ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΔΙΕΘΝΩΝ ΚΑΙ ΕΥΡΩΠΑΪΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΠΜΣ: ΕΥΡΩΠΑΪΚΕΣ ΠΟΛΙΤΙΚΕΣ ΝΕΟΛΑΙΑΣ, ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Η εξέλιξη της διδασκαλίας των μαθηματικών στην Ευρώπη,

(περιπτώσεις της Γαλλίας, Γερμανίας και Ιταλίας)

και στην Ελλάδα

από ιδρύσεως της Ευρωπαϊκής Ένωσης (ΕΟΚ)

ως σήμερα.

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟΣ ΦΟΙΤΗΤΗΣ: ΛΕΩΝΙΔΗΣ ΘΕΟΔΩΡΟΣ ΑΜ:1513

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΒΑΣΙΛΕΙΑΔΗΣ ΝΙΚΟΛΑΟΣ

ΙΟΥΝΙΟΣ 2016

Στη σύζυγό μου Μαρία

Πίνακας Περιεχομένων

Πίνακας Περιεχομένων 3
Εισαγωγή 5
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο 6
ΕΙΣΑΓΩΓΗ 6
1.1. Η διδακτική άλλοτε και τώρα 6
1.2 Η ιστορία των Μαθηματικών 7
1.2.1 Ιστορική επισκόπηση της εξέλιξης των μαθηματικών στην Ευρώπη κατά τον 19ο και 20ο αιώνα και η συμβολή της στη διδασκαλία τους 11
1.3 Η διδακτική των Μαθηματικών 15
1.3.1 Οι νέες τάσεις στη διδακτική των Μαθηματικών 18
1.3.2 Έννοιες και μέθοδοι της Διδακτικής των Μαθηματικών 20
1.3.3 Μέσηεκπαίδευση 21
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{ο} 24
Η Ευρωπαϊκή στρατηγική 24
στη διδασκαλία των Μαθηματικών 24
2.0. Η Ευρωπαϊκή εκπαιδευτική πολιτική 24
2.1 Ευρωπαϊκές οδηγίες για τη διδασκαλία των μαθηματικών 25
2.2 Ευρωπαϊκάόργανα 27
2.3. Εργαλεία αξιολόγησης Μαθηματικών επιδόσεων 28
2.3.1.Εργαλεία ελέγχου της μαθηματικής εκπαίδευσης : TIMSS και PISA 30
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^{Ο} 35
Η διδασκαλία των Μαθηματικών στην Ευρώπη (περιπτώσεις μελέτης: 35
Γαλλία, Γερμανία &Ιταλία) 35
3.0. Εισαγωγή 35
Πιθανότητες, Μεταθέσεις, Συνδυασμοί. 36
3.1 Η διδασκαλία των Μαθηματικών στη Γαλλία 38
Χρονολόγιο της εξέλιξης της διδασκαλίας των Μαθηματικών Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στη Γαλλία. 43
3.2 Η διδασκαλία των Μαθηματικών στη Γερμανία 45
Χρονολόγιο της εξέλιξης της διδασκαλίας των Μαθηματικών Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στη Γερμανία. 49
3.3 Η διδασκαλία των Μαθηματικών στη Ιταλία 51
Χρονολόγιο της εξέλιξης της διδασκαλίας των Μαθηματικών Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στην Ιταλία. 52

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4Ο 55
Η διδασκαλία των Μαθηματικών στην Ελλάδα 55
4.1. Το σημερινό πλαίσιο διδασκαλίας των μαθηματικών στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση (2000-2016) 55
Χρονολόγιο της εξέλιξης της διδασκαλίας των Μαθηματικών Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στην Ελλάδα. 58
4.2 Συγκριτική Μελέτη 60
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5Ο 64
ΝέεςΤεχνολογίες 64
5.0. Νέες τεχνολογίες και Μαθηματική παιδεία 64
ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ 70
Βιβλιογραφία 73
ΔΙΑΔΥΚΤΙΑΚΟΙ ΤΟΠΟΙ 78

Εισαγωγή

Στη παρούσα μελέτη θα διερευνήσουμε αρχικά το ρόλο της διδακτικής και δη της εξέλιξης διδακτικά των μαθηματικών, αφού κάνουμε μια σύντομη χρονική καταγραφή των σημαντικότερων Μαθηματικών και εργαλείων ανά τους αιώνες, μέχρι να καταλήξουμε στα νέα μαθηματικά περί τα μισά του προηγούμενου αιώνα και της συνεισφοράς τους.

Στην συνέχεια θα μεταφερθούμε στην πρόσφατη εκπαιδευτική ιστορία και δη αυτής της Ε.Ε. καθώς και στις πολιτικές που αναπτύσσονται γύρω από αυτή. Θα εξειδικεύσουμε στα όσα αφορούν την δευτεροβάθμια εκπαίδευση αλλά και τα εργαλεία ελέγχου και αξιολόγησης αυτής, PISA&TIMSS.

Έπειτα, θα αναλύσουμε τα εκπαιδευτικά συστήματα δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στη Γαλλία, Ιταλία και Γερμανία και θα επιχειρήσουμε μια χρονολογική καταγραφή της εξέλιξης της μαθηματικής εκπαίδευσης σε αυτά καθώς και την περιγραφή της παρούσας κατάστασης.

Στη συνέχεια, θα μελετήσουμε το περιβάλλον της Ελλάδας στο τομέα της μαθηματικής εκπαίδευσης στα γυμνάσια και λύκεια. Κατόπιν θα προσπαθήσουμε να εξάγουμε συνολικά συγκριτικά συμπεράσματα για τις τέσσερις χώρες μελέτης μας.

Τέλος, θα καταδείξουμε την σπουδαιότητα και τη συνεισφορά των νέων τεχνολογιών στην εκπαίδευση και δη στη μαθηματική.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο
ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1. Η διδακτική άλλοτε και τώρα

Η Διδακτική δηλώνει ακριβώς αυτό που φανερώνει και η ίδια η ρίζα της λέξης, δηλαδή "Διδάσκω". Η ικανότητα να μεταδοθεί η γνώση, παρόλο που φαντάζει μια απλή καθημερινή αναγκαιότητα ή απλά φυσική απορροή της κοινωνικής και εξελικτικής διαδικασίας είναι μια διαδικασία ουσιώδης για την αναπαραγωγή και ανάπτυξη της γνώσης στην κοινωνία των ανθρώπων.

Ο σκοπός της διδακτικής θα μπορούσε να συμπυκνωθεί στην κατανόηση των αναγκών, ενδιαφερόντων και προδιαθέσεων του μαθητή, καθώς επίσης και στην συνειδητοποίηση εκ μέρους του μαθητή του κοινωνικού περιβάλλοντός του, ώστε να αποκτήσει κοινωνική συνείδηση. Οι επιστημονικές μελέτες που έγιναν ανά περιόδους και είχαν σκοπό να προσδιοριστούν οι δομές και οι διαδικασίες, που επεξηγούν το φαινόμενο της μάθησης, έχουν καταλήξει σε πολυποίκιλα συμπεράσματα, καθώς και σε πλήθος προτάσεων για τα προσφορότερα μοντέλα μάθησης.

Θα είχε ενδιαφέρον να δούμε μερικά από τα σημεία που εστιάζουν σπουδαίοι παιδαγωγοί ανά τους αιώνες:

Ο Herbart, ένας από τους γνωστότερους παιδαγωγούς που ασχολήθηκε επιμελώς με την διδακτική επιστήμη, θεωρεί την παιδαγωγική ευθέως εξαρτώμενη από τη Φιλοσοφική Ηθική και την Ψυχολογία. Η πρώτη ορίζει τον σκοπό της παιδαγωγικής, ενώ η δεύτερη τον τρόπο αυτής, δηλαδή τα μέσα για την πραγματοποίηση της.

Ο, επίσης, γνωστός παιδαγωγός Decroly θεωρεί ότι τα εκπαιδευτικά συστήματα είναι αποτελεσματικά, όταν η μαθησιακή δραστηριότητα προκαλεί το ενδιαφέρον του μαθητή, εξελίσσεται στη φύση και με φυσικές μεθόδους και έτσι το παιδί/μαθητής μπαίνει στη διαδικασία να επιλύει μόνο του προβληματικές καταστάσεις και έρχεται αντιμέτωπο με θέματα που αρμόζουν μόνο στην ηλικία του. Η τελευταία παρατήρηση μπορεί να ανοίξει μεγάλη συζήτηση για το τι

ακριβώς μπορεί να οριστεί ως "αρμόζον στην ηλικία του μαθητή"

Ο μεταγενέστερος Dewey, Αμερικανός παιδαγωγός, ξεκινά τη διδακτική θεωρία του επικεντρώνοντας στη βαθιά πίστη του στο δημοκρατικό ιδεώδες και συνδέοντας την έννοια της δημοκρατίας με αυτή της εκπαίδευσης, έτσι ώστε η μια να είναι προϋπόθεση της άλλης. Εισήγαγε τη μέθοδο των βιωμάτων, προτρέποντας δηλαδή το παιδί σκέφτεται πάνω σε συγκεκριμένες προβληματικές καταστάσεις μέσω της δοκιμής και της πλάνης.

Γενικά, οι σύγχρονες αντιλήψεις θεωρούν τη διδασκαλία ως μια διαδικασία μέσω της οποίας δίνεται η δυνατότητα στο μαθητή να παράγει και αυτός τη γνώση, με τις κατάλληλες βέβαια ενέργειες εκ μέρους του παιδαγωγού. Η πορεία της γνώσης χτίζεται μέσα από μια κοινωνική αλληλεπίδραση, η οποία διαμεσολαβεί τη γνώση και συντελεί στην εσωτερίκευσή της από το άτομο (Ματσαγγούρας, 2001).

1.2 Η ιστορία των Μαθηματικών

Τα Μαθηματικά εμφανίζονται για πρώτη φορά στην αρχαία Ελλάδα ως μια έννοια που δηλώνει μια καινούργια επιστήμη. Πριν τους Έλληνες, αρχαίοι λαοί, όπως οι Αιγύπτιοι, οι Σουμέριοι, οι Κινέζοι και άλλοι, χρησιμοποιούσαν στην καθημερινότητάς τους άτυπες μαθηματικές πράξεις, με καθαρά όμως χρηστικό και πρακτικό χαρακτήρα. Τα Μαθηματικά ξεκινούν με την αρίθμηση. Δε θα ήταν παρόλα αυτά επαρκές να ορίσουμε μόνο την αρίθμηση ως Μαθηματικά.

Το πυθαγόρειο θεώρημα ($a^2+b^2 = c^2$) μελετήθηκε ήδη από το 1700 π.Χ.. Την ίδια χρονική περίοδο μελετώνται και αναπτύσσονται συστήματα γραμμικών εξισώσεων και δευτεροβάθμιες εξισώσεις. Από την άλλη, σχηματίζεται η γεωμετρία, αφού μελετώνται προβλήματα σχετικά με όμοια σχήματα, εμβαδά και όγκους.

Στην αρχαία Ελλάδα ο Θαλής, οποίος θεωρείται ο πατέρας των μαθηματικών, εισάγει την έννοια της απόδειξης και αναπτύσσει τα "αφηρημένα Μαθηματικά", τα οποία αφορούν θεωρίες που δεν έχουν υπολογιστική αξία, αλλά βοηθούν στην επίλυση πρακτικών προβλημάτων.

Επίσης, στην αρχαία Ελλάδα εμφανίζονται για πρώτη φορά επαγγελματίες μαθηματικοί που

ιδρύουν Μαθηματικές σχολές. Μάλιστα θεωρούνται ως μια ξεχωριστή κάστα διανοούμενων που προάγουν τη μαθηματική επιστήμη. Ένα τέτοιο παράδειγμα αποτελεί η Πυθαγόρεια σχολή.

Οι μαθηματικοί που έδρασαν στην αρχαία Ελλάδα εισήγαγαν την έρευνα των γενικών θεωρημάτων που έπρεπε να αποδειχθούν με τρόπο ώστε να είναι αντικειμενικά πειστικά. Με άλλα λόγια, αν και οι Αιγύπτιοι πολύ νωρίτερα ήταν ικανοί να υπολογίζουν τον όγκο ενός κυλίνδρου, οι πρώτοι Έλληνες μαθηματικοί βρήκαν και απέδειξαν τον γενικό τύπο για τον υπολογισμό του. Οι πολιτικές συνθήκες και η δημόσια ζωή στην Αθήνα εκείνης της εποχής θεωρούνται οι βασικοί παράγοντες για τη δημιουργία αυτής της διαφοράς.

Για τον Πλάτωνα, πάλι, τα μαθηματικά είχαν ιδιαίτερο ενδιαφέρον, γιατί, αν και πραγματεύονταν αισθητά πράγματα, ταυτόχρονα αναφέρονταν στο γενικό, στο αφηρημένο και στο αμετάβλητο. Έβλεπε τον μαθηματικό κόσμο ενδιάμεσα των αισθητών και των μη αισθητών, υπέρτατων ιδεών. Γι' αυτό απέδιδε στην μαθηματική γνώση ρόλο καθοριστικό για την εκπαίδευση των νέων.

Ο Αριστοτέλης, από την άλλη, δε θεωρούσε τα μαθηματικά αντικείμενα ως ιδέες του πραγματικού κόσμου, αλλά ως "όλον" αφηρημένες ιδέες. Ασχολήθηκε με τη λογική δομή των μαθηματικών τα οποία χαρακτήριζε: "έξις αποδεικτική" (αποδεικτική συνήθεια). Επίσης, θεωρούσε ότι αντικείμενο μελέτης των μαθηματικών είναι το "καθ' όλον", δηλαδή τα συμπεράσματα που είχαν καθολική ισχύ και αποδεικνυόταν ότι ισχύουν πάντοτε και σε όλες τις συνθήκες. Για τον Αριστοτέλη τα τυχαία φαινόμενα δεν αποτελούσαν αντικείμενο μελέτης της μαθηματικής επιστήμης. Αυτό ακριβώς εξηγεί για ποιο λόγο τα πεδία της στατιστικής και η θεωρία πιθανοτήτων δεν ήταν αντικείμενα μελέτης στα αρχαιοελληνικά μαθηματικά.

Στους παραπάνω στοχαστές πρέπει να προσθέσουμε και τον μαθηματικό Πυθαγόρειο Χίο Ιπποκράτη, στον οποίο αποδίδεται η μέθοδος της "απαγωγής σε άτοπο". Επί πλέον, ο Χίος Ιπποκράτης τετραγώνισε τον μηνίσκο, που αποτελεί και τον πρώτο τετραγωνισμό καμπυλόγραμμου σχήματος. Ο "τετραγωνισμός του κύκλου" από τότε θεωρείται ως το μεγάλο άλυτο πρόβλημα που ταλανίζει τους επιστήμονες.

Ο Διόφαντος θεωρείται από πολλούς ο δημιουργός της Άλγεβρας. Στο έργο του

"Αριθμητικά", που δεν έχει λογική ή συμπερασματική δομή, ασχολήθηκε με την επίλυση συγκεκριμένων προβλημάτων, προάγοντας αυτό που ονομάζουμε αναλογική σκέψη στην επίλυση προβλημάτων.

Συμπερασματικά, το διάστημα από 300 π.Χ. έως το 200 μ.Χ. υπήρξε μια γόνιμη περίοδος για τη Μαθηματική επιστήμη, εστιασμένη στον Ελλαδικό χώρο.

Στους επόμενους αιώνες η πρόοδος συνεχίστηκε, αλλά γεωγραφικά μετατοπίστηκε στις ισλαμικές χώρες όπως το Ιράν, τη Συρία και την Ινδία. Τον 11ο αιώνα περίπου ο Adelard του Bath, αργότερα ο γνωστός Fibonacci, έφερε τα "ισλαμικά" μαθηματικά, καθώς και εκείνα που αναπτύχθηκαν στην Αρχαία Ελλάδα, ξανά στην Ευρωπαϊκή ήπειρο.

Μια ιδιαιτέρως σημαντική εξέλιξη στη μαθηματική ιστορία της Ευρώπης εντοπίζεται στις αρχές του 16ου αιώνα με τους Pacioli, CardanTartaglia και Ferrari οι οποίοι ανέπτυξαν και τις αλγεβρικές λύσεις κυβικών και τεταρτοβάθμιων εξισώσεων. Αξίζει να σημειωθεί ότι ο Copernicus και ο Galileo χρησιμοποίησαν αυτές τις εφαρμογές των μαθηματικών για τη μελέτη του σύμπαντος.

Η πρόοδος στην Άλγεβρα άσκησε σημαντική επίδραση, ψυχολογικής κυρίως φύσεως, στη μαθηματική έρευνα και ειδικότερα στην ανάπτυξη της αλγεβρικής έρευνας στην Ιταλία το Βέλγιο και τη Γαλλία.

Κατά τον $17^{ο}$ αιώνα οι Napier και Briggs και άλλοι με την ανακάλυψη των λογαρίθμων επέκτειναν σε μεγάλο βαθμό τη δύναμη των μαθηματικών ως επιστήμης υπολογιστικής. Ο Cavalieri σημείωσε πρόοδο προς την κατεύθυνση του υπολογισμού της μεθόδου των απειροελάχιστων σημείων και ο Descartes προσέθεσε τη δύναμη των αλγεβρικών μεθόδων στη Γεωμετρία.

Η πρόοδος προς την κατεύθυνση του διαφορικού λογισμού συνεχίστηκε με τον Fermat, ο οποίος, μαζί με τον Pascal, ξεκίνησε τη μαθηματική μελέτη των πιθανοτήτων. Βέβαια, ο διαφορικός λογισμός κατά τον 17ο αιώνα ήταν το σημαντικότερο κομμάτι ενασχόλησης των περισσοτέρων εκ των επιστημών της εποχής.

Ο Newton, πάλι, με βάση τις εργασίες πολλών παλιότερων μαθηματικών, όπως ο καθηγητής του Barrow, ανέπτυξε τον διαφορικό λογισμό ως εργαλείο για να προωθήσει τη μελέτη της φύσης. Στο έργο του περιέχεται μια πληθώρα νέων ανακαλύψεων που δείχνει την αλληλεπίδραση μεταξύ μαθηματικών, φυσικής και αστρονομίας.

Με τη θεωρία της βαρύτητας του Νεύτωνα και τη θεωρία του φωτός, οδηγούμαστε πλέον στον 18ο αιώνα.

Ο πιο σημαντικός μαθηματικός του 18ου αιώνα ήταν ο Euler ο οποίος, εκτός από την συνεισφορά του σε ένα ευρύ φάσμα των μαθηματικών , "ανακάλυψε" δύο νέα πεδία, δηλαδή τον απειροστικό λογισμό και τη διαφορική γεωμετρία. Η προσφορά του Euler ήταν επίσης σημαντική για την προώθηση της έρευνας στην θεωρία των αριθμών, θεωρία που είχε αρχίσει να μελετάται από τον Fermat.

Προς το τέλος του 18ου αιώνα, ο Lagrange ξεκίνησε μία αυστηρή θεωρία των εξισώσεων και της μηχανικής. Ο αιώνας κλείνει, με το σπουδαίο έργο του Laplace για τη μηχανική των ουράνιων σωμάτων, καθώς και με την καταγραφή σημαντικής προόδου στη συνθετική γεωμετρία από τους Monge και Carnot.

Τον 19^{ο} αιώνα παρατηρήθηκε μια ταχεία πρόοδο. Η εργασία του Fourier για τη θερμότητα ήταν θεμελιώδους σημασίας, ενώ ο Plücker στη αναλυτική γεωμετρία και ο Steiner στη συνθετική γεωμετρία παρήγαγαν εξίσου θεμελιώδες έργο.

Ταυτόχρονα αναπτύχθηκε η μη Ευκλείδεια Γεωμετρία, από τους Lobachevsky και Bolyai. Στην μαθηματική εξέλιξη της μαθηματικής επιστήμης τον 19^{ο} αιώνα συναντάμε τον Gauss, τον θεωρούμενο από πολλούς ως τον μεγαλύτερο μαθηματικό όλων των εποχών. Το έργο του στη διαφορική γεωμετρία έφερε επανάσταση στον τομέα αυτό και συνέβαλε σε σημαντικό βαθμό στη μελέτη της Αστρονομίας και του μαγνητισμού.

Ο 19ος αιώνας ξεπρόβαλε με το έργο του Galois στις εξισώσεις. Με τη διορατικότητα του στον τομέα αυτόν έδειξε το μονοπάτι που τα μαθηματικά θα ακολουθούσαν στη μελέτη των θεμελιωδών λειτουργιών τους. Η εισαγωγή του Galois της έννοιας της ομάδας σήμανε μια νέα κατεύθυνση για

την μαθηματική έρευνα που συνεχίστηκε και τον 20ο αιώνα.(Cuomo, 2007)

Η Αλγεβρική Γεωμετρία αναπτύχθηκε από τον Cayley, του οποίου η εργασία στους πίνακες και τη γραμμική άλγεβρα, συμπληρώθηκε από τους Χάμιλτον και Grassmann. Το τέλος του 19ου αιώνα βρήκε τον Cantor να εφεύρει τη θεωρία των συνόλων, σχεδόν μόνος του, ενώ η ανάλυσή του στην έννοια του αριθμού προστίθεται στο μεγάλο έργο των Dedekind και Weierstrass για τους άρρητους αριθμούς.

Η μαθηματική ανάλυση καθορίστηκε από τις απαιτήσεις της Μαθηματικής Φυσικής και της Αστρονομίας. Το έργο του Lie στις διαφορικές εξισώσεις οδήγησε στη μελέτη των τοπολογικών ομάδων και στη διαφορική τοπολογία. Επίσης, ο Maxwell έμελε να φέρει την επανάσταση στην εφαρμογή της ανάλυσης στη Μαθηματική Φυσική. Τέλος, η Στατιστική Μηχανική αναπτύχθηκε από τους Maxwell, Boltzmann και Gibbs.

Από τότε έως τα 1949 τα Μαθηματικά αριθμούν 3400 διαφορετικούς κλάδους, ενώ στις μέρες μας κυκλοφορούν 200.000 θεωρήματα κάθε χρόνο στα επιστημονικά περιοδικά παγκοσμίως. Ιδανικός μαθηματικός στις μέρες μας δεν είναι αυτός που τα ξέρει όλα, πράγμα αδύνατο, αλλά όποιος έχει την ευφυή ιδέα να καινοτομήσει στα μαθηματικά ανοίγοντας νέους δρόμους στη μαθηματική επιστήμη.

1.2.1 Ιστορική επισκόπηση της εξέλιξης των μαθηματικών στην Ευρώπη κατά τον 19ο και 20ο αιώνα και η συμβολή της στη διδασκαλία τους

Είναι γεγονός ότι η μαθηματική μεθοδολογία και διδασκαλία διαμορφώνεται σε σχέση με την κατανόησή της ως φιλοσοφικής θεωρίας γύρω από τις μεθόδους των γνωστικών διαδικασιών και του μετασχηματισμού της αντικειμενικής πραγματικότητας. Η σχέση ανάμεσα στην παιδαγωγική και στη φιλοσοφία της μαθηματικής επιστήμης είναι αμφίδρομη και, συνεπώς, κάθε φιλοσοφία των μαθηματικών έχει και διδακτικές επιπτώσεις (Αναπολιτάνος, 1985). Ως εκ τούτου, το περιεχόμενο της μαθηματικής εκπαίδευσης βρίσκεται υπό συνεχή διαπραγμάτευση, με αποτέλεσμα οι μετασχηματισμοί της να διαδέχονται ο ένας τον άλλον. Οι προβληματισμοί και οι διαφοροποιήσεις

που ανακύπτουν, κατά την εξέλιξη των μαθηματικών, δεν αφορούν μόνο στις μεθόδους και στο περιεχόμενο των Προγραμμάτων Σπουδών, αλλά έχουν να κάνουν και με σημαντικές διαφορές ως προς την ίδια τη φύση τους (Davis&Hersh, 1981) .

Στις αρχές, λοιπόν, του 19ου αιώνα κύρια επιρροή στη φιλοσοφία των μαθηματικών ασκούσαν οι απόψεις του Kant, σύμφωνα με τις οποίες οι μαθηματικές προτάσεις είναι συνθετικές, aprioriών, δεν αφορούν μόνο στις μεθόδους και στο περιεχόμενο των Προγραμμάτων Σπουδών, αλλά έχουν να κάνουν και με σημαντικές διαφορές ως προς την ίδια τη γνώσιμες, μέσω της καθαρής διαίσθησης – ενόρασης. Δηλαδή, τα μαθηματικά αφενός είναι γνώσιμα, ανεξάρτητα από την αισθητηριακή εμπειρία, δια μέσου μιας διαίσθησης που αποτελεί μέρος της ανθρώπινης νόησης και αφετέρου οι αλήθειες που αντιπροσωπεύουν δε δύναται να καθοριστούν αναλύοντας έννοιες (Kant, 1976: 105). Επίσης, η Γεωμετρία αποτελούσε τον πιο αξιόπιστο και θεμελιώδη κλάδο της γνώσης, αλλά και το βασικότερο επιχείρημα για τη βεβαιότητα της γνώσης.

Η θεωρία των συνόλων, σε αντίθεση με τις υπόλοιπες μαθηματικές θεωρίες που εξετάζουν δομές, σύνολα δηλαδή εφοδιασμένα με συναρτήσεις και σχέσεις, μελετά τα σύνολα. Αν και οποιοσδήποτε τύπος από αντικείμενα μπορεί να ορίσει σύνολο, η θεωρία συνόλων εφαρμόζεται συνήθως σε αντικείμενα σχετικά με τα μαθηματικά. Η σύγχρονη μελέτη της θεωρίας συνόλων ξεκίνησε από τον GeorgCantor και τον Dedekind τη δεκαετία του 1870. Μετά την ανακάλυψη παραδόξων στην άτυπη θεωρία συνόλων, πληθώρα συστημάτων αξιωμάτων προτάθηκαν από την αρχή του 20ου αι., με πιο γνωστό τη Zermelo–Fraenkelsettheory, με το «αξίωμα της επιλογής» (Μοσχοβάκης, 1993).

Η θεωρία συνόλων, που τυποποιείται με τη χρήση της λογικής πρώτου βαθμού, είναι το πιο διαδεδομένο θεμελιώδες σύστημα για τα μαθηματικά. Η γλώσσα της θεωρίας συνόλων χρησιμοποιείται στους ορισμούς σχεδόν όλων των μαθηματικών αντικειμένων, όπως οι συναρτήσεις και οι έννοιες της συνολοθεωρίας που υπάρχουν σε όλα τα διδακτέα προγράμματα μαθηματικών. Στοιχειώδη δεδομένα για τα σύνολα και την ιδιότητα μέλους συνόλου μπορούν να εισαχθούν στο Δημοτικό Σχολείο, μαζί με διαγράμματα Venn, για τη μελέτη συλλογών από κοινά φυσικά αντικείμενα. Βασικές πράξεις, όπως η ένωση και η τομή συνόλων, μπορούν να μελετηθούν σ' αυτό το πλαίσιο. Πιο προχωρημένες έννοιες, όπως η πληθικότητα, είναι βασικό κομμάτι του προπτυχιακού διδακτικού προγράμματος μαθηματικών.

Η θεωρία συνόλων αποτελεί, επίσης, ένα πολλά υποσχόμενο θεμελιακό σύστημα για το

μεγαλύτερο μέρος των μαθηματικών. Από τη δημοσίευση του πρώτου τόμου του PrincipiaMathematica, προβλήθηκε ο ισχυρισμός ότι τα περισσότερα ή ακόμα όλα τα μαθηματικά θεωρήματα μπορούν να παραχθούν με τη χρήση ενός εύστοχα σχεδιασμένου συνόλου αξιωμάτων για τη θεωρία συνόλων, επαυξημένου με πολλούς ορισμούς, χρησιμοποιώντας τη λογική πρώτης ή δεύτερης τάξης (Jech , 2006).

Η θεωρία συνόλων ως θεμέλιο για τη μαθηματική ανάλυση, την τοπολογία, την αφηρημένη άλγεβρα και τα διακριτά μαθηματικά είναι επίσης αναμφισβήτητη. Μαθηματικοί αποδέχονται κατ ' αρχήν ότι θεωρήματα σε αυτούς τους τομείς μπορεί να προέλθουν από τους σχετικούς ορισμούς και τα αξιώματα της θεωρίας συνόλων. Λίγες πλήρεις παραγωγές σύνθετων μαθηματικών θεωρημάτων από τη θεωρία συνόλων έχουν επισήμως επιβεβαιωθεί, ωστόσο, επειδή οι τυπικές παραγωγές είναι συχνά πολύ περισσότερες απ΄ όσους μαθηματικούς τύπους η φυσική γλώσσα υποδεικνύει ως υπαρκτούς.

Το γεγονός αυτό έφερε τη λεγόμενη κρίση στα θεμέλια των μαθηματικών και έτσι δόθηκε το έναυσμα για μια ενδοσκόπηση και αναδιατύπωση των μαθηματικών κατά τον 20ο αιώνα με φορείς τις τρεις βασικές διαφορετικές φιλοσοφικές σχολές : (α) τον Λογικισμό με πρωτεργάτες τους Leibniz , Dedekind , PeanoFreege και Russel , (β) τον Φορμαλισμό των Hilbert , Godel , και Curry και (γ) τον Κονστροκτουβισμό ή Ιντουισιονισμό , οπαδοί του οποίου υπήρξαν οι Brower, Heyting και Dumme.

Οι Λογικιστές, αρχικά, θεωρούσαν πως οι αλήθειες θα μπορούσαν να κατανοηθούν apriori ανεξάρτητα από την παρατήρηση. Οι Φορμαλιστές, αντίθετα, στήριξαν το πρόγραμμά τους στην ανάγκη απόδειξης ότι τα μαθηματικά αξιωματικά συστήματα είναι συνεπή. Για τον φορμαλισμό τα μαθηματικά αποτελούνται από αξιώματα, ορισμούς και θεωρήματα, δηλαδή από τύπους (Davis - Hersh, 1981, σ.13). Η σχολή αυτή κυριάρχησε στην Ευρώπη τις δεκαετίες του 1950 και 1960 με το όνομα «Νέα Μαθηματικά» και έφτασε να διδάσκεται ακόμα και στα νηπιαγωγεία. Το τρίτο φιλοσοφικό ρεύμα, αυτό των κονστρουκτιβιστών, εμφανίστηκε στις αρχές του 20^{ου} αιώνα με κύριο εκφραστή του τον Δανό τοπολόγοL. Brower (1908), θεσμοθετώντας μια ιδιαίτερη έννοια κατασκευαστικότητας (Β. Κουλαϊδης, 2002: 66). Η μαθηματική γνώση, σύμφωνα με τους κονστρουκτιβιστές (VonGlasersfeld, Vygotsky και Ernest), αποτελεί κοινωνική κατασκευή και επομένως δεν είναι ούτε απόλυτη ούτε προκαθορισμένη (Ε. Κολέζα, 2000: 73). Η μαθηματική γνώση, επομένως, ως κοινωνικό προϊόν θεωρείται διαψεύσιμη και αέναα ανοιχτή σε αναθεωρήσεις,

τόσο σε ό,τι αφορά τις αποδείξεις των θεωρημάτων της, όσο και σε ό,τι αφορά τις θεμελιώδεις της έννοιες (Lakatos, 1996 ; Wilder , 1986).

Το κυρίαρχο ρεύμα στη Διδακτική των Μαθηματικών για πολλές δεκαετίες ήταν μια «φορμαλιστική άποψη για τη διδασκαλία» (Φερεντίνος, 2001), αναφερόμενη ως «μπιχεβιοριστική συνιστώσα των εκπαιδευτικών στόχων». Ο μπιχεβιορισμός ή συμπεριφορισμός (Thorndike, Pavlov, Watson, Skinner) κυριαρχούσε στις θεωρίες μάθησης μέχρι το 1960 (Τασιός, 2008). Κατά τους συμπεριφοριστές, το μυαλό του μαθητή είναι άγραφο χαρτί, πάνω στο οποίο ο εκπαιδευτικός μπορεί να εγγράψει τη γνώση. Η μπιχεβιοριστική μάθηση είναι παθητική, ληπτική, στατική και αναπαραγωγική διαδικασία και στήριξε μια φορμαλιστική άποψη για τη διδασκαλία με τα «Νέα Μαθηματικά».

Το δεύτερο ρεύμα, το οποίο εμφανίστηκε στην αρχή της δεκαετίας του 70, στηρίχτηκε στις αρχές του κονστρουκτιβισμού και του έχουν αποδοθεί διάφοροι χαρακτηρισμοί (Φερεντίνος, 2001): «ρεαλιστικό μοντέλο διδασκαλίας» ή «διδασκαλία διαρθρωμένη γύρω από ευρετικές διαδικασίες και σε άμεση συνάρτηση με την καθημερινή ζωή», αλλά και «σχετικιστική άποψη για τη μάθηση» (Hunting, 1987). Στη συνέχεια, ως βασικός σκοπός της μαθηματικής εκπαίδευσης τέθηκε η απόκτηση μαθηματικής σκέψης και η καλλιέργεια του μαθηματικού εγγραμματισμού (Τύπας, 2005), της ικανότητας δηλαδή του μαθητή να εφαρμόζει μαθηματικές γνώσεις, μεθόδους και διαδικασίες σε προβλήματα της καθημερινής ζωής (ΕΠΠΣ Μαθηματικών, 1997, άρθρο2).

Οι σύγχρονες αντιλήψεις φαίνεται να βρίσκουν στις κατασκευαστικές θεωρίες μια σημαντική πρόταση για τη διδακτική των Μαθηματικών και την αντικατάσταση του παραδοσιακού μοντέλου διδασκαλίας. Καθοριστική, πλέον, είναι η σημασία του αναστοχασμού και της αυτορρύθμισης στη μαθησιακή διαδικασία. Η θέση αυτή στηρίζεται στην αναπτυξιακή θεωρία του J. Piaget, σύμφωνα με την οποία μαθαίνουμε μέσω μιας συνεχούς διαδικασίας ρήξεων και επαναϊσορροπιών. Για τον J. Piaget η αποκατάσταση της ισορροπίας σημαίνει τη μετάβαση του ατόμου σε ένα ανώτερο νοητικό επίπεδο.

Εν κατακλείδι, η απόκτηση της μαθηματικής γνώσης είναι προοδευτική και πραγματοποιείται μέσα από τη σταδιακή μετάβαση από το συγκεκριμένο στο αφηρημένο. Έτσι η επίλυση προβλημάτων – δραστηριοτήτων αποτελεί τον ακρογωνιαίο λίθο (ΕΠΠΣ Μαθηματικών, 1997:2) στη διδασκαλία των Μαθηματικών. Με άλλα λόγια, η γνώση γενικά και ιδιαίτερα η μαθηματική γνώση αναπτύσσεται μέσα από την αναζήτηση λύσεων σε προβλήματα, η τεκμηρίωση

των οποίων γίνεται κατ' αρχήν σε ένα διαισθητικό και εμπειρικό επίπεδο και στη συνέχεια στη βάση μιας αποδεικτικής διαδικασίας.

1.3 Η διδακτική των Μαθηματικών

I. Η συμβολή του Καντ

Μέχρι τα μέσα του 18ου αιώνα κυριαρχούσε η αρχαιοελληνική αντίληψη, όταν ήρθε στο προσκήνιο η φιλοσοφική θεώρηση του Καντ. Σύμφωνα με αυτή τη θεωρία, η apriorigνώση συνίσταται σε προτάσεις που εξάγονται και διαπιστώνονται πάνω στη βάση του καθαρού λόγου, χωρίς προσφυγή στην παρατήρηση και την εμπειρία, ενώ η aposteriorigνώση εξάγεται με βάση την εμπειρία.

Κάθε μαθηματική απόδειξη είναι ενταγμένη σε ένα «αξιωματικό σύστημα» και εξαρτάται απολύτως από αυτό. Με τον όρο «αξιωματικό σύστημα» εννοούμε ένα οποιοδήποτε σύστημα μαθηματικών εκφράσεων, στο οποίο κάποιες από αυτές θεωρούνται ότι ισχύουν υποθετικά και κατά κάποιο τρόπο προηγούνται από λογική άποψη έναντι των υπολοίπων. Αυτή η παραγωγική μέθοδος, ως τρόπος προσπέλασης των Μαθηματικών, κυριάρχησε ως τις αρχές του 20ου αιώνα, οπότε εμφανίστηκε πλήθος αντιφάσεων.

Προκειμένου να απελευθερωθούν οι μαθηματικές θεωρίες από αυτές τις αντιφάσεις εμφανίστηκαν στη φιλοσοφία των Μαθηματικών τρεις βασικές σχολές: ο Λογικισμός, ο Φορμαλισμός και ο Κονστρουκτιβισμός ή Ιντουισινισμός ή Ενορατισμός (Τουμάσης, 1994).

ii. Λογικισμός

Ο Λογικισμός είναι η φιλοσοφική σχολή, η οποία ισχυρίζεται ότι τα μαθηματικά είναι κλάδος της λογικής. Δηλαδή, σύμφωνα με τη θέση των λογικιστών, τα μαθηματικά αντικείμενα και οι έννοιες μπορούν να οριστούν από κάποια λογική ορολογία και τα θεωρήματα να προκύψουν βάσει αυτών μέσα από κάποιες λογικές αρχές. Η σχολή αυτή έχει τις βάσεις της στον Leibniz (1666), ο οποίος ήταν ο πρώτος που οραματίστηκε ένα πανίσχυρο τυποποιημένο προτασιακό λογισμό μέσω του οποίου θα γινόταν να εξετάζουμε και να βρίσκουμε τη σωστή απάντηση σε οποιαδήποτε

μαθηματική πρόταση, χρησιμοποιώντας ένα απόλυτα ορθολογικό σύστημα αποφάσεων .

Σημαντικοί πρωτεργάτες του Λογικισμού είναι ο Dedekind και ο G. Peano, ο οποίος εισήγαγε τον λογικό συμβολισμό στη διατύπωση μαθηματικών προτάσεων, αλλά και θεμελίωσε ένα αξιωματικό σύστημα για την αριθμητική, το οποίο ισχύει ως σήμερα. Εν συνεχεία, ο Frege προσπάθησε να ορίσει τα μαθηματικά αντικείμενα ως λογικές έννοιες. Ο βασικότερος εκπρόσωπος του Λογικισμού υπήρξε ο Russel, ο οποίος με το έργο του PrincipiaMathematica προσπάθησε να κάνει πλήρη αναγωγή των μαθηματικών στη Λογική (Καστάνη &Τοκμακίδη, 1993) .

Ο Λογικισμός, τέλος, κατά τους P. Daviskαι R. Hersh (1989), είναι μια μορφή πλατωνικού ρεαλισμού. Οι Λογικιστές, θεωρούνπως οι αλήθειες θα μπορούσαν να συλληφθούν aprioriανεξάρτητα από την παρατήρηση. Ο Λογικισμός προσπάθησε να αποδείξει ότι όλες οι μαθηματικές έννοιες μπορούν να αναχθούν στην ιδέα της αφηρημένης ιδιότητας και ότι τα μαθηματικά παράγονται από βασικές λογικές αρχές που αφορούν ιδιότητες.

iii. Φορμαλισμός

Η Φιλοσοφική αυτή σχολή θεμελιώθηκε από τον Hilbert μετά την ολοκλήρωση της αξιωματικής μελέτης για την Γεωμετρία στο έργο του «Θεμέλια της Γεωμετρίας». Βασική θέση της Φορμαλιστικής Σχολής είναι ότι τα Μαθηματικά ασχολούνται με τη μελέτη τυπικών συμβολικών συστημάτων, δεν έχουν συγκεκριμένο περιεχόμενο και περιλαμβάνουν μόνο ιδεατά συμβολικά στοιχεία. Εξελίχθηκαν δύο ειδών φορμαλισμοί ο «φορμαλισμός των όρων» και ο «φορμαλισμός των παιγνίων».

Ο Φορμαλισμός απέχει από το να δημιουργεί μια πλατωνική πραγματικότητα και ξεχωρίζει τα Μαθηματικά τελείως από τον εμπειρικό κόσμο. Οι οπαδοί του θεωρούσαν ότι για τη στοιχειώδη αριθμητική πρέπει να χρησιμοποιούμε «συγκεκριμένες υλικές τελικές μεθόδους» (Καραντζίνης, 2003).

Οι Φορμαλιστές στήριξαν το πρόγραμμά τους πάνω στην ανάγκη απόδειξης ότι τα μαθηματικά αξιωματικά συστήματα είναι συνεπή. Για τον Φορμαλισμό, σύμφωνα με τους P. Daviskαι R. Hersh (1981: 13), δεν υπάρχουν μαθηματικά αντικείμενα, αλλά αποτελούνται από αξιώματα, ορισμούς και θεωρήματα, δηλαδή από τύπους. Για τους Φορμαλιστές, οι μαθηματικοί τύποι δεν έχουν κανένα νόημα και καμιά τιμή αλήθειας.

Η σχολή αυτή κυριάρχησε στην Ευρώπη τις δεκαετίες του 1950 και 1960, και με το όνομα «Νέα ή Μοντέρνα Μαθηματικά» έφτασε να διδάσκεται ακόμα και στα νηπιαγωγεία.

iv.Κονστρουκτιβισμός ή Ιντουισινισμός ή Ενορατισμός

Οι Ενορατιστέςθεωρούν τα Μαθηματικά ως μια φυσική λειτουργία του πνεύματος και ως μια ελεύθερη τυπική δραστηριότητα της σκέψης. Με άλλα λόγια, θεωρούν τη διαίσθηση δηλαδή την ενόραση, ως μόνη πηγή γνήσιας μαθηματικής σκέψης. Η θεωρία του Κονστρουκτιβισμού ή Ενορατισμού θεμελιώνεται πάνω σε μία βασική αρχή: την ενόραση της πιθανότητας κατασκευής μιας άπειρης σειράς αριθμών, τους οποίους μαθαίνουμε διαισθητικά. Η δεύτερη βασική αρχή σχετίζεται με τη δυνατότητα δημιουργίας κατασκευής νέων μαθηματικών οντοτήτων (Brouwer, 1975).

Το τρίτο αυτό φιλοσοφικό ρεύμα, είναι έντονα πρωτότυπο και διαφορετικό από τις δύο προηγούμενες σχολές. Εμφανίστηκε στις αρχές του 20^{ου} αιώνα με κύριο εκφραστή του τον Δανό τοπολόγοL. Brower (1908), θεσμοθετώντας μια ιδιαίτερη έννοια κατασκευαστικότητας. Οι απαρχές του κονστρουκτιβισμού εντοπίζονται στο έργο του φιλόσοφου GiambattistaVico (Κουλαϊδης, 2002: 66), ο οποίος υποστήριξε πως ο άνθρωπος γνωρίζει μονάχα ό,τι ο ίδιος δημιουργεί, δηλαδή την ιστορία του. Κατά τον Tobin, *"ο κονστρουκτιβισμός είναι ένα σύνολο πίστεων περί τη γνώση η οποία αρχίζει με την αποδοχή της θέσης ότι η πραγματικότητα υπάρχει αλλά δεν μπορεί να γνωσθεί ως ένα σύνολο από αλήθειες"* (Tobin, 2005), ενώ ο Confrey κάνει λόγο *"για μια θεωρία για τα όρια της ανθρώπινης γνώσης"* και εκφράζει την άποψη ότι *"όλη η γνώση που έχουμε είναι ένα προϊόν των δικών μας ενεργειών*". *Δεν μπορούμε να έχουμε άμεση γνώση οποιασδήποτε εξωτερικής ή αντικειμενικής πραγματικότητας"* (Κολέζα, 2000 :73).

Αφού λοιπόν είναι αδύνατο να γνωρίσουμε μια «αντικειμενική πραγματικότητα», οι γνώσεις μας για την πραγματικότητα είναι στην ουσία «θεωρίες γύρω από την πραγματικότητα» και η φροντίδα μας για συνέπεια και λογική στη διατύπωσή τους ούτε συνεπάγεται την αλήθεια τους ούτε αποκλείει εναλλακτικές θεωρίες. Το ίδιο ισχύει και με τη μαθηματική γνώση που, κατά τον κονστρουκτιβισμό (VonGlasersfeld, Vygotsky, Ernest), αποτελεί κοινωνική κατασκευή και επομένως δεν είναι ούτε απόλυτη ούτε προκαθορισμένη. Η μαθηματική γνώση, επομένως, ως κοινωνικό προϊόν, θεωρείται διαψεύσιμη και αέναα ανοιχτή σε αναθεωρήσεις , τόσο σε ό,τι αφορά τις αποδείξεις των θεωρημάτων της , όσο και σε ό,τι αφορά τις θεμελιώδεις της έννοιες (Lakatos, 1996).

Αντίστοιχη, κατά τον Τ. Kuhn, είναι η πορεία κάθε επιστημονικής κοινότητας με την αποδοχή ενός «κοινού παραδείγματος»: ενός συνόλου, δηλαδή, πεποιθήσεων, αναγνωρισμένων αξιών και τεχνικών που ασπάζονται τα μέλη μιας δεδομένης ομάδας επιστημόνων (Kuhn, 2004). Κάθε φορά που μια νέα θεωρία εμφανίζεται ως αποτέλεσμα εξέλιξης ή μιας ομολογημένης αποτυχίας της επιστημονικής κοινότητας, δημιουργείται κρίση. Διαδοχικές κρίσεις οδηγούν σε μια επιστημονική επανάσταση μέχρι την αποδοχή ενός νέου παραδείγματος.

Υπό τη γενική θεωρία του κονστρουκτιβισμού διακρίνονται δύο επιμέρους διαφορετικές θεωρίες - απόψεις: (α) ο «ριζοσπαστικός κονστρουκτιβισμός» με κυριότερο εκπρόσωπο τον ψυχολόγο JeanPiaget, που υποστηρίζει ότι η σκέψη αυτορυθμίζεται σε σχέση με την προσωπική εμπειρία και (β) ο «κοινωνικός κονστρουκτιβισμός» με κυριότερο εκπρόσωπο το LevVygotsky, που υποστηρίζει ότι οι ιδέες είναι δημιούργημα της συλλογικής δράσης και συνείδησης.

Ο Freudenthal (1973), τέλος, στην Ολλανδία στηριζόμενος στον κονστρουκτιβισμό θεωρούσε ότι: *«τα μαθηματικά είναι μια ανθρώπινη δραστηριότητα, άρα πρέπει να προέρχονται από την πραγματικότητα και να είναι επίσης εφαρμόσιμα σε αυτήν την πραγματικότητα. Στη συνέχεια διατύπωσε μια «διδακτική φαινομενολογία»*(Πινάτσης, 2007).

1.3.1 Οι νέες τάσεις στη διδακτική των Μαθηματικών

Μέχρι πριν λίγα χρόνια η αντίληψη που επικρατούσε ήταν ότι η μαθηματική γνώση είναι ένα αγαθό που έχει παραχθεί και καλούνται οι μαθητές να το καταναλώσουν αποστηθίζοντας το. Ο δάσκαλος των μαθηματικών, υιοθετώντας την «τραπεζική αντίληψη»της παιδείας, καταθέτει τις έτοιμες γνώσεις στα «άδεια μυαλά»των μαθητών, όπως καταθέτει κανείς χρήματα σε μια τράπεζα (Freire , 1977). «Ταΐζει»τους μαθητές με την ύλη των ετοιμοπαράδοτων παραδόσεων και απαιτεί την άκριτη και παθητική αποδοχή και την αποστήθιση τους. Με τον τρόπο αυτό, αυτοματοποιείται η διδασκαλία, σταματά η ανθρώπινη επικοινωνία και εγκαθιδρύεται ένα μαθοφοβικό, μαθησιοκτόνο κλίμα άχαρης επανάληψης των ίδιων πραγμάτων (Papert&Harel, 1991). Οι υπάρχουσες μέθοδοι διδασκαλίας θεωρούν και παρουσιάζουν τα Μαθηματικά ως ένα προκατασκευασμένο σύστημα από κανόνες και διαδικασίες που θα πρέπει οι μαθητές να αποστηθίσουν, θα πρέπει να δέχονται ότι όλα αυτά είναι σωστά και αληθινά, επειδή το εγγυάται η

αυθεντία του δασκάλου ή του συγγραφέα του βιβλίου που διδάσκεται. Η άποψη αυτή δεν γίνεται πλέον αποδεκτή.

Σύμφωνα με την κρατούσα σήμερα άποψη, τα Μαθηματικά δεν είναι αποτέλεσμα της προσπάθειας των Μαθηματικών, αλλά και η δραστηριότητα μέσω της οποίας τα παράγουν. Με την έννοια αυτή τα Μαθηματικά πέρα από ένα σύστημα γνώσεων αποτελούν και μια διαδικασία (G. Tymoczko , 1986). Οι τρόποι με τους οποίους κατασκευάζουν τις μαθηματικές τους γνώσεις έχουν ιδιαίτερη σημασία για το σχεδιασμό της διδασκαλίας. Οι παραδοσιακές μέθοδοι διδασκαλίας σχεδιάζονται με αφετηρία τα Μαθηματικά του σχολείου και όχι τα Μαθηματικά των παιδιών (L.Steffe&Wiegel,1992).

Επίσης, από έρευνες που διεξήχθησαν (NCTM, 1989.NationalCouncilofTeachers) (http://www.fayar.net/east/teacher.web/math/Standards/previous/CurrEvStds/index.htm) αποκαλύπτεται ότι οι παραδοσιακοί τρόποι διδασκαλίας των Μαθηματικών δε βοηθάνε τους μαθητές να μάθουν ό,τι θα τους χρειαστεί για να αντιμετωπίσουν τις ανάγκες της σύγχρονης κοινωνίας. Ούτε, όμως, και ο ανθρωπιστικός σκοπός της εκπαίδευσης, ο οποίος είναι η ανάπτυξη ανεξάρτητης και κριτικής σκέψης, δεν ευνοείται, όταν οι μαθητές μαθαίνουν να δέχονται τις μαθηματικές γνώσεις, έτσι όπως τις επιβάλλει η αυθεντία του δασκάλου (Kammil, 1985). Από την πλευρά τους οι μαθητές δεν έχουν κανένα επιπλέον κίνητρο για να ασχοληθούν με τα μαθηματικά παρά μόνο για να πάρουν καλούς βαθμούς στο σχολείο ή να πετύχουν σε εξετάσεις.

Ο χαρακτήρας της μαθηματικής γνώσης διαφοροποιείται με την πάροδο των χρόνων. Οι αλλαγές βέβαια μπορεί να είναι αργές αλλά όλο και περισσότεροι, που ασχολούνται με τη διδακτική των Μαθηματικών, συμφωνούν ότι οι παραπάνω λόγοι ευθύνονται σε μεγάλο βαθμό για την κρίση της μαθηματικής παιδείας. Ωστόσο, αυτό δεν αρκεί για μια ριζική αλλαγή των παραδοσιακών τρόπων διδασκαλίας των Μαθηματικών. Οι ρίζες της κρίσης είναι βαθιές και χρειάζεται χρόνος για τη μεταβολή στις στάσεις και τους προσανατολισμούς αυτών που είναι υπεύθυνοι για την οργάνωση και τον προγραμματισμό της Μαθηματικής Παιδείας. Όπως επισημαίνουν οι P. Cobb και E. Yackel (1991), η έρευνα μέσα στη τάξη, με στόχο την ανάπτυξη νέων μορφών διδασκαλίας των Μαθηματικών, καθώς και η διερεύνηση των δυνατοτήτων τους, αποτελεί βασική προϋπόθεση για τη διδασκαλία των Μαθηματικών στο σχολείο.

1.3.2 Έννοιες και μέθοδοι της Διδακτικής των Μαθηματικών

Ο τομέας της Διδακτικής των Μαθηματικών σχετίζεται με πολλούς επιστημονικούς κλάδους, όπως οι Επιστήμες της Αγωγής, η Ψυχολογία, η Γλωσσολογία, η Κοινωνιολογία κ.ά., με αποτέλεσμα να δανείζεται πολλές από τις μεθόδους που έχουν αναπτυχθεί στο πλαίσιο τους, όπως οι κλινικές παρατηρήσεις, οι συνεντεύξεις και τα ερωτηματολόγια. Ως ξεχωριστός κλάδος, επίσης, έχει αναπτύξει και άλλες θεωρητικές μεθόδους και έννοιες, οι οποίες αφορούν στην ίδια τη φύση και ιδιαιτερότητα της Διδακτικής των Μαθηματικών (Α. Γαγάτσης, 1992).

Η «διδακτική μεταφορά», την οποία ερεύνησε κυρίως ο Y. Chevallard, είναι μια μέθοδος της Διδακτικής των Μαθηματικών που αφορά στη διαδικασία μετασχηματισμού της επιστημονικής γνώσης σε αντικείμενο διδασκαλίας. Ο Chevallard (1991) αναφέρει ότι το αντικείμενο επιστημονικής γνώσης, για να καταστεί κατάλληλο ως αντικείμενο διδασκαλίας, υφίσταται μια σειρά από μετασχηματισμούς προσαρμογής, οι οποίοι δεν προσδιορίζονται μόνο από τη μαθηματική κοινότητα, αλλά επηρεάζονται από ένα πλέγμα αλληλεπιδράσεων ανάμεσα στους διδάσκοντες, τους κοινωνικούς παράγοντες, τις πολιτικές επιλογές και τους γονείς.

Η δημιουργία «καταστάσεων ενεργοποίησης και επικοινωνίας των μαθητών» αποτελεί μια άλλη μέθοδο της Διδακτικής των Μαθηματικών, η οποία αναφέρεται στην ακριβή ανάλυση των απαντήσεων των μαθητών και τον προσδιορισμό των αντιλήψεών τους. Προς επίτευξη αυτού οι μαθητές εργάζονται ομαδικά στην επίλυση ενός μαθηματικού προβλήματος , ώστε να υπάρχει γραπτή ή προφορική επικοινωνία μεταξύ τους , η οποία θα αποτελέσει και το αντικείμενο της ανάλυσης.

Στο πλαίσιο της προσπάθειας ερμηνείας των λαθών και της συμπεριφοράς των παιδιών, η Διδακτική των Μαθηματικών ανέπτυξε την έννοια του «διδακτικού συμβολαίου», το οποίο ορίζεται ως ένα σιωπηρό και περιοριστικό είδος συμφωνίας ανάμεσα στο διδάσκοντα, το μαθητή και το γνωστικό αντικείμενο, πρόβλημα, άσκηση ή μαθηματική έννοια , και διακανονίζει τις μεταξύ τους σχέσεις. Ο Brousseau (1984) αναφέρει χαρακτηριστικά: *«...Μέσα από τις επαναλαμβανόμενες διαπραγματεύσεις ανάμεσα στο δάσκαλο και τους μαθητές καθορίζονται οι ρόλοι του καθενός, οι υποχρεώσεις και οι σχέσεις δύναμης. Ο καθηγητής σέβεται το συμβόλαιο κάνοντας μάθημα και δίνοντας πρέπει. Είναι αυτός που τα ξέρει όλα και οδηγεί τους μαθητές στο να παράγουν την απάντησή τους χρησιμοποιώντας τις γνώσεις τους. Ο μαθητής σέβεται το συμβόλαιο αν κάνει τις*

ασκήσεις, αν κάνει το μάθημά του. Προσπαθεί να καταλάβει αυτό που θέλει ο καθηγητής, να δώσει τις αναμενόμενες απαντήσεις» (Α. Γαγάτσης, 1992: 17).

Η γένεση του Διδακτικού Συμβολαίου πραγματοποιήθηκε το 1980 όταν 76 από τους 97 μαθητές σε ένα δημοτικό σχολείο της Γαλλίας, έδωσαν απάντηση στο πρόβλημα, *«Πάνω σε ένα καράβι υπήρχαν 26 πρόβατα και 10 κατσίκια. Ποια είναι η ηλικία του καπετάνιου;»,* (Α. Γαγάτσης , 1992), συνδυάζοντας τα αριθμητικά δεδομένα. Οι ερευνητές της Διδακτικής των Μαθηματικών δεν αποδέχτηκαν ότι αυτός ο «παραλογισμός» οφείλεται σε έλλειψη γνώσεων ή στοιχειώδους ορθολογισμού, αλλά ακριβώς σε αυτό που αργότερα ονόμασαν «διδακτικό συμβόλαιο». Κατά τον Brousseau (1984) *«...Η μάθηση στηρίζεται όχι πάνω στη σωστή λειτουργία του συμβολαίου, αλλά στην επιτυχή ρήξη του…».*

1.3.3 Μέσηεκπαίδευση

Η επίδραση του διδακτικού συμβολαίου, όχι μόνο δεν περιορίζεται καθώς οι μαθητές ανεβαίνουν τις βαθμίδες της εκπαίδευσης , αντίθετα εξακολουθεί να είναι καταλυτική. Οι απαντήσεις που έδωσαν σε σχετικές έρευνες μαθητές Γυμνασίου και Λυκείου επηρεάζονται σε μεγάλο βαθμό από το διδακτικό συμβόλαιο, τόσο σε προβλήματα ρουτίνας όσο και σε μη συνηθισμένα.

Οι Cassani, D’ Amore, Deleonardi και Girotti (1996) εξέτασαν την πιθανότητα επίδρασης του διδακτικού συμβολαίου στη Γεωμετρία, μελετώντας τη συμπεριφορά μαθητών κατά την παρουσίαση ενός μη συνηθισμένου προβλήματος σε αντίθεση με ένα ανάλογο πρόβλημα ρουτίνας. Το μη συνηθισμένο πρόβλημα αφορούσε τον υπολογισμό του όγκου μιας πραγματικής πυραμίδας και ανατέθηκε σε μαθητές ηλικίας 13-14 ετών οι οποίοι είχαν διδαχθεί συστηματικά την εύρεση όγκου της πυραμίδας στο χαρτί με χρήση τύπων και μπορούσαν να λύσουν επιτυχώς παρόμοια προβλήματα.

Στο γραπτό πρόβλημα ρουτίνας το 90,8% των μαθητών το έλυσαν με επιτυχία, εφαρμόζοντας μια γνωστή διαδικασία και κάνοντας δύο φορές χρήση του πυθαγόρειου θεωρήματος. Όταν όμως παρουσιάστηκε στους μαθητές μία ασυνήθιστη τετραγωνική πυραμίδα με βάση ομοίωμά της (συμπαγής πυραμίδα ή/και πυραμίδα με μεταλλικό σκελετό), μόλις το 40%

κατόρθωσε να επιλύσει το πρόβλημα με επιτυχία, παρόλο που οι μαθητές είχαν στη διάθεσή τους χάρακα και μολύβι για να λύσουν το πρόβλημα. Μερικοί μαθητές απέρριψαν ως λανθασμένη τη μέτρηση του ύψους της συμπαγούς πυραμίδας με το χάρακα, γιατί δεν ήταν δυνατό να δώσει ακριβή μέτρηση, επηρεασμένοι από το γεγονός ότι πάντα έβρισκαν μια ακριβή απάντηση βάσει των γραπτών δεδομένων. Στην ίδια έρευνα δόθηκε σε μαθητές το μη συνηθισμένο πρόβλημα χωρίς χάρακα και μολύβι για να διερευνηθεί κατά πόσο η επαφή τους με μια πραγματική πυραμίδα θα τους ωθούσε να σκεφτούν εναλλακτικούς τρόπους υπολογισμού του όγκου της. Ωστόσο, κανένας από τους μαθητές αυτούς δεν πρότεινε λύσεις για την εύρεση του όγκου , ενώ μόνο 33% ζήτησε χάρακα για να εργαστεί.

Όπως ήταν αναμενόμενο οι μαθητές επέδειξαν μεγάλο δισταγμό στην πρόκληση να εργαστούν με την πραγματική πυραμίδα και αυτό επειδή αυτή η κατάσταση δεν αποτελούσε μέρος της διδακτικής ρουτίνας , η οποία είναι συνδεδεμένη με γραπτά δεδομένα.

Όπως γίνεται αντιληπτό, η επίδραση του διδακτικού συμβολαίου στους μαθητές είναι αξιοσημείωτη, αφού αρκετοί εφάρμοζαν πάντα ασυνείδητα τους τυπικούς κανόνες που τους έδωσε ο καθηγητής τους , χωρίς να αξιολογούν κάθε φορά το έργο που τους δίνεται.

Σύμφωνα με τα όσα αναφέραμε παραπάνω , γίνεται αντιληπτό πως γενικά το διδακτικό συμβόλαιο δημιουργεί στερεότυπες αντιλήψεις στους μαθητές σχετικά με την επίλυση μαθηματικών έργων. Οι μαθητές πιστεύουν ότι δεν υπάρχουν έργα που δεν μπορούν να λυθούν και άρα λανθασμένα δημιουργούν νέους κανονισμούς ή επεκτείνουν και γενικεύουν τους γνωστούς , για να οδηγηθούν σε λύση. Επικρατεί δηλαδή η τάση μηχανικής εφαρμογής κανόνων και τύπων που δίνονται από το δάσκαλο, αγνοώντας τη φύση του έργου. Έτσι δημιουργείται μια δυσκολία μεταφοράς των διαδικασιών και γνώσεων από μια συνηθισμένη μαθηματική κατάσταση σε μια ασυνήθιστη. Για παράδειγμα, θεωρούν ότι ένα πρόβλημα χωρίς γραπτά δεδομένα δεν μπορεί να λυθεί με οποιοδήποτε άλλο τρόπο γιατί τότε η απάντησή του δεν θα είναι ακριβής.

Μια άλλη αντίληψη που έχουν οι μαθητές είναι ότι μια άσκηση δεν μπορεί να είναι «πολύ απλή», γιατί τότε δεν υπάρχει νόημα στην προσπάθεια επίλυσης της , αλλά αντίθετα πρέπει να είναι ενδιαφέρουσα και κάπως δύσκολη για να θεωρείται άσκηση.

Τέλος , το διδακτικό συμβόλαιο μπορεί να εξηγήσει επίσης τη μίμηση της μαθηματικής γλώσσας του εκπαιδευτικού από τους μαθητές, φαινόμενο το οποίο εμποδίζει την εξωτερίκευση

των αυθεντικών ιδεών των μαθητών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο

Η Ευρωπαϊκή στρατηγική στη διδασκαλία των Μαθηματικών

2.0. Η Ευρωπαϊκή εκπαιδευτική πολιτική

Κάθε χώρα της ΕΕ είναι υπεύθυνη για τα δικά της συστήματα εκπαίδευσης και κατάρτισης. Η πολιτική της ΕΕ έχει σχεδιαστεί για να στηρίξει την εθνική δράση και τη διεύθυνση κοινών προκλήσεων, όπως η γήρανση των κοινωνιών, των ελλειμμάτων στο τομέα των δεξιοτήτων του εργατικού δυναμικού, τις τεχνολογικές εξελίξεις καθώς και ένα πλαίσιο απάντησης του εξειδικευμένου δυναμικού της Ευρώπης απέναντι στον παγκόσμιο ανταγωνισμό. Το στρατηγικό πλαίσιο 2020 για την Εκπαίδευση και Κατάρτιση αποτελεί ακριβώς το πλαίσιο εκείνο για τη συνεργασία στον τομέα της εκπαίδευσης και της κατάρτισης. Το στρατηγικό πλαίσιο 2020 είναι ένα φόρουμ για την ανταλλαγή βέλτιστων πρακτικών, θεμάτων αμοιβαίας μάθησης καθώς και για τη συγκέντρωση και τη διάδοση των πληροφοριών και αποδεικτικών στοιχείων από ό,τι λειτουργεί, καθώς και συμβουλές και στήριξη για πολιτικές μεταρρυθμίσεις στο μαθησιακό πεδίο.

Συγκεκριμένα, η Ευρωπαϊκή Ένωση στο στρατηγικό πλαίσιο 2020(http://ec.europa.eu) έθεσε για την εκπαίδευση τα ακόλουθα σημεία-στόχους:

- Τουλάχιστον το 95% των παιδιών πρέπει να συμμετέχουν στην προσχολική εκπαίδευση
- Το ποσοστό των ατόμων που εγκαταλείπουν πρόωρα την εκπαίδευση και την κατάρτιση, ηλικίας 18-24 ετών θα πρέπει να είναι κάτω του 10%
- Τουλάχιστον το 40% των ατόμων ηλικίας 30-34 ετών πρέπει να έχει ολοκληρώσει κάποια μορφή τριτοβάθμιας εκπαίδευσης
- Τουλάχιστον το 15% των ενηλίκων θα πρέπει να συμμετέχει στη διά βίου μάθηση
- Τουλάχιστον το 20% των αποφοίτων της τριτοβάθμιας εκπαίδευσης και 6% των 18-34 ετών με μια αρχική επαγγελματική κατάρτιση πρέπει να έχουν περάσει κάποιο χρόνο για σπουδές ή κατάρτιση στο εξωτερικό
- Το μερίδιο των απασχολούμενων αποφοίτων (ηλικίας 20-34) θα πρέπει να είναι τουλάχιστον 82%

2.1 Ευρωπαϊκές οδηγίες για τη διδασκαλία των μαθηματικών

Φτασμένες οι προλήψεις σε μια καθαρότητα μαθηματική, μας οδηγούν στη βαθύτερη γνώση του κόσμου

Οδυσσέας Ελύτης

Τα τελευταία χρόνια, το θέμα της εκπαιδευτικής επάρκειας στα μαθηματικά έχει γίνει όλο και πιο σημαντικό θέμα διαλόγου μεταξύ όλων των σχετικών φορέων στην Ευρώπη. Η μαθηματική ικανότητα έχει αναγνωριστεί ως μία από τις βασικές ικανότητες που απαιτούνται για την προσωπική ολοκλήρωση, την ενεργότητα του πολίτη, την κοινωνική ένταξη και την απασχολησιμότητα σε μια κοινωνία της γνώσης.(OJL 394, 2006) Επί πλέον, το 2008 στα "Συμπεράσματα" του Συμβουλίου της Ευρώπης σχετικά με την προετοιμασία των νέων ανθρώπων για τον 21ο αιώνα αναφέρεται ατζέντα πρόταση για την ευρωπαϊκή συνεργασία στο σχολικό τομέα. Η πρόταση αυτή προήλθε από την αναγκαιότητα που ανέγνωσαν τα αρμόδια όργανα, τα οποία καταλήγουν στο ότι η απόκτηση των δεξιοτήτων ανάγνωσης και αριθμητικής είναι βασική

προτεραιότητα για την ευρωπαϊκή συνεργασία στον τομέα της εκπαίδευσης.

Οι αριθμητικές, μαθηματικές και ψηφιακές ικανότητες αρχικά και εν συνεχεία η κατανόηση της επιστήμης είναι επίσης ζωτικής σημασίας για την πλήρη συμμετοχή στην κοινωνία της γνώσης και για την ανταγωνιστικότητα των σύγχρονων οικονομιών. Οι πρώτες εμπειρίες των παιδιών είναι επίσης ζωτικής σημασίας, αλλά δε θα πρέπει να παραβλέπουμε ότι οι μαθητές πολύ συχνά αντιμετωπίζουν με φοβικότητα τα μαθηματικά. Αυτό το περιβάλλον φόβου μπορεί να τροποποιηθεί ή και να αλλάξει καθολικά εάν εφαρμόσουμε διαφορετικές προσεγγίσεις διδασκαλίας. Αυτές περιλαμβάνουν βασικά προβλήματα-basedlearning, που αφορούν στη μάθηση και εφαρμογή των μαθηματικών στην καθημερινή ζωή, ενεργητική μάθηση, την ενίσχυση της κριτικής σκέψης, στη χρήση ICT (CommunicationsTechnologies) και μεθόδων που προκύπτουν μέσα από την διεθνή έρευνα.

Η διακρατική έρευνα, επίσης, μπορεί να βοηθήσει ώστε να εξηγήσει τις εμφανείς διαφορές μεταξύ και εντός των χωρών, καθώς και να προσδιορίσει συγκεκριμένα προβλήματα που υπάρχουν στο εκπαιδευτικά συστήματα. Ωστόσο, οι δείκτες από τις διεθνείς έρευνες θα πρέπει να χρησιμοποιούνται με προσοχή, καθώς υπάρχουν πολλοί σημαντικοί παράγοντες έξω από τη σφαίρα της εκπαιδευτικής πολιτικής που επηρεάζουν τα εκπαιδευτικά επιτεύγματα και αυτά συχνά διαφέρουν μεταξύ των χωρών. Οι δείκτες σε επίπεδο χώρας έχουν επικριθεί, καθώς εκτιμάται ότι παρουσιάζουν απλοποιημένα την απόδοση ενός ολόκληρου σχολικού συστήματος (Baker&LeTendre, 2005).

Κατά την ερμηνεία των αποτελεσμάτων, είναι επίσης σημαντικό να έχουμε κατά νου ότι οι συγκριτικές μελέτες μεγάλης κλίμακας αντιμετωπίζουν διάφορες μεθοδολογικές προκλήσεις: οι μεταφράσεις μπορεί να δημιουργήσουν διαφορετικές έννοιες αντιλήψεις κάποιων ερωτήσεων θα μπορούσε να επηρεαστεί από την πολιτιστική προκατάληψη· η κοινωνική σκοπιμότητα και τα κίνητρα των μαθητών μπορεί να ποικίλουν σε διαφορετικά πολιτισμικά πλαίσια· ακόμη και η πολιτική ατζέντα των οργανώσεων που διεξάγουν διεθνείς αξιολογήσεις μπορούν να επηρεάσουν το περιεχόμενο της αξιολόγησης (Goldstein, 2008).

Οι εκθέσεις της Ευρωπαϊκής Ένωσης σχετικά με τη συνολική εκπαιδευτική διάσταση των

μαθηματικών εστιάζουν στα εξής σημεία:

Στο πρόγραμμα σπουδών, στην εκπαίδευση των εκπαιδευτικών και ανάπτυξη δυνατοτήτων για επαγγελματική εξέλιξη τους, στο ρόλο των τοπικών συλλόγων και ομάδων έρευνας. Τέλος, και τα εθνικά σχέδια είναι επίσης ένας παράγοντας που φαίνεται να επηρεάζει την εκπαίδευση των μαθηματικών στα επίπεδα τόσο της έρευνας και της πρακτικής τους. (AustrianEducationalCompetenceCentres)

2.2 Ευρωπαϊκάόργανα

Σε πολλές ευρωπαϊκές χώρες, οι ενώσεις μαθηματικών και ερευνητικές ομάδες είναι σε στενή συνεργασία με τους εκπαιδευτικούς, οργανώνοντας εθνικά συνέδρια και λαμβάνοντας μέρος σε μεταρρυθμίσεις και εθνικά έργα (π.χ. Γαλλία, Πορτογαλία). Μια σειρά από Εθνικά Κέντρα έχουν ιδρυθεί για την υποστήριξη της εκπαίδευσης γενικά και της μαθηματικής εκπαίδευσης ειδικότερα.

Στην Αυστρία, έξι αυστριακά Κέντρα Εκπαίδευσης (AustrianEducationalCompetenceCentres) έχουν συσταθεί και εμπλέκονται στις τρέχουσες εκπαιδευτικές εξελίξεις. Στη Φινλανδία και στη Γερμανία έχει συσταθεί ένα μαθηματικό κέντρο όπου μαζί με το κέντρο επιστημών οργανώνει διάφορες δραστηριότητες για την προώθηση της εικόνας των μαθηματικών σε μαθητές, εκπαιδευτικούς και γονείς, όπως ειδικές ημέρες στο σχολείο, σε επιστημονικούς συλλόγους, αλλά και μαθήματα κατάρτισης εκπαιδευτικών.

Σε πανευρωπαϊκό επίπεδο, η Ευρωπαϊκή Μαθηματική Εταιρία (TheEuropeanMathematicalSociety -EMS) όπως και η ομάδα εργασίας της Ευρωπαϊκής Ένωσης για την ανάπτυξη και εξέλιξη των μαθηματικών συνεργάζονται αρμονικά για να προωθήσουν την μαθηματική εκπαίδευση στα κράτη-μέλη.

2.3. Εργαλεία αξιολόγησης Μαθηματικών επιδόσεων

Σε όλες τις χώρες της Ευρωπαϊκής Ένωσης υπάρχει ενδοσχολική αξιολόγηση κατά τη διάρκεια της υποχρεωτικής εκπαίδευσης. Η ακριβής μορφή της εσωτερικής αξιολόγησης ποικίλει από χώρα σε χώρα και μπορεί να εμπεριέχει την παρακολούθηση της συμμετοχής των μαθητών στην τάξη, την προφορική και γραπτή αξιολόγηση (εργασίες, τεστ, ορθογραφία) ή την αξιολόγηση με τεστ. Σε γενικές γραμμές, πρόκειται για συνεχή αξιολόγηση της επίδοσης του μαθητή, απόρροια μιας διαδικασίας συνεχούς παρακολούθησης από τον εκπαιδευτικό ακόμη και της εργασίας του μαθητή. Σε αρκετές χώρες, η εσωτερική αξιολόγηση μπορεί να περιλαμβάνει μια τυποποιημένη μορφή αξιολόγησης της συμπεριφοράς του μαθητή (ΕΥΡΥΔΙΚΗ &CEDEFOP, 1995).

Σε ορισμένες χώρες η ενδοσχολική αξιολόγηση είναι καθοριστικής σημασίας γιατί από αυτήν εξαρτάται η προαγωγή των μαθητών στην επόμενη τάξη ή στην ανώτερη γενική δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Ο Πίνακας 1 παρουσιάζει τις χώρες στις οποίες η προαγωγή των μαθητών προσδιορίζεται κατ' αυτόν τον τρόπο. Όπως προκύπτει από τον Πίνακα 1, στις περισσότερες από αυτές η προαγωγή των μαθητών βασίζεται στην ενδοσχολική αξιολόγηση. Εξαίρεση αποτελούν οι σκανδιναβικές χώρες (Δανία, Φινλανδία, Ισλανδία, Νορβηγία και Σουηδία) και οι αγγλόφωνες χώρες (Ιρλανδία και Ηνωμένο Βασίλειο).

Πηγή Ευρυδίκη 2011

Διάρκεια σε έτη διαφόρων βαθμίδων εκπαίδευσης σε χώρες της Ευρώπης

ΧΩΡΕΣ	ΠΡΟΣΧΟΛΙΚΗ ΑΓΩΓΗ	ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ	ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ	
			ΚΑΤΩΤΕΡΗ	ΑΝΩΤΕΡΗ
ΒΕΛΓΙΟ	2-3[1]	6	2	4
ΔΑΝΙΑ	1	9		3
ΓΕΡΜΑΝΙΑ	2	4	6	3
ΕΛΛΑΔΑ	2	6	3	3
ΙΣΠΑΝΙΑ	6	6	4	2
ΓΑΛΛΙΑ	4	5	4	3
ΙΡΛΑΝΔΙΑ	-	8	3	3
ΙΤΑΛΙΑ	3	5	3	5
ΛΟΥΞΕΜΒΟΥΡΓΟ[2]	3	6	3	4
ΟΛΛΑΝΔΙΑ	-	8	3	3
ΑΥΣΤΡΙΑ	-	4	4	4
ΠΟΡΤΟΓΑΛΙΑ	3	9		3
ΦΙΝΛΑΝΔΙΑ	1	9		3
ΣΟΥΗΔΙΑ	1	9		3
ΑΓΓΛΙΑ ΚΑΙ ΟΥΑΛΙΑ	2	6	3	4
ΒΟΡΕΙΑ ΙΡΛΑΝΔΙΑ	1	7	3	4
ΣΚΩΤΙΑ	2	7	4	2
ΙΣΛΑΝΔΙΑ	5	10		4
ΝΟΡΒΗΓΙΑ	-	10		3

Στη Δανία, τη Γαλλία, την Ισλανδία, την Ιρλανδία, τη Νορβηγία, τη Σουηδία και το Ηνωμένο Βασίλειο με το πέρας της κατώτερης δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης διενεργούνται εξωτερικές εξετάσεις. Επισημαίνεται ότι η μελέτη εστιάζεται και πάλι στις εξετάσεις που αφορούν στα σχολεία της γενικής (και όχι της επαγγελματικής) εκπαίδευσης. Στις χώρες που υπάρχει συνεχής και συστηματική αξιολόγηση του μαθητή από την αρχή της κατώτερης δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης

(π.χ. στην Αυστρία, Βέλγιο, Γερμανία, Ελλάδα, Λιχτενστάιν, Λουξεμβούργο, Ολλανδία), δεν υπάρχει εξωτερική αξιολόγηση στο τέλος της κατώτερης/υποχρεωτικής δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Παρόλα αυτά σε μερικές από τις προαναφερόμενες χώρες [π.χ. Ολλανδία και σε μερικά Γερμανικά κρατίδια (Länder)] διενεργούνται εξωτερικές εξετάσεις σε ορισμένους τύπους της επαγγελματικής εκπαίδευσης.

Η ηλικία των μαθητών που συμμετέχουν στις εξετάσεις στο τέλος της κατώτερης/ υποχρεωτικής δευτεροβάθμιας γενικής εκπαίδευσης, ποικίλει: στη Γαλλία δίνονται στο τέλος της 'classedetroisieme' (τέταρτη τάξη του còllege - η ηλικία των μαθητών είναι 15 ετών περίπου). Στις άλλες πέντε χώρες (Δανία, Ισλανδία, Νορβηγία, Σουηδία, Ηνωμένο Βασίλειο) οι εξετάσεις δίνονται στο τέλος της υποχρεωτικής εκπαίδευσης, δηλαδή θεωρητικά στην ηλικία των 16 ετών. Στη Δανία, οι εξετάσεις δεν είναι υποχρεωτικές και οι μαθητές μπορούν να αποφασίζουν εάν θα εξεταστούν ή όχι. Στην πράξη το 90-95% των μαθητών συμμετέχει στις εξετάσεις που διενεργούνται στο τέλος της ένατης σχολικής χρονιάς.

Η εξωτερική αξιολόγηση οργανώνεται από διαφορετικούς φορείς σε κάθε χώρα. Στις περισσότερες χώρες οργανώνεται από το Υπουργείο Παιδείας. Εξαίρεση αποτελούν η Γαλλία, η Σουηδία και το Ηνωμένο Βασίλειο. Στη Γαλλία, δεν υπάρχει ενιαίο εξεταστικό σύστημα που να εφαρμόζεται για όλους τους μαθητές σε εθνικό επίπεδο. Αντ' αυτού, καθεμία από τις 30 περιφερειακές διοικητικές περιοχές (academies) οργανώνει τις δικές της εξετάσεις, οι οποίες βασίζονται στο ενιαίο αναλυτικό πρόγραμμα. (Υπουργείο Παιδείας της Γαλλίας, 1998).

2.3.1.Εργαλεία ελέγχου της μαθηματικής εκπαίδευσης : TIMSS και PISA

Επί του παρόντος, τα επιτεύγματα των μαθητών στα μαθηματικά αξιολογείται μέσω δύο μεγάλων διεθνής κλίμακας ερευνών, δηλαδή των TIMSS και PISA.

Το TIMSS (TrendsinInternationalMathematicsandScienceStudy - Τάσεις στα Διεθνή Μαθηματικά και στις Φυσικές Επιστήμες) έχει σχεδιαστεί για να βοηθήσει τις χώρες σε όλο τον κόσμο στη βελτίωση της εκπαίδευσης των μαθητών στα μαθηματικά και στην επιστήμη. Συλλέγει, εκπαιδευτικά δεδομένα από το στο 4ο ως και το 8ο επίπεδο εκπαίδευσης για να παρέχει πληροφορίες σχετικά με τις τάσεις στην απόδοση, κατά την πάροδο του χρόνου, μαζί με εκτενή βασικά στοιχεία για να αντιμετωπίσει τις ανησυχίες σχετικά με την ποσότητα, την ποιότητα και το περιεχόμενο της διδασκαλίας στα μαθηματικά και στις επιστήμες.

Από την άλλη το πρόγραμμα PISA (ProgrammeforInternationalStudentAssessment - Πρόγραμμα Διεθνούς Αξιολόγησης Μαθητών) μετρά τις γνώσεις και τις δεξιότητες των δεκαπεντάχρονων μαθητών στην ανάγνωση, τα μαθηματικά και τις υπόλοιπες επιστήμες. Κάθε κύκλος αξιολόγησης PISA δίνει ιδιαίτερη έμφαση σε μια θεματική περιοχή. Το 2003, το κυρίως βάρος έρευνας ήταν στα μαθηματικά . Πιο συγκεκριμένα, το πρόγραμμα περιελάμβανε ερωτήσεις σχετικά με τη στάση των μαθητών απέναντι στη διδασκαλία των μαθηματικών.

Αυτές οι δύο έρευνες επικεντρώνονται σε διαφορετικές πτυχές της μάθησης των μαθητών. Σε γενικές γραμμές, το TIMSS αποσκοπεί στην αξιολόγηση, δηλαδή σε "ό,τι γνωρίζουν οι μαθητές", ενώ το PISA προσπαθεί να βρει "τι οι μαθητές μπορούν να κάνουν με τις γνώσεις τους".

Το TIMSS χρησιμοποιεί το πρόγραμμα σπουδών ως κύρια οργανωτική έννοια. Τα δεδομένα που συλλέγονται έχουν τρεις πτυχές, την προβλεπόμενη διδακτέα ύλη, όπως αυτή ορίζεται από τις χώρες ή τα εκπαιδευτικά συστήματα, το πρόγραμμα σπουδών που διδάσκεται στην πραγματικότητα και το επιτευχθέν πρόγραμμα σπουδών ή ό, τι οι μαθητές έχουν μάθει (Mullis κ.α. 2008).

Το PISA δεν εστιάζει άμεσα σε συγκεκριμένη πτυχή του προγράμματος σπουδών, αλλά έχει ως στόχο να αξιολογήσει πόσο καλά οι δεκαπεντάχρονοι μαθητές μπορούν να εφαρμόσουν τις γνώσεις τους για τα μαθηματικά στην καθημερινή τους ζωή. Το πρόγραμμα επικεντρώνεται στην μαθηματική παιδεία, η οποία ορίζεται ως ικανότητα ενός ατόμου να εντοπίσει και να κατανοήσει το ρόλο των μαθηματικών στα υλικά στοιχεία, να κάνει βάσιμες κρίσεις, και να χρησιμοποιεί τα

μαθηματικά με τρόπους που ικανοποιούν τις ανάγκες της ζωής του ατόμου (EUOECD, 2003).

ΤοTIMSS διεξάγεται κάθε τέσσερα χρόνια και μέχρι πρόσφατα μόνο λίγες ευρωπαϊκές χώρες είχαν συμμετάσχει, μεταξύ αυτών ,η Ιταλία. Το PISA, από την άλλη, καλύπτει σχεδόν όλα τα ευρωπαϊκά εκπαιδευτικά συστήματα. Ο τελευταίος γύρος του PISA (2009) αφορούσε την πλειονότητα των ευρωπαϊκών χωρών. Το TIMSS χρησιμοποιεί δείγματα ποιότητας που βασίζονται στα τρέχοντα εκπαιδευτικά προγράμματα ενώ το PISA χρησιμοποιεί δείγματα με βάση την ηλικία.

Καθώς το TIMSS επικεντρώνεται στο πρόγραμμα σπουδών, συγκεντρώνει ένα ευρύτερο φάσμα βασικών πληροφοριών σχετικά με τα περιβάλλοντα μάθησης των μαθητών σε σχέση με το PISA. Σε αυτή τη περίπτωση οι μαθητές ρωτούνται για τη στάση τους προς τα μαθηματικά, το σχολείο, τα ενδιαφέροντα τους και τη χρήση του υπολογιστή. Μπορούν, επίσης, να παρέχουν πληροφορίες σχετικά με τα εξωσχολικά τους ενδιαφέροντα.

Συγκεκριμενοποιώντας τώρα το πεδίο των παραπάνω ερευνών θα είχε ενδιαφέρον να μελετήσουμε το περιεχόμενο και τη μορφή των εξωτερικών/εξωτερικά εγκεκριμένων εξετάσεων στα Μαθηματικά, όπου διαπιστώνονται σημαντικές διαφοροποιήσεις από χώρα σε χώρα.

Στον Πίνακα 2 παρέχονται στοιχεία σχετικά με τη διάρκεια, τον αριθμό των διαγωνισμάτων και τον αριθμό των ερωτήσεων στο μάθημα των Μαθηματικών.

Πηγή Ευρυδίκη 2011

Πηγή

Πίνακας 2 2: Μαθηματικά: Αριθμός γραπτών διαγωνισμάτων, διάρκεια και ερωτήσεις

ΧΩΡΑ	ΑΡΙΘΜΟΣ ΓΡΑΠΤΩΝ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΩΝ	ΣΥΝΟΛΙΚΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ ΕΡΩΤΗΣΕΩΝ (ΧΩΡΙΣ ΕΠΙΛΟΓΗ, ΕΚΤΟΣ ΕΑΝ ΔΗΛΩΘΕΙ)
Γερμανία (Βαυαρία)(1997) προχωρημένου επιπέδου	Ένα (4 ώρες)	6 ασκήσεις (20 ερωτήσεις) (Η επιτροπή εξετάσεων επιλέγει μία άσκηση από τις τρεις ακόλουθες θεματικές κατηγορίες: Άλγεβρα -Υπολογισμοί, Γεωμετρία, Απεικόνιση δεδομένων-Πιθανότητες-Στατιστική)
Γερμανία (Β. Ρηνανία, Βεστφαλία) προχωρημένου επιπέδου	Ένα (5 ώρες)	3 ασκήσεις
Γαλλία (1997), Παρίσι, bac s specialism	Ένα (4 ώρες)	3 ασκήσεις (9 ερωτήσεις)
Ιταλία (1995) scientific liceo theme of mathematics	Ένα (5 ώρες)	3 ασκήσεις (επιλέγονται 2)

Στον Πίνακα 3 δίδεται το ποσοστό των ερωτήσεων που περιέχουν οι γραπτές εξετάσεις από κάθε θεματική κατηγορία, σύμφωνα με την ταξινόμηση κατά TIMMS.

Πίνακας 3 3: Μαθηματικά: Ποσοστό των ερωτήσεων των εξετάσεων που αφορούν κάθε θεματική κατηγορία

Πηγή

ΧΩΡΑ	ΕΠΙΠΕΔΟ	N	MG	P	FRE	DPS	EA	VS	
Γερμανία (Βαυαρία)	Προχωρημένου επιπέδου	0	0	29	0	18	33	20	0
Γερμανία (Βόρεια Ρηνανία, Βεστφαλία)	Προχωρημένου επιπέδου	0	0	24	0	35	0	30	11
Γαλλία	Bac S εξειδίκευση	0	0	35	0	12	12	41	0
Ιταλία	Scientific liceo	0	0	22	0	22	0	56	0

Κλειδιά:**N**: Αριθμοί, **M**: Μετρήσεις, **G**: Γεωμετρία, **P**: Αναλογίες, **FRE**: Συναρτήσεις, αλγεβρικές παραστάσεις και εξισώσεις, **DPS**: Απεικονίσεις δεδομένων, πιθανότητες, στατιστική,**EA:**

Στοιχειώδης ανάλυση, **VS**: Τεκμηρίωση και δομή

Πηγή Ευρυδίκη 2011

Από την ανάλυση των διαγωνισμάτων για τις εξετάσεις στα Μαθηματικά, μπορούμε να διαπιστώσουμε σημαντικές διαφοροποιήσεις από χώρα σε χώρα, όχι μόνο σε ό,τι αφορά στις θεματικές κατηγορίες της μαθηματικής ύλης που περιλαμβάνεται, αλλά και σχετικά με την έμφαση που δίνεται σε κάθε μια από αυτές.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^{Ο}

Η διδασκαλία των Μαθηματικών στην Ευρώπη (περιπτώσεις μελέτης:

Γαλλία, Γερμανία &Ιταλία)

3.0. Εισαγωγή

Οι χώρες της Ευρωπαϊκής Ένωσης έχουν μεγάλες διαφοροποιήσεις στη διάταξη του προγράμματος της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης. Όσον αφορά ακόμη και στον αριθμό των μαθημάτων που παρακολουθούν οι μαθητές στην γενική Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, αυτός επίσης ποικίλει. Έτσι για παράδειγμα, ενώ στο Ηνωμένο Βασίλειο οι μαθητές παρακολουθούν τρία μαθήματα, σε όλες τις άλλες χώρες, όπως η Γερμανία, η Γαλλία και η Ελλάδα, ο αριθμός αυτός κυμαίνεται από πέντε έως και δέκα. Ομοίως, μεγάλες διακυμάνσεις υπάρχουν και στο περιεχόμενο των μαθημάτων.

Μεταξύ των υποχρεωτικών μαθημάτων της Γενικής Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης στο φάσμα των χωρών της ΕΕ είναι και τα Μαθηματικά. Επειδή δεν ήταν δυνατή η απευθείας σύγκριση του χρόνου που διατίθεται σε αυτά, καθώς υπάρχουν διαφορετικές εννοιολογικές προσεγγίσεις και

προσδιορισμοί στις υπό μελέτη χώρες, δημιουργήθηκαν δείκτες για να συγκρίνουν το μέγιστο *ποσοστό* χρόνου που διατίθεται σε διαφορετικά μαθήματα/διδακτικές ενότητες στο τελευταίο έτος της δευτεροβάθμιας γενικής εκπαίδευσης για τους μαθητές που παρακολουθούν μεγαλύτερης διάρκειας κύκλους σπουδών. Γενικά έχει παρατηρηθεί ότι σχετικά μεγάλο ποσοστό χρόνου διατίθεται για τα μαθηματικά στις χώρες Ελλάδα και Γαλλία.

Για τη διευκόλυνση των συγκριτικών μελετών το περιεχόμενο των Μαθηματικών έχει κατηγοριοποιηθεί σε τρεις κυρίως θεματικούς τομείς:

- Άλγεβρα και Υπολογισμοί
- Γεωμετρία
- Απεικόνισηδεδομένων, Πιθανότητες και Στατιστική

Ο παρακάτω πίνακας παρέχει στοιχεία σχετικά με τους κύριους τομείς των Μαθηματικών που υπάρχουν στα αναλυτικά προγράμματα των χωρών.

Θεματικοί τομείςτων Μαθηματικών

ΤΟΜΕΊΣ	**ΑΡΙΘΜΟΣ ΧΩΡΩΝ/ΠΕΡΙΟΧΩΝ ΠΟΥ ΚΑΛΥΠΤΟΥΝ ΑΥΤΟΝ ΤΟΝ ΤΟΜΕΑ (N=21)**
Άλγεβρα και υπολογισμοί	21
Γεωμετρία	21
Απεικόνισηδεδομένων, πιθανότητες , Στατιστική	19

Πηγή: Eyridice, 2011 & 2012

Πιθανότητες, Μεταθέσεις, Συνδυασμοί.

Όπως φαίνεται, όλες οι χώρες καλύπτουν τους τομείς της *Άλγεβρας, των Υπολογισμών και της*

Γεωμετρίας. Σχεδόν όλες οι χώρες περιλαμβάνουν τους τομείς της *Απεικόνισης δεδομένων, των Πιθανοτήτων και της Στατιστικής*, με εξαίρεση τη Σκωτία και την Ολλανδία.

Σε πολλές χώρες ο τομέας των *Πιθανοτήτων και της Στατιστικής* παρέχεται ως μάθημα επιλογής, όπως στην περίπτωση της **Γερμανίας** (Βόρεια Ρηνανία- Βεστφαλία). Σε κάποιες άλλες χώρες ο τομέας αυτός διδάσκεται στην αρχή της ανώτερης Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης και συχνά υπάρχουν κοινοί κύκλοι μαθημάτων που προηγούνται της εξειδίκευσης, όπως συμβαίνει στη **Γαλλία**. (Ευρυδίκη, 2011)

Το περιεχόμενο διδασκαλίας των Μαθηματικών ποικίλει όπου υπάρχουν κατευθύνσεις. Γενικά, οι μαθητές που ακολουθούν την κατεύθυνση των Φυσικών Επιστημών επιλέγουν τα πιο εξειδικευμένα και προχωρημένα Μαθηματικά. Αντίθετα, γενικού περιεχομένου Μαθηματικά παρακολουθούν οι μαθητές που έχουν επιλέξει την κατεύθυνση των Κοινωνικών Επιστημών (όπως και των άλλων κατευθύνσεων). Όπου το μάθημα των Μαθηματικών διδάσκεται ως ένα εκ των διαφόρων μαθημάτων του προγράμματος σπουδών, τότε το περιεχόμενό του δε διαφοροποιείται με τον ίδιο τρόπο και οι μαθητές μπορούν να επιλέγουν μια μορφή εξειδίκευσης στα Μαθηματικά στο πλαίσιο του αναλυτικού προγράμματος. Υπάρχει η ευκαιρία για παρακολούθηση του μαθήματος σε ένα πιο προχωρημένο επίπεδο (όπως στη Γερμανία και την Ιρλανδία), αλλά αυτό δε συμβαίνει για όλες τις χώρες (π.χ. Λιχτενστάιν).

Ο παρακάτω πίνακας παρέχει στοιχεία για τις χώρες που ακολουθούν αυτά τα διαφορετικά μοντέλα.(Ευρυδίκη, 2011)

Μοντέλα διδασκαλίας Μαθηματικών

ΜΟΝΤΕΛΑ ΔΙΔΑΣΚΑΛΊΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ	ΧΩΡΕΣ
Ειδίκευσημέσα από κατευθύνσεις	Αυστρία, Βέλγιο, Δανία, Ισπανία, Φινλανδία, **Γαλλία, Ελλάδα**, Ισλανδία, **Ιταλία,** Λουξεμβούργο, Ολλανδία (2), Νορβηγία, Σουηδία
Χωρίς κατευθύνσεις (Γενικής Παιδείας)	**Γερμανία**, Ιρλανδία, Λιχνενστάιν, Πορτογαλία, Ηνωμένο Βασίλειο

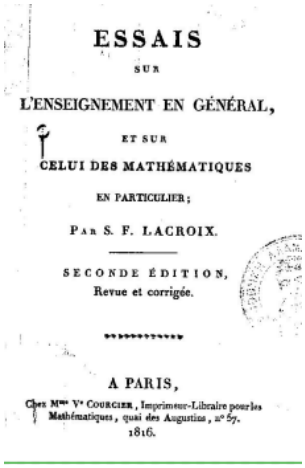
Πηγή: Ευρυδίκη, 2011

3.1 Η διδασκαλία των Μαθηματικών στη Γαλλία

Τα μαθηματικά είναι η τέχνη να δίνεις το ίδιο όνομα σε διαφορετικά πράγματα.

ΑνρίΠουανκαρέ

Η σπουδαιότητα και συνάμα αναγκαιότητα της διδασκαλίας των μαθηματικών στην Γαλλία έχει ρίζες τόσο βαθιές όσο και η Γαλλική Επανάσταση.

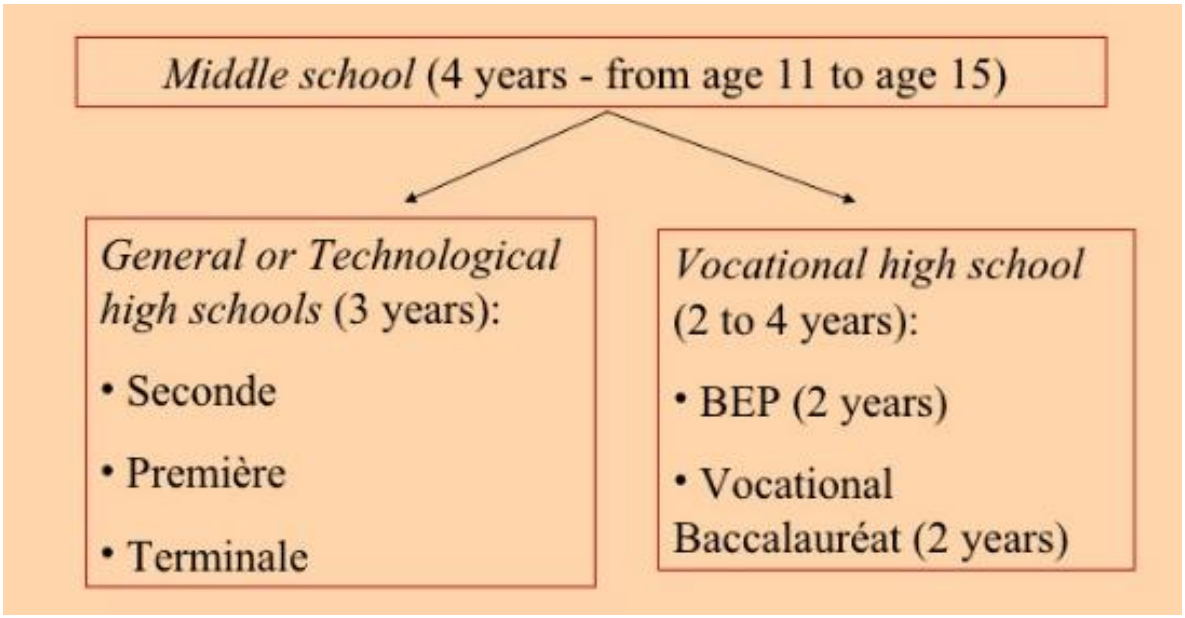

ESSAIS
SUR
L'ENSEIGNEMENT EN GÉNÉRAL,
ET SUR
CELUI DES MATHÉMATIQUES
EN PARTICULIER;
PAR S. F. LACROIX.
SECONDE ÉDITION,
Revue et corrigée.
A PARIS,
Chez Mme Ve COURCIER, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins, n° 57.
1816.

Ένα από τα άμεσα έργα της επαναστατικής κυβέρνησης του 1789 ήταν η εκπαιδευτική μεταρρύθμιση, κομμάτι της οποίας ήταν και η ένταξη της μαθηματικής και επιστημονικής παιδείας στο βασικό πρόγραμμα σπουδών.

Ας έλθουμε όμως στο μοντέλο εκπαίδευσης που κυριαρχεί τις τελευταίες δεκαετίες στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση της χώρας.

Η Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση στη Γαλλία διακρίνεται από 2 κύκλους σπουδών. Ο πρώτος, και κοινός για όλους κύκλος, διαρκεί 4 χρόνια, από την ηλικία των 11χρόνων έως την ηλικία των 15 χρόνων. Εν συνεχεία υπάρχει η επιλογή για συνέχιση των λυκειακών σπουδών είτε σε ένα 3ετή κύκλο τεχνολογικών σπουδών (από τα 15 έως και τα 18χρονών) είτε ενός διετούς κύκλου σπουδών στα Επαγγελματικά Λύκεια. Ο δεύτερος αυτός κύκλος καλείται "baccalauréat" και μπορεί να οδηγήσει σε ανώτερες σπουδές Εκπαίδευσης ή άμεσα να ανοίξει το δρόμο για την επαγγελματική ζωή καθώς παρέχει κάποια ελάχιστα επαγγελματικά δικαιώματα. Οι μαθητές πηγαίνουν στο σχολείο μεταξύ 24 έως 28 ώρες την εβδομάδα, κατανεμημένα σε τέσσερις, τέσσερις και μισή, ή πέντε ημέρες ανάλογα με την περιοχή. Οι μαθητές που προετοιμάζονται στο baccalauréat μπορεί να έχουν ως και 40 ώρες την εβδομάδα.

Ακολουθεί σχετική γραφική απεικόνιση:



(πηγή: french-property.com)

Υπάρχουν τρεις κύριες κατευθύνσεις στα γενικά λύκεια:

- Λογοτεχνία, Γλώσσα, Φιλοσοφία και Τέχνες
- Οικονομίας και Κοινωνικών Επιστημών
- Επιστήμη

Η διαφοροποίση των κατευθύνσεων ξεκινά στο "Terminale" με την επιλογή «Ειδικότητας» (Μαθηματικά, Φυσική Επιστήμη ή Βιολογίας για τον επιστημονικό προσανατολισμό). Για κάθε βαθμίδα αυτής της κατεύθυνσης υπάρχει ένα εθνικό αναλυτικό πρόγραμμα, ενώ τα σχολικά εγχειρίδια επιλέγονται από τα σχετικά τμήματα των σχολείων αυτών.

Η διδασκαλία των μαθηματικών στη Γαλλική Δευτεροβάθμια εκπαίδευση κυμαίνεται από 3,5 έως και 4 ώρες την εβδομάδα στο σύνολο των 23,5 εως 40 - στην τελευταία λυκειακή τάξη- εβδομαδιαίων διδακτικών ωρών που έχουν να καλύψουν ανά τάξη οι γάλλοι μαθητές. Αξίζει να σημειωθεί ότι η διδακτική ώρα αντιστοιχεί σε 55 λεπτά. Ακολουθούν συγκεντρωτικοί πίνακες που

δηλώνουν τις ώρες και τα μαθήματα διδασκαλίας ανά έτος: (πηγή: french-property.com)

Sixième (11-12)

Subject	Hours
French	5h
Maths	4h
Modern Lang	4h
History/Geog/Civics	3h
Science/Technology	3h
Arts/Music	2h
Physical Recreation	4h

Cinquième (12-13)

Subject	Hours
French	4h
Maths	3.5h
Modern Lang	3h
History/Geog/Civics	3h
Sciences	4.5h
Arts/Music	2h
Physical Recreation	3h

Quatrième (13-14)

Subject	Hours
French	4h
Maths	3.5h
Modern Lang 1	3h
Modern Lang 2	3h
History/Geog/Civics	3h
Sciences	4.5h
Arts/Music	2h
Physical Recreation	3h

Troisième (14-15)

Subject	Hours
French	4.5h
Maths	4h
Modern Lang 1	3h
Modern Lang 2	3h
History/Geog/Civics	3.5h
Science/Technology	3h
Physics/Chemistry	2h
Arts/Music	2h
Physical Recreation	3h
Work/Life (Optional)	3h

(πηγή: french-property.com)

Η Μεταρρύθμιση του 2000 στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση οδήγησε στη δημιουργία μιας μικτής ομάδας εμπειρογνωμόνων, συμπεριλαμβανομένων μαθηματικών, εκπαιδευτικών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης και Επιθεωρητών. Η πρόσφατη αυτή εκπαιδευτική μεταρρύθμιση δεν ανέτρεψε μεν το υπάρχον εκπαιδευτικό σύστημα, αλλά αξίζει να σημειώσουμε ότι έφερε μερικές σημαντικές αλλαγές σε αυτό, όπως: δόθηκε έμφαση στη διαφοροποίηση του

προγράμματος σπουδών σύμφωνα με τους διαφορετικούς προσανατολισμούς στους κλάδους όπως έχουν ήδη διαμορφωθεί. Επιπλέον αξιολογήθηκε και καταχωρήθηκε ως αυξημένης σημασίας ο ρόλος της τεχνολογίας, κυρίως του λογισμικού, της δυναμικής γεωμετρίας και των υπολογιστικών φύλλων.

Οι κυριότεροι λόγοι που εξηγούν αυτές τις αλλαγές, όπως παρουσιάστηκαν εν περιλήψει λίγο πιο πάνω, έχουν να κάνουν με την εξέλιξη των μαθηματικών, των σχέσεων μεταξύ των μαθηματικών κατευθύνσεων καθώς και αυτών με λοιπούς επιστημονικούς κλάδους. Προσπαθώντας να ξεπεραστεί το όραμα της επιστημονικής «αριστείας», δίνεται μεγαλύτερη προσοχή στη διαφορετικότητα των επαγγελματικών μαθηματικών αναγκών, στην ανάπτυξη της αυτονομίας των μαθητών, στην ικανότητα τους να αντιλαμβάνονται το ρόλο που τα μαθηματικά παίζουν στον περιβάλλοντα κόσμο, και την ανάγκη αρμονικής συνεργασίας σε κοινές μαθησιακές ομάδες. Όσον αφορά στη μαθηματική ύλη η Στατιστική και οι Πιθανότητες είναι ένας από τους τρεις κύριους τομείς στην εξεταστέα ύλη για το «Seconde» επίπεδο και καλύπτουν το 1/8 του συνολικού χρόνου διδασκαλίας των μαθηματικών σε όλες τις βαθμίδες της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης.

Η Στατιστική:

Η διδασκαλία της Στατιστικής δεν περιορίζεται στην περιγραφική Στατιστική, αλλά περιλαμβάνει και την επαγωγική μέσα από τη μελέτη των διακυμάνσεων της δειγματοληψίας. Επιπλέον αφορά θέματα που συνδέονται με τη στατιστική Προσομοίωση μιας έρευνας, με δείγματα μεταβλητού μεγέθους, καθώς και διαστήματα εμπιστοσύνης που συνδέεται με μια έρευνα και συναφείς τύπους.

Οι Πιθανότητες:

Η διδασκαλία των Πιθανοτήτων αρχίζει στο «Première», συνεχίζεται στο «Terminale» και περιλαμβάνει προσέγγιση για διακριτές και συνεχείς νόμους. Ο σκοπός της διδασκαλίας μπορεί να συμπυκνωθεί στην εξής φράση: «να δούμε σε απλές περιπτώσεις τι είναι ένα πιθανοτικό μοντέλο και να προσεγγίσουμε πιθανολογικούς υπολογισμούς».

Τέλος, ένα θεμελιώδες θέμα της μαθηματικής εκπαίδευσης το οποίο έχει επανεξεταστεί και στο οποίο δοθεί βαρύτητα αφορά στη στοιχειακή ανάλυση (λογισμός) και στην ανάπτυξη φυσικών θεωρημάτων άμεσα συνδεδεμένων με την τρέχουσα τεχνολογική πρόοδο.

Επικαιρότητα:

Το 2015 η Γαλλική Κυβέρνηση προτείνει αμφιλεγόμενες εκπαιδευτικές μεταρρυθμίσεις στο σύστημα "College" (Γυμνάσιο για τις ηλικίες 11-15) προκειμένου να καταστεί λιγότερο ελιτίστικο και να δώσει σε όλους τους μαθητές, ανεξάρτητα από το υπόβαθρό τους, τις ίδιες εκπαιδευτικές ευκαιρίες. Οι μεταρρυθμίσεις αυτές περιλαμβάνουν τη διδασκαλία των Ξένων Γλωσσών και της Ιστορίας, ενθαρρύνοντας τους εκπαιδευτικούς να εργαστούν από κοινού για να διδάξουν θέματα με βάση την αρχή της διεπιστημονικότητας, σπάζοντας έτσι το παραδοσιακό γαλλικό μοντέλο ένας δάσκαλος-ένα θέμα/μάθημα. Επίσης, στοχεύουν στην ενίσχυση των κοσμικών αξιών και επιτρέπουν τα σχολεία να ορίσουν μέρος των δικών τους προγραμμάτων σπουδών.

Χρονολόγιο της εξέλιξης της διδασκαλίας των Μαθηματικών Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στη Γαλλία.

Παρόλο που από τα μέσα της δεκαετίας του ΄50 έως αυτά του '60 η Γαλλία μετρούσε μεγάλες μαθηματικές επιτυχίες (4 μετάλλια Field), ο μαθηματικός κόσμος της χώρας ήταν πεπεισμένος για την ανάγκη μιας μαθηματικής μεταρρύθμισης. Η ανάγκη για να αφομοιωθούν καινούργιες ιδέες, καθώς και να αναδιαμορφωθούν οι διδακτικές μέθοδοι ήταν οι παράγοντες που έφεραν στο προσκήνιο τη μεταρρύθμιση αυτή. (Revuz,1981)

Πρωτοπόροι της μεταρρύθμισης αυτής στη Γαλλία υπήρξαν οι καθηγητές Πανεπιστημίων αλλά και Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης. Ωστόσο, τα "Νέα" ή "Μοντέρνα Μαθηματικά" (Μ.Μ.) που προτάθηκαν ως πεδίο ανανεωτικής σημασίας δεν εντάχθηκαν ομαλά στο σχολικό πρόγραμμα. Οι λόγοι ήταν πρακτικοί. Δεν υπήρχαν τα απαραίτητα συγγράμματα, αλλά ούτε και η αναγκαία μετεκπαίδευση των διδασκόντων ώστε να καλύψουν τα νέα πεδία της ύλης. (Revuz,1981)

Στη Γαλλία υπήρξε συμφωνία τόσο κατά τη δεκαετία 1960 όσο και κατά την

επόμενη, σχετικά με τη σκοπιμότητα ενός κοινού εθνικού προγράμματος σπουδών για τα “κλασσικά” σχολεία. Το εκπαιδευτικό πρόγραμμα σπουδών επίσης εστιάζει στη δυνατότητα επίτευξης ίσης μεταχείρισης των μαθητών και ίσης διασποράς της γνώσης. Όσον αφορά στο εθνικό πρόγραμμα σπουδών, τα μαθηματικά έχουν γίνει «ο πυρήνας του σχολικού προγράμματος σπουδών της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης». Το πρόγραμμα σπουδών ακολουθείται σε όλα τα σχολεία, ακόμη και στα ιδιωτικά σχολεία, επειδή λαμβάνουν επιδοτήσεις από το κράτος και με τη σειρά τους πρέπει να διδάξουν το εθνικό πρόγραμμα σπουδών, ενώ υπηρεσίες ελέγχουν σε τακτικά διαστήματα και ερευνούν εάν συμβαίνει αυτό (Holsinger&Cowell, 2000).

Το μαθηματικό περιεχόμενο του προγράμματος σπουδών των δεκαετιών '60 &'70, χωρίζεται στα αντίστοιχα έτη και διαιρείται σε έξι τομείς: μεγέθη και μέτρηση – Τοποθεσία - την απόσταση και τις γωνίες - Σχήμα, την κατασκευή και τη μετατροπή -θεωρία Αριθμών και Άλγεβρα -οργάνωση των δεδομένων - Αριθμητικές λειτουργίες. Για κάθε έτος ο δάσκαλος δίνει μια λίστα του περιεχομένου για την κάλυψη στις περιοχές αυτές, μαζί με μια περιγραφή του τι οι μαθητές πρέπει να γνωρίζουν και να είναι σε θέση να κάνουν. (Eyridice, 2011)

Κατά τη διάρκεια αυτής της περιόδου εφαρμόζονται οι μεταρρυθμίσεις που έχουν προταθεί από την λεγόμενη "Επιτροπή Lichnérowicz". Το πρόγραμμα της Επιτροπής ήταν σαφές και όριζε ως πρώτο στόχο τη δόμηση νέων κατευθυντήριων οδηγιών για τη διδασκαλία των μαθηματικών στην Πρωτοβάθμια και Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση. Δεύτερος στόχος ήταν η καθιέρωση ενός συστήματος κατάρτισης των εκπαιδευτικών και η δημιουργία νέων θεσμών για αυτό - που αργότερα ονομάστηκαν “IREM”.

Είναι σημαντικό να τονίσουμε, σε αυτό το σημείο, δύο σημαντικά ζητήματα ταυτότητας αυτής της μεταρρύθμισης. Το ένα είναι η καθολική ισχύς της για όλους τους φοιτητές και το δεύτερο η εφαρμογή της όλο το φάσμα της εκπαίδευσης, από το νηπιαγωγείο μέχρι το πανεπιστήμιο.

Η μεταρρύθμιση τελείωσε άδοξα. Τον Ιούνιο του 1973 το έργο της Επιτροπής Lichnérowicz σταμάτησε, χωρίς ποτέ να ολοκληρωθεί η δεύτερη φάση της. Στη δεκαετία του 1980 η όλη μεταρρύθμιση εγκαταλείφθηκε και αμφισβητήθηκε ακόμη και από τους υποστηρικτές της.(culturemath.ens.fr)

Τη δεκαετία του 1980 παρατηρείται μια κίνηση «backtotheBasics», επαναφοράς δηλαδή παλαιότερων δεδομένων και περιορισμού των “Μοντέρνων Μαθηματικών”. Οι λόγοι που έθεσαν σε τροχιά αυτή τη νέα κίνηση έχουν να κάνουν με την πεποίθηση πολλών δασκάλων ότι η διδασκαλία των μαθηματικών πια δεν συγκροτούνταν από ένα σύνολο κοινών αποδεκτών κανόνων, μια και η Άλγεβρα παρουσιαζόταν χωρίς δομή και η Γεωμετρία χωρίς απόδειξη.

Στη δεκαετία του '90 συνεχίζεται το ίδιο μοτίβο διδασκαλίας όπως και τη δεκαετία του '80. Μερικά από τα στοιχεία που σχηματοποιούν το νέο πρόγραμμα μαθηματικών σπουδών στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση έχουν να κάνουν με τα παρακάτω:

1. Στο επίκεντρο των σχολικών μαθηματικών βρίσκεται πλέον η επίλυση προβλημάτων.

2. Οι στόχοι της διδασκαλίας διευρύνονται πέρα από τις υπολογιστικές ικανότητες των μαθητών.

3. Τα προγράμματα των μαθηματικών ενισχύονται με τη χρήση των υπολογιστών

Γενικά, συμπεραίνουμε ότι η καινούρια μεταρρύθμιση εστίασε στις διαδικασίες επίλυσης προβλημάτων και στην αξιοποίηση της τεχνολογίας κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας. Η δεκαετία που ακολουθεί (2000) δε συνεχίζει στο μοτίβο αυτό αλλά αυτό που αναλυτικά περιγράφηκε στην αρχή της ενότητας. (Eyridice, 2011 ;culturemath.ens.fr)

3.2 Η διδασκαλία των Μαθηματικών στη Γερμανία

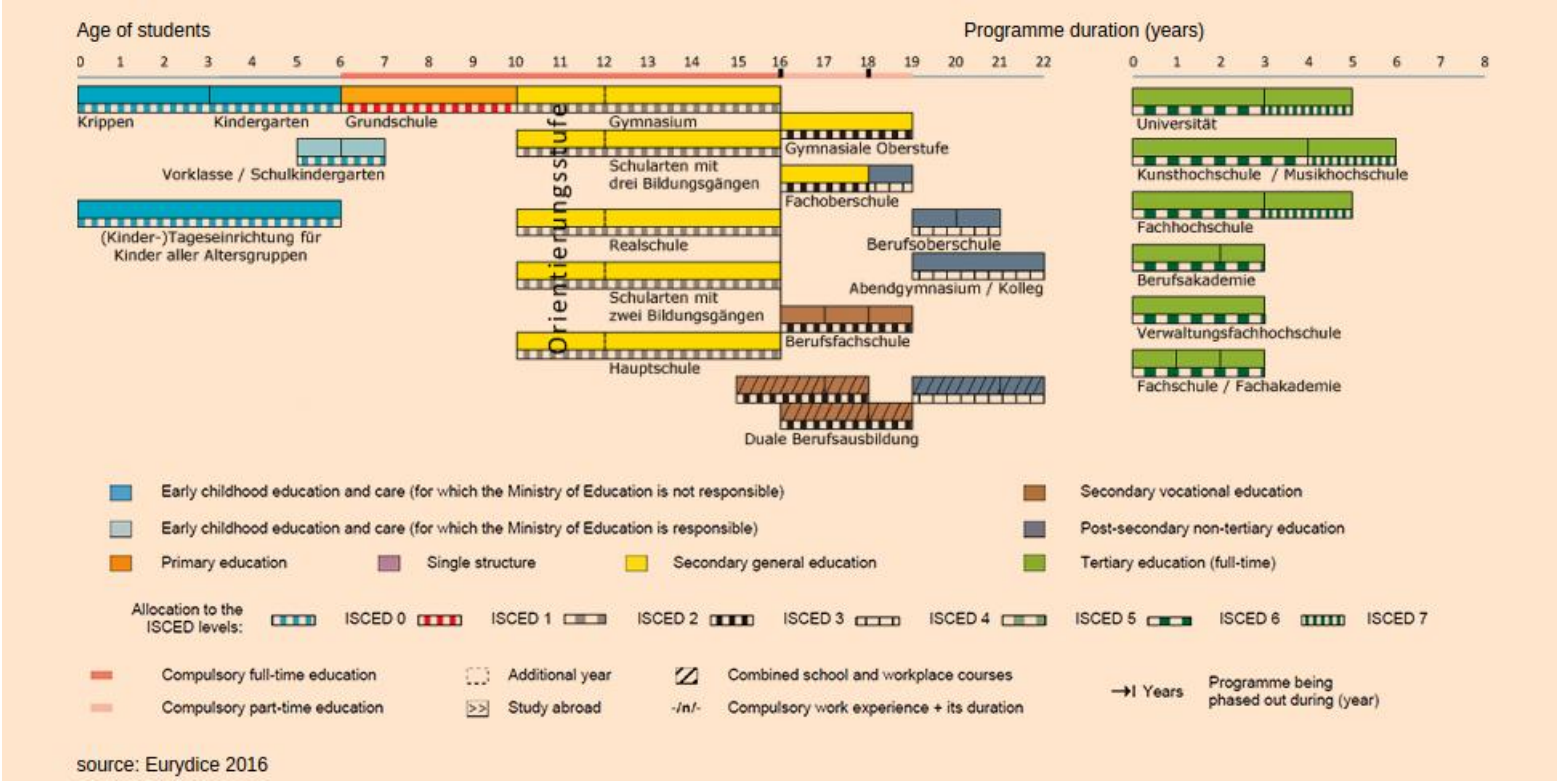
Όταν οι νόμοι των μαθηματικών ανταποκρίνονται στην πραγματικότητα, δεν είναι σαφείς, και όταν είναι σαφείς, δεν ανταποκρίνονται στην πραγματικότητα.

Αλβέρτος Αϊνστάιν

Το εκπαιδευτικό σύστημα στη Γερμανία διαφέρει από κρατίδιο σε κρατίδιο. Εδώ η εκπαίδευση εναπόκειται στη δικαιοδοσία του καθενός από τα 16 γερμανικά κρατίδια

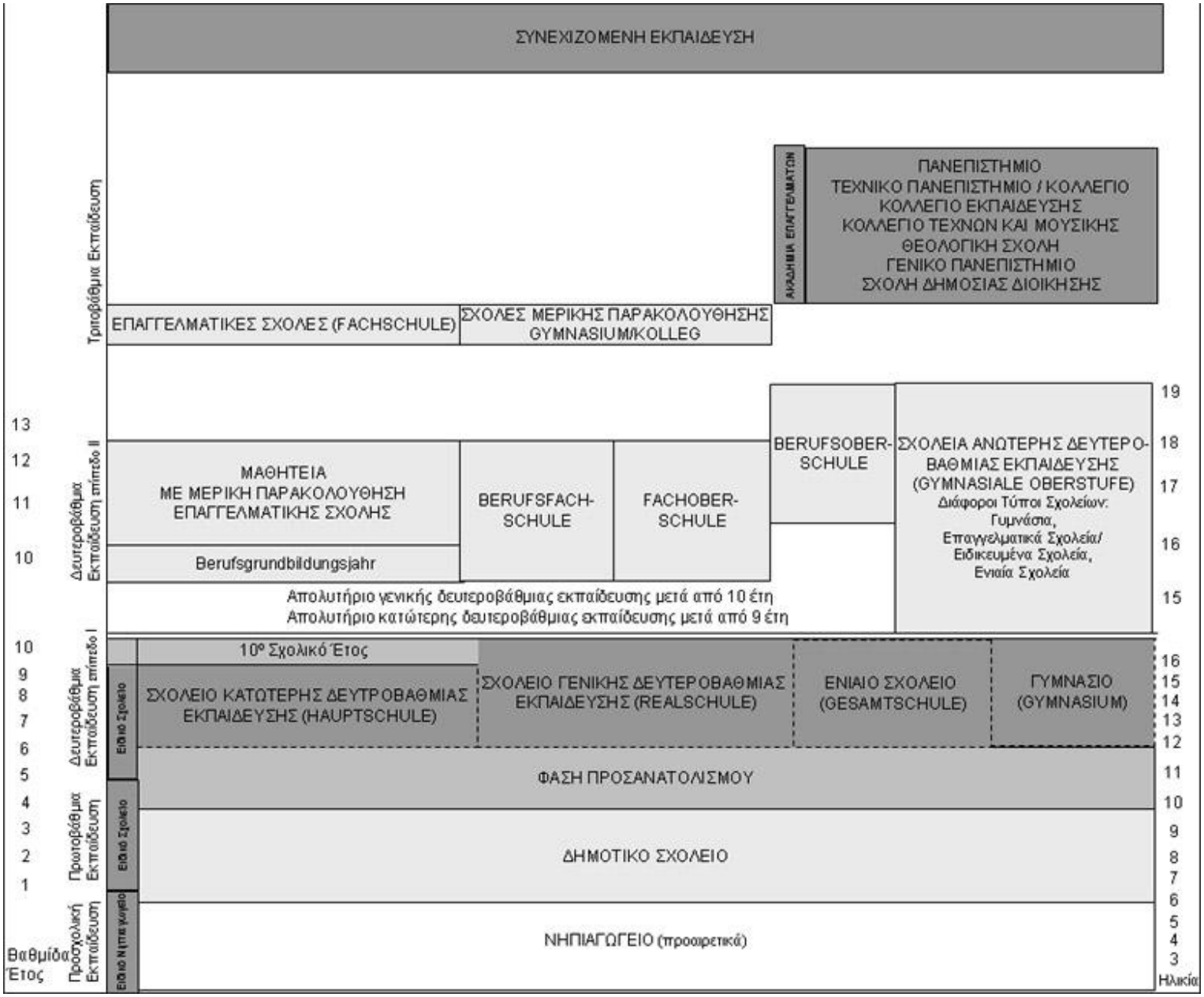
(Bundesländer). Παράλληλα, η διάσκεψη των υπουργών Παιδείας όλων των κρατιδίων (Kultusministerkonferenz, KMK) συντονίζει τις εκπαιδευτικές πρακτικές σε εθνικό επίπεδο.

Η Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση στην Ομοσπονδιακή Δημοκρατία της Γερμανίας έχει σε μεγάλο βαθμό ένα γενικό τριστρωματικό εκπαιδευτικό σύστημα. Ακολουθεί αναλυτικός σχετικός πίνακας:



source: Eurydice 2016

Όπως μπορούμε να δούμε, το εκπαιδευτικό σύστημα στη Γερμανία είναι οριακά δαιδαλώδες. Ο ακόλουθος πίνακας μπορεί να προσφέρει μια καλύτερη εικόνα ως προς τη διάταξη αυτού του συστήματος.



Πηγή: Ευρυδίκη 2012

Όσον αφορά στη διδασκαλία των μαθηματικών, υπάρχουν λεπτομερείς κανονισμοί για όλο το φάσμα της διδακτέας ύλης. Επιπλέον, είναι σημαντικό να σημειώσουμε ότι για τα σχολικά βιβλία που χρησιμοποιούνται στην τάξη απαιτείται άδεια του κράτους. Από την άλλη πλευρά, οι εκπαιδευτικοί έχουν αρκετές ελευθερίες όσον αφορά στο μοντέλο διδασκαλίας που θα επιλέξουν, ενώ στα περισσότερα κρατίδια ορίζεται από τους ίδιους ακόμη και η επιλογή των θεμάτων των τελικών εξετάσεων.

Συνολικά, οι στόχοι, σχετικά με την εκπαίδευση των μαθηματικών σε δευτεροβάθμιο επίπεδο, μπορούν συγκεντρωτικά να καταγραφούν ως εξής:

- ✓ τα μαθηματικά ως θεωρία και ως εργαλείο για την επίλυση των προβλημάτων στις φυσικές και κοινωνικές επιστήμες
- ✓ θεμελιώδεις ιδέες για τα μαθηματικά, όπως η ιδέα της γενίκευσης, την ανάγκη για την απόδειξη, διαρθρωτικές πτυχές, οι αλγόριθμοι, η ιδέα του απείρου, και η αιτιοκρατική σχέση
- ✓ η επαγωγική και απαγωγική συλλογιστική, μέθοδοι για την απόδειξη, axiomatics, η τυποποίηση, η γενίκευση / προδιαγραφές
- ✓ η διακύμανση των επιπέδων, η επιχειρηματολογία, τα επίπεδα εκπροσώπησης σε όλους τους τομείς και οι πτυχές της διδασκαλίας των μαθηματικών

Συγκεκριμένα, η μαθηματική ύλη που διδάσκεται στις διάφορες βαθμίδες αφορά στα παρακάτω μαθηματικά πεδία:

Βαθμίδα $5^{η}$-$6^{η}$

Διδάσκονται,

η χρήση των μεταβλητών, απλές εξισώσεις, μετατροπή μεγεθών, η περιοχή ορθογωνίων, θεμελιώδεις γεωμετρικές έννοιες (όπως το σημείο, γραμμή, παράλληλη, γεωμετρικές μορφές - στοιχειώδη Θεωρία Αριθμών (πρώτοι αριθμοί, κ.α.) και κλάσματα και δεκαδικά κλάσματα.

Βαθμίδα 7η-$8^{η}$

Διδάσκονται,

οι σχέσεις και οι λειτουργίες - ποσοστώσεις - τρίγωνα, τετράπλευρα, μέτρησης γωνίας και των συναφή θεωρήματα - περιοχή των πολυγώνων, όγκος πρίσματα - γραμμικές εξισώσεις και ακέραιοι και ρητοί αριθμοί.

Βαθμίδα 9η-$10^{η}$

Διδάσκονται,

Πραγματικοί αριθμοί - τετραγωνική λειτουργίες και εξισώσεις – ομοιότητα - - εκθετικές συναρτήσεις - περιοχή του κύκλου, ο όγκος της πυραμίδας, κυλίνδρου, κώνου και σφαίρας και τριγωνομετρία.

Βαθμίδα 11η-13η

Διδάσκονται,

Διανυσματικός Λογισμός - διανυσματικός χώρος, αναλυτική γεωμετρία - -γεωμετρικοί μετασχηματισμοί - αλγεβρικές δομές και πιθανότητες και στατιστικά στοιχεία.

(mathematik.uni-wuerzburg.de)

Χρονολόγιο της εξέλιξης της διδασκαλίας των Μαθηματικών Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στη Γερμανία.

Η πρόοδος στα μαθηματικά κατά τη διάρκεια των προηγούμενων δεκαετιών και η χρήση της «σύγχρονης μαθηματικής σκέψης» σε τομείς σημαντικούς για την επιστήμη, την οικονομία και την κοινωνία είχαν ως αποτέλεσμα τον εκσυγχρονισμό και στον τομέα της διδασκαλίας των μαθηματικών. Σε αυτό το περιβάλλον, προστίθεται νέα ύλη στο σχολικό πρόγραμμα των μαθηματικών που έχει να κάνει με τη χρήση των συνόλων, τις αντιστοιχίσεις, τη θεωρία αριθμών, τις συναρτήσεις, τις εξισώσεις και τις ανισότητες.

Η πιο σημαντική αλλαγή στη διδασκαλία των μαθηματικών στη Γερμανία έγινε περί το 1968. Η "Μόνιμη Διάσκεψη των Υπουργών Παιδείας και Πολιτισμού" των κρατών της Ομοσπονδιακής Δημοκρατίας της Γερμανίας (StändigeKonferenzderKultusministerderLänderinderBundesrepublikDeutschland, KMK) πρότεινε και κατόπιν ψηφίστηκε νομοσχέδιο σχετικά με τις "συστάσεις και κατευθυντήριες γραμμές, τον εκσυγχρονισμό της Διδασκαλίας των Μαθηματικών στα σχολεία γενικής εκπαίδευσης". (*Henning, N.D.*)

Τη δεκαετία του 1970, δεν παρατηρήθηκαν αξιόλογες μεταβολές στη διδασκαλία των μαθηματικών στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση. Το σημείο, όμως, που αξίζει να σημειώσουμε εδώ έγκειται στο ότι σε κάθε ένα από τα δέκα κρατίδια της χώρας δόθηκαν διαφορετικές κατευθυντήριες γραμμές στη διδασκαλία των μαθηματικών, γεγονός που δεν επέτρεψε να αναπτυχθεί στη χώρα μια κοινή γραμμή μαθηματικής παιδείας. Αντιθέτως, δημιουργήθηκαν αρκετές και φυσικά διαφορετικές μεταξύ τους. (*Henning, N.D.)*

Οι διαφορές που περιγράφονται ανωτέρω οδήγησαν την ένωση καθηγητών να εκπονήσει, νέες οδηγίες για τη διδασκαλία των μαθηματικών "DeutscherVereinzurFörderungdesMathematischenundnaturwissenschaftlichenUnterrichts". Αυτές οι κατευθυντήριες γραμμές κατά τη δεκαετία του '80 είχε αρχικά προγραμματιστεί να εφαρμοστούν σε όλους τους τύπους των σχολείων, αλλά ουσιαστικά ήταν σχεδιασμένες για το Γυμνάσιο. Όσον αφορά στην ύλη, δε φαίνεται να υπήρξαν σημαντικές διαφοροποιήσεις. Ένας καινούργιος τομέας στον οποίο δόθηκε έμφαση αυτή τη περίοδο, ήταν η Γεωμετρία και η ιδέα της συμμετρίας .

Όπως πληροφορούμαστε από πρόσφατη μελέτη του Πανεπιστημίου του Wuerzburg, μετά την επανένωση της Γερμανίας το 1991, τα νέα κράτη χρειάστηκε να οργανώσουν νέα εκπαιδευτικά συστήματα και να διαμορφώσουν νέα προγράμματα σπουδών. Βέβαια, η ανάπτυξη των νέων προγραμμάτων στην εκπαίδευση των μαθηματικών, δε φαινόταν ότι αποτελούσε πρόβλημα καθότι οι διαφορές σε σχέση με τα περιεχόμενα δεν ήταν πολύ μεγάλες μεταξύ των νέων και των παλαιών κρατιδίων. Η μόνη ουσιαστική διαφορά που οφείλουμε να καταδείξουμε έχει να κάνει με τις **Πιθανότητες** και τη **Στατιστική**, πεδία τα οποία δεν είχαν διδαχθεί στην πρώην Λαική Δημοκρατία της Γερμανίας (ΛΔΓ).

Στη σημερινή εκπαιδευτική πραγματικότητα οι περισσότεροι από τους στόχους και τα περιεχόμενα της μαθηματικής εκπαίδευσης της ΛΔΓ φαίνεται ότι εξακολουθούν να είναι αποδεκτά. Ως εκ τούτου, έχουν σημαντική επιρροή στην προγράμματα σπουδών που αναπτύχθηκαν στα νέα κρατίδια από το 1991 και έπειτα. Χαρακτηριστικά δε πεδία της ύλης των μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση είναι τα εξής: οι φυσικοί αριθμοί, τα κλάσματα, στοιχειώδεις γεωμετρικές δομές όπως σημεία, οι ευθείες γραμμές, τα τρίγωνα, τα τετράπλευρα σχήματα, οι κύκλοι και τα κύρια χαρακτηριστικά τους, απλά στερεά, η έκτασή τους (επιφάνεια), ο όγκος τους, γραμμική, τετραγωνική, εκθετική και τριγωνομετρική λειτουργία, γραμμικές και τετραγωνικές εξισώσεις, γραμμικές ανισότητες, γραμμικά συστήματα εξισώσεων, και άλλα.

Τέλος, θα πρέπει να σημειώσουμε ότι η κύρια αλλαγή που συντελείται από τη δεκαετία του '90 και ύστερα είναι η σημαντική συρρίκνωση των μαθηματικών έναντι άλλων θεμάτων σε σχέση με προηγούμενες δεκαετίες. Αυτό ισχύει επίσης και για άλλες θετικές επιστήμες, όπως η φυσική, η χημεία και η βιολογία.

3.3 Η διδασκαλία των Μαθηματικών στη Ιταλία

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144,\ \ldots$$

ακολουθία Φιμπονάτσι

Μπορεί η Γαλλία να έχει "βαριά" μαθηματική παράδοση, η Γερμανία να χτίζει ένα πολύπλοκο εξελικτικό τέτοιο σύστημα, αλλά και η Ιταλία έχει αναδείξει σπουδαία επιτεύγματα τόσο σε επίπεδο έρευνας όσο και εκπαίδευσης της μαθηματικής επιστήμης.

Το εκπαιδευτικό σύστημα στην Ιταλία είναι οργανωμένο σύμφωνα με τις αρχές της επικουρικότητας και της αυτονομίας των σχολείων. Το κράτος έχει αποκλειστική νομοθετική αρμοδιότητα για γενικά εκπαιδευτικά θέματα και ειδικά σχετικά με τις ελάχιστες προδιαγραφές που πρέπει να εξασφαλίζονται για όλα τα σχολεία τη χώρα. Οι Περιφέρειες μοιράζονται τις νομοθετικές αρμοδιότητές τους με το κράτος στον τομέα της εκπαίδευσης, εκτός από την επαγγελματική κατάρτιση στην οποία αυτές έχουν αποκλειστική νομοθετική αρμοδιότητα. Τα σχολεία είναι αυτόνομα ως προς τη διδακτική, την οργάνωση και τις δραστηριότητες έρευνας και ανάπτυξης.

Η υποχρεωτική εκπαίδευση διαρκεί 10 χρόνια (6-16 ετών). Εκτείνεται σε πέντε χρόνια στο Δημοτικό Σχολείο, σε τρία χρόνια στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση και σε δύο χρόνια στην Ανώτερη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση. Η υποχρεωτική εκπαίδευση μπορεί να επιτευχθεί, επίσης, με τη διδασκαλία μαθημάτων τριών και τεσσάρων ετών τα οποία προσφέρονται στο πλαίσιο του περιφερειακού συστήματος επαγγελματικής εκπαίδευσης και κατάρτισης. Το ανώτερο Δευτεροβάθμιο επίπεδο έχει διάρκεια 5 ετών (14-19 ετών) και διακλαδώνεται σε δύο έτη γενικής και επαγγελματικής εκπαίδευσης.

Στο ανώτερο Δευτεροβάθμιο επίπεδο, γίνονται τακτικά εξετάσεις, ενώ μόλις πρόσφατα έγιναν αλλαγές που έχουν να κάνουν με τα Προγράμματα Σπουδών και αφορούν στα Μαθηματικά και στη Φυσική στο LiceoClassico. Αυτές στοχεύουν να εισάγουν τους νέους στην κοινωνία της πληροφορικής και της τεχνολογίας.

Στην ανώτερη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση το σχολικό έτος διαρκεί περί τις 200 ημέρες. Τα εβδομαδιαία ωρολόγια προγράμματα ποικίλλουν, καθώς είναι εξαρτώμενα από τον τύπο του σχολείου. Κατά προσέγγιση έχουν ως εξής, :

• LiceoClassico, 27-29 ώρες την εβδομάδα, 60 λεπτά διδασκαλία

• LiceoScientifico, 25-30 ώρες την εβδομάδα, 60 λεπτά διδασκαλία

• LiceoArtisticoandIstitutid'arte, 31-38 ώρες την εβδομάδα, 60 λεπτά διδασκαλία

• IstitutoTecnico, 31-38 ώρες την εβδομάδα, 50-60 λεπτά διδασκαλία, κατά την κρίση του εκπαιδευτικού

• VocationalEducation, 37-43 ώρες την εβδομάδα, 50-60 λεπτά διδασκαλία, κατά την κρίση του εκπαιδευτικού.

Η διδασκαλία των μαθηματικών και των φυσικών επιστημών εβδομαδιαίως ανέρχεται συνολικά στις 6 ώρες. (istruzione.it)

Χρονολόγιο της εξέλιξης της διδασκαλίας των Μαθηματικών Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στην Ιταλία.

Οι μεταρρυθμιστικές κινήσεις των σύγχρονων μαθηματικών ξεκίνησαν περί τα μέσα του 20ου αιώνα στην Ευρώπη και στις ΗΠΑ και έχουν άμεση επίδραση στην ιταλικό εκπαιδευτικό σύστημα στο Δημοτικό σχολείο και κυρίως σε αυτό της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης και δη στο Λύκειο. (Villa, 1965)

Όσον αφορά στην Ιταλία του 1960, με πρωτοβουλία του Υπουργείου εισήχθησαν, σε διαφορετικές τάξεις και τύπους της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης, "πιλοτικά μαθήματα» για τον πειραματισμό, με βάση τη σύγχρονη αντίληψη για τη διδασκαλία των μαθηματικών. Οι τομείς στους οποίους εστιάζεται η ύλη έχουν να κάνουν με απόκτηση γενικών γνώσεων στην Άλγεβρα, στη λογική δομή της Γεωμετρίας και στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά (Villa, 1965). Αυτό το διάστημα τα μαθηματικά διδάσκονται μαζί με τις πειραματικές επιστήμες, συνολικά 6 ώρες

εβδομαδιαίως.

Μεταξύ των στόχων της διδασκαλίας των μαθηματικών είναι η ανάπτυξη της διαίσθησης, και της ικανότητας να επικοινωνούν οι μαθητές με λεκτικές, γραφικές και συμβολικές εκφράσεις. Τα περιεχόμενα της διδακτικής ύλης χωρίζονται σε επτά θεματικές ενότητες:

i. τη Γεωμετρία και τον Φυσικό κόσμο,
ii. τα σύνολα αριθμών,
iii. τα μαθηματικά ορίσματα και τις πιθανότητες,
iv. τα προβλήματα και τις εξισώσεις,
v. τημέθοδοτωνσυντεταγμένων,
vi. τους γεωμετρικούςμετασχηματισμούς

Τα προγράμματα επικεντρώνονται κυρίως στα πρώτα δύο έτη του Γυμνασίου.

Η εφαρμογή των προγραμμάτων είχε ως στόχο «να συμβαδίσει με τις νέες επιστημονικές και διδακτικές ανάγκες». (Morin 1965)

Τη δεκαετία του ‘70 σε ορισμένες ιταλικές πόλεις, δημιουργήθηκαν μεικτές ομάδες διδασκόντων της Δευτεροβάθμιας και Τριτοβάθμιας Εκπαίδευσης με σκοπό τη δοκιμή των νέων προγραμμάτων σπουδών στο Γυμνάσιο. Αυτές οι ομάδες σχηματίζονται περί το '75 -'76, με συμβάσεις που υπογράφηκαν, αρχικά μεταξύ UMI και CNR (ConsiglioNazionaledelleRicerche), μεταξύ της CNR και MATHESIS (OPI και RICME έργα για το Δημοτικό Σχολείο), καθώς και με το Πανεπιστήμιο της Γένοβας για το Γυμνάσιο.

Οι μεικτές αυτές ομάδες πειραματίστηκαν επί της μεθοδολογίας της διδασκαλίας των σύγχρονων μαθηματικών καταλήγοντας στο γενικό συμπέρασμα ότι η διδασκαλία μέσω “προβλημάτων” είναι ιδιαιτέρως αποτελεσματική. Επιπλέον κατέθεσαν προτάσεις για σχολικά εγχειρίδια, αλλά δεν κατάφεραν να καταλήξουν σε μια ενιαία πρόταση για τη μαθηματική διδακτική μεταρρύθμιση, κάτι που είχε ως αποτέλεσμα μικρό ποσοστό των προτάσεων τους να εγκολπωθούν από τους ευρύτερους διδασκαλικούς κύκλους της Μέσης Εκπαίδευσης. Έτσι, παρόλη τη μεγάλη “κινητικότητα” στην διδακτική των μαθηματικών κατά την δεκαετία του ‘70, εν τέλει δεν παρουσιάζονται μεγάλες αλλαγές σε σχέση με την προηγούμενη δεκαετία.

Μια περιεκτική και εκτεταμένη πρόταση έρχεται περίπου μια δεκαετία αργότερα, το 1985. Εκείνη τη χρονιά ο υπουργός Falcucci προωθεί την PNI (PianoNazionaleperl'informatica), η οποία,

με επίσημο στόχο την προώθηση της διδασκαλίας της επιστήμης των υπολογιστών στο σχολείο, προτείνει την ανανέωση της διδακτέας ύλης για τα μαθηματικά και τη φυσική ώστε να ενσωματωθεί σε αυτά η χρήση της νέας τεχνολογίας (MinisteroPubblicaIstruzione, 1991 & 1992). Το πρόγραμμά του PNI ήταν αρχικά σε πειραματικό στάδιο, ενώ ταυτόχρονα πολλοί δάσκαλοι μετεκπαιδεύονταν ώστε να μπορούν να διδάξουν σε αυτές τις κατηγορίες. Το πρόγραμμα PNI διήρκεσε μέχρι την πρόσφατη μεταρρύθμιση του 2010. (Linati, 2011)

Στη δεκαετία που ακολουθεί, συνεχίζεται η συγκρότηση του προγράμματος των μαθηματικών σπουδών της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης με βάση τις θεματικές των προγραμμάτων του Frascati. Μεταξύ αυτών είναι η διδασκαλία του καρτεσιανού συστήματος η Ευκλείδεια Γεωμετρία, ενώ στο Πρόγραμμα Σπουδών εισάγονται στοιχεία Πιθανοτήτων και Στατιστικής. Δεσπόζουσα θέση σε αυτή την προσπάθεια κατείχε η ιδέα της μαθηματικοποίησης των πραγματικών/φυσικών φαινομένων και της διδασκαλίας τους μέσω προβλημάτων. Γενικά, ως προς τα μαθηματικά, μπορούμε να ισχυριστούμε ότι τα προτεινόμενα προγράμματα ήταν σχεδόν παρόμοια με εκείνα της PNI, με την προσθήκη, κατά τα τελευταία τρία χρόνια της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης, στη διδακτική ύλη στοιχείων της αριθμητικής. (Ciarrapico, 2002)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^{Ο}

Η διδασκαλία των Μαθηματικών στην Ελλάδα

4.1. Το σημερινό πλαίσιο διδασκαλίας των μαθηματικών στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση (2000- 2016)

Το σχολικό εκπαιδευτικό σύστημα της Ελλάδας διακρίνεται στο πρωτοβάθμιο επίπεδο, που αφορά σε μια εξαετή υποχρεωτική εκπαίδευση και στο δευτεροβάθμιο, που προβλέπει τριετή υποχρεωτική φοίτηση για όλους στο Γυμνάσιο και 3ετή προαιρετική Λυκειακή εκπαίδευση. Η τελευταία προσφέρεται από το Ημερήσιο Λύκειο και το Επαγγελματικό Λύκειο, καθώς και το Εσπερινό σχολείο 4ετούς φοίτησης.

Σχετικά με τη Μαθηματική Εκπαίδευση στη Δευτεροβάθμια κλίμακα, στις Α΄, Β΄ και Γ΄ τάξεις των Ημερήσιων Γυμνασίων, εφαρμόζεται το ωρολόγιο πρόγραμμα, που προβλέπεται από την Υ.Α. 115475/Γ2/21 – 8 -2013, η οποία δημοσιεύθηκε στο ΦΕΚ 2121/τεύχος Β΄/28 -8-2013. Σύμφωνα με τα παραπάνω ορίζονται 4 ώρες εβδομαδιαίας μαθηματικής διδασκαλίας σε κάθε μία από τις 3 γυμνασιακές τάξεις.

Η ύλη του μαθήματος των Μαθηματικών που διδάσκεται ανά τάξη έχει ως εξής:

- Α' Γυμνασίου: Φυσικοί Αριθμοί – Κλάσματα – Δεκαδικοί Αριθμοί – Εξισώσεις - Ανάλογα ποσά – Θετικοί/Αρνητικοί αριθμοί – Βασικές Αρχές Γεωμετρίας – Συμμετρία – Παραλληλόγραμμα, Τρίγωνα, Τραπέζια.

- Β' Γυμνασίου: Εξισώσεις – Συναρτήσεις – Στατιστική – Τριγωνομετρία – Γεωμετρικά Στερεά και Μέτρηση Στερεών.

- Γ' Γυμνασίου: Αλγεβρικές Παραστάσεις – Συναρτήσεις – Πιθανότητες – Γεωμετρία – Τριγωνομετρία

Στο Γενικό Λύκειο (ΓΕΛ) στις Α' και Β' τάξεις γίνονται εβδομαδιαία 35 ώρες μαθήματα ενώ στην τελευταία, στη Γ' τάξη, το σύνολο των ωρών μειώνεται στις 32.

Η σχολική ύλη των Μαθηματικών της Α' Λυκείου περιλαμβάνει βασικά θέματα Άλγεβρας (Πραγματικοί αριθμοί, συναρτήσεις - συστήματα γραμμικών - εξισώσεων, εξισώσεις-ανισώσεις - 2ου βαθμού και τριγωνομετρία.) και Γεωμετρίας (Επίπεδο – ευθεία - ευθύγραμμο τμήμα – είδη γωνιών – τρίγωνα - παράλληλες ευθείες - παραλληλόγραμμα – τραπέζια - εγγεγραμμένα σχήματα - αναλογίες – ομοιότητα)

Η σχολική ύλη των Μαθηματικών της Β' Λυκείου περιλαμβάνει θέματα Άλγεβρας (Τριγωνομετρία - Πολυώνυμα-Πολυωνυμικές εξισώσεις - Πρόοδοι, Εκθετική και Λογαριθμική συνάρτηση), Μαθηματικά Κατεύθυνσης (Διανύσματα Εξίσωση ευθείας, Κωνικές τομές, Θεωρία αριθμών) και Γεωμετρίας (Μετρικές σχέσεις – Εμβαδά - Μέτρηση κύκλου - Ευθείες και επίπεδα - Στερεά σχήματα).

Στα Μαθηματικά Γενικής Παιδείας της Γ' Λυκείου εξετάζονται τα εξής θέματα: Συναρτήσεις - έννοια της παραγώγου - εφαρμογές των παραγώγων - βασικά στοιχεία Στατιστικής - μέτρα θέσης και διασποράς - Δειγματικός χώρος και Ενδεχόμενα και η έννοια της πιθανότητας.

Τα μαθηματικά της Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης της Γ' Λυκείου εξετάζουν τα θέματα:

(Άλγεβρα) Μιγαδικοί αριθμοί, (Ανάλυση) Όριο-συνέχεια συνάρτησης, Διαφορικός λογισμός, και Ολοκληρωτικός λογισμός.

Στη πρώτη τάξη των Επαγγελματικών Λυκείων (ΕΠΑΛ) διδάσκονται 5 ώρες εβδομαδιαία

Άλγεβρα και Γεωμετρία, σε σύνολο 25 ωρών μαθημάτων. Ειδικότερα, στη Β' τάξη του ΕΠΑΛ γίνονται από τις 35 ώρες διδασκαλίας εβδομαδιαία, οι 2 είναι αφιερωμένες στην Άλγεβρα, η μια στη Γεωμετρία και ακόμη 2 στα Μαθηματικά Τεχνολογικής κατεύθυνσης.

Στην τελευταία τάξη, πάλι, του ΕΠΑΛ το ωρολόγιο πρόγραμμα Γενικής Παιδείας περιλαμβάνει 5 ώρες μαθηματικής διδασκαλίας εβδομαδιαίως, καθώς και τη δυνατότητα επιλογής του μαθήματος "ειδικά κεφάλαια Στατιστικής" που διδάσκεται 2 ώρες ανά βδομάδα. Το σύνολο των διδακτέων ωρών είναι και σε αυτή τη περίπτωση 35 ανά βδομάδα.

Σύμφωνα με το ΦΕΚ 193 Α΄/17-9-13 "Προσαρμογή του ωρολογίου προγράμματος Α΄ Λυκείου των Εκκλησιαστικών Σχολείων", τις διατάξεις του Ν.4186/13 "Αναδιάρθρωση της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης και λοιπές διατάξεις" στα Εκκλησιαστικά Λύκεια ισχύει:

Στην Α' Λυκείου οι μαθητές διδάσκονται Άλγεβρα 3 ώρες και Γεωμετρία 2 ώρες ανά βδομάδα. Η διδακτέα ύλη αντλείται από το βιβλίο «Άλγεβρα και Στοιχεία Πιθανοτήτων Α΄ Γενικού Λυκείου» (έκδοση 2015) και πραγματεύεται τα εξής αντικείμενα: Πιθανότητες - Οι Πραγματικοί Αριθμοί - Ρίζες Πραγματικών Αριθμών - Εξισώσεις – Ανισώσεις, Ακολουθίες - Αριθμητική πρόοδος - Γεωμετρική πρόοδος Βασικές Έννοιες των Συναρτήσεων.

Σύμφωνα με το ΦΕΚ 1437/2015Αριθμ. 99767/Θ2 "Αναμόρφωση του ωρολογίου προγράμματος της Β΄ και της Γ΄ Λυκείου των Γενικών Εκκλησιαστικών Λυκείων", στη Β' Λυκείου διδάσκεται η Άλγεβρα 3 ώρες και η Γεωμετρία 2 ώρες εβδομαδιαίως. Στους μαθητές Θετικών Επιστημών δίνεται, επίσης, η δυνατότητα επιλογής και παρακολούθησης, σε ένα δίωρο, μαθήματος με τίτλο "Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης" .

Στην Γ' Λυκείου, τα Μαθηματικά και στοιχεία Στατιστικής στο γενικό πρόγραμμα σπουδών διδάσκονται 2 ώρες, ενώ υπάρχει η δυνατότητα επιλογής της κατεύθυνσης "Τομέας θετικών επιστημών", όπου οι μαθητές διδάσκονται σε 5 ώρες ανά εβδομάδα το μάθημα "Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης". Η ύλη είναι αντίστοιχη με αυτή του Γενικού Ημερήσιου Λυκείου για τη Β΄ και τη Γ΄ Λυκείου.

Από το 2013-1016 έχουμε αλλαγές στις ονομασίες των κατευθύνσεων. Η θετική κατεύθυνση μετονομάζεται σε ομάδα προσανατολισμού θετικών σπουδών και γίνονται κάποιες μικρές προσθαφαιρέσεις στην ύλη ,κυρίως στην Άλγεβρα γενικής παιδείας. Στην Α' λυκείου

μπαίνουν η αριθμητική και γεωμετρική πρόοδος ενώ στη Β΄ τα γραμμικά συστήματα. (εγκύκλιος με αρ. πρωτ. 139606/Γ2/01−10−2013 της Δ/νσης Σπουδών Δ/θμιαςΕκπ/σης/Τμήμα Α΄ ΥΠΕΘ, εγκύκλιοι με αρ.πρωτ,159253/Δ2/09/-10-2015 και με αρ.πρωτ.159259/Δ2/09-10-2015 της Δ/σης Σπουδών Προγραμμάτων και Οργάνωσης Δ/μιας Εκπ/σης τμήμα Α΄)

Κεντρική επιδίωξη της διδασκαλίας των Μαθηματικών σε όλο το φάσμα της υποχρεωτικής εκπαίδευσης είναι η ανάδειξη των βασικών χαρακτηριστικών της μαθηματικής επιστήμης, δηλαδή η ακρίβεια και συντομία, η γενίκευση και αφαίρεση με απώτερο στόχο την καλλιέργεια της μαθηματικής σκέψης στους μαθητές.

Παράλληλα, η διδασκαλία των Μαθηματικών επιδιώκει και την ευθεία σύνδεση των παραπάνω στόχων με το κοινωνικό περιβάλλον που ζει ο μαθητής, στοιχείο που οδηγεί, όπως πιστεύεται, στην εξέλιξη του μαθηματικού γραμματισμού. Ως τέτοιος λογίζεται η ικανότητα του ατόμου να ερμηνεύει, να αναλύει και να επεμβαίνει στο κοινωνικό του περιβάλλον και στον κόσμο, χρησιμοποιώντας τα μαθηματικά ως εργαλείο για τη λήψη αποφάσεων.

Χρονολόγιο της εξέλιξης της διδασκαλίας των Μαθηματικών Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στην Ελλάδα.

Στις αρχές της δεκαετία του΄ 50 γίνεται η μεγάλη μεταρρύθμιση στα σχολικά Μαθηματικά. Η μεταρρύθμιση αυτή σχηματοποιήθηκε κάτω από τον τίτλο "Μοντέρνα Μαθηματικά " (ΜΜ) και, μετά από αρκετές προσπάθειες, εφαρμόστηκε τελικά στις αρχές της δεκαετίας του΄ 80. Βέβαια, δε θα πρέπει να παραβλέψουμε σε αυτό το σημείο ότι η αποτελεσματικότητά της μεταρρύθμισης αυτής είχε αρχίσει ήδη να αμφισβητείται στα λοιπά κράτη κατά την περίοδο αυτή. (Τουμάσης, 1987)

Οι αλλαγές, που επήλθαν, επηρέασαν και τα διδασκόμενα μαθηματικά αντικείμενα στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση. Αφαιρέθηκε, αφενός, η Ευκλείδεια Γεωμετρία, διότι θεωρήθηκε ότι δεν ήταν θεμελιωμένη στα ακριβοτυπικά` και αυστηρά κριτήρια των μαθηματικών της εποχής και , αφετέρου, προστέθηκαν στοιχεία Θεωρίας Συνόλων, Στοιχεία Λογικής. Τέλος, δόθηκε βαρύτητα στην Αναλυτική Γεωμετρία και στον Μαθηματικό Λογισμό.

Στη χώρα μας, οι εμπλεκόμενοι στην εκπαιδευτική διαδικασία παρακολούθησαν αυτές τις αλλαγές μέχρι το 1995, οπότε και αποφασίστηκε από το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο να

αναμορφωθούν ριζικά τα Προγράμματα Σπουδών, μετατρέποντάς τα στη μορφή και περιεχόμενο που έχουν ως και σήμερα. (Τουμάσης, 1987 ; Θωμαΐδης & Καστάνης, 2003)

Πηγαίνοντας πάλι πίσω στο χρόνο, και συγκεκριμένα στο 1961, οπότε και συγκροτείται η «Επιτροπή πειραματικής μελέτης και διδασκαλίας των Μαθηματικών εις την Μ. Εκπαίδευσιν», αρχίζει η εισαγωγή της μεταρρύθμισης των «Μοντέρνων Μαθηματικών».

Η Κυβέρνηση της Ένωσης Κέντρου ψηφίζει τον Ν.4379/1964 "Περί οργανώσεως και διοικήσεως της Γενικής Εκπαιδεύσεως Στοιχειώδους και Μέσης". Βάσει αυτού διαιρείται η Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση σε Γυμνάσιο και Λύκειο και καθιερώνεται η θεσμοθέτηση του Ακαδημαϊκού Απολυτηρίου για την πρόσβαση στην Τριτοβάθμια Εκπαίδευση.

Τα επόμενα χρόνια εκδίδονται διατάγματα που ρυθμίζουν θέματα λειτουργίας της γυμνασιακής εκπαίδευσης. Το 1964 δημοσιεύεται νέο Αναλυτικό Πρόγραμμα για την Α΄ τάξη του Γυμνασίου, το 1966 δημοσιεύονται νέα Αναλυτικά Προγράμματα για τις τρεις πρώτες τάξεις του Γυμνασίου και τις δύο πρώτες τάξεις του Λυκείου. Από το σχολικό έτος 1964-65 επιτρέπεται στις τρεις πρώτες τάξεις του Γυμνασίου η ελεύθερη επιλογή και χρήση βιβλίων του εμπορίου που είχαν συγγραφεί σύμφωνα με τα νέα αναλυτικά προγράμματα της περιόδου εκείνης.

Αργότερα, τη διετία 1968-69 δημοσιεύονται νέα αναλυτικά προγράμματα για τις τρεις πρώτες τάξεις του Γυμνασίου, τις τρεις τάξεις του Γυμνασίου Θεωρητικής Κατεύθυνσης και τις τρεις τάξεις του Γυμνασίου Θετικής Κατεύθυνσης, με έντονη την πρόθεση του «συμψηφισμού» ανάμεσα σε παραδοσιακά και "μοντέρνα Μαθηματικά".

Την επόμενη δεκαετία, και ειδικότερα την περίοδο 1977-1980, δημοσιεύονται νέα Αναλυτικά Προγράμματα για τις τρεις τάξεις του Γυμνασίου και τις τρεις τάξεις του Λυκείου Γενικής Κατεύθυνσης, τα οποία επιχειρούν μια γενική εισαγωγή των «Μοντέρνων Μαθηματικών».

Στις αρχές της δεκαετίας του '90 σχεδιάζονται νέα Αναλυτικά Προγράμματα για το Γυμνάσιο και το Λύκειο, με τα οποία επιδιώκεται μια αποδέσμευση από το πνεύμα των «Μοντέρνων Μαθηματικών». Η καινούρια μεταρρύθμιση, αυτή τη φορά εστίασε στις διαδικασίες επίλυσης προβλημάτων και στην αξιοποίηση της τεχνολογίας, κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας, λογική πάνω στην οποία εδράζεται και το Πρόγραμμα Σπουδών που διαρθρώθηκε από το 2000 και έπειτα.

Παρά την όποια μεταρρυθμιστική πνοή, με βάση το Πρόγραμμα Σπουδών που ακολουθήθηκε από το 2000, οι ώρες διδασκαλίας των μαθηματικών δεν αυξήθηκαν. Συγκεκριμένα στο Γυμνάσιο

οι ώρες διδασκαλίας των μαθηματικών καλύπτουν μόνο το 11% του ωρολογίου προγράμματος, τη στιγμή που ο μέσος όρος της ΕΕ είναι 13%, όπως συμβαίνει και στις χώρες του ΟΟΣΑ. Στο Λύκειο στην Ελλάδα στην Α' και Β' Λυκείου οι ώρες Μαθηματικών Γενικής παιδείας είναι κάτω από 15% ώρες/έτος, όταν σε άλλες χώρες ξεπερνά το 20%. (Θωμαΐδης & Καστάνης, 2003)

4.2 Συγκριτική Μελέτη

Στους ακόλουθους πίνακες παρατίθενται συγκεντρωτικά στοιχεία που αφορούν στην εκπαίδευση και τη διδασκαλία των μαθηματικών σε Γαλλία, Ελλάδα, Γερμανία και Ιταλία.

"ΕΥΡΥΔΙΚΗ"2012 :Συγκριτικός πίνακας σχολικής ζωής στις Γαλλία – Γερμανία- Ελλάδα και Ιταλία

Διάρκεια της σχολικής ημέρας / εβδομάδας / έτους

Χώρες	*Σχολική ημέρα*	*Σχολική Εβδομάδα*	*Σχολικό Έτος*
Γαλλία	55 λεπτά διαρκεί η διδακτική ώρα.	6 μέρες 26 μονόωρα μαθήματα στο πρωτοβάθμιο επίπεδο και 25,5 έως 30 στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση	180 ημέρες
Γερμανία	45 λεπτά διαρκεί η διδακτική ώρα.	5 ή 6 ημέρες 19-28 μαθήματα στην πρωτοβάθμια 28-30 δευτεροβάθμια	188-208 ημέρες
Ελλάδα	40-50 λεπτά διαρκεί η διδακτική ώρα.	5 μέρες 25-30 μαθήματα	195 ημέρες
Ιταλία		5 ημέρες 30 ώρες διδασκαλίας	200 ημέρες

Χρόνος πλήρους υποχρεωτικής εκπαίδευσης των Μαθηματικών σε Γερμανία (διάκριση 3 περιπτώσεων αντίστοιχων των σχετικών διαφοροποιήσεων στην τοπική διαμόρφωση του εκπαιδευτικού συστήματος), Γαλλία , Ελλάδα και Ιταλία.

● Flexible time

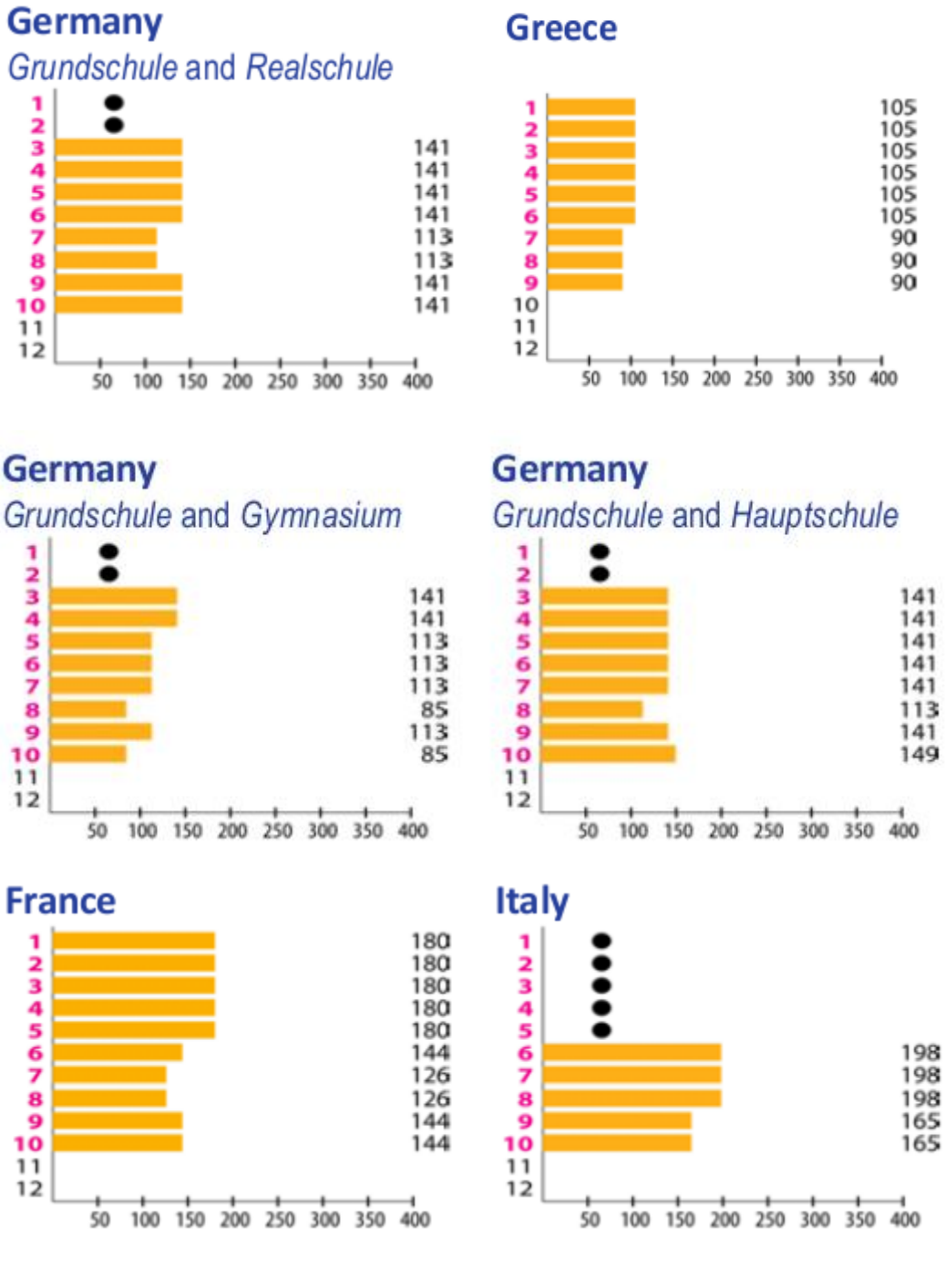
| x Number of hours distributed between various school years

Horizontal axis: Number of hours per school year

Vertical axis: Grades

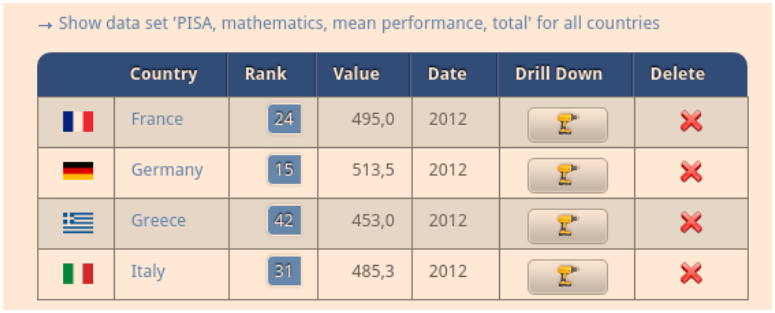
n : **Compulsory education**

Source: Eurydice.



ΠΗΓΗ:ΕΥΡΥΔΙΚΗ 2012

Από τα παραπάνω δεδομένα μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι οι σχετικοί χρόνοι διδασκαλίας των μαθηματικών σε Γαλλία και Ιταλία φαίνεται να διατηρούνται σε πολύ κοντινά επίπεδα κατά τη διάρκεια του σχολικού έτους, ενώ η Γερμανία (και στις 3 περιοχές της που εφαρμόζονται παραπλήσια εκπαιδευτικά συστήματα) και η Ελλάδα υπολείπονται των δύο προαναφερθεισών χωρών.


→ Show data set 'PISA, mathematics, mean performance, total' for all countries

	Country	Rank	Value	Date	Drill Down	Delete
	France	24	495,0	2012		
	Germany	15	513,5	2012		
	Greece	42	453,0	2012		
	Italy	31	485,3	2012		

Illustration 1[*http://www.factfish.com/*](http://www.factfish.com/)

In this section you can see the historical data as table.

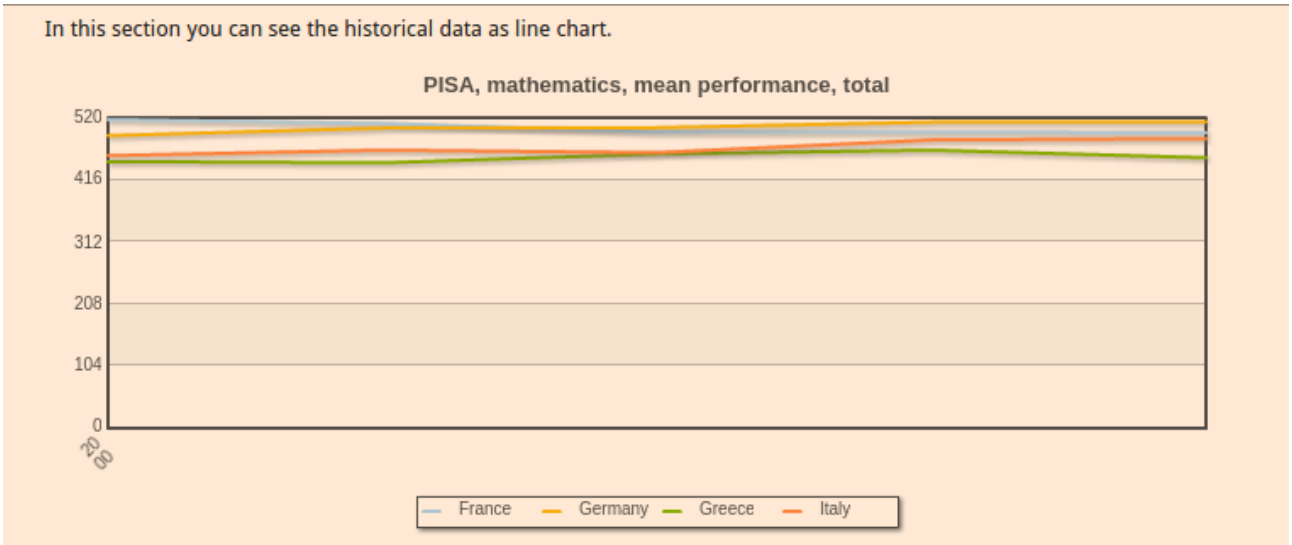
Date	France	Germany	Greece	Italy
2012	495,0	513,5	453,0	485,3
2009	496,8	512,8	466,1	482,9
2006	495,5	503,8	459,2	461,7
2003	510,8	503,0	444,9	465,7
2000	517,0	490,0	447,0	457,0

Πηγή: PISA 2012

Παρόλα τα πρώτα συμπεράσματα, εάν εστιάσουμε στα συγκεντρωτικά αποτελέσματα που μας παρέχει το διεθνές ερευνητικό εργαλείο για την εκπαίδευση ,PISA, παρατηρούμε στους παραπάνω δύο πίνακες ότι και οι 4 χώρες έχουν υψηλά ποσοστά διάχυσης της μαθηματικής εκπαίδευσης στη Δευτεροβάθμια βαθμίδα, τα οποία ποσοστά αυτά (rating) μετρούνται με ένα πολύπλοκο διεθνές εργαλείο (PISA) που αναλύσαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο.

Πρωτοπόρος φαίνεται να είναι η Γερμανία, ενώ ακολουθούν σε σειρά η Γαλλία και η Ιταλία. Παράλληλα όμως παρατηρούμε την ελαφρά οπισθοχώρηση της Ελλάδας μετά το 2009 στοιχείο που

σε ένα βαθμό μπορούμε να το συνδέσουμε με την πολιτικό-οικονομική κρίση που επικρατεί στη χώρα και την περικοπή πόρων για την παιδεία.



Πηγή PISA 2012

Το διάγραμμα της παραπάνω απεικόνισης αποδεικνύει ότι η μαθηματική εκπαίδευση στις χώρες που εξετάζουμε είναι σταθερά σε υψηλό επίπεδο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^{Ο}

ΝέεςΤεχνολογίες

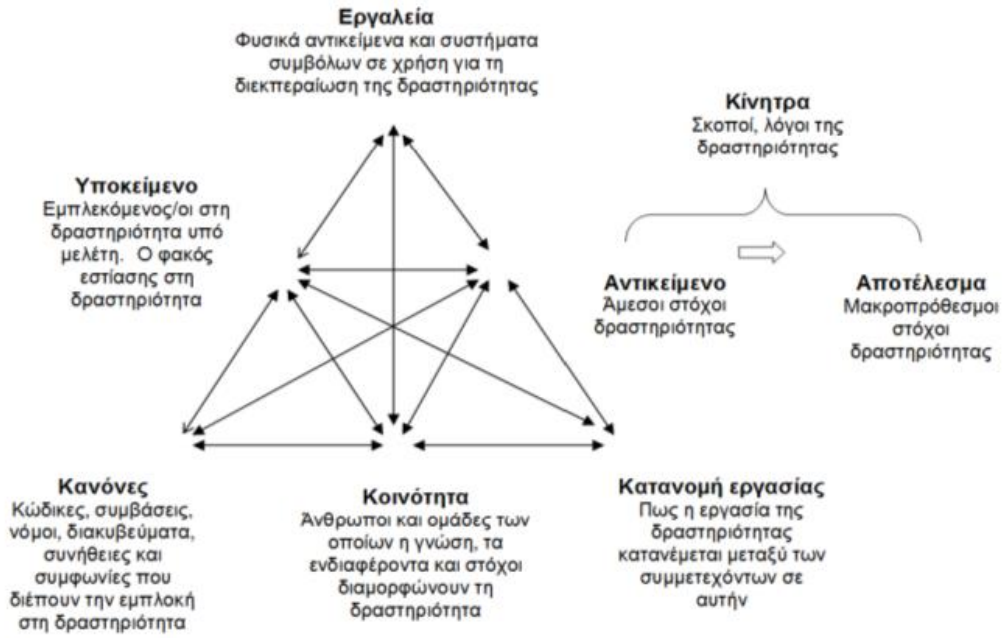
5.0. Νέες τεχνολογίες και Μαθηματική παιδεία

Είναι κοινά παραδεκτό ότι τα τεχνολογικά μέσα και οι ανάγκες που δημιουργεί ο πολιτισμός κάθε εποχής υπαγορεύουν το περιεχόμενο, την κατεύθυνση, καθώς και τους στόχους της εκπαίδευσης. Και πώς άλλωστε θα μπορούσε να συμβαίνει διαφορετικά καθώς οι κοινωνικοί μετασχηματισμοί επηρεάζονται από την τεχνολογία και αντιστρόφως.

Σύμφωνα με την εξέλιξη της τεχνολογίας κινούνται και η διδασκαλία των μαθηματικών κάθε εποχής. Έτσι, φτάνουμε στην επιβεβλημένη ανάγκη εισόδου των υπολογιστών στα σχολεία, εξέλιξη που έχει ήδη επηρεάσει τα μαθηματικά, που διδάσκονται στην εκπαίδευση, καθώς και αυτά που "χρειάζεται" κανείς να διδαχθεί. Για παράδειγμα, αρκετοί μαθητές εκφράζουν την "δυσαρέσκειά τους" για την εκτέλεση μιας διαίρεσης, νοερής και χειρόγραφης, αφού μπορούν εύκολα και γρήγορα να υπολογίσουν το αποτέλεσμά της με χρήση ηλεκτρονικής αριθμομηχανής. Άρα, η χρήση του υπολογιστή ως εκπαιδευτικού εργαλείου έχει μεταφέρει την εκπαιδευτική ζωή σε μια νέα εποχή.

Επιδιώκοντας να εξηγήσουμε τη σύνδεση του εργαλείου αυτού με τη διδασκαλία θα πρέπει να καταδείξουμε όλες τις αμφίδρομες σχέσεις που δημιουργούνται. Όπως μπορούμε να

μελετήσουμε από το σχήμα που ακολουθεί, υπάρχουν τρεις αμοιβαίες σχέσεις που εμπλέκονται σε κάθε δραστηριότητα: μεταξύ υποκειμένου και αντικειμένου, μεταξύ υποκειμένου και κοινότητας και μεταξύ αντικειμένου και κοινότητας:

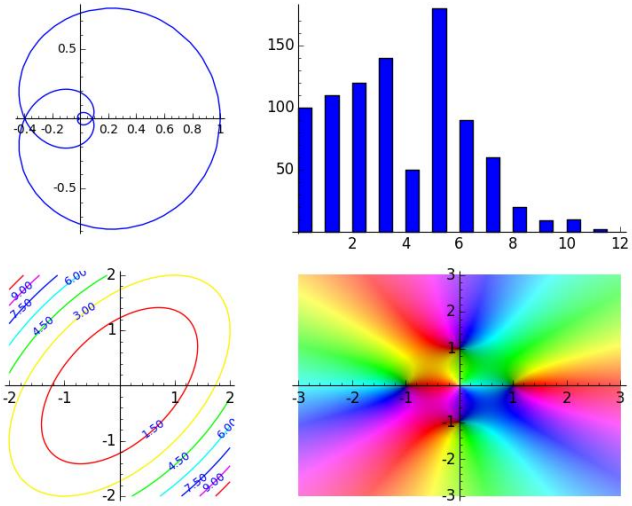


OEngeström (2001) θεωρεί ότι τα συστήματα δραστηριότητας συλλογικά, διαμεσολαβούμενα από τεχνουργήματα εισάγονται στη διδασκαλία με βάση την αρχή κινήτρου και σκοπού. Η μάθηση ξεκινά, όταν τα άτομα αρχίζουν να αμφισβητούν και να αποκλίνουν από τις θεσμοθετημένες νόρμες των συστημάτων δραστηριότητας: "Τότε, το αντικείμενο/σκοπός και το κίνητρο της δραστηριότητας εννοιολογούνται εκ νέου, ώστε να συμπεριλάβουν ένα ριζικά ευρύτερο ορίζοντα ενδεχομένων από αυτόν που υφίστατο μέχρι τότε." Ο Engeström ονομάζει αυτήν την εξέλιξη επεκτατική μάθηση (expansivelearning).

"Καθώς οι αναστατώσεις και οι αντιφάσεις της δραστηριότητας γίνονται πιο απαιτητικές, η εσωτερίκευση λαμβάνει προοδευτικά τη μορφή κριτικού αυτο-αναστοχασμού και η εξωτερίκευση, δηλαδή μια αναζήτηση λύσεων, αυξάνει. Η εξωτερίκευση φτάνει στο πιο υψηλό της σημείο, όταν σχεδιάζεται και υλοποιείται ένα νέο μοντέλο για τη δραστηριότητα. Καθώς το νέο μοντέλο σταθεροποιείται, η εσωτερίκευση των εγγενών του τρόπων και μέσων γίνεται η κυρίαρχη μορφή μάθησης και ανάπτυξης" (Engeström, 1999).

Στη βάση αυτή σκιαγραφείται το σύγχρονο σχολείο. Κατ' αυτόν τον τρόπο ο μαθηματικός μπορεί να συντελέσει στην αναβάθμιση του προγράμματος σπουδών, υποδεικνύοντας πραγματικούς στόχους και συνδέοντας τη διδακτική πράξη με το κοινωνικό γίγνεσθαι. Ο μαθηματικός έχει πλέον στη διάθεσή του σύγχρονα τεχνολογικά μέσα, που του παρέχουν ασύγκριτα περισσότερες δυνατότητες. Με την κατάλληλη αξιοποίηση της υλικοτεχνικής υποδομής και των διαθέσιμων εκπαιδευτικών λογισμικών ο μαθηματικός μπορεί να εξοικονομήσει πολύτιμο χρόνο από την εκτέλεση απλών μηχανικών εργασιών, τον οποίο μπορεί να διαθέσει στην πιο εποικοδομητική ανάλυση και επεξήγηση τρόπων προσέγγισης διαφόρων προβλημάτων. Έτσι, αναδεικνύεται ο πραγματικός ρόλος της τεχνολογίας και του διδάσκοντος στο νέο ελπιδοφόρο πλαίσιο. (Ράπτης, 1999)

Με την πάροδο του χρόνου διάφορες έρευνες, αλλά και η εμπειρία έδειξαν πως οι υπολογιστές μπορούν κάλλιστα να χρησιμοποιηθούν στη διδασκαλία των Μαθηματικών, καθώς παρέχουν ένα σύνολο δυνατοτήτων σε ένα ευρύ φάσμα της εκπαιδευτικής διαδικασίας.



Αυτοί μπορούν να συνοψιστούν στους εξής:

1.Προσαρμόζονται στους προσωπικούς ρυθμούς μάθησης του μαθητή, δίνοντάς του έτσι την ευκαιρία να κατανοήσει καλύτερα έννοιες ή να καλύψει τυχόν κενά.

2.Προσφέρουν αμοιβαία επικοινωνία μαθητή-υπολογιστή (έξυπνη μηχανή). Ο μαθητής καλείται να σκεφτεί και να απαντήσει, ενώ ο υπολογιστής μπορεί όχι μόνο να διορθώσει, αλλά και να υποδείξει την ορθή απάντηση.

3.Οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές παρέχουν τη δυνατότητα στους μαθητές να ελέγχουν την μαθηματική ακρίβεια των αποτελεσμάτων της προσπάθειάς τους, καθώς μπορούν να χρησιμοποιήσουν εργαλεία για την εύκολη δημιουργία σχεδιαγραμμάτων και πολύπλοκων σχημάτων.

4.Μετασχηματίζουν τους αριθμούς και τις διάφορες μαθηματικές σχέσεις, από αφηρημένα και ψυχρά σύμβολα, σε εικόνα, ήχο, κίνηση, στοιχεία που ελκύουν τον μαθητή να ασχοληθεί περισσότερο με τα μαθηματικά.

5.Είναι κατάλληλοι για μαθητές, οι οποίοι είναι ιδιαίτερα "δραστήριοι" μέσα στην τάξη, δεν παρακολουθούν τον καθηγητή ή δυσκολεύονται στο διάβασμα και γενικά δεν ανταποκρίνονται στο σύνηθες μοντέλο διδασκαλίας.

6.Παρέχουν τη δυνατότητα του πειραματισμού και της δοκιμής, βοηθώντας έτσι τον μαθητή να διδαχθεί από τα λάθη του σε ένα ασφαλέστερο γνωστικά και παιδαγωγικά περιβάλλον καθώς δε θα φοβηθεί τον σχολιασμό ή κριτική.

7.Καταρρίπτουν τον μύθο της αυθεντίας του καθηγητή και δίνουν τον έλεγχο της όλης διαδικασίας στα παιδιά. Έτσι ο μαθητής εσωτερικεύει και οικειοποιείται ακόμη περισσότερο την ιδέα των "Μαθηματικών".

Εν κατακλείδι,

8.Δίνουν τη δυνατότητα ανάλυσης, σύνθεσης και αξιολόγησης.

Η χρήση του υπολογιστή θα πρέπει, όμως, να γίνεται μέσα σε λογικά πλαίσια, τα οποία δεν θα επιτρέπουν την αλλοίωση του παιδαγωγικού σκοπού της εκπαίδευσης. Ίσως, αξίζει να σημειωθεί ότι ο Η/Υ δεν πρέπει ούτε μπορεί με οποιοδήποτε τρόπο να αντικαταστήσει τον καθηγητή.

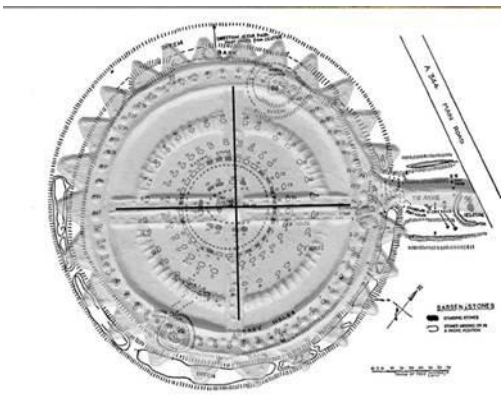
Στο πλαίσιο της προσπάθειας να διαμορφωθεί το μελλοντικό σχολείο, το Υπουργείο

Παιδείας, Έρευνας και Θρησκευμάτων αναβαθμίζει τις ψηφιακές υποδομές των σχολείων. Ο στόχος έγκειται στη δημιουργία ενός σχολείου με τη χρήση των Τεχνολογιών Πληροφορικής και Επικοινωνιών (ΤΠΕ) που θα είναι πραγματιστικό, αλλά και καινοτόμο συνάμα. Η αναβάθμιση αφορά σε συγκεκριμένες παρεμβάσεις στις ψηφιακές υποδομές των σχολείων. Οι νέες υποδομές θα στηρίζονται σε ανοιχτές τεχνολογίες και πρότυπα, θα αφορούν υπολογιστές, συστήματα ρομποτικής και αισθητήρων, τρισδιάστατους εκτυπωτές και λοιπό βοηθητικό εξοπλισμό. Η αναβάθμιση των υποδομών ΤΠΕ θα πραγματοποιηθεί με την αξιοποίηση παλαιού εξοπλισμού ή/και με την εγκατάσταση σύγχρονων σχολικών εργαστηρίων πληροφορικής χαμηλού κόστους, αλλά και σταθμών εργασίας στις αίθουσες διδασκαλίας. Ήδη, 7127 σχολεία έχουν καταχωρηθεί για την αναβάθμιση του τεχνολογικού τους εξοπλισμού, ενώ έχουν υποβληθεί ακόμη 5435 σχετικά αιτήματα. (ΥΠΠΕΘ)

Ολοκληρώνοντας την αναφορά μας στο σχέδιο ένταξης της τεχνολογίας στην εκπαίδευση, θα είχε ενδιαφέρον να συλλογιστούμε ότι η εξέλιξη της μάθησης και κατ' επέκτασιν της εκπαιδευτικής διαδικασίας αποτελεί στόχευση από αρχαιοτάτων χρόνων ως σήμερα.

Η συνάρτηση, βέβαια, επιστήμης και τεχνολογίας είχε διαγνωστεί και από τους Αρχαίους Έλληνες. Ενδεικτικά παραθέτουμε το εύρημα του "πρώτου υπολογιστή" που υπήρξε ως σήμερα, τον "υπολογιστή των Αντικυθήρων", ένα εξαιρετικό εύρημα υπολογιστικής μηχανικής, συγκεκριμένα:

Ο πρώτος αναλογικός υπολογιστής ήταν αυτός των Αντικυθήρων, που είχε βρεθεί σε ναυάγιο ανοικτά της νήσου Αντικύθηρα μεταξύ των Κυθήρων και της Κρήτης. Ο μηχανισμός αυτός, γνωστός και ως αστρολάβος των Αντικυθήρων ή υπολογιστής των Αντικυθήρων, είναι ένας



μηχανικός υπολογιστής και όργανο αστρονομικών παρατηρήσεων, που παρουσιάζει ομοιότητες με πολύπλοκο ωρολογιακό μηχανισμό. Με βάση τη μορφή των ελληνικών επιγραφών που φέρει χρονολογείται μεταξύ του 150 π.Χ. και του 100 π.Χ.. Θα μπορούσε να ήταν κατασκευασμένο μέχρι και μισό αιώνα πριν το ναυάγιο. Το ναυάγιο, που ανακαλύφθηκε το 1900 σε βάθος περίπου 40 με 64 μέτρων, όπως και πολλοί θησαυροί, αγάλματα και άλλα αντικείμενα, ανασύρθηκαν από Συμιακούς σφουγγαράδες και βρίσκονται σήμερα στο Εθνικό Αρχαιολογικό Μουσείο στην Αθήνα.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Καταληκτικά, από τη μελέτη που προηγήθηκε μπορούμε να συμπεράνουμε τη σπουδαιότητα της μαθηματικής εκπαίδευσης αλλά και την αμφίδρομη ανάγκη συνύπαρξης αυτής μέσα στο πολιτικό και επιστημονικό συγκείμενο κάθε εποχής. Το σχολείο, ως πρωταρχικός φορέας για την ομαλή ένταξη του ατόμου στην κοινωνία, δε μπορεί να μένει έξω και πίσω από τις κοινωνικοπολιτικές ,τεχνολογικές ακόμη και πολιτιστικές εξελίξεις που διαμορφώνονται γύρω του. Παραλλήλως, ο μαθητής εμπνεόμενος από τα ερεθίσματα των εξελίξεων αυτών, δε θα μπορούσε παρά να έχει την ανάγκη εγκόλπωσης τους μέσα στο σχολικό πλαίσιο. ΄Ετσι, παρατηρούμε οι διδακτικές μέθοδοι να αλλάζουν ανά εποχή καθώς και η μαθηματική ύλη επίσης.

Όσον αφορά στο Ευρωπαϊκό πλαίσιο αυτών των αλλαγών και μεταρρυθμίσεων, αυτό φαίνεται να είναι μοναδικό ανά χώρα. Επιπλέον, οι στοχεύσεις στη μαθηματική παιδεία που πρέπει να λάβει ο μαθητής εξερχόμενος του σχολείου φαίνεται να είναι διαφορετική για καθεμία από τις χώρες που εξετάσαμε. Η διαφορετικότητα αυτή έγκειται στην ιστορική πολιτιστική και διδακτική φιλοσοφία που διαμορφώθηκε σε κάθε περίπτωση, καθώς επίσης και στην πολιτική και οικονομική ανάπτυξη που στόχευσε η κάθε χώρα ή που απλά βίωνε σε κάθε χρονική περίοδο.

Σε αυτό το σημείο θα πρέπει να τονίσουμε τις σπουδαίες “μαθηματικές αλλαγές” που έλαβαν χώρα, στις δεκαετίες του ’50 και του ‘60 και ύστερα, στη Γαλλία, Γερμανία και Ιταλία. Τις αλλαγές αυτές ακολούθησε με χρονική καθυστέρηση μιας δεκαετίας περίπου και η Ελλάδα.

Παρά τις διαφορετικότητες και τα 4 πεδία μελέτης μας, στη Γαλλία, Ιταλία, Γερμανία και Ελλάδα, παρουσιάζουν αξιοσημείωτη μαθηματική παιδεία. Τα μεν τρία πρώτα σε επίπεδο της πρόσφατης ιστορίας (τελευταίοι αιώνες) το δε τελευταίο, η περίπτωση της Ελλάδας ,έχει ρίζες από αρχαιοτάτων χρόνων, σημειώνοντας βέβαια ένα βαθύ κενό στην πρόσφατη ιστορία, που όμως φαίνεται να υπερπηδά κατά τον τελευταίο αιώνα.

Όπως φαίνεται, όλες οι χώρες μελέτης μας καλύπτουν τους τομείς της Άλγεβρας, των Υπολογισμών και της Γεωμετρίας. Παράλληλα όμως υπάρχουν διαφοροποιήσεις στο φάσμα της ύλης, έτσι για παράδειγμα ο τομέας των Πιθανοτήτων και της Στατιστικής παρέχεται ως μάθημα επιλογής στη Γερμανία, ενώ στη Γαλλία αυτός διδάσκεται στην αρχή της ανώτερης Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης. Ταυτόχρονα, βαρύτητα δίνεται και στις κατευθύνσεις.

Έτσι, όταν επιλέγεται μαθηματική/θετική κατεύθυνση ο μαθητής εξειδικεύεται περισσότερο στα μαθηματικά. Η διάρθρωση των κατευθύνσεων αυτών αλλά και τα εξαγόμενα συμπεράσματα διαφέρουν ανά χώρα και αυτό ακριβώς το στοιχείο είναι κάτι που μπορεί να τροφοδοτήσει τα διαφορετικά εκπαιδευτικά συστήματα. Σε γενικές γραμμές το παράδειγμα της Γαλλίας φαίνεται να είναι πρωτοπόρο σε επίπεδο ανάπτυξης εξέλιξης και διεισδυτικότητας στον μέσο μαθητή της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

Σε αυτό το σημείο αξίζει να σημειώσουμε την επίδραση της δευτεροβάθμιας μαθηματικής εκπαίδευσης για την εξέλιξη της τριτοβάθμιας . Σε όλες τις χώρες μελέτης μας ανεξαιρέτως, οι πανεπιστημιακές σχολές και δη οι Μαθηματικές έχουν να αναδείξουν σοβαρή ιστορία στον τομέα τους και εξαιρετικούς ερευνητές. Ενώ ακόμη και σήμερα δίδεται βαρύτητα σε αυτές και στην εξέλιξη τους.

Γενικεύοντας, η διδασκαλία των Μαθηματικών επιδιώκει τη σύνδεση και με το κοινωνικό περιβάλλον που ζει ο μαθητής, στοιχείο που μπορεί να οδηγήσει, στην εξέλιξη του μαθηματικού γραμματισμού. Η βαρύτητα που δίδεται στα προγράμματα σπουδών κάθε χώρας επικυρώνουν το παραπάνω. Από την άλλη όμως η οικονομική κρίση στην Ελλάδα και η περικοπή πόρων για την παιδεία μόνον προς την αντίθετη κατεύθυνση μπορεί να λειτουργήσει. Μια τέτοια τάση φαίνεται να σημειώνεται και στη Γαλλία εσχάτως. Αυτό το στοιχείο δείχνει να επηρεάζει και τις αντίστοιχες επιδόσεις στους μαθηματικούς διαγωνισμούς PISA,οπού η Γερμανία πρωτοστατεί έναντι των υπολοίπων χωρών που εξετάσαμε.

Επιπλέον, από την παρούσα μελέτη αναδείξαμε, καθώς θεωρείται μεταίχμιο στην εκπαίδευση στην νέα εποχή, την ένταξη και χρήση στο εκπαιδευτικό πρόγραμμα, των υπολογιστών, εργαλείου που ασκεί με τη σειρά του άμεση και καταλυτική επίδραση στη σχέση που αναπτύσσει ο μαθητής με τον μαθηματικό κόσμο.

Στο κομμάτι των υπολογιστών και της χρήσης αυτών κατά την εκπαιδευτική διαδικασία, αυτό φαίνεται να ακολουθεί παράλληλη πορεία με την λοιπή ύλη. Τουτέστιν, σε Ιταλία Γερμανία, και ιδιαίτερα Γαλλία, οι υπολογιστές όχι μόνο μπαίνουν ως εργαλείο από νωρίς στην εκπαιδευτική διαδικασία αλλά και τα προγράμματα σπουδών προσαρμόζονται στην νέα αναγκαιότητα. Αργότερα συμβαίνει το ίδιο και στα ελληνικά σχολεία.

Η χρήση του υπολογιστή στην εκπαίδευση αδιαμφισβήτητα αποτελεί ένα πρακτικό εργαλείο που μπορεί να φέρει την πραγματικότητα των μαθηματικών πιο κοντά στον έφηβο μαθητή. Άλλωστε οι έφηβοι μαθητές χρησιμοποιούν κατά κόρον στις μέρες μας τους υπολογιστές και τις νέες τεχνολογίες γενικότερα. Το στοιχείο αυτό δε μπορούμε παρά να το αποτιμήσουμε θετικά.

Βιβλιογραφία

ΕΛΛΗΝΙΚΗ

Αναπολιτάνος, Γ., (1985). *Εισαγωγή στη φιλοσοφία των μαθηματικών,* Αθήνα:Νεφέλη.

Κολέζα Γ.Ε. (2010). *Θεωρία και πράξη στη διδασκαλία των μαθηματικών*,

Αθήνα:Τόπος.

Kant Μετάφραση: Γιανναράς, (1976). Κ*ριτική του καθαρού λόγου / Immanuel*

Kant ,Αθήνα:Παπαζήσης.

Μοσχοβάκης, Γ., (1993). Σ*ημειώσεις στη Συνολοθεωρία,* Αθήνα: Νεφέλη.

Lakatos, I., (1996). *Η εξέλιξη των μαθηματικών εννοιών.*Αθήνα:Open University

Φερεντίνος, Φ.,(2001) . *Ο ρόλος των δραστηριοτήτων στη μαθηματική*

εκπαίδευση, Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών Θεμάτων

Τασιός, θ., (2008), *Ψυχολογία των Μαθηματικών – Σύνοψη θεωριών μάθησης*.

Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών (ΕΠΠΣ) Μαθηματικών, άρθρο2

Τουμάσης, Τ., (1994). *Πραγματικές ώρες διδασκαλίας του μαθήματος των*

Μαθηματικών στα Γυμνάσια και στα Λύκεια, Αθήνα:Λόγος και Πράξη.

Καραντζίνης, Γ., (2003). *Η εξέλιξη των μαθηματικών εννοιών στα παιδιά*

προσχολικής και πρωτοσχολικής ηλικίας , Αθήνα:Ατραπός – Περιβολάκι.

Καστάνη, Ν. &Τοκμακίδη, Τ., (1993). *ΑΡΧΑΙΑ ΕΛΛΗΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ. ΙΣΤΟΡΙΚΑ ΚΑΙ ΦΙΛΟΣΟΦΙΚΑ ΔΟΚΙΜΙΑ:Η ιστορική κληρονομιά των "Στοιχείων" του Ευκλείδη στην Ανθρωπότητα*, επιμέλεια Δ. Αναπολιτάνου και Β. Καρασμάνη, Αθήνα:εκδόσεις Τροχαλία.

Κολέζα, Τ., (2000). *Γνωσιολογική και Διδακτική Προσέγγιση των Στοιχειωδών Μαθηματικών Εννοιών,* Αθήνα: Εκδόσεις LeaderBooks

Πινάτσης, Π., (2007). *Σχολικά εγχειρίδια και πλαίσια εφαρμογής ρεαλιστικών*

μαθηματικών, Πρακτικά 24ου Συνεδρίου ΕΜΕ, Κοζάνη.

Freire, P., (1977). *Η αγωγή του καταπιεζόμενου,*Αθήνα:Εκδόσεις Κέδρος – Ράππα.

Εκτελεστικός Οργανισμός Εκπαίδευσης, Οπτικοακουστικών Θεμάτων και Πολιτισμού , Ευρυδίκη, (2011). *Η διδασκαλία της ανάγνωσης στην Ευρώπη (Πλαίσια, Πολιτικές και Πρακτικές), Αθήνα.*

ΥΠΕΘ (ΥΠΟΥΡΓ.ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΕΡΕΥΝΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ): εγκύκλιος με αρ. πρωτ. 139606/Γ2/01−10−2013 της Δ/νσης Σπουδών Δ/θμιαςΕκπ/σης/Τμήμα Α΄, εγκύκλιοι με αρ.πρωτ,159253/Δ2/09/-10-2015 και με αρ.πρωτ.159259/Δ2/09-10-2015 της Δ/σης Σπουδών Προγραμμάτων και Οργάνωσης Δ/μιας Εκπ/σης τμήμα Α΄)

Προγράμματα Σπουδών Χωρών της Ευρώπης για την Ανώτερη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, (2005), Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, Αθήνα

«ΝΕΟ ΣΧΟΛΕΙΟ (Σχολείο 21 αιώνα) – Νέο Πρόγραμμα Σπουδών , Οριζόντια Πράξη» MIS: 295450 (2011) *Μαθηματικά στην Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση (Γυμνάσιο) Οδηγός για τον εκπαιδευτικό «Εργαλεία Διδακτικών Προσεγγίσεων»*

Δραμαλίδης Α. & Φλώρου Γ ,(2007). *"Ώρες διδασκαλίας Μαθηματικών στα Γυμνάσια"*, Ελληνικό Στατιστικό Ινστιτούτο, πρακτικά 20ου Συνεδρίου.

ΕυρωπαικήΕνωση:Πολιτικές και Εκπαίδευση (2008) , Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, Αθήνα.

Ράπτης Α. και Ράπτη Α. (1999α), *Πληροφορική και Εκπαίδευση. Συνολική Προσέγγιση*, Αθήνα.

Θωμαΐδης Γ. , Καστάνης Ν. (2003). *Οι αναμορφώσεις της ελληνικής Μαθηματικής Παιδείας στο δεύτερο μισό του 20 ου αιώνα.*Αθήνα:Σύγχρονη Εποχή

ΤουμάσηςΜπ. (1987). *Μια ανασκόπηση του παγκόσμιου σκηνικού της δευτ/θμιας μαθηματικής .εκπαίδευσης, τα τελευταία 200 χρόνια.* Ευκλείδης Γ', τεύχος

Revuz E.,(1981). *Η αλλαγή της εκπαίδευσης των μαθηματικών μετά το 1950. Ιδέες και Πραγματοποίηση*. Γαλλία. Μετάφραση: Παπαδοπετράκη Ε., Μαθηματική Επιθεώρηση, Τεύχος 21, 48-64.

Ματσαγγούρας, Η., (1996). *Θεωρία της διδασκαλίας. Η προσωπική θεωρία ως πλαίσιο στοχαστικοκριτικής ανάλυσης*. Αθήνα:Συμμετρία.

Ματσαγγούρας, Ηλίας Γ., (2011). *Θεωρία και πράξη της διδασκαλίας*, Αθήνα: Gutenberg.

Γαγάτσης, Α., (1992). Δ*ιδακτικής των Μαθηματικών*, Θεσσαλονίκη:εκδόσεις Αθανάσιος Γαγάτσης.

ΞΕΝΗ

CuomoS., (2007). *Αρχαία Μαθηματικά*, Αθήνα:Ενάλιος.

Bagni, G.T., (1996). *Irrational inequations: learning and didactical contract.*(χ.τ.)

Steffe, L., &Wiegel, H., (1992). *On reforming practice in mathematics education.*Educational Studies in Mathematics (χ.τ.)

Papert, S., &Harel, I.,(1991). Constructionism, Ablex Publishing Corporation

Gagatsis, A. & Rogers, L. (Eds.).(n.d.)*Didactics and History of Mathematics*

Bagni, G.T., (2001). *An investigation of some misconceptions in High School*

students, ανακτήθηκε στις 20 Απριλίου 2016 από http://www.syllogismos.it/education/Misconceptions.pdf

Brousseau G., (1987). *Theory of Didactical Situations in Mathematics: Didactique des Mathématiques, Paris.*

Jech, T., (2006).*Set Theory.* Academic, Springer

Davis - Hersh , (1981) The Mathematical Experience. Boston-Basel-Stuttgart,

BirkhäuserVerlag

BAKER D. & LETENDRE G., (2005).N*ational Differences, Global Similarities*
Davis, P. J. &Hersh, R., (1981). *The Mathematical Experience. Boston-Basel-*

Stuttgart .Berlin:BirkhäuserVerlag.

World Culture and the Future of Schooling, USA:Stanford University Press.

Official Journal of the European Union L 394, 30.12.2006, Volume 49

Strategic framework of European Union – Education and Training 2020 ανακτήθηκεστις 16 Απριλίου 2016 από http://ec.europa.eu/education/policy/strategic-framework/index_en.htm

Education Committee of the European Mathematical Society in European Union, Annual report of 2015, EU

Goldstein, H., (2008). *Comment peut-on utiliser les étudescomparativesinternationales pour doter les politiqueséducativesd'informationsfiables? Revue française de pédagogie.*

Hopmann, S.T, Brinek, G. and Retzl, M., eds. (2007).*PISA zufolge PISA: hält PISA, was es verspricht,* Wien: LIT.

Mullis, I.V.S., Martin, M.O. &Foy, P., (2008).*TIMSS 2007 International Mathematics Report: Findings from IEA's Trends in International Mathematics and Science Study at the Fourth and Eighth Grades. Chestnut Hill,* MA: Boston College, TIMSS and PIRLS International Study Center.

The organisation for economic co-operation and development (OECD) ANNUAL REPORT of 2003.

Education, Audiovisual and Culture Executive Agency of European Commision, (2013) *Recommended annual Taught Time in Full-Time Compulsory Education in Europe,* European Union

Wess A., Edge A. and Stokes E., (1999). Secondary education across Europe:Curricula and school examination systems CENTRE FOR EDUCATIONAL RESEARCH, London School of Economics and Political Science, UK

Haugland, S. W. (1992). *The effect of computer software on preschool children's developmental gains*. Journal of Computing in Childhood Education

Engeström, Y., (1999). *"Activity theory and individual and social transformation." In Y. Engström, R. Miettinen and R.-L. Punämaki (Eds.) Perspectives on Activity Theory.*New York: Cambridge UP.

Engeström, Y,. (2001). *Expansive learning at work: toward an activity theoretical*

reconceptualization. Journal of Education and Work, vol 14

Eurydice :Taught Time in Full-time Compulsory Education Europe 2012/13 – Facts and Figures (Annual Report)

Wenger, E., (1998). *Communities of Practice.* Cambridge: Cambridge University Press

Villa M. (ed) (1965). Matematicamodernanellascuola Media, con la collaborazione di L. Campedelli, E. Castelnuovo, U. Morin, Pàtron, Bologna. [Modern mathematics for teachers]

Castelnuovo E. (1964). Didatticadellamatematica, La Nuova Italia, Firenze.[Seminal book about new ideas to teach mathematics].

Ciarrapico L. (2002). L'insegnamentodellamatematica dal passatorecenteall'attualità. Archimede, 123-129 [History of the development of syllabi in the last 50 years].

Morin U. (1965).Interpretazione di unprogetto di matematica per ilbiennioliceale, Archimede, 17, 57-68. [Discussion about the proposal of a high school reform in the '60s.

Linati P. (2011). L'algoritmodelleoccasioniperdute. La matematicanellascuoladellasecondametà del Novecento. Trento: Erickson. [A historical overview on proposals of reforms in the teaching of mathematics in Italy]

Assistant Masters Association: The Teaching of Mathematics in Secondary Schools, Cambridge Univ. Press, 1973

Eyridice, (2011) *Mathematics: Education in Europe, Common Challenges And National Policies*, European Commission

Holsinger B., D. & Cowell N., R.,(2000). *Positioning secondary school education in developing countries.* Paris: Published in the series: Policies and strategies for secondary education

ΔΙΑΔΥΚΤΙΑΚΟΙ ΤΟΠΟΙ

http://www.nfer.ac.uk/research/centre-for-information-and-reviews/inca.cfm (πρόσβαση 29.03.2016)

Education, Audiovisual and Culture Executive Agency http://eacea.ec.europa.eu (πρόσβαση 02.04.2016)

NCTM,1989.NationalCouncilofTeachers:http://www.fayar.net/east/teacher.web/math/Standards/previous/CurrEvStds/index.htm

International Mathematical Union (IMU)www.**math**union.org/

Online Placement Instrument (OPI) | ACERhttps://www.acer.edu.au/**opi**

International Mathematical Union www.mathunion.org › ... › ICME - International Congress on Mathematical Education

http://cache.media.eduscol.education.fr/ (πρόσβαση 05.04.2016)

http://eduscol.education.fr (πρόσβαση 05.04.2016)

http://eduscol.education.fr/ressources-maths (πρόσβαση 13.04.2916)

http://www.french-property.com/guides/france/public-services/school-education/lower-secondary/curriculum/ (πρόσβαση 02.04.2016)

https://webgate.ec.europa.eu/fpfis/mwikis/eurydice/index.php/Germany:Overview (πρόσβαση 02.04.2016)

http://www.istruzione.it/ (πρόσβαση 06.04.2016)

http://www.german-way.com/ (πρόσβαση 01.04.2016)

http://www.dynot.net/ (πρόσβαση 01.04.2016)

http://www.factfish.com/ (πρόσβαση 09.04.2016)

http://edulabs.minedu.gov.gr (πρόσβαση 09.04.2016)

https://edu.ellak.gr/ (πρόσβαση 29.04.2016)

http://telemath.gr/joomla/ (πρόσβαση 10.04.2016)

https://www.bmbf.de/en (πρόσβαση 01.04.2016)

https://webgate.ec.europa.eu/fpfis/mwikis/eurydice/index.php/Italy:Secondary_and_Post-Secondary_Non-Tertiary_Education (πρόσβαση 02.04.2016)

https://www.justlanded.com/english/Italy/Italy-Guide/Education/Secondary-school-in-Italy (πρόσβαση 02.04.2016)

www.oecd.org/pisa, http://www.oecd.org/pisa/keyfindings/pisa-2012-results.htm (πρόσβαση 04/2016)

http://ec.europa.eu/education/policy/strategic-framework/index_el.htm(πρόσβαση 04/2016)

http://www.mathineurope.eu/ (προσβαση 03/2016)

Deutsche Mathematiker-Vereinigung, http://www.mnu.de/ (22.04.2016)

GesellschaftfürDidaktik der Mathematikhttp://www.history.didaktik.mathematik.uni-wuerzburg.de/

DeutscherVereinzurFörderung des mathematischen und naturwissenschaftlichenUnterrichtshttp://dmv.mathematik.de/*(22.04.2016)*

Herbert Henning (n.d.) http://www.history.didaktik.mathematik.uni-wuerzburg.de/meg/mathedb3.html*(24.04.2016)*

Επισκόπιση διαδικτυακών τόπων :

https://www.minedu.gov.gr/ (ΥΠΕΠΘ)

http://www.pi-schools.gr/ (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο)