τα κλάσματα μπορούν να τοποθετηθούν στην αριθμητική γραμμή. Αντ'αυτού αντιλαμβάνονται λανθασμένα τις κλασματικές ποσότητες σαν δύο ξεχωριστές ολότητες. Επιπρόσθετα, υποστηρίζεται ότι οι κλασματικές πράξεις δεν είναι ευκολονόητες (Pitkently & Hunting, 1996) και οι μαθητές βρίσκονται σε απόγνωση αφού δε μπορούν να χρησιμοποιήσουν τα δάχτυλά τους κατά τον υπολογισμό (Wu, 2008). Ακόμα και οικείες δραστηριότητες, όπως η διχοτόμηση, μπορούν να καταστούν εμπόδιο για την κατανόηση του διαμοιρασμού της μονάδας σε περιττό παρονομαστή (Pitkently & Hunting, 1996). Τέλος, ένα άλλο εμπόδιο αποτελεί η κλασματική αναπαράσταση μέσα από σχέσεις μέρους-όλου, η οποία δεν βοηθά την κατάκτηση των καταχρηστικών (Behr, Lesh, Post & Silver, 1983).

Επιπρόσθετες στις παραπάνω δυσκολίες, που αντιμετωπίζουν όλοι οι μαθητές ανεξαιρέτως με τα κλάσματα, είναι οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι **μαθητές με ήπιες εκπαιδευτικές ανάγκες**, λόγω των ιδιαίτερων χαρακτηριστικών τους. Πιο συγκεκριμένα, οι μαθητές αυτοί έχουν περιορισμένη χωρητικότητα στη βραχύχρονη μνήμη, γεγονός που επηρεάζει δυσμενώς τον υπολογισμό με κλάσματα και την επίλυση λεκτικών προβλημάτων (Hecht, Close & Santisi, 2003). Σημειώνεται επίσης ότι οι μαθητές αυτοί χρησιμοποιούν στρατηγικές κατώτερης ποιότητας για την επίλυση προβλημάτων σε σχέση με τους συμμαθητές τους (Grobecker, 1999). Επιπλέον, συνήθως έχουν λανθασμένες ή ελλιπείς προηγούμενες εμπειρίες και

προβλήματα σχετικά με γνωστικές διεργασίες, όπως η προσοχή και η κινητοποίηση (NMAP, 2008). Παρόμοια, άλλες έρευνες υποστηρίζουν ότι η επίδοση σε έργα με κλάσματα μπορεί να προβλεφθεί από την εννοιολογική γνώση, την αριθμητική ευχέρεια, την μνήμη εργασίας και την επικέντρωση της προσοχής μέσα στην τάξη (Hecht, 1998; Hecht et al., 2003; 2007; Mazzocco & Devlin, 2008; Siegler, 2009). Αφού οι μαθητές με Η.Ε.Α. υστερούν στους προαναφερθέντες τομείς είναι λογικό να υστερούν και ως προς την επίδοση σε κλασματικά έργα και να έχουν ανάγκη στοχευμένες διδακτικές παρεμβάσεις στον συγκεκριμένο τομέα. Οι εκπαιδευτικοί που γνωρίζουν τη δυσκολία που αντιμετωπίζουν όλοι οι μαθητές με τους κλασματικούς αριθμούς και τις ιδιαίτερες δυσκολίες των μαθητών με Η.Ε.Α. μπορούν να πραγματοποιούν στοχευμένες δράσεις και να είναι αποτελεσματικότεροι στο έργο τους.

Σε δεύτερη φάση, από τα αποτελέσματα προκύπτει ότι υπάρχει διαφορά στην κατανόηση των κλασμάτων μεταξύ μαθητών τυπικής ανάπτυξης και μαθητών με Η.Ε.Α. ανεξαρτήτως του **τρόπου αναπαράστασης** των κλασμάτων. Αυτό μπορεί να οφείλεται στο γεγονός ότι συχνά τα παιδιά με Η.Ε.Α. δυσκολεύονται να εξάγουν εννοιολογικά χρήσιμες πληροφορίες από τις σχηματικές αναπαραστάσεις, ακόμα και όταν αυτές δίνονται με απλό τρόπο. Υποστηρίζεται μάλιστα πως η ομάδα με Η.Ε.Α. δεν αντιλαμβάνεται τα οπτικά μοντέλα ως αφηρημένες, αλλά ως συγκεκριμένες αναπαραστάσεις (Mazzocco et al., 2013). Ωστόσο, οι εικόνες και τα αντικείμενα αύξησαν την κατανόηση όλων των συμμετεχόντων στην παρούσα έρευνα, αφού οι επιδόσεις είχαν αυξητική πορεία μεταξύ των φάσεων (σύμβολα, σχήματα, αντικείμενα). Ο πιο αφηρημένος, συμβολικός τρόπος αναπαράστασης, σύμφωνα με τις έρευνες, δυσκολεύει όλες τις ομάδες των μαθητών, τουλάχιστον στο δημοτικό σχολείο. Επομένως προκύπτει η ανάγκη για πιο συγκεκριμένους τρόπους αναπαράστασης, αφού τα μαθηματικά παρουσιάζουν μια ιδιαιτερότητα σε σχέση με τα άλλα γνωστικά αντικείμενα, καθώς χαρακτηρίζονται από υψηλό βαθμό αφαίρεσης (Duval, 2006). Έχει αναγνωριστεί πλέον ευρέως η κεντρική θέση που κατέχουν οι διάφορες μορφές αναπαράστασης στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών (Gagatsis & Elia, 2005).

Προτείνεται, λοιπόν, η διδασκαλία να βασίζεται σε πολλαπλές αναπαραστάσεις και στην ακολουθία συγκεκριμένο-εικονιστικό-αφηρημένο, ώστε να παρέχει τις βάσεις και τις στρατηγικές για την ανάπτυξη της κλασματικής γνώσης. Πιο συγκεκριμένα αυτή η διδακτική ακολουθία παρέχει στους μαθητές πολλαπλές ευκαιρίες για την κατάκτηση μαθηματικών δεξιοτήτων και καλύτερη μνήμη και συνακόλουθη ανάκληση, μέσω των διαφόρων μορφών-διόδων μάθησης (όραση, ακοή, αφή, κιναίσθηση) (Engelkamp & Zimmer, 1990; Nilsson, 2000). Επίσης, παρέχεται οι δυνατότητα σε μαθητές με διαφορετικές μαθησιακές προτιμήσεις να αλληλεπιδρούν με διάφορους τρόπους και βελτιώνεται η εμπλοκή και η στάση απέναντι στο μαθησιακό υλικό (Oberer, 2003). Επιπλέον, αναπαραστάσεις με νόημα επιτρέπουν τους μαθητές να κατανοήσουν και να αποδώσουν νόημα σε αφηρημένες μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες (Demby, 1997; Noice & Noice, 2001). Η γενίκευση που αποκτάται με αυτόν τον τρόπο είναι σχετικότερη και πιο κατανοητή σε σχέση με την ρηχή και στείρα απομνημόνευση αλγορίθμων και κανόνων χωρίς σκοπό. Η αλληλεπίδραση με αντικείμενα και η «προσωπική γλώσσα» επιτρέπουν στους μαθητές να κατανοήσουν τη σχετικότητα μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών (Witzel, Riccomini, Schneider, 2011).

Ακόμα και το είδος της σχηματικής-οπτικής αναπαράστασης διαδραματίζει κάποιον ρόλο στην αποκωδικοποίηση και τη συνακόλουθη κατανόηση. Πιο συγκεκριμένα, σύμφωνα με τη βιβλιογραφία, αλλά και τα ευρήματα της παρούσας έρευνας, τα μοντέλα επιφάνειας βοηθούν στην κατανόηση του ρόλου του παρονομαστή στο μέγεθος του κλάσματος σε αρχικό στάδιο, αλλά δεν προσφέρονται για τον συνδυασμό κλασμάτων που απαιτείται στη συνέχεια, όπως παραδείγματος χάριν στις πράξεις. Παρόμοια ευρήματα είχε η παρούσα έρευνα αφού η επίδοση στις πράξεις χειροτέρευσε μετά την προσθήκη αναπαραστάσεων. Τα κυκλικά μοντέλα προσφέρονται για τη διάταξη και την εκτίμηση αθροισμάτων και διαφορών αλλά δεν αποτελούν χρήσιμα μοντέλα για την κατασκευή οπτικών εικόνων των κλασμάτων, αφού προκαλούν προβλήματα κυρίως στην αναπαράσταση περιττών παρονομαστών. Η πλειονότητα των μαθητών δυσκολεύτηκε και δημιούργησε άνισα τμήματα, όταν επιχείρησε να χρησιμοποιήσει κυκλικούς τομείς. Τα μοντέλα συνόλων φαίνεται να υποστηρίζουν τη λανθασμένη αντίληψη της πρόσθεσης αριθμητών και παρονομαστών αλλά είναι αποτελεσματικά

για μετέπειτα στάδια αφού έχει αφομοιωθεί η διαδικασία των πράξεων, διαφορετικά οδηγούν σε λάθος αποτελέσματα. Όσον αφορά την αριθμητική γραμμή, σε αυτήν εμφανίζονται οι περισσότερες δυσκολίες καθώς συχνά οι μαθητές μετρούν σημεία αντί για μήκη (Saxe et al., 2007) ή δεν αντιλαμβάνονται σωστά τι πρέπει να αποτελεί το όλο (Lepak, 2010; Pearn & Stephens, 2007; Yanik, Helding & Flores, 2008). Η αναπαράσταση κλασμάτων στην αριθμογραμμή αποτελεί το σύνδεσμο μεταξύ εννοιολογικής και διαδικαστικής γνώσης (US National Mathematics Advisory Panel, 2008), επομένως πρέπει να αποτελεί συνέχεια των κυκλικών και ορθογώνιων αναπαραστάσεων που αποτελούν την εισαγωγή στα κλασματικά αναπαραστατικά συστήματα (Tunç-Pekkan, 2015). Στα ερωτήματα που συνοδευόταν από αριθμητικές γραμμές ως τρόπο αναπαράστασης σημειώθηκαν οι χαμηλότερες βαθμολογίες. Αφού λοιπόν κάθε μοντέλο έχει έμφυτα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα, η χρήση πολλαπλών μοντέλων ίσως να είναι η πιο αποτελεσματική πρακτική για την κατανόηση αυτού του περίπλοκου τομέα της μαθηματικής γνώσης (Cramer, Wyberg & Leavitt, 2008).

Όσον αφορά το είδος της γνώσης αποδείχθηκε ότι υπάρχει διαφορά στην κατανόηση μεταξύ μαθητών τυπικής ανάπτυξης και μαθητών με Η.Ε.Α. μόνο στη **διαδικαστική** αλλά όχι στην **εννοιολογική** γνώση των κλασμάτων. Με λίγα λόγια, στα εννοιολογικά κομμάτια των τεστ η κατανόηση των παιδιών με Η.Ε.Α. ήταν πολύ κοντά στην επίδοση των παιδιών τυπικής ανάπτυξης, αλλά στα διαδικαστικά έργα οι μαθητές με ήπιες εκπαιδευτικές ανάγκες φάνηκε να δυσκολεύονται περισσότερο. Η μηδενική υπόθεση λοιπόν ισχύει μόνο ως προς το εννοιολογικό κομμάτι και όχι στο διαδικαστικό. Από τη σύγκριση της επίδοσης των υποομάδων των μαθητών ανά ερώτηση προέκυψε ότι και στις πέντε ασκήσεις εννοιολογικού περιεχομένου οι διαφορές είχαν στατιστική σημαντικότητα μόνο στην πρώτη-συμβολική φάση και όχι όταν δινόταν κάποιου είδους σχηματική αναπαράσταση. Επομένως οι σχηματικές αναπαραστάσεις βοήθησαν στην αύξηση της επίδοσης των μαθητών σε έργα εννοιολογικής φύσης. Όσον αφορά το διαδικαστικό κομμάτι της γνώσης, η εικόνα δεν ήταν τόσο ομοιόμορφη. Γενικά, οι εικόνες δε φαίνεται να βοηθούν σημαντικά τους μαθητές με ήπιες εκπαιδευτικές ανάγκες σε έργα διαδικαστικής φύσης. Αυτό ίσως οφείλεται στη γενικότερη δυσκολία που αντιμετωπίζουν οι

μαθητές αυτοί κατά την ανάκληση και εφαρμογή βημάτων για την επίλυση μαθηματικών έργων.

Η έρευνα έχει εξετάσει την επιρροή των δύο ειδών γνώσης σε διάφορους τομείς της μαθηματικής γνώσης (Rittle-Johnson & Siegler, 1998), όπως για παράδειγμα τα κλάσματα (Byrnes, 1992; Byrnes & Wasik, 1991; Kerslake, 1986, Peck & Jenks, 1981; Rittle-Johnson, Siegler, & Alibali, 2001). Ωστόσο, δεν υπάρχει βιβλιογραφία σχετικά με το ποιο είδος γνώσης είναι σε υψηλότερα επίπεδα, πόσο μάλλον έρευνες με σύγκριση των δύο ειδών γνώσεις σε μαθητές με Η.Ε.Α. και ομάδα ελέγχου. Το σύνολο σχεδόν της βιβλιογραφίας αφορά απόψεις σχετικά με το ποιο είδος γνώσεις προηγείται, αν και όλοι σχεδόν συμφωνούν ότι και τα δύο είδη είναι σημαντικά κατά τη μάθηση (Hecht, 1998). Τα ευρήματα της παρούσας έρευνας είναι σύμφωνα με τη διεθνή βιβλιογραφία αφού υποστηρίζεται ότι κάθε παιδί εμφανίζει ένα ατομικό μαθησιακό προφίλ κατά την εκμάθηση εννοιολογικού και διαδικαστικού τύπου γνώσης. Κάποια παιδιά έχουν αναπτυγμένο το ένα είδος σε σχέση με άλλα, ενώ κάποια έχουν ιδιαίτερα ανεπτυγμένα και τα δύο είδη (Hallett et al., 2010; Hecht & Vagi, 2012).

Στην παρούσα εργασία τα δύο είδη γνώσης εμφανίζουν θετική γραμμική σχέση αμφίδρομης φύσεως, αφού η εννοιολογική γνώση μπορεί να προβλέψει τη διαδικαστική και το αντίστροφο στο συμβολικό και σχηματικό επίπεδο αναπαράστασης. Κάτι τέτοιο δε φάνηκε να ισχύει για το πρακτικό κομμάτι των δύο ειδών γνώσης. Τα αποτελέσματα συμφωνούν με όσους προτείνουν ότι η σχέση είναι αμφίδρομη, αφού η εννοιολογική γνώση μπορεί να προβλέψει και να αυξήσει τη διαδικαστική και το αντίστροφο (Byrnes & Wasik, 1991; Rittle-Johnson, et al., 2001), και όχι μίας κατεύθυνσης όπως υποστηρίζεται από άλλους (Nesher, 1986; Resnick & Omanson, 1987). Επομένως η διδασκαλία εννοιολογικής γνώσης μπορεί βελτιώσει τις διαδικαστικές ικανότητες και αντίστροφα, η διδασκαλία διαδικαστικής γνώσης μπορεί να έχει θετικά αποτελέσματα στην εννοιολογική κατανόηση των μαθητών. Συμπερασματικά, φαίνεται να ισχύει η εναλλακτική, ότι δηλαδή υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά και θετική γραμμική σχέση αμφίδρομης φύσεως μεταξύ εννοιολογικού και διαδικαστικού κομματιού στα κλάσματα. Επομένως, ένα πρόγραμμα με σαφείς διασυνδέσεις μεταξύ εννοιολογικής και διαδικαστικής

γνώσης μπορεί να αποδειχθεί ιδιαίτερα ωφέλιμο, ιδίως για τα παιδιά με Η.Ε.Α. (Hecht & Vagi, 2010).

Τέλος, ως προς τα αποτελέσματα της ποιοτικής ανάλυσης λαθών που διενεργήθηκε, φάνηκε ότι οι περισσότεροι μαθητές είχαν ελλιπή κατανόηση των εννοιών και διαδικασιών που αφορούν τα κλάσματα με αποτέλεσμα να κάνουν αρκετά λάθη. Τα αποτελέσματα καταδεικνύουν ότι πολλοί μαθητές που επιλέγουν να χρησιμοποιήσουν έναν αλγόριθμο δεν είναι σίγουροι για τη σωστή διαδικασία και κάνουν λάθη, δίνοντας μη λογικές απαντήσεις. Ακόμα και ικανοί μαθητές δυσκολεύονται με τα κλάσματα, αφού η πράξη προϋποθέτει κατανόηση, αλλά συχνά οι αλγόριθμοι διδάσκονται πριν την ανάπτυξη της βασικής έννοιας. Επομένως, συχνά καταφεύγουν στη σύνδεση της νέας διαδικασίας με άλλες παλιότερες που αφορούν τους φυσικούς αριθμούς ή στο μάντεμα της απάντησης. Γενικά, τα αποτελέσματα δείχνουν μια γενική έλλειψη εμπειρίας σε βασικές κλασματικές γνώσεις, που θα έπρεπε να αποκτηθεί με τη χρήση σαφών αναπαραστάσεων. Λίγοι μαθητές χρησιμοποίησαν σχηματικές αναπαραστάσεις ή την εννοιολογική τους γνώση για να εξάγουν μία απάντηση. Οι περισσότεροι διάλεξαν και εφάρμοσαν έναν αλγόριθμο, παράγοντας πολλές φορές μη λογικές απαντήσεις, οι οποίες μάλιστα δεν υπέπεσαν στην αντίληψή τους (Brown & Quinn, 2006).

Επομένως, η μηδενική υπόθεση (δεν υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά μεταξύ των ομάδων στον αριθμό και στην φύση των συχνότερων παρατηρούμενων λαθών) ισχύει εν μέρει αφού υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά μεταξύ των ομάδων στον **αριθμό** αλλά όχι στη **φύση** των συχνότερων παρατηρούμενων λαθών. Οι μαθητές με Η.Ε.Α. δηλαδή σημείωσαν περισσότερα λάθη (ποσοτικά) αλλά ίδιου είδους (ποιοτικά) σε σχέση με τους μαθητές τυπικής ανάπτυξης. Παρόμοια αποτελέσματα βρήκε και μία άλλη έρευνα σχετική με τους ρητούς αριθμούς που πραγματοποιήθηκε στην Ελλάδα (Κυριώτη, 2014). Αυτό ερμηνεύεται ενδεχομένως επειδή η κατανόηση των κλασμάτων προϋποθέτει την κατάκτηση σύνθετων γνώσεων και δεξιοτήτων. Ωστόσο, στο σχολείο γίνεται μία επιφανειακή προσέγγιση του θέματος και δίνεται έμφαση στην ερμηνεία μέρος-όλου, με αποτέλεσμα τις κοινές ελλείψεις των δύο ομάδων μαθητών τόσο στην εννοιολογική, όσο και στη διαδικαστική γνώση. Επίσης, η έμφαση που δίνεται στη διαδικαστική γνώση, χωρίς

την ύπαρξη της αντίστοιχης εννοιολογικής, περιορίζει τις γνωστικές ιδιαιτερότητες των μαθητών αυτών.

Παρακάτω ακολουθούν τα λάθη και οι παρανοήσεις των μαθητών ξεχωριστά για κάθε έργο, όπως προέκυψαν από τις τρεις φάσεις της παρούσας έρευνας:

Αρχικά, αναφορικά με το πρώτο έργο που αφορούσε την αναπαράσταση των κλασμάτων φαίνεται ότι οι παρανοήσεις και τα λάθη των μαθητών κατά τον διαμερισμό συχνά προέρχονται από την αδυναμία κατανόησης της σχέσης αριθμητή-παρονομαστή και την αντίληψη τους ως χωριστούς φυσικούς αριθμούς (Siebert & Gaskin, 2006). Οι μαθητές δηλαδή αποτυγχάνουν να αναγνωρίσουν τον παρονομαστή ως το όλο και τον αριθμητή ως μέρος του όλου (Siebert & Gaskin, 2006). Επίσης, τείνουν να παραλείπουν τη σημασία του ίσου διαμοιρασμού, ειδικά στα κλάσματα με περιττό παρονομαστή και θεωρούν ότι και άνισα διαμοιρασμένες επιφάνειες μπορούν να αναπαριστούν επιτυχώς τα κλάσματα (Empson, 2001; Cramer & Whitney, 2010; Van de Walle et al., 2012, 296). Η αναπαράσταση ενός καταχρηστικού κλάσματος έγινε λανθασμένα από το 53% των μαθητών κάτι που πιθανότατα οφείλεται στις διδακτικές προσεγγίσεις των εκπαιδευτικών, οι οποίες προσκολλούν τους μαθητές στην ερμηνεία του κλάσματος ως μέρος-όλου με τη χρήση μοντέλου εμβαδού και χωρίς την κατανόηση της έννοιας της μονάδας και της μοναδοποιησης (Naik & Subramaniam, 2008). Στη δεύτερη φάση της έρευνας και σε έργο αναπαράστασης και πάλι, οι μαθητές δυσκολεύτηκαν ιδιαίτερα στην αποκωδικοποίηση της αναπαράστασης του κλάσματος στην αριθμητική γραμμή (25,3% λάθος απαντήσεις), αφού αυτός ο τρόπος αναπαράστασης είναι ο δυσκολότερος σύμφωνα με τη βιβλιογραφία (Saxe et al., 2007; Lepak, 2010; Pearn & Stephens, 2007; Yanik, Helding & Flores, 2008) και δε χρησιμοποιείται τόσο συχνά στα ελληνικά σχολεία. Στην τρίτη φάση της έρευνας, η αποκωδικοποίηση των αναπαραστάσεων πραγματοποιήθηκε με περαιτέρω βελτίωση, με εξαίρεση το υποερώτημα που αφορούσε την αναγνώριση ενός πρωταρχικού κλάσματος, του ½ (6/10 μαθητές δε μπορούσαν να απαντήσουν με το σωστό κλάσμα).

Στο δεύτερο έργο, το οποίο ζητούσε την αναγνώριση και λεκτική απόδοση των κλασμάτων, η πλειονότητα των μαθητών απάντησε σωστά (94%). Η προσθήκη σχηματικής αναπαράστασης αύξησε ακόμα περισσότερο την κατανόηση (95,6%). Τα ευρήματα αυτά συνδέονται με το γεγονός ότι το κλάσμα πηγάζει άμεσα από την ως

μέρος ερμηνεία του ρητού αριθμού (Martinie, 2007), η οποία διδάσκεται πρώτη και στην οποία δίνεται έμφαση κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών στο δημοτικό σχολείο. Λίγοι μόνο μαθητές δεν κατάφεραν να αναγνωρίσουν την μονάδα-όλο και έκαναν λάθος στον παρονομαστή (Bamberger, Oberdorf, & Schultz-Ferrell, 2010). Εντούτοις, αν και οι μαθητές δείχνουν ικανοί να αναγνωρίσουν απλά κλάσματα έχουν δυσκολίες σε έργα που αφορούν κλασματικούς αριθμούς πιθανότατα λόγω της επιφανειακής τους γνώσης. Επιπρόσθετα, ακόμα και με την προσθήκη σχήματος που προέτρεπε σε κάτι τέτοιο, εξαιρετικά λίγοι μαθητές απάντησαν στο ερώτημα με χρήση ισοδύναμου κλάσματος, αντί του κλάσματος που τους δινόταν.

Η τρίτη άσκηση αφορούσε ένα πρόβλημα σύγκρισης ποσοτήτων, καθεμία από τις οποίες όμως αναφερόταν σε διαφορετικό σημείο αναφοράς-ολότητα. Το 56% έδωσε έμφαση στον αριθμό και όχι στο μέγεθος των κομματιών, με αποτέλεσμα να απαντήσουν λανθασμένα στο ερώτημα αυτό. Με την προσθήκη αντίστοιχης εικόνας στη δεύτερη φάση οι λάθος απαντήσεις μειώθηκαν στο 14,6%. Η προσθήκη πραγματικών αντικειμένων αύξησε περαιτέρω την κατανόηση, αφού μόλις το 5,4% έκανε λάθος στο αντίστοιχο ερώτημα της τρίτης φάσης. Δε βρέθηκε βιβλιογραφία για το συγκεκριμένο ερώτημα, φάνηκε πάντως να δυσκολεύει τους μαθητές, τουλάχιστον σε συμβολικό επίπεδο, αφού δεν τους είχε προβληματίσει νωρίτερα η κλασματική μονάδα στην οποία αναφέρεται κάθε ρητός.

Στην τέταρτη άσκηση, στο έργο διαμοιρασμού ποσοτήτων δηλαδή, το 30% των μαθητών δεν μοίρασαν σωστά και δίκαια της ποσότητες στα άτομα που τους ζητήθηκε. Ωστόσο, με την προσθήκη αντίστοιχης εικονικής αναπαράστασης το ποσοστό των λάθος απαντήσεων μειώθηκε εντυπωσιακά στο 3,4%. Περαιτέρω μείωση των λάθος απαντήσεων που σχεδόν άγγιξε το 0% πραγματοποιήθηκε κατά την τρίτη πρακτική φάση. Εξάλλου οι μαθητές γνωρίζουν την έννοια του δίκαιου διαμοιρασμού μέσα από την καθημερινή τους ζωή. Σε συνεχείς ποσότητες ωστόσο, τα ποσοστά λάθος ήταν και πάλι σχετικά υψηλά (9%) παρά την ύπαρξη πραγματικών αντικειμένων. Τα λάθη αυτά πιθανότατα οφείλονται στο γεγονός ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν ιδιαίτερες δυσκολίες στην αντίληψη του κλάσματος ως διαίρεση και συχνά δε δίνουν έμφαση στον διαμοιρασμό σε ίσες ποσότητες (Γαγάτσης et al., 2006).

Η πέμπτη και τελευταία άσκηση του εννοιολογικού κομματιού ζητούσε από τους μαθητές να συγκρίνουν κλασματικές ποσότητες. Το ¼ των μαθητών περίπου δεν κατάφερε να βρει το μεγαλύτερο κλάσμα από τα ζευγάρια που του είχαν δοθεί. Το ποσοστό αυτό έμεινε σταθερό ακόμα και μετά την προσθήκη αντίστοιχων αναπαραστάσεων στη δεύτερη φάση. Οι μαθητές τείνουν να αποκόπτουν τον αριθμητή από τον παρονομαστή και έχουν ισχυρή την άποψη ότι μεγαλύτεροι αριθμοί σημαίνουν περισσότερο, κάτι που δεν ισχύει πάντα στο κομμάτι των κλασμάτων (Mark, 1995). Στην τρίτη φάση, ωστόσο, το ποσοστό έπεσε στο 10%. Αφού οι μαθητές χρησιμοποιούν τη γνώση των φυσικών κατά τη σύγκριση κλασμάτων θεωρούν ότι μεγαλύτερος παρονομαστής σημαίνει μεγαλύτερο κλάσμα, αγνοώντας το γεγονός ότι περισσότερα κομμάτια σημαίνει ότι αυτά μικραίνουν σε μέγεθος, επομένως η διάταξη των κλασμάτων γίνεται με αντίστροφο τρόπο (Park, Güçler, & McCrory, 2013).

Στο διαδικαστικό κομμάτι τώρα και στην έκτη άσκηση του τεστ, το 40% των μαθητών δεν επέλυσε σωστά το πρόβλημα με αναγωγή στην κλασματική μονάδα. Το ποσοστό μάλιστα εκτοξεύτηκε στο 50% με την προσθήκη αντίστοιχης εικόνας. Το γεγονός αυτό μπορεί πιθανώς να αποδοθεί είτε στη φύση του προβλήματος (διακριτό έναντι συνεχούς ποσού), είτε στο διαφορετικό δείγμα που εκ των πραγμάτων έχει δυσκολίες, ειδικά σε ένα τόσο απαιτητικό έργο, όπως η επίλυση προβλήματος. Γενικά η επίλυση προβλήματος θεωρείται μια από τις συνθετότερες και δυσκολότερες ασκήσεις για τους μαθητές καθώς συνδυάζει γνώσεις και δεξιότητες (Grobecker, 1999). Πόσο μάλλον όταν τα προβλήματα είναι σχετικά με τα κλάσματα, γεγονός που δημιουργεί επιπρόσθετες δυσκολίες κατά την εύρεση του όλου και των μερών.

Στην έβδομη άσκηση από τους μαθητές ζητήθηκε να συγκρίνουν και πάλι κλάσματα, με μη κοινούς αριθμητές και παρονομαστές αυτή τη φορά. Το 36,5 απάντησε λανθασμένα στην πρώτη συμβολική φάση. Στη δεύτερη σχηματική το ποσοστό μειώθηκε σε 33,5% και παρέμεινε σχετικά σταθερό (33,9%) παρά την ύπαρξη πραγματικών αντικειμένων. Σε παρόμοια με την παρούσα έρευνα (Παντσίδης, 2012) δηλαδή με πολλαπλές μετρήσεις με διαφορετικό τρόπο αναπαράστασης βρέθηκε ότι η χρήση αναπαραστάσεων, αφενός διορθώνει κάποια σφάλματα στις συγκρίσεις των κλασμάτων που έγιναν χωρίς αναπαράσταση, αλλά

δημιουργεί και νέα σφάλματα. Με άλλα λόγια η διαφοροποίηση στις απαντήσεις-πεποιθήσεις των μαθητών είναι μεγαλύτερη απ' ότι εμφανίζεται στη διαφορά ποσοστών επιτυχίας μεταξύ των τριών τεστ. Γενικά, σύμφωνα με τη βιβλιογραφία, είναι πιθανόν οι μέθοδοι σύγκρισης κλασμάτων (αναπαραστατική, διαίρεση των όρων, μετατροπή σε ομώνυμα, σύνθετο κλάσμα) να μην αναδεικνύονται εξίσου και να μην γίνονται κατανοητοί από τους μαθητές (Δαφέρμος, 1996).

Η αύξουσα διάταξη των κλασμάτων (8η άσκηση) φάνηκε να δυσκολεύει ιδιαίτερα τους μαθητές, αφού 6 στους 10 περίπου δεν κατάφεραν να την λύσουν σωστά. Με την προσθήκη σχημάτων τα ποσοστά σωστών και λάθος απαντήσεων εξισώθηκαν (5/10). Κατά τη διάταξη κλασμάτων οι μαθητές τείνουν να πιστεύουν ότι όσο μεγαλύτερος ο παρονομαστής τόσο μεγαλύτερο το κλάσμα, κάτι που τους οδηγεί σε λάθος διάταξη (Nunes et al., 2006). Μόλις 2/10 μαθητές κατάφεραν να τοποθετήσουν σωστά τα κλάσματα που οι ίδιοι είχαν διατάξει στην αριθμητική γραμμή. Παρόμοια, σε άλλη έρευνα βρέθηκε ότι η χρήση της αριθμητικής γραμμής στην αναπαράσταση των κλασμάτων, οδήγησε σε μια αύξηση των λαθών που σχετίζονται με το μοντέλο ότι μεγαλύτερο είναι το κλάσμα με τους μεγαλύτερους όρους. Τα λάθη αυτά, σε ένα μεγάλο βαθμό οφείλονταν στο ότι οι μαθητές προχωρούσαν σε λανθασμένη αναπαράσταση των κλασματικών μονάδων, αντιστοιχώντας με ίδιο τμήμα στην αριθμητική γραμμή διαφορετικές κλασματικές μονάδες, συγχέοντας την μονάδα με την κλασματική μονάδα κ.τ.λ. (Παντσίδης, 2012).

Η προτελευταία, ένατη άσκηση, είχε υποερωτήματα ισοδυναμίας (41% λάθος απαντήσεις) και απλοποίησης (52% λάθος απαντήσεις). Όπως έχει διαπιστωθεί, η έννοια της ισοδυναμίας και της απλοποίησης αποτελεί πηγή δυσκολιών και στη σύγκριση κλασμάτων (Martinie, 2007). Παραδόξως τα ποσοστά λανθασμένων απαντήσεων αυξήθηκαν με την προσθήκη σχηματικών αναπαραστάσεων (49% και 66% αντίστοιχα). Το γεγονός αυτό θα μπορούσε πιθανότατα να αποδοθεί στο ότι οι διδακτικές πρακτικές στοχεύουν στην κατανόηση της διάταξης και της ισοδυναμίας των κλασμάτων κυρίως σε συμβολικό και όχι ταυτόχρονα και σε σχηματικό και πραξιακό επίπεδο (Post et al., 1985). Και άλλη έρευνα (Stafylidoy & Vosniadou, 2004) υποστηρίζει πως ενώ οι μαθητές γνωρίζουν πώς να διατάσσουν κλάσματα, στερούνται της γνώσης βασικών εννοιών,

όπως της ισοδυναμίας. Τέλος, συχνά σε τέτοιου είδους έργα εμφανίζεται το φαινόμενο του «gap thinking», της επικέντρωσης δηλαδή στη διαφορά μεταξύ αριθμητή και παρονομαστή. Πιο συγκεκριμένα, το φαινόμενο αυτό αφορά τη σκέψη των παιδιών σύμφωνα με την οποία «όταν υπάρχει μικρή διαφορά μεταξύ αριθμητή και παρονομαστή το κλάσμα είναι μεγαλύτερο», παραδείγματος χάρη 3/5>5/8 (Pearn & Stephens, 2004) ή δύο κλάσματα είναι ίσα όταν ο αριθμητής απέχει το ίδιο από τον παρονομαστή, π.χ. ¾=2/3 (Cramer, 1987).

Η τελευταία άσκηση (10η) περιείχε ερωτήματα με τις τέσσερις πράξεις σε ομώνυμα και ετερώνυμα κλάσματα. Τα ποσοστά των λάθος απαντήσεων ήταν 60% για την πρόσθεση, 59,5% για την αφαίρεση, 25% για τον πολλαπλασιασμό και 44,5% για τη διαίρεση. Με την προσθήκη αναπαραστάσεων στη δεύτερη φάση τα ποσοστά λανθασμένων απαντήσεων αυξήθηκαν (75,5%, 73%, 32,5% και 56% αντίστοιχα). Στην τρίτη πρακτική φάση οι περισσότεροι μαθητές κατάφεραν να απαντήσουν στην πλειονότητά τους σωστά (λάθη: 15%, 9%, 3% και 34% αντίστοιχα). Μια παρανόηση που έχει τη ρίζα της στους φυσικούς αριθμούς και ήταν συχνή στην ποιοτική ανάλυση των λαθών είναι η πρόσθεση/αφαίρεση κλασμάτων με την επιμέρους πρόσθεση/αφαίρεση των αριθμητών μεταξύ τους και των παρονομαστών μεταξύ τους (Lappan & Mouck, 1998; Δαφέρμος, 2002; Cramer & Whitney, 2010). Όσον αφορά τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση, συχνά λάθος απαντήσεις φαίνονται πιο πιθανές από τις σωστές, αν κάποιος πιστεύει ότι το γινόμενο πρέπει να είναι πάντα μεγαλύτερο και το πηλίκο πάντα μικρότερο (Siegler & Lortie-Forgues, 2015). Παρά την εστίαση του αναλυτικού προγράμματος σπουδών κυρίως στη διαδικαστική γνώση (Τζεκάκη et al., 2008), σε αυτήν σημειώθηκαν χαμηλότερες βαθμολογίες. Ενδεχομένως η κακή επίδοση να οφείλεται σε ελλείψεις σε βασικούς κανόνες και στρατηγικές που συνδέονται με την εκτέλεση πράξεων με κλάσματα (Hiebert & Wearne, 1986), όπως η μετατροπή σε ομώνυμα, η εκτέλεση πράξεων μόνο στους αριθμητές (πρόσθεση και αφαίρεση) και η εκτέλεση πράξεων χωρίς μετατροπή σε ομώνυμα (πολλαπλασιασμός και διαίρεση) και η αντιστροφή του διαιρετέου και εκτέλεση πολλαπλασιασμού κατά τη διαίρεση. Οι ελλείψεις των μαθητών στην εννοιολογική κλασματική γνώση (Δαφέρμος, 2002), έχουν πιθανότατα ως συνέπεια τη δυσκολία κατανόησης των συμβόλων των πράξεων και των μεταξύ τους σχέσεων (Hiebert & Wearne, 1986).

Οι εκπαιδευτικοί κάθε βαθμίδας λοιπόν καλούνται να γνωρίζουν τους τρόπους σκέψης και τις συχνότερες παρανοήσεις που προαναφέρθηκαν, ώστε να τις προλαβαίνουν ή να τις αντιμετωπίζουν αποτελεσματικά για να μην εμφανίζονται επανειλημμένα και επίμονα στα γραπτά των μαθητών.

2.4. Συμπεράσματα

«Ένα συμπέρασμα είναι το σημείο στο οποίο κουράστηκες να σκέφτεσαι».
Arthur Bloch

Σχετικά με τις διαφορές στην επίδοση των παιδιών σε αξιολογήσεις που διαφέρουν ως προς τον **τρόπο αναπαράστασης** (σύμβολο, σχέδιο, αντικείμενα), προέκυψε ότι υπάρχει διαφορά στην κατανόηση μεταξύ μαθητών τυπικής ανάπτυξης και μαθητών με Η.Ε.Α. Επιπρόσθετα, βρέθηκε ότι υπάρχει διαφορά στην κατανόηση μεταξύ μαθητών τυπικής ανάπτυξης και μαθητών με Η.Ε.Α. μόνο στη **διαδικαστική** και όχι στην **εννοιολογική** γνώση των κλασμάτων. Και στις πέντε ασκήσεις εννοιολογικού περιεχομένου οι διαφορές μεταξύ των ομάδων είχαν στατιστική σημαντικότητα μόνο στην πρώτη-συμβολική φάση. Στη δεύτερη φάση, η οποία συνοδευόταν με σχηματική αναπαράσταση, υπήρξαν διαφορές υπέρ των τυπικών αλλά δεν ήταν στατιστικά σημαντικές. Σε διαδικαστικά έργα, οι εικόνες δε φάνηκε να βελτιώνουν σημαντικά την κατανόηση των μαθητών με Η.Ε.Α. Από τις αναλύσεις διακύμανσης προέκυψε ότι υπάρχει θετική γραμμική συσχέτιση μεταξύ των ειδών γνώσης και κάθε φορά που η εννοιολογική γνώση του ατόμου αυξάνεται, αυξάνεται και η διαδικαστική γνώση και το αντίστροφο (αμφίδρομη σχέση). Τέλος, σχετικά με τη **συχνότητα** και τη **φύση** των συχνότερων παρατηρούμενων **λαθών**, οι μαθητές με ήπιες εκπαιδευτικές ανάγκες αντιμετώπισαν μεγαλύτερου βαθμού δυσκολίες σε όλα τα υποερωτήματα σε σχέση με τους συμμαθητές τους. Οι μαθητές τυπικής ανάπτυξης και οι μαθητές με δυσκολίες έκαναν τα ίδια λάθη ποιοτικά, αλλά οι δεύτεροι σημείωσαν μεγαλύτερο βαθμό ποσοτικά.

2.5. Περιορισμοί

«Οι περιορισμοί απελευθερώνουν».
Ludwig Wittgenstein

Κατά την πραγματοποίηση της έρευνας υπήρξαν αρκετοί περιορισμοί, οι οποίοι αναφέρονται στη συνέχεια. Αρχικά, ο αριθμός των συμμετεχόντων είναι σχετικά μικρός, ενώ η ομάδα των μαθητών με ήπιες εκπαιδευτικές ανάγκες υπο-εκπροσωπείται. Η περιορισμένη συμμετοχή οφείλεται κυρίως στην άρνηση συναίνεσης και συμμετοχής των διευθυντών των σχολικών μονάδων διεξαγωγής της έρευνας. Οι μαθητές με διάγνωση ήταν όλοι όσοι φοιτούσαν στα σχολεία στα οποία διεξήχθη η έρευνα. Επιπλέον, εκτός από την ύπαρξη διάγνωσης δεν υπήρχε επιπλέον πληροφόρηση για το είδος των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν ή για το πόσο χρονικό διάστημα δέχονται παρέμβαση. Κάποιοι ίσως αντιμετώπιζαν αναγνωστικές δυσκολίες που μείωσαν την επίδοσή τους, ενώ δεν έγινε διάκριση μεταξύ των διάφορων κατηγοριών κατά την ανάλυση των δεδομένων. Επιπρόσθετα, λόγω της έλλειψης σταθμισμένου εργαλείου, χρησιμοποιήθηκαν τεστ με υποκειμενικά κριτήρια, βασισμένα στα Αναλυτικά Προγράμματα σπουδών του Δημοτικού Σχολείου.

2.6. Προτάσεις για τη διδασκαλία

«Η αποτελεσματική διδασκαλία μπορεί να είναι η πιο δύσκολη δουλειά που υπάρχει».
William Glasser

Από τα αποτελέσματα της έρευνας προκύπτουν προτάσεις για τη διδασκαλία αυτού του τόσο δύσκολου αντικειμένου των κλασμάτων.

Αναφορικά με τους τρόπους αναπαράστασης προτείνεται χρήση της ακολουθίας αναπαράστασης από τους πιο συγκεκριμένους τρόπους προς τους πιο αφηρημένους. Η μετάβαση αυτή μάλιστα πρέπει να συμβαίνει μόνο αφού οι μαθητές έχουν πετύχει ένα ικανοποιητικό επίπεδο στον προηγούμενο τρόπο αναπαράστασης. Επιπλέον, αφού κάθε αναπαραστατικό μοντέλο έχει πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα, προτείνεται η συνδυαστική χρήση περισσοτέρων του ενός.

Σχετικά με τα είδη γνώσης προτείνεται η αφετηρία από το εννοιολογικό κομμάτι των κλασμάτων και μόνο εφόσον οι μαθητές έχουν κατακτήσει τις έννοιες, να γίνεται μετάβαση στις διαδικασίες. Οι διαδικασίες από την άλλη, δεν πρέπει να αποκόπτονται από τις έννοιες αλλά να επεξηγούνται και να αιτιολογούνται με βάση αυτές. Άλλωστε τα δύο είδη συσχετίζονται και η αύξηση του ενός είδους γνώσης μπορεί να οδηγήσει σε αύξηση και του άλλου.

Τέλος, όσον αφορά τα συχνότερα λάθη και τις παρανοήσεις, σε κάθε φάση της διδασκαλίας, πρέπει να τονίζονται συνειδητά οι σχέσεις με προηγούμενα διδαχθέντα σημεία, οι ομοιότητες και οι διαφορές με τη δομή του συστήματος και των πράξεων των φυσικών, ώστε να προλαμβάνονται όσο είναι δυνατόν οι παρανοήσεις. Μόνο αν γνωρίζουν οι εκπαιδευτικοί τα σημεία στα οποία εμφανίζονται συχνότερα δυσκολίες μπορούν να καταστούν αποτελεσματικοί στο έργο τους.

2.7. Μελλοντικές έρευνες

«Η επιστημονική έρευνα γίνεται με τέσσερα πράγματα:
μυαλό για να σκέφτεσαι, μάτια για να βλέπεις,
μηχανήματα για να μετράς και χρήματα».
Albert von Szent-Gyorgyi

Κάποια ερωτήματα που γεννήθηκαν κατά την συγγραφή της παρούσας εργασίας και χρήζουν ίσως περισσότερης διερεύνησης είναι:

Ποιο είδος αναπαραστάσεων μπορεί να βοηθήσει αποτελεσματικά τους μαθητές με ήπιες εκπαιδευτικές ανάγκες να βελτιώσουν την κατανόηση και την επίδοσή τους σε κλασματικά έργα;

Γιατί εμφανίζονται στατιστικά σημαντικές διαφορές μόνο στα διαδικαστικά και όχι στα εννοιολογικά έργα μεταξύ μαθητών τυπικής ανάπτυξης και μαθητών με ήπιες εκπαιδευτικές ανάγκες;

Γιατί οι μαθητές με ήπιες εκπαιδευτικές ανάγκες εμφανίζουν τα ίδια είδη λαθών με τους συμμαθητές τους τυπικής ανάπτυξης παρά τα διαφορετικά γνωστικά τους χαρακτηριστικά;

2.8. Βιβλιογραφικές αναφορές

«Ανάμεσα σε ένα σκεπτόμενο άνθρωπο και έναν πολυμαθή, υπάρχει η ίδια διαφορά που έχει ένα βιβλίο με έναν πίνακα περιεχομένων».
Jean-Baptiste Say

2.8.1. Ξενόγλωσση

Anghileri, J. (2008). *Developing number sense: Progression in the middle years*. A&C Black.

Ball, D. L. (1993). Halves, pieces, and twoths: Constructing and using representational contexts in teaching fractions. Στο T. P. Carpenter, E. Fennema, & T. A. Romberg (Eds.), *Rational numbers: An integration of research* (157-195). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Bamberger, H.J., Oberdorf, C., & Schultz-Ferrell, K. (2010). *Math misconceptions: From misunderstanding to deep understanding.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Baturo, A. R. (2004). *Empowering Andrea to help year-5 students construct fraction understanding.* Στο *Proceedings of the 28th Conference of the International,* 2, 95-102.

Baturo, A. R., Cooper, T. J., & Thompson, K. (2003). Effective Teaching with Virtual Materials: Years Six and Seven Case Studies. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *4*, 299-306.

Behr, M. & Post, T. (1992). Teaching rational number and decimal concepts. Στο T. Post (Ed.), *Teaching mathematics in grades K-8: Research-based methods* (2η εκδ.) Boston: Allyn and Bacon.

Behr, M. J., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio, and proportion. *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, 296-333.

Behr, M., & Post, T. (1992). *Teaching mathematics in grades K-8: Research-based methods* (2η εκδ.). Boston, Massachusetts: Allyn and Bacon.

Behr, M., Lesh, R., Post, T., & Silver, E. (1983). Rational number concepts. Στο R. Lesh, & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* New York: Academic Press. 91-126.

Behr, M., Post, T., Silver, E., & Mierkiewicz, D. (1980). Theoretical foundations for instructional research on rational numbers. Στο *Proceedings of Fourth Annual Conference of International Group for Psychology of Mathematics Education* (pp. 60-67).

Behr, M., Wachsmuth, I., Post, T. & Lesh, R. (1984). Order and equivalence of rational numbers – A clinical teaching study. *Journal for Research in Mathematics Education, 15*, 323-341.

Behr,M. J., Wachsmuth, I., Post, T. R., & Lesh, R. (1984). Order and equivalence of rational numbers: A clinical teaching experiment. *Journal for Research in Mathematics Education*, 15(5), 323–341.

Beyranevand, M. L. (2014). The Different Representations of Rational Numbers. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *19*(6), 382-385.

Bobis, J. (2011). Fractions: Best evidence and its implications for practice. Στο Jenni Way & Janette Bobis (Eds.), *Fractions: teaching for understanding*. Adelaide, SA: Australian Association of Mathematics Teachers.

Bottge, B. A. (1999). Effects of contextualized math instruction on problem solving of average and below-average achieving students. *The Journal of Special Education*, *33*(2), 81-92.

Bottge, B. A., Heinrichs, M., Mehta, Z. D., & Hung, Y. H. (2002). Weighing the benefits of anchored math instruction for students with disabilities in general education classes. *The Journal of Special Education*, *35*(4), 186-200.

Bottge, B. A., Rueda, E., Serlin, R. C., Hung, Y. H., & Kwon, J. M. (2007). Shrinking Achievement Differences With Anchored Math Problems Challenges and Possibilities. *The Journal of Special Education*, *41*(1), 31-49.

Bray, W.S., &Abreu-Sanchez, L. (2010). Using number sense to compare fractions. *Teaching Children Mathematics*, *17*(2), 90-97.

Brown, G., & Quinn, R. J. (2006). Algebra students' difficulty with fractions: An error analysis. *Australian Mathematics Teacher, The*, *62*(4), 28.

Bruner, J. (1966). *Toward a Theory of Instruction*. Cambridge: Harvard University Press.

Burns, M. K., Walick, C., Simonson, G. R., Dominguez, L., Harelstad, L., Kincaid, A., & Nelson, G. S. (2015). Using a Conceptual Understanding and Procedural Fluency Heuristic to Target Math Interventions with Students in Early Elementary. *Learning Disabilities Research & Practice*, *30*(2), 52-60.

Butler, F. M., Miller, S. P., Crehan, K., Babbitt, B., & Pierce, T. (2003). Fraction instruction for students with mathematics disabilities: Comparing two teaching sequences. *Learning Disabilities Research & Practice*, *18*(2), 99-111.

Byrnes, J. P. (1992). The conceptual basis of procedural learning. *Cognitive Development*, 7(2), 235-257.

Byrnes, J. P., & Wasik, B. A. (1991). Role of conceptual knowledge in mathematical procedural learning. *Developmental Psychology*, *27*(5), 777.

Charalambous, Y. C., & Pitta-Pandazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study students' understanding of fractions. *Educational Studies in Mathematics, 64.*

Cheng, P.C.H. (2000). Unlocking conceptual learning in mathematics and science with effective representational systems. *Computers and Education, 33.*

Clarke, D. M. & Roche, A. (2009). Students' fraction comparison strategies as a window into robust understanding and possible pointers for instruction. *Educational Studies in Mathematics, 72*, 127-138.

Contreras, J. N. & Martinez-Cruz, A. M. (2001) An investigation of preservice elementary teachers' solution processes to problematic story problems involving division of fractions and their interpretations of solutions. Στο *Proceedings of the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (2-289).

Coulombe, W., & Berenson, S. (2001). Representations of Ratterns and Functions Tools for Learning. Yearbook (National Council of Teachers of Mathematics).

Cramer, K. & Henry, A. (2002). Using manipulative models to build number sense for addition of fractions, NCTM 2002 Yearbook: *Making sense of fractions, ratios and proportions*. (41-48).

Cramer, K. & Wyberg, T. (2009). Efficacy of Different Concrete Models for Teaching the Part-Whole Construct for Fractions. *Mathematical Thinking and Learning*, 11(4), 226-257.

Cramer, K. A., Post, T. R., & delMas, R. C. (2002). Initial fraction learning by fourth- and fifth-grade students: A comparison of the effects of using commercial curricula with the effects of using the rational number project curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, 111-144.

Cramer, K., & Whitney, S. (2010). Learning rational number concepts and skills in elementary school classrooms. Στο D.V. Lambdin & F.K. Lester, Jr. (Eds.), *Teaching and learning mathematics: Translating research for elementary school teachers*. (15-22). Reston, VA: NCTM.

Cramer, K., Wyberg, T., & Leavitt, S. (2008). The role of representations in fraction addition and subtraction. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *13*(8), 490-496.

Demby, A. (1997). Algebraic procedures used by 13-to-15 year olds. *Educational Studies in Mathematics, 33*, 45–70.

Diezmann, C., & English, L. (2001). Promoting the Use of Diagrams as Tools for Thinking. Στο A. A. Cuoco, & F. R. Curcio (Eds.), *The Roles of Representation in School Mathematics*. NCTM: VA, Reston.

Dubé, A. K., & Robinson, K. M. (2010). Accounting for individual variability in inversion shortcut use. *Learning and Individual Differences, 20,* 687–693.

Dubinsky, E. (1991). Constructive aspects of reflective abstraction in advanced mathematics. Στο K. S. Steffe (Επιμ.) *Epistemological foundations of mathematical experience* (160-202). New York: Springer-Verlag.

Dufour-Janvier, B., Bednarz, N., & Belanger, M. (1987). Pedagogical Considerations Concerning the Problem of Representation. Στο C. Janvier (Ed), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Duval, R. (2002). The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 1(2), 1-16.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, Springer 2006.

Empson, S.E. (2001). Equal sharing and the roots of fraction equivalence. *Teaching Children Mathematics*, *7*(7), 421-425.

Engelkamp, J., & Zimmer, H. D. (1990). Memory for action events: A new field of research. *Psychological Research, 51*, 153–157.

Erickson, R.N., Thurlow, M.L., & Ysseldyke, J.E. (1996). *Neglected numerators, drifting denominators, and fractured fractions: Determining participation rates for students with disabilities in statewide assessment programs*. Minneapolis, MN: University of Minnesota, National Center on Educational Outcomes.

Fazio, L., & Siegler, R. S. (2011). *Teaching fractions*. International Academy of Education.

Fennell, F., & Rowan, T. (2001). Representation: An Important process for teaching and learning Mathematics. *Teaching Children Mathematics,* 7(5), 288.

Fisher, L. (2007). *Learning about fractions from assessment* (195-211). Στο Assessing Mathematical Proficiency (ed. Alan H. Schoenfeld). Cambridge University Press, Cambridge.

Fuson, K. (1988). Children's counting and concepts of number. New York: Springer-Verlag.

Gagatsis, A. & Elia, I. (2003) *The representation and geometrical models in teaching mathematics*. Nicosia: Intercollege Press.

Gagatsis, A., & Elia, I. (2005). A review of some recent studies on the role of representations in mathematics education in Cyprus and Greece. Στο *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education: Working Group* (1, 102-111).

Gagatsis, A., & Shiakalli, M. (2004). Ability to translate from one representation of the concept of function to another and mathematical problem solving. *Educational Psychology*, *24*(5), 645-657.

Gallistel, C. R., & Gelman, R. (1992). Preverbal and verbal counting and computation. *Cognition*, 44(1–2), 43–74.

Geary, D. C. (1994). *Children's mathematical development: Research and practical implications*. Washington, D.C.: American Psychological Association.

Gelman, R. (1991). Epigenetic foundations of knowledge structures: Initial and transcendent constructions. Στο S. Carey & R. Gelman (Eds.), *The epigenesis of mind: Essays on biology and cognition* (293–322). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Gelman, R., & Williams, E. M. (1998). Enabling constraints for cognitive development and learning: Domain specificity and epigenesis. Στο D. Kuhn & R. S. Siegler (Eds.), *Handbook of child psychology: Cognition, perception, and language* (5η εκδ., (2), 575-630). New York: Wiley.

Glasersfeld, E. (1987). "*Construction of Knowledge"*. Intersystem's Publications.

Goldin G. A., Kaput J. M. (1996). A Joint Perspective of the Idea of Representation in *Learning and Doing Mathematics*. Στο von L.P. Steffe, Nesher P. (Eds.). New Jersey: LEA.

Goldin, G. A. (1988). Representational Systems, Learning, and Problem Solving in Mathematics. *The Journal of Mathematical Behavior*, 17 (2).

Gray, E., Tall. D. (1994). Duality, Ambiguity, and Flexibility: A Proceptual view of simple Arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education 25* (2): 116.

Greeno, J. G., & Hall, R. P. (1997). *Practicing representation: Learning with and about representational forms*. Phi Delta Kappan.

Greer, B. & Harel, G. (1998). The role of isomorphism in mathematical cognition. *The Journal of Mathematical Behavior, 17* (1), 5-24.

Grobecker, B. (1999). The evolution of proportional structures in children with and without learning differences. *Learning Disability Quarterly*, *22*(3), 191–211.

Halford, G. S. (1993). *Children's understanding: The development of mental models.* Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Hallett, D., Nunes, T., & Bryant, P. (2010). Individual differences in conceptual and procedural knowledge when learning fractions. *Journal of Educational Psychology*, 102, 395–406.

Hawkins, B. A., Eklund, S. J., James, D. R., & Foose, A. K. (2003). Adaptive behavior and cognitive function of adults with Down syndrome: Modeling change with age. *Mental Retardation*, *41*(1), 7-28.

Hecht, S. A. (1998). Toward an information-processing account of individual differences in fraction skills. *Journal of Educational Psychology*, *90*(3), 545.

Hecht, S. A., & Vagi, K. J. (2010). Sources of group and individual differences in emerging fraction skills. *Journal of educational psychology*, *102*(4), 843.

Hecht, S. A., & Vagi, K. J. (2012). Patterns of strengths and weaknesses in children's knowledge about fractions. *Journal of experimental child psychology*, *111*(2), 212-229.

Hecht, S. A., Close, L., & Santisi, M. (2003). Sources of individual differences in fraction skills. *Journal of Experimental Child Psychology*, 86(4), 277–302.

Hecht, S. A., Vagi, K. J., Torgesen, J. K. (2007). Fraction skills and proportional reasoning. Στο: Berch & Mazzocco. *Why is Math So Hard for Some Children? The Nature and Origins ofMathematical Learning Difficulties and Disabilities*. New York: Brookes Publishing, 121-132.

Herman, J., Ilucova, L., Kremsova, V., Pribyl, J., Ruppeldtova, J., Simpson, A., Stehlikova, N. & Ulrychova, M. (2004). Images of fractions as processes and images of fractions in processes. Στο *Proceedings of the 28th Conference of the International* (4, 249-256).

Hiebert, J. (1985). Children's knowledge of common and decimal fractions. *Education and Urban Society*, 17(4), 427–437.

Hiebert, J., & Wearne, D. (1986). *Procedures over concepts: The acquisition of decimal number knowledge*.

Hitt, F. (1998). Difficulties in the Articulation of Different Representations Linked to the Concept of Function. *The Journal of Mathematical Behavior,* 17(1), 123-134.

Huinker, D. (2002). Examining dimensions of fraction operation sense. In B. Litwiller (Ed.) *Making sense of fractions, ratios and proportions,* (72-78). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Janvier, C. (1987). Translation Processes in Mathematics Education. Στο C. Janvier (Ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (27-32). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kaput, J. J. (1985). Representation and Problem Solving: Methodological Issues Related to Modelling. Στο E. A. Silver (Ed.), *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives* (381 −398). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kaput, J. J. (1987). Representation Systems and Mathematics. Στο C. Janvier (Ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (19-26). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kaput, J. J. (1987). Toward a Theory of Symbol Use in Mathematics. Στο C. Janvier (Ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kerslake, D. (1986). Fractions: Children's Strategies and Errors. *A Report of the Strategies and Errors in Secondary Mathematics Project*. NFER-NELSON Publishing Company, Ltd.

Ketterlin-Geller, L. R., & Chard, D. J. (2011). Algebra readiness for students with learning difficulties in grades 4–8: Support through the study of number. *Australian Journal of Learning Difficulties*, *16*(1), 65-78.

Kieren, T. (1992). Rational and fractional numbers as mathematical and personal knowledge: Implications for curriculum and instruction. Στο G. Leinhardt, R. Putnam & R. A. Hattrup (Eds.), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching* (323-371). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kieren, T. E. (1988). Personal knowledge of rational numbers: Its intuitive and formal development. *Number concepts and operations in the middle grades*, *2*, 162-181.

Lamon, S. J. (2012). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers*. Routledge.

Lappan, G.,& Mouck, M. K. (1998). Developing algorithms for adding and subtracting fractions. Στο L. J. Morrow (Ed.), *The teaching and learning algorithms in school mathematics* (183-197). Reston, VA: NCTM.

Lemaire, P., & Siegler, R. S. (1995). Four aspects of strategic change: Contributions to children's learning of multiplication. *Journal of Experimental Psychology: General, 124,* 83–97.

Lepak, J. (2010). *Understanding students' understanding of fractions*. Unpublished Practicum write-up. Michigan State University.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987) Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. Στο C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning mathematics.* Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbawm Associates.

Lipsey, M. W., & Derzon, J. H. (1998). *Predictors of violent or serious delinquency in adolescence and early adulthood: a synthesis of longitudinal research*.

Mack, N. K. (1990). Learning fractions with understanding: Building on informal knowledge. Journal *for Research in Mathematics Education*, 21(1), 16–32.

Mack, N. K. (1995). Confounding whole-number and fraction concepts when building on informal knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26* (5), 422-441.

Mack, N. K. (2004). Connecting to develop computational fluency with fractions. *Teaching Children Mathematics*, *11*(4), 226-232.

Mamede, E., Nunes, T., & Bryant, P. (2005). The equivalence and ordering of fractions in part-whole and quotient situations. Στο *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. 281-288.

Marshall, S. P. (1993). Assessment of rational number understanding: A schema-based approach. *Rational numbers: An integration of research*, 261-288.

Martinie, S. (2007). Middle school rational number knowledge. Διδακτορική διατριβή. Kansan State University.

Martinie, S. L., & Bay-Williams, J. (2003). Investigating students‟ conceptual understanding of decimal fractions using multiple representations. *Mathematics Teaching in the Middle School, 8*(5), 244–247.

Mazzocco, M. M., & Devlin, K. T. (2008). Parts and 'holes': Gaps in rational number sense among children with vs. without mathematical learning disabilities. *Developmental science*, *11*(5), 681-691.

Mazzocco, M. M., Myers, G. F., Lewis, K. E., Hanich, L. B., & Murphy, M. M. (2013). Limited knowledge of fraction representations differentiates middle school students with mathematics learning disability (dyscalculia) versus low mathematics achievement. *Journal of experimental child psychology*, *115*(2), 371-387.

McLeod, T. M., & Armstrong, S. W. (1982). Learning disabilities in mathematics: Skill deficits and remedial approaches at the intermediate and secondary level. *Learning Disability Quarterly*, 5,305–310.

McNamara, J.C., & Shaughnessy, M. M. (2010). *Beyond pizzas & pies: Ten essential strategies for supporting fraction sense (Grades 3-5).* Sausalito, CA: Math Solutions.

Miller, M. D., Linn, R. L., & Gronlund, N. E. (2009). *Measurement and assessment in teaching*. Pearson Higher Ed.

Misquitta, R. (2011). A review of the literature: Fraction instruction for struggling learners in mathematics. *Learning Disabilities Research & Practice*, *26*(2), 109-119.

Mitchell, A., & Horne, M. (2010). Gap Thinking in Fraction Pair Comparisons Is Not Whole Number Thinking: Is This What Early Equivalence Thinking Sounds Like? *Mathematics Education Research Group of Australasia,* 414-421.

Mix, K. S., Levine, S. C., & Huttenlocher, J. (1999). Early fraction calculation ability. *Developmental Psychology*, 33(5), 164–174.

Moriarty, D. (2003). Fractions. Στο Rule, A. C., & Lord, L. H.. *Activities for Differentiated Instruction Addressing All Levels of Bloom's Taxonomy and Eight Multiple Intelligences*. (37-44).

Moss, J., & Case, R. (1999). Developing children's understanding of the rational numbers: A new model and an experimental curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, 122-147.

Naik, S., & Subramaniam, K. (2008). *Integrating the measure and quotient interpretation of fractions*. Στο International group of the psychology of mathematics education: Proceedings of the Joint Meeting of PME(Vol. 32, pp. 17-24).

National Mathematics Advisory Panel (2008). *The Final Report of the National Mathematics Advisory Panel*.

NCTM (2000). *Principles and Standards for school mathematics. Reston*, VA: NCTM, 2000.

Nesher, P. (1985). An outline for a tutorial on rational numbers. *Unpublished manuscript*.

Nesher, P. (1986). Are mathematical understanding and algorithmic performance related?. *For the learning of mathematics*, *6*(3), 2-9.

Nesher, P. (1989). *Microworlds in mathematical education: A pedagogical realism*. Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Ni, Y. (2001). Semantic domains of rational numbers and the acquisition of fraction equivalence. *Contemporary Educational Psychology*, 26, 400–417.

Ni, Y. (2002). *Number lines as assessment procedure for diagnostic utility and achievement estimation.* Manuscript submitted to British Journal of Educational Psychology for publication.

Ni, Y., & Zhou, Y.-D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist*, 40(1), 27–52.

Nilsson, L. G. (2000). Remembering actions and words. In E. Tulving & F. I. M. Craik (Eds.), *The Oxford handbook of memory* (pp. 137–148). New York: Oxford University Press.

Noice, H., & Noice, T. (2001). Learning dialogue with and without movement. *Memory and Cognition, 29*, 820–828.

Noparit, T., & Saengpun, J. (2013). How Student Teachers Use Proportional Number Line to Teach Multiplication and Division of Fraction: Professional Learning in Context of Lesson Study and Open Approach. *Creative Education*, *4*(08), 19.

Noura, K. (2009). *Understanding Fractions: What Happens Between Kindergarten And The Army?* Στο *Annual conference of The Mathematical Association of Victoria, Victoria, Australia, 166-173*.

Nunes, T., Byrant, P., Huury, J., & Pretzlik U. (2006). *Fractions: Difficult but crucial in mathematics learning* (Research Report No. 14).

Oberer, J. J. (2003). Effects of learning-style teaching on elementary students' behaviors, achievement, and attitudes. *Academic Exchange Quarterly, 7,* 193–200.

Ohlsson, Stellan (1988). Mathematical Μέσος όροçing and applicational Μέσος όροçing in the semantics of fractions and related concepts. Στο *Number Concepts and Operations in the Middle Grades,* (pp. 53-91). Reston Va: NCTM.

Osterlind, S. J. (2002). *Constructing Test Items: Multiple-Choice, Constructed-Response, Performance, and Other Formats*. New York: Kluwer Academic Publishers.

Park, J., Güçler, B., & McCrory, R. (2013). Teaching prospective teachers about fractions: Historical and pedagogical perspectives. *Educational Studies in Mathematics*, 82(3), 455-479.

Pearn, C. & Stephens, M. (2004). Why you have to probe to discover what Year 8 students really think about fractions. Στο I. Putt, R. Faragher & M. McLean (Eds.), *Mathematics education for the third millennium: Towards 2010* (Proceedings of the 27th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Townsville, pp. 430-437). Sydney: MERGA.

Pearn, C., & Stephens, M. (2007). *Whole number knowledge and number lines help to develop fraction concepts*. Paper presented at the 30th Annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Tasmania, Australia.

Philipou, G. & Christou, C. (1994). Prospective elementary teachers' conceptual and procedural knowledge of fractions. Στο J. P. da Ponte and J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the Eighteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education,* vol. 4, (33-40). Lisbon, Portugal: University of Lisbon.

Pierangelo, R., & Giuliani, G. (2008). *Teaching students with learning disabilities: A step-by-step guide for educators*. Corwin Press.

Pinilla, M. I. F. (2007). Fractions: conceptual and didactic aspects. *Acta Didactica Comenianae Mathematics*, *7*, 81-115.

Pitkethly, A. & Hunting, R. (1996). A review of recent research in the area of initial fraction concepts. *Educational Studies in Mathematics, 30, 5-38. Belgium: Kluwer Academic Publishers.*

Post, T. R. (1986). Research-Based Observations about Children's Learning of Rational Number Concepts. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *8*(1), 39-48.

Post, T. R., Behr, M., & Lesh, R. (1982). Interpretations of rational number concepts. *Mathematics for grades*, *5*(9), 59-72.

Post, T. R., Wachsmuth, I., Lesh, R., & Behr, M. J. (1985). Order and equivalence of rational numbers: A cognitive analysis. *Journal for Research in Mathematics Education*, 18-36.

Rau, M. A., Aleven, V., & Rummel, N. (2009). Intelligent Tutoring Systems with Multiple Representations and Self-Explanation Prompts Support Learning of Fractions. Στο V. Dimitrova, R. Mizoguchi, & B. du Boulay (Eds.), *Proceedings of the 14th International Conference on Artificial Intelligence in Education* (pp. 441-448). Amsterdam, the Netherlands: IOS Press.

Resnick, L. B. (1982). Syntax and semantics in learning to subtract. Στο T. P. Carpenter, J. M. Moser & T. A. Romburg (Eds.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective* (136–155). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Resnick, L. B., & Omanson, S. F. (1987). Learning to understand arithmetic. Στο R. Glaser (Ed.), *Advances in instructional psychology* (pp. 41–95). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Rittle-Johnson, B., & Siegler, R. S. (1998). The relation between conceptual and procedural knowledge in learning mathematics: A review.

Rittle-Johnson, B., Schneider, M., & Star, J. R. (2015). Not a one-way street: bidirectional relations between procedural and conceptual knowledge of mathematics. *Educational Psychology Review*,*27*(4), 587-597.

Rittle-Johnson, B., Siegler, R. S., & Alibali, M. W. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process. *Journal of educational psychology*, *93*(2), 346.

Robinson, K. M., & Dubé, A. K. (2009). Children's understanding of the inverse relation between multiplication and division. *Cognitive Development, 24,* 310–321.

Robinson, K. M., Arbuthnott, K. D., Rose, D., McCarron, M. C., Globa, C. A., & Phonexay, S. D. (2006). Stability and change in children's division strategies. *Journal of Experimental Child Psychology, 93,* 224–238.

Rozenblit, L., & Keil, F. (2002). The misunderstood limits of folk science: An illusion of explanatory depth. *Cognitive Science, 26,* 521–562.

Saxe, G. B., Shaughnessy, M. M., Shannon, A., Langer-Osuna, J. M., Chinn, R., & Gearhart, M. (2007). Learning about fractions as points on a number Line. Στο W. G. Martin, M. E. Strutchens, & P. C. Elliott (Eds.), *The learning of mathematics: Sixty-ninth yearbook* (221–237). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Seeger, F. (1998). Representations in the Mathematical Classroom: Reflections and Constructions. Στο von F. Seeger, J. Voight & U. Waschescio (Eds.), The culture of the mathematical classroom (pp. 308-343). Cambridge: Cambridge UP.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22:* 1-3.

Shin, M., & Bryant, D. P. (2015). Fraction Interventions for Students Struggling to Learn Mathematics A Research Synthesis. *Remedial and Special Education*, 36(6), 374-387.

Siebert, D., & Gaskin, N. (2006). Creating, naming, and justifying fractions. *Teaching Children Mathematics, 12*(8), 394–400.

Siegler, R. S. (2009). There's Nothing As Useful As a Good Theory. Plenary Address to the Japanese Psychological Association; August 27; Kyoto, Japan.

Siegler, R. S., & Lortie-Forgues, H. (2015). Conceptual knowledge of fraction arithmetic. *Journal of Educational Psychology*, *107*(3), 909.

Siegler, R. S., & Pyke, A. A. (2013). Developmental and individual differences in understanding of fractions. *Developmental Psychology, 49,* 1994–2004.

Siegler, R. S., Fazio, L. K., Bailey, D. H., & Zhou, X. (2013). Fractions: the new frontier for theories of numerical development. *Trends in cognitive sciences*, *17*(1), 13-19.

Siegler, R. S., Thompson, C. A., & Schneider, M. (2011). An integrated theory of whole number and fractions development. *Cognitive psychology*, *62*(4), 273-296.

Siegler, R., Carpenter, T., Fennell, F., Geary, D., Lewis, J., Okamoto, Y., Laurie, T. & Wray, J. (2010). Developing Effective Fractions Instruction for Kindergarten through 8th Grade. IES Practice Guide. NCEE 2010-4039. *What Works Clearinghouse*.

Smith, J. (1995). *Competent reasoning with rational numbers. Cognition and Instruction,* 13 (1), 3-50.

Stafylidou, S., & Vosniadou, S. (2004). The development of students' understanding of the numerical value of fractions. *Learning and instruction*, *14*(5), 503-518.

Stough, L. M., & Palmer, D. J. (2003). Special Thinking in Special Settings A Qualitative Study of Expert Special Educators. *The Journal of Special Education*, *36*(4), 206-222.

Stufflebeam R. S. (1999). Representations and computation, pp 636-648. Στο *A Companion to Cognitive Science*, (Edit. By Bechtel & Graham G.), Blackwell, London.

Taber, S. B. (2009). Capitalizing on the unexpected. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *15*(3), 149-155.

Thompson, P. W., & Saldanha, L. A. (2003). Fractions and multiplicative reasoning. *Research companion to the principles and standards for school mathematics*, 95-113.

Tucker, A. Fractions and Units in Everyday Life. Στο Madison, B. L., & Steen, L. A. (Eds.). (2008). Calculation Vs. Context: Quantitative Literacy and Its Implications for Teacher Education: June 22-24, 2007, Wingspread Conference Center, Racine, Wisconsin. Mathematical Association of America.

Tunç-Pekkan, Z. (2015). An analysis of elementary school children's fractional knowledge depicted with circle, rectangle, and number line representations. *Educational Studies in Mathematics*, *89*(3), 419-441.

Vamakoussi, X., & Vosniadou, S. (2010). How many decimals are there between two fractions? Aspects of secondary school students' understanding of rational numbers and their notation. *Cognition and Instruction*, 28, 181–209.

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2004). Understanding the structure of the set of rational numbers: A conceptual change approach. *Learning and Instruction*, *14*(5), 453-467.

Vergnaud, G. (1998). A comprehensive theory of representation for mathematics education. *Journal of Mathematical Behavior*.

Wagner, M. M., & Blackorby, J. (1996). Transition from high school to work or college: How special education students fare. *The Future of Children*, 6(1), 103–120.

Way, J. (2011). Developing Fraction Sense Using Digital Learning Objects. Στο Fractions: Teaching for Understanding. The Australian Association of Mathematics Teachers (AAMT) Inc.

Willis, S., Devlin, W., Jacob, L., Powell, B., Tomazos, D. & Treacy, K. (2013). *First Steps in Mathematics: Number, Number Sense: Whole and Decimal Numbers, and Fractions*. Pearson.

Witzel, B. S., Riccomini, P. J., & Schneider, E. (2008). Implementing CRA with secondary students with learning disabilities in mathematics. *Intervention in School and Clinic*, 43(5), 270-276.

Woodward, J., & Brown, C. (2006). Meeting the curricular needs of academically low-achieving students in middle grade mathematics. *The Journal of Special Education*, *40*(3), 151-159.

Yang. D., C., Reys, R., & Reys, B. (2007). *Number sense strategies used by pre-service teachers in Taiwan. International Journal of Science and Mathematics Education,* 7, 383-403.

Yanik, B., Helding, B., & Flores, A. (2008). Teaching the concept of unit in measurement interpretation of rational numbers. *Elementary Education Online*, 7(3), 693–705.

2.8.2. Ελληνόγλωσση

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2008). Μεθοδολογία εκπαιδευτικής έρευνας.

Heward, W. L. (2011). *Παιδιά με ειδικές ανάγκες. Μία εισαγωγή στην ειδική εκπαίδευση*. Αθήνα: Τόπος.

Pluvinage F. (1988). Η μάθηση των αριθμών στην εποχή των ηλεκτρονικών υπολογιστών. *Διάσταση, 2, σ.48-58.* Θεσσαλονίκη: ΕΜΕ.

Slavin, R. E. (2007). *Εκπαιδευτική ψυχολογία. Θεωρία και πράξη*. Αθήνα: Μεταίχμιο.

Van de Walle, A. J. (2005). *Μαθηματικά για το δημοτικό και το γυμνάσιο: Μια εξελικτική διδασκαλία.* (Τ. Α. Τριανταφυλλίδης Επιμ., Α. Αλεξανδροπούλου, Β. Κομπορόζος Μεταφρ.). Αθήνα: τυποθήτω – ΓΙΩΡΓΟΣ ΔΑΡΔΑΝΟΣ.

Αγαλιώτης, Ι. (2000). *Μαθησιακές δυσκολίες στα Μαθηματικά. Αιτιολογία, Αξιολόγηση, Αντιμετώπιση*. Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα.

Αγαλιώτης, Ι. (2011). *Διδασκαλία Μαθηματικών στην Ειδική Αγωγή και Εκπαίδευση. Φύση και εκπαιδευτική διαχείριση των μαθηματικών δυσκολιών*. Αθήνα: Εκδόσεις Γρηγόρη.

Αγαλιώτης, Ι. (2011). *Υποστήριξη μαθητών με ειδικές εκπαιδευτικές ανάγκες ή προβλήματα συμπεριφοράς*. Δημοσιευμένη Μελέτη.

Αλτιπαρμάκη, Α. (2013). Γνώσεις και δεξιότητες μαθητών με ήπιες εκπαιδευτικές ανάγκες στο μάθημα της φυσικής: Επιπτώσεις για την εκπαιδευτική συμπερίληψη. Διπλωματική εργασία: Πανεπιστήμιο Μακεδονίας.

Γαγάτσης, Α. & Σπύρου Π. (2000). Πολλαπλές αναπαραστάσεις, ανθρώπινη νοημοσύνη και μάθηση. Αθήνα: Έκδοση συγγραφέων.

Γαγάτσης, Α., Ιωάννου, Κ., Σιημητρά-Κωνσταντίνου, Α., Χριστοδουλίδου, Ό. (2006). *Γιατί οι Μαθητές Δυσκολεύονται στα Κλάσματα;* 9ο Συνέδριο Παιδαγωγικής Εταιρείας Κύπρου. 2-3 Ιουνίου 2006, Πανεπιστήμιο Κύπρου, Λευκωσία.

Γαγάτσης, Α., Μιχαηλίδου Ε., και Σιακαλλή Μ. (2001). Θεωρίες Αναπαράστασης και Μάθηση των Μαθηματικών. Πανεπιστήμιο Κύπρου, Λευκωσία.

Δαφέρμος, Β. (1996). Για ένα νέο αναλυτικό πρόγραμμα των Μαθηματικών στην Α' Γυμνασίου: Η περίπτωση των ρητών αριθμών. Ευκελίδης Γ, 13(46), 47-73.

Δαφέρμος, Β. (2002). Η έννοια του ρητού αριθμού στη σκέψη των μαθητών της Α' γυμνασίου: Η περίπτωση της ευρύτερης πόλης του Ρεθύμνου. Ευκλείδης Γ, (58), 22-48.

Δεληγιάννη, Ε., Γαγάτσης, Α., Αμπράζης, Σ., Παναούρα, Α., Ηλία, Ι., Καρανίκκης, Φ., & Χρυσοστόμου, Μ. (2008). *Ο ρόλος των πολλαπλών αναπαραστάσεων στην κατανόηση της πρόσθεσης κλασμάτων: Σύγκριση της επίδοσης Κυπρίων και Ελλαδιτών μαθητών*. 10ο Παγκύπριο Συνέδριο Παιδαγωγικής Εταιρείας Κύπρου. 6-7 Ιουνίου, Πανεπιστήμιο Κύπρου, Λευκωσία.

Δημητρίου, Α. (1993). *Γνωστική Ανάπτυξη: Μοντέλα – Μέθοδοι –Εφαρμογές.* Θεσσαλονίκη: Art of Text.

Δημοσθένους, Μ. (2012). *Διερεύνηση του ρόλου των εξωτερικών αναπαραστάσεων στην κατανόηση των ρητών αριθμών στο δημοτικό σχολείο: Η περίπτωση της αριθμητικής γραμμής*. Διπλωματική εργασία: Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών.

Θεοδούλου, Ρ & Γαγάτσης, Α. (2003). Μια εικόνα αξίζει χίλιες λέξεις... ποιο είδος εικόνας όμως βοηθά στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος; Ανακοίνωση στα πλαίσια του 2ο Συνεδρίου για τα Μαθηματικά στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση "ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΤΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ".

Κολέζα, Ε. (2000). *Γνωσιολογική και Διδακτική προσέγγιση των Στοιχειωδών Μαθηματικών Εννοιών*. Αθήνα: Leader Books.

Κυριώτη, Ε. (2014). *Ομοιότητες και διαφορές μαθητών τυπικής ανάπτυξης και μαθητών με ειδικές μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά ως προς τη διαχείριση διαστάσεων του ρητού αριθμού*. Διπλωματική εργασία: Πανεπιστήμιο Μακεδονίας.

Κωνσταντινίδου, Φ. (2015). *Διδασκαλία Κλασμάτων στο Δημοτικό: Μελέτη Περίπτωσης στις τάξεις Ε' & ΣΤ'*. Διπλωματική Εργασία: Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών.

Μόττη-Στεφανίδη, Φ., Παπαθανασίου, Α. Χ. & Λαρδούτσου, Σ. (2011). Διαταρακτική και επιθετική συμπεριφορά. Στο *Προσαρμογή στο σχολείο. Πρόληψη και αντιμετώπιση δυσκολιών*. Αθήνα: Πεδίο.

Μπεμπένη, Μ. (2011). *Εννοιολογικές και διαδικαστικές στρατηγικές σε έργα για τους ρητούς και η σχέση τους με τις προσεγγίσεις των μαθητών στη μελέτη των μαθηματικών*. Διπλωματική εργασία: Πανεπιστήμιο Αθηνών.

Ορφανός, Σ. (2003). *Η σημασία των ετερογενών συλλογισμών στη μάθηση και την διδασκαλία σχέσεων και πράξεων με κλάσματα*. Διδακτορική Διατριβή: Σχολή Ανθρωπιστικών Επιστημών Πανεπιστημίου Αιγαίου.

Παντσίδης, Χ. (2006). *Ο ρόλος των αναπαραστάσεων στην κατανόηση των κλασμάτων*. Διπλωματική εργασία: Πανεπιστήμιο Αθηνών.

Παπαϊωάννου, Α. (2014). *Η αναπαραστασιακή ικανότητα των υποψηφίων δασκάλων-αναπαριστώντας προβλήματα κλασμάτων*. Διδακτορική Διατριβή: Πανεπιστήμιο Πατρών.

Πόρποδας, Κ. Δ. (2003). Η Μάθηση και οι Δυσκολίες της Γνωστική Προσέγγιση. *Πάτρα: Εκδόσεις του συγγραφέα*.

Σάλτας, Β. (2008). *Σύγχρονη διδασκαλία των μαθηματικών*. Αθήνα: Επίκεντρο.

Σιδηρόπουλος, Δ. Α. (2008). *Η μαθηματική εγγραμματοσύνη των αποφοίτων του δημοτικού σχολείου και οι ενδοσχολικοί και εξωσχολικοί παράγοντες που την επηρεάζουν*. Αθήνα: Αφοί Κυριακίδη.

Σταματόπουλος, Κ. (2011). *Η μαθηματική και διδακτική διάσταση της γνώσης των μελλοντικών εκπαιδευτικών της πρωτοβάθμιας σχετικά με την έννοια του κλάσματος*. Διπλωματική εργασία: Πανεπιστήμιο Αθηνών.

Σταφυλίδου, Σ. (2001). *Μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες μάθησης: η ανάπτυξη της έννοιας του κλάσματος*. Διδακτορική Διατριβή: Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών.

Τζεκάκη, Μ., Σταγιόπουλος, Π., & Μπαραλός, Γ. (2008). *Σχέδια διδασκαλίας και υποστηρικτικό υλικό για μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες. Προσαρμογές αναλυτικών προγραμμάτων για τα μαθηματικά στο γυμνάσιο*, Τεύχος Α'. Αθήνα: ΥΠΕΠΘ, ΠΙ.

Τουμάσης, Μ. (2004). *Σύγχρονη διδακτική των Μαθηματικών*. Αθήνα: Gutenberg.

Φεσάκης, Γ. (2014). Εικονικό και συμβατικό απτικό υλικό στη μάθηση και τη διδασκαλία των μαθηματικών: Θεωρητική ανάλυση, Προσκεκλημένη κεντρική ομιλία στο Χρ. Σκουμπουρδή & Μ. Σκουμιός (Επιμ.), *πρακτικά του 1ου Πανελλήνιου Συνεδρίου με Διεθνή Συμμετοχή για το Εκπαιδευτικό Υλικό στα Μαθηματικά και τις Φυσικές Επιστήμες*, Ρόδος 17 – 18 Οκτωβρίου 2014, Πανεπιστήμιο Αιγαίου, σελ. 72-105.

Ψυχογυιός, Κ. Ι. & Ψυχογυιού, Ι. Ε. (2008). Διδακτική των Μαθηματικών σε Δυσλεξικούς μαθητές. Αθήνα: Ελλήν.

2.9. Παράρτημα

2.9.1. Εργαλείο πρώτης φάσης

1. Δείξε με όποιον τρόπο θες (λόγια, σχήμα κ.α.):

1) το $\frac{1}{3}$	2) τα $\frac{3}{4}$	3) τα $\frac{5}{3}$

2. Αν κάποιος έφαγε το $\frac{1}{4}$ μιας πίτσας:
   1) Πόσα κομμάτια έφαγε; …….
   2) Πόσα κομμάτια είχε όλη η πίτσα; ……

3. Ο Γιάννης έφαγε το $\frac{1}{3}$ μιας τούρτας. Ο Θανάσης έφαγε το $\frac{1}{3}$ μιας άλλης τούρτας διαφορετικού μεγέθους. Ο Γιάννης είπε ότι έφαγε περισσότερη τούρτα, αλλά ο Θανάσης είπε ότι έφαγαν και οι δύο το ίδιο. Χρησιμοποίησε λέξεις και σχέδια για να δείξεις ποιος έχει δίκιο.

4. Η μητέρα σου σου έδωσε 4 κομμάτια κέικ ίδιου μεγέθους για να τα μοιράσεις εξίσου σε 3 άτομα. Πόσα κομμάτια κέικ θα πάρει ο καθένας;

5. Κύκλωσε το μεγαλύτερο κλάσμα από κάθε ζευγάρι κλασμάτων.

$\frac{6}{10}$ $\frac{6}{12}$	$\frac{3}{8}$ $\frac{3}{3}$
$\frac{1}{4}$ $\frac{2}{4}$	$\frac{5}{7}$ $\frac{4}{7}$

6. Από τα 360 παιδιά μιας κατασκήνωσης τα $\frac{6}{10}$ είναι κορίτσια. Ποιος είναι ο αριθμός των κοριτσιών;

7. Κύκλωσε το μεγαλύτερο κλάσμα από κάθε ζευγάρι κλασμάτων.

$\frac{2}{3}$ $\frac{1}{6}$	$\frac{8}{15}$ $\frac{3}{5}$
$\frac{7}{12}$ $\frac{16}{24}$	$\frac{3}{5}$ $\frac{5}{7}$

8. Διάταξε τα κλάσματα $\frac{3}{2}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{3}{10}$ και $\frac{1}{2}$ από το μικρότερο στο μεγαλύτερο.

9. Συμπλήρωσε τα κενά ώστε να προκύψουν:

Α) **Ισοδύναμα κλάσματα**

1) $\frac{4}{5} = \frac{\quad}{\quad}$ 2) $\frac{6}{12} = \frac{\quad}{\quad}$ 3) $\frac{2}{6} = \frac{\quad}{\quad}$

Β) **Απλοποιημένα/Ανάγωγα κλάσματα**

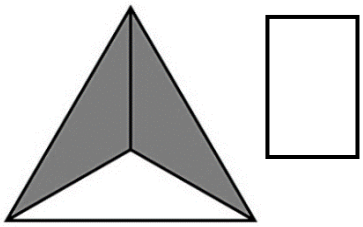
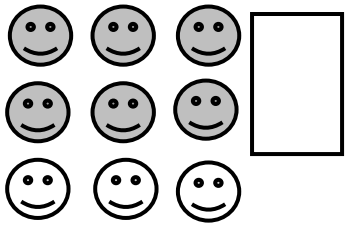
1) $\frac{8}{12} = \frac{\quad}{\quad}$ 2) $\frac{4}{16} = \frac{\quad}{\quad}$ 3) $\frac{5}{15} = \frac{\quad}{\quad}$

10. Κάνε τις παρακάτω πράξεις.

	Προσθέσεις		**Πολλαπλασιασμοί**
Α.	$\frac{5}{8} + \frac{3}{8} =$	Α.	$\frac{4}{6} * \frac{1}{6} =$
Β.	$\frac{4}{6} + \frac{2}{3} =$	Β.	$\frac{7}{8} * \frac{4}{7} =$
	Αφαιρέσεις		**Διαιρέσεις**
Α.	$\frac{4}{6} - \frac{1}{6} =$	Α.	$\frac{9}{5} : \frac{3}{5} =$
Β.	$\frac{7}{16} - \frac{3}{8} =$	Β.	$\frac{2}{5} : \frac{4}{9} =$

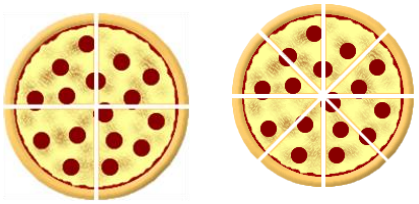
2.9.2. Εργαλείο δεύτερης φάσης

1. Γράψε στο τετράγωνο ποιο κλάσμα αναπαριστούν τα σκιασμένα μέρη στα παρακάτω σχήματα.

1)	2)	3)
		

2. Αν κάποιος έφαγε τα $\frac{2}{4}$ μιας πίτσας:

1) Πόσα κομμάτια έφαγε; ……..
2) Πόσα κομμάτια είχε όλη η πίτσα; ……

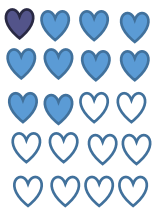


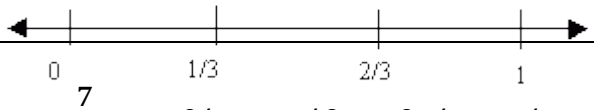
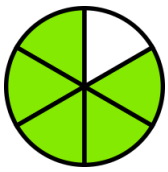
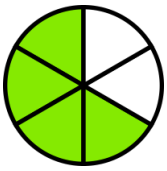
3. Ο Σωτήρης έφαγε το $\frac{1}{2}$ μιας τούρτας. Ο Γρηγόρης έφαγε το $\frac{1}{2}$ μιας άλλης τούρτας διαφορετικού μεγέθους. Ο Σωτήρης είπε ότι έφαγε περισσότερη τούρτα, αλλά ο Γρηγόρης είπε ότι έφαγαν και οι δύο το ίδιο. Δες τις εικόνες και πες ποιος έχει δίκιο.

……
……
……
……
……

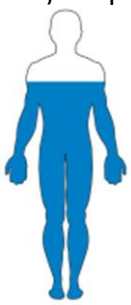
4. Η μητέρα σου σού έδωσε 5 μπισκότα ίδιου μεγέθους για να τα μοιράσεις εξίσου σε 2 άτομα. Δείξε παρακάτω πώς θα τα μοιράσεις.

5. Κύκλωσε το μεγαλύτερο κλάσμα από κάθε ζευγάρι κλασμάτων. Αν είναι ίσα κύκλωσε τα και τα δύο.

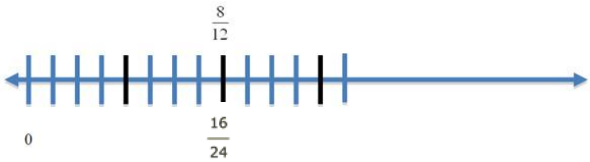
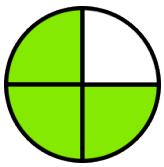
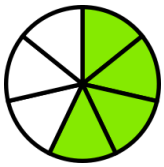
	$\frac{5}{10}$	$\frac{5}{12}$			$\frac{3}{9}$	$\frac{3}{3}$	

$\frac{1}{3}$ $\frac{2}{3}$ 	 $\frac{5}{6}$ $\frac{4}{6}$ 

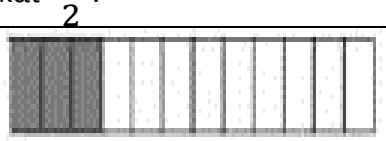
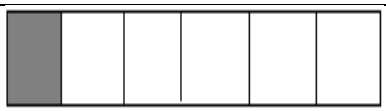
6. Τα $\frac{7}{10}$ του βάρους κάθε ανθρώπου είναι νερό. Πόσα κιλά νερό έχει το σώμα ενός ανθρώπου 90 κιλών;



7. Κύκλωσε το μεγαλύτερο κλάσμα από κάθε ζευγάρι κλασμάτων. Αν είναι ίσα κύκλωσε τα και τα δύο.

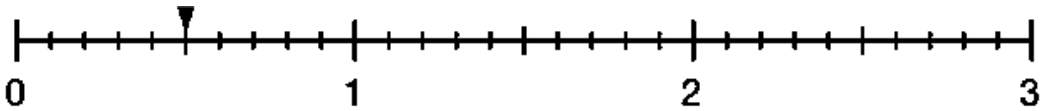
$\frac{2}{3}$ $\frac{1}{5}$	$\frac{8}{16}$ $\frac{4}{5}$
$\frac{8}{12}$ $\frac{16}{24}$ 	 $\frac{3}{4}$ $\frac{4}{7}$ 

8. Σου δίνονται σκιασμένα τα κλάσματα $\frac{3}{3}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{3}{12}$ και $\frac{1}{2}$.

$\frac{3}{3}$		$\frac{3}{12}$	
$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{2}$	

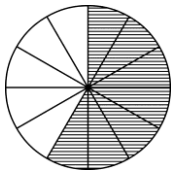
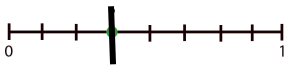
1) Διάταξε τα παραπάνω κλάσματα από το μικρότερο στο μεγαλύτερο.

2) Τώρα τοποθέτησε τα ίδια κλάσματα στην παρακάτω αριθμογραμμή.

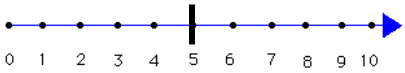
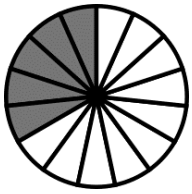


9. Συμπλήρωσε τα κενά ώστε να προκύψουν:

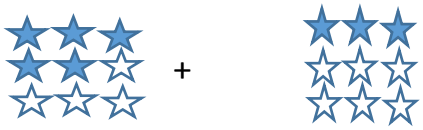
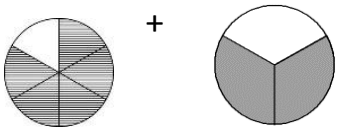
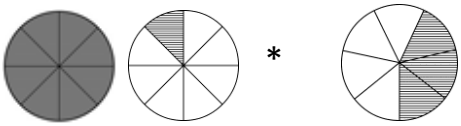
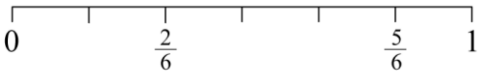
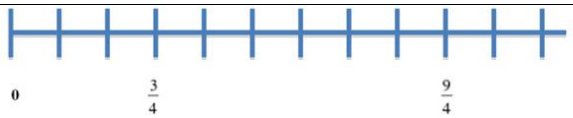
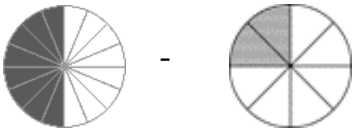
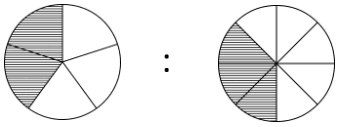
Α) **Ισοδύναμα κλάσματα**

1) $\frac{7}{12} = \frac{\quad}{\quad}$ 	2) $\frac{3}{8} = \frac{\quad}{\quad}$ 	3) $\frac{1}{4} = \frac{\quad}{\quad}$

Β) **Απλοποιημένα/Ανάγωγα κλάσματα**

1) $\frac{4}{12} = \frac{\quad}{\quad}$	2) $\frac{5}{10} = \frac{\quad}{\quad}$ 	3) $\frac{5}{15} = \frac{\quad}{\quad}$ 

10. Κάνε τις παρακάτω πράξεις.

	Προσθέσεις		**Πολλαπλασιασμοί**
Α.	 $\frac{5}{9} + \frac{3}{9} =$	Α.	$\frac{5}{6} * \frac{2}{6} =$
Β.		Β.	
	$\frac{5}{6} + \frac{2}{3} =$		$\frac{9}{8} * \frac{3}{7} =$
	Αφαιρέσεις		**Διαιρέσεις**
Α.	 $\frac{5}{6} - \frac{2}{6} =$	Α.	 $\frac{9}{4} : \frac{3}{4} =$
Β.		Β.	
	$\frac{8}{16} - \frac{2}{8} =$		$\frac{2}{5} : \frac{3}{8} =$

2.9.3. Εργαλείο τρίτης φάσης

1. Δες αυτές τις δύο **σοκολάτες**.
α) Είναι ολόκληρες ή τους λείπουν κομμάτια;
β) Αν τους λείπουν, από ποια σοκολάτα λείπουν λιγότερα;
γ) Στην αρχή υπήρχαν 10 κομμάτια. Τώρα πόσα υπάρχουν; Ξέρεις πώς γράφεται/λέγεται αυτό με κλάσμα;
δ) Ποιο είναι πιο μεγάλο; Το 6/10 ή το 4/10;
ε) Αν τα ενώσω ποιο κλάσμα θα έχω; Με τι είναι ίσο αυτό;
2. Έχω αυτά τα **μπισκότα**.
α) Πόσα είναι; Μπορείς να τα μοιράσεις εξίσου σε δύο παιδιά;
β) Τι θα κάνεις για να μοιράσεις αυτό που περισσεύει; Αν το κόψεις για να το μοιράσεις στα δύο παιδιά, πόσα κομμάτια θα έχεις;
γ) Πόσα ολόκληρα και πόσα μισά πήρε το καθένα; Με κλάσμα;
3. Έχω δύο **κούπες** που είναι γεμάτες με τσάι μέχρι τη μέση.
1) Έχουν και οι δύο την ίδια ποσότητα τσαγιού μέσα; Γιατί;
2) Ποια έχει περισσότερο;
4. Αυτή η **κανάτα** είναι γεμάτη νερό.
α) Πόσα ποτήρια μπορείς να γεμίσεις μέχρι πάνω, ώστε να μη σου περισσέψει καθόλου νερό και να έχουν όλα την ίδια ποσότητα;
β) Τι μέρος των ποτηριών κατάφερες να γεμίσεις; Μπορείς να το πεις με κλάσμα;
γ) Αν ρίξουμε το νερό από όλα τα ποτήρια πάλι στην κανάτα, θα γεμίσει;
5. Έχεις αυτό το **κέικ**.
α) Κόψε το σε 4 ίσα κομμάτια. Ποιο κλάσμα αναπαριστά ένα κομμάτι κέικ;
β) Τώρα κόψε το σε 8 ίσα κομμάτια. Τώρα ποιο κλάσμα αναπαριστά ένα κομμάτι κέικ;
γ) Τι σχέση έχει το καινούριο κομμάτι με το παλιό; Το ¼ με το 1/8;
δ) Έχεις συνολικά περισσότερο κέικ; Γιατί;
6. Έχεις έξι **μαρκαδόρους**.
α) Αν μου δώσεις τους δύο, ποιο τμήμα των μαρκαδόρων μου έχεις δώσει σε σχέση με τον αρχικό αριθμό;
β) Αν σου δώσω έναν πίσω, ποιο κλάσμα αναπαριστά τους μαρκαδόρους που θα έχεις;
γ) Μπορείς να χωρίσεις τους μαρκαδόρους σε τρεις ίσες ομάδες; Πόσους μαρκαδόρους έχει κάθε ομάδα; Μπορείς να μου το πεις με κλάσμα;