ΘΕΜΑΤΑ ΣΤΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΑΠΟ ΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΠΑΙΓΝΙΩΝ, ΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΓΕΝΙΚΩΝ ΙΣΟΡΡΟΠΙΩΝ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΚΡΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ

Διδακτορική Διατριβή

του
Νικολάου Ευσταθίου Σωφρονίδη

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ 2004

Στη μητέρα μου Άννα και στον πατέρα μου Ευστάθιο

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Η εκπόνηση της παρούσης διατριβής ξεκίνησε το ακαδημαϊκό έτος 1999-2000 στο *Krannert Graduate School of Management* του Πανεπιστημίου *Purdue* της *Indiana* των Ηνωμένων Πολιτειών υπό την καθοδήγηση του καθηγητή Χαράλαμπου Αλιπράντη, τον οποίο και ευχαριστώ ιδιαιτέρως.

Ευχαριστώ το Τμήμα Οικονομικών του Πανεπιστημίου Μακεδονία που με δέχθηκε το έτος 2000 ως υποψήφιο διδάκτορα για να συνεχίσω την εκπόνηση της διατριβής μου στην Ελλάδα. Η διατριβή ολοκληρώθηκε υπό την επίβλεψη του αναπληρωτή καθηγητή Δημήτρη Ιωαννίδη, τον οποίο και ευχαριστώ ιδιαιτέρως.

Ευχαριστώ επίσης τα μέλη της τριμελούς επιτροπής Δημήτρη Ιωαννίδη, Αγγελική Νικολάου και Χαράλαμπο Αλιπράντη, καθώς και τα μέλη της επταμελούς επιτροπής Δημήτρη Ιωαννίδη, Αγγελική Νικολάου, Νικόλαο Γιαννέλη, Μανώλη Λουκάκη, Θεόδωρο Παλυβό, Σπύρο Βασιλάκη και Γιάννη Παπαναστασίου.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σκοπός αυτής της διδακτορικής διατριβής είναι να αποδείξει ότι υπάρχουν ορισμένοι περιορισμοί στη δυνατότητα εύρεσης ισορροπιών σε παίγνια, ανταγωνιστικών ισορροπιών σε οικονομίες, καθώς επίσης και βέλτιστων πλάνων σε μακροοικονομικά μοντέλα.

Η διατριβή χωρίζεται σε τέσσερα κεφάλαια.

Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα προκαταρκτικά από τη θεωρία υπολογισιμότητας και κυρίως από την περιγραφική θεωρία συνόλων που αποτελούν το εργαλείο για την απόδειξη των αποτελεσμάτων αυτής της διδακτορικής διατριβής. Το περιεχόμενο της τρίτης παραγράφου είναι στο σύνολό του πρωτότυπο. Επεκτείνει παλαιότερη δουλειά του γράφοντος που περιέχεται στην εκπονηθείσα διδακτορική του διατριβή στα μαθηματικά στο *California Institute of Technology* και παρέχει ένα καινούργιο θεώρημα στην περιγραφική θεωρία συνόλων από το οποίο προκύπτουν τα περισσότερα από τα αποτελέσματα αυτής της διδακτορικής διατριβής.

Το δεύτερο κεφάλαιο πραγματεύεται τη θεωρία παιγνίων. Ο ορισμός της ισορροπίας *Nash* χωρίς συνεργασίες σε παίγνια πολλών ατόμων χωρίς συνεργασίες σε στρατηγική μορφή, καθώς και η απόδειξη της ύπαρξης ισορροπιών *Nash* χωρίς συνεργασίες, υπό τις υποθέσεις της πλήρους συνέχειας και της χωριστής οιονεί κοιλότητας των συναρτήσεων απόδοσης των παικτών, δόθηκαν από τον *John F. Nash* στο *Nash* [1951]. Για την εργασία του αυτή καθώς και για άλλες, τιμήθηκε το 1994 με το βραβείο *Nobel* στην οικονομική επιστήμη. Αν και είναι συχνά φυσικό να μοντελοποιούμε στρατηγικές καταστάσεις στα οικονομικά ως παίγνια χωρίς συνεργασίες με τους οικονομικούς παράγοντες ως παίκτες που έχουν να επιλέξουν στρατηγικές μεταξύ ενός συνεχούς, σε πολλές περιπτώσεις οι συναρτήσεις απόδοσης προκύπτει ότι είναι ασυνεχείς. Ικανές συνθήκες για την ύπαρξη ισορροπιών *Nash* χωρίς συνεργασίες σε ασυνεχή παίγνια, δηλαδή, παίγνια με ασυνεχείς αποδόσεις, δόθηκαν από πολλούς ερευνητές. Δείτε, για παράδειγμα, το *Reny* [1999] και ειδικότερα την Εισαγωγή

στις σελίδες 1029-1032 του *Reny* [1999] ή το *Rath* [1996] και ειδικότερα την Εισαγωγή στις σελίδες 305-307 του *Rath* [1996].

Ο πρώτος μας σκοπός σε αυτό το κεφάλαιο είναι να δείξουμε ότι για κάθε ακέραιο $n \geq 2$, δεν υπάρχουν μετρητές κατά *Borel* αναγκαίες και ικανές συνθήκες επί n κάτω ημισυνεχών συναρτήσεων απόδοσης που ορίζουν ένα παίγνιο n ατόμων χωρίς συνεργασίες σε στρατηγική μορφή, οι οποίες μπορούν να βεβαιώσουν την ύπαρξη ισορροπιών *Nash* χωρίς συνεργασίες (είτε σε καθαρές ή σε μεικτές στρατηγικές). Συγκεκριμένα αποδεικνύουμε το εξής:

Θεώρημα 1. *Δοθέντων οποιουδήποτε ακεραίου $n \geq 2$ και οποιωνδήποτε συμπαγών ομαλών πολλαπλοτήτων*

$$M_1, \ ..., \ M_n$$

ως συνόλων στρατηγικών, το σύνολο όλων των n-άδων

$$(u_1, ..., u_n)$$

κάτω ημισυνεχών συναρτήσεων απόδοσης που ορίζουν ένα παίγνιο n ατόμων

$$\mathcal{G} = (M_1, ..., M_n, u_1, ..., u_n)$$

χωρίς συνεργασίες σε στρατηγική μορφή, το οποίο έχει ισορροπία Nash χωρίς συνεργασίες σε καθαρές στρατηγικές, δεν είναι μετρητό κατά Borel στο

$$LSC(M_1 \times ... \times M_n, \mathbf{R})^n$$

Επίσης, το ίδιο ισχύει αν αντικαταστήσουμε τις καθαρές στρατηγικές από μεικτές στρατηγικές.

Έτσι, για κάθε ακέραιο $n \geq 2$, οποιεσδήποτε αναγκαίες και ικανές συνθήκες ύπαρξης ισορροπιών *Nash* είτε σε καθαρές ή σε μεικτές στρατηγικές για n κάτω ημισυνεχείς συναρτήσεις απόδοσης που ορίζουν ένα παίγνιο n ατόμων χωρίς συνεργασίες σε στρατηγική μορφή δε μπορούν να εκφραστούν αναλυτικά μέσω συγκεκριμένων τύπων, απλών αναλυτικών εκφράσεων και τα τοιαύτα.

Ένα ανάλογο αποτέλεσμα αποδεικνύουμε και για τα παίγνια του *Bayes*. Ο ορισμός των παιγνίων του *Bayes* και η εισαγωγή της έννοιας της ισορροπίας *Nash* του *Bayes* δόθηκαν από τον *John C. Harsanyi* στα *Harsanyi* [1967], [1968*a*] και [1968*b*]. Για τις εργασίες του αυτές καθώς και για άλλες, τιμήθηκε το 1994 με το βραβείο *Nobel* στην οικονομική επιστήμη.

Ο δεύτερός μας σκοπός σε αυτό το κεφάλαιο είναι να δείξουμε ότι για κάθε ακέραιο $n \geq 2$, δεν υπάρχουν μετρητές κατά *Borel* αναγκαίες και ικανές συνθήκες επί n κάτω ημισυνεχών συναρτήσεων απόδοσης που ορίζουν ένα παίγνιο του *Bayes* n ατόμων, οι οποίες μπορούν να βεβαιώσουν την ύπαρξη ισορροπιών *Nash* του *Bayes*. Συγκεκριμένα αποδεικνύουμε το εξής:

Θεώρημα 2. *Δοθέντων οποιουδήποτε ακεραίου $n \geq 2$, οποιωνδήποτε συμπαγών ομαλών πολλαπλοτήτων*

$$S_1,\ ...,\ S_n$$

ως χώρων των στρατηγικών, οποιωνδήποτε μη κενών το πολύ αριθμήσιμων συνόλων

$$C_1,\ ...,\ C_n$$

(εφοδιασμένων με τη διακριτή τοπολογία) ως χώρων των διανυσμάτων πληροφόρησης και οποιουδήποτε μέτρου πιθανότητας R επί του $C_1 \times ... \times C_n$ με την ιδιότητα ότι

$$(\forall c_i^0 \in C_i)(R(C_1 \times ... \times C_{i-1} \times \{c_i^0\} \times C_{i+1} \times ... \times C_n) > 0)$$

για κάθε $i \in \{1, ..., n\}$, ως της βασικής κατανομής πιθανότητας του παιγνίου, το σύνολο όλων των n-άδων

$$(V_1, ..., V_n)$$

κάτω ημισυνεχών συναρτήσεων απόδοσης που ορίζουν ένα παίγνιο του Bayes n ατόμων

$$\mathcal{G} = ((S_1, ..., S_n), (C_1, ..., C_n), (V_1, ..., V_n), R)$$

το οποίο έχει ισορροπία Nash του Bayes, δεν είναι μετρητό κατά Borel στο

$$LSC(S_1 \times ... \times S_n \times C_1 \times ... \times C_n, \mathbf{R})^n$$

Έτσι, για κάθε ακέραιο $n \geq 2$, οποιεσδήποτε αναγκαίες και ικανές συνθήκες ύπαρξης ισορροπιών *Nash* του *Bayes* για n κάτω ημισυνεχείς συναρτήσεις απόδοσης που ορίζουν ένα παίγνιο του *Bayes* n ατόμων δε μπορούν να εκφραστούν αναλυτικά μέσω συγκεκριμένων τύπων, απλών αναλυτικών εκφράσεων και τα τοιαύτα.

Στη συνέχεια εισάγουμε την έννοια των μερικώς υπολογίσιμων παιγνίων και αποδεικνύουμε το εξής:

Θεώρημα 3. *Για κάθε ακέραιο $n \geq 2$, δεν υπάρχει αλγόριθμος που αποφασίζει κατά πόσον ένα μερικώς υπολογίσιμο παίγνιο n ατόμων έχει ή όχι ισορροπία Nash χωρίς συνεργασίες σε καθαρές στρατηγικές.*

Επίσης, δοθέντος οποιουδήποτε ακεραίου $n \geq 2$, εισάγουμε την κλάσση $\mathbf{G}_n$ παιγνίων n ατόμων χωρίς συνεργασίες σε στρατηγική μορφή που σχηματίζεται από εκείνα των οποίων τα σύνολα στρατηγικών είναι αντίγραφα του συνόλου $\mathbf{R}$ των πραγματικών αριθμών και των οποίων οι συναρτήσεις απόδοσης ανήκουν στον υποδακτύλιο $\mathbf{S}_n$ του $C^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ που παράγεται από τις συναρτήσεις

$$\mathbf{R}^n \ni (x_1, ..., x_n) \mapsto i \in \mathbf{R}$$

$$\mathbf{R}^n \ni (x_1, ..., x_n) \mapsto x_j \in \mathbf{R}$$

$$\mathbf{R}^n \ni (x_1, ..., x_n) \mapsto \sin(x_j^k) \in \mathbf{R}$$

και

$$\mathbf{R}^n \ni (x_1, ..., x_n) \mapsto \sin(x_j \cdot \sin(x_j^k)) \in \mathbf{R}$$

όπου $(i, j, k) \in \mathbf{Z} \times \{1, 2, ..., n\} \times (\mathbf{N} \setminus \{0\})$, και αποδεικνύουμε το εξής:

Θεώρημα 4. *Για κάθε ακέραιο $n \geq 2$, δεν υπάρχει αλγόριθμος που αποφασίζει κατά πόσον ένα παίγνιο στην $\mathbf{G}_n$ έχει ή όχι ισορροπία Nash χωρίς συνεργασίες σε καθαρές στρατηγικές.*

Το τρίτο κεφάλαιο πραγματεύεται τη θεωρία γενικών ισορροπιών. Η οικονομική θεωρία των γενικών ισορροπιών αναπτύχθηκε από πολλές γενεές οικονομολόγων ξεκινώντας με τον *Leon Walras* στο *Walras* [1874]. Η μοντέρνα προσέγγιση βασίζεται στο μοντέλο που εδόθει από τους *Kenneth J. Arrow* και *Gerard Debreu* στο *Arrow-Debreu* [1954], για το οποίο τιμήθηκαν το 1972 και το 1983 αντιστοίχως με το βραβείο *Nobel* στην οικονομική επιστήμη. Θα πρέπει να επισημάνουμε ότι το ίδιο μοντέλο εδόθει και από τον *Lionel W. McKenzie* στο *McKenzie* [1954], σχεδόν ταυτόχρονα και ανεξάρτητα από τους *Kenneth J. Arrow* και *Gerard Debreu*, αφού η παρουσίαση και των δύο εργασιών έγινε στο ίδιο *meeting* με τη διαφορά ότι η εργασία του *Lionel W. McKenzie* παρουσιάστηκε μισή ώρα αργότερα. Έτσι παρουσιάζουμε τις οικονομίες ιδιωτικής ιδιοκτησίας και τις οικονομίες ανταλλαγής, ως ειδική περίπτωση των πρώτων, καθώς επίσης και την έννοια της ανταγωνιστικής ισορροπίας για τις οικονομίες αυτές. Τότε, όπως έγραψε ο *Gerard Debreu* στη σελίδα 134 της παραγράφου 14 του *Hirsch-Marsden-Shub* [1993],

Μία θεμελιώδης ερώτηση εγείρεται εδώ. Δηλαδή, υπό ποιες συνθήκες επί της οικονομίας ιδιωτικής ιδιοκτησίας $\mathcal{E}$ μπορεί κανείς να βεβαιώσει ότι υπάρχει μία κατάσταση ισορροπίας;

Ο σκοπός μας σε αυτό το κεφάλαιο είναι να αποδείξουμε ότι δεν υπάρχουν μετρητές κατά *Borel* αναγκαίες και ικανές συνθήκες επί των οικονομιών ιδιωτικής ιδιοκτησίας με σχέσεις προτίμησης που αναπαρίστανται από κάτω ημισυνεχείς συναρτήσεις ωφέλειας, οι οποίες μπορούν να βεβαιώσουν την ύπαρξη ανταγωνιστικών ισορροπιών. Αυτό μπορεί να το δει κανείς ως μία αρνητική απάντηση στη θεμελιώδη ερώτηση που διατυπώθηκε από τον *Gerard Debreu*. Συγκεκριμένα αποδεικνύουμε το εξής:

Θεώρημα 5. *Δοθέντων οποιωνδήποτε αυστηρά κυρτών συνόλων παραγωγής*

$$Y_1,\ ...,\ Y_k$$

για οικονομίες με l αγαθά, το σύνολο όλων των οικονομιών ιδιωτικής ιδιοκτησίας $\mathcal{E}$ με m καταναλωτές, k παραγωγούς και l αγαθά και με σχέσεις προτίμησης που αναπαρίστανται από κάτω ημισυνεχείς συναρτήσεις ωφέλειας, οι οποίες έχουν ανταγωνιστικές ισορροπίες, δεν είναι μετρητό κατά Borel στο

$$(LSC(\mathbf{R}^l_+, \mathbf{R}) \times (\mathbf{R}^l_+ \setminus \{\mathbf{0}\}))^m \times SM(m, k)$$

ενώ το σύνολο όλων των οικονομιών ιδιωτικής ιδιοκτησίας $\mathcal{E}$ με m καταναλωτές, k παραγωγούς και l αγαθά και με σχέσεις προτίμησης που αναπαρίστανται από συνεχείς συναρτήσεις ωφέλειας, οι οποίες έχουν ανταγωνιστικές ισορροπίες, είναι F_σ στο

$$(C(\mathbf{R}^l_+, \mathbf{R}) \times (\mathbf{R}^l_+ \setminus \{\mathbf{0}\}))^m \times SM(m, k)$$

Έτσι, δεν υπάρχουν μετρητές κατά *Borel* αναγκαίες και ικανές συνθήκες επί των οικονομιών ιδιωτικής ιδιοκτησίας με σχέσεις προτίμησης που αναπαρίστανται από κάτω ημισυνεχείς συναρτήσεις ωφέλειας, οι οποίες μπορούν να βεβαιώσουν την ύπαρξη ανταγωνιστικών ισορροπιών. Με άλλα λόγια, οποιεσδήποτε αναγκαίες και ικανές συνθήκες ύπαρξης ανταγωνιστικών ισορροπιών για οικονομίες ιδιωτικής ιδιοκτησίας με σχέσεις προτίμησης που αναπαρίστανται από κάτω ημισυνεχείς συναρτήσεις ωφέλειας δε μπορούν να εκφραστούν αναλυτικά μέσω συγκεκριμένων τύπων, απλών αναλυτικών εκφράσεων και τα τοιαύτα.

Άμεση συνέπεια του προηγούμενου θεωρήματος είναι το ακόλουθο αποτέλεσμα που αφορά τις οικονομίες ανταλλαγής:

Θεώρημα 6. *Το σύνολο όλων των οικονομιών ανταλλαγής $\mathcal{E}$ με m καταναλωτές και l αγαθά και με σχέσεις προτίμησης που αναπαρίστανται από κάτω ημισυνεχείς συναρτήσεις ωφέλειας, οι οποίες έχουν ανταγωνιστικές ισορροπίες, δεν είναι μετρητό κατά Borel στο*

$$(LSC(\mathbf{R}^l_+, \mathbf{R}) \times (\mathbf{R}^l_+ \setminus \{\mathbf{0}\}))^m$$

ενώ το σύνολο όλων των οικονομιών ανταλλαγής $\mathcal{E}$ με m καταναλωτές και l αγαθά και με σχέσεις προτίμησης που αναπαρίστανται από συνεχείς συναρτήσεις ωφέλειας, οι οποίες έχουν ανταγωνιστικές ισορροπίες, είναι F_σ στο

$$(C(\mathbf{R}^l_+, \mathbf{R}) \times (\mathbf{R}^l_+ \setminus \{\mathbf{0}\}))^m$$

Έτσι, δεν υπάρχουν μετρητές κατά *Borel* αναγκαίες και ικανές συνθήκες επί των οικονομιών ανταλλαγής με σχέσεις προτίμησης που αναπαρίστανται από κάτω ημισυνεχείς συναρτήσεις ωφέλειας, οι οποίες μπορούν να βεβαιώσουν την ύπαρξη ανταγωνιστικών ισορροπιών. Με άλλα λόγια, οποιεσδήποτε αναγκαίες και ικανές συνθήκες ύπαρξης ανταγωνιστικών ισορροπιών για οικονομίες ανταλλαγής με σχέσεις προτίμησης που αναπαρίστανται από κάτω ημισυνεχείς συναρτήσεις ωφέλειας δε μπορούν να εκφραστούν αναλυτικά μέσω συγκεκριμένων τύπων, απλών αναλυτικών εκφράσεων και τα τοιαύτα.

Τέλος, το τέταρτο κεφάλαιο πραγματεύεται τα απείρου ορίζοντα διακριτά ντετερμινιστικά μακροοικονομικά μοντέλα, ακολουθώντας την προσέγγιση στο *Stokey-Lucas-Prescott* [1989]. Θα πρέπει να επισημάνουμε ότι, για τη συνολική του προσφορά στα μακροοικονομικά, ο *Robert E. Lucas Jr.* τιμήθηκε το 1995 με το βραβείο *Nobel* στην οικονομική επιστήμη.

Ο σκοπός μας σε αυτό το κεφάλαιο είναι να δείξουμε ότι δεν υπάρχουν μετρητές κατά *Borel* αναγκαίες και ικανές συνθήκες επί μιάς τριάδας μιάς κάτω ημισυνεχούς συνάρτησης επιστροφών μιάς περιόδου, μιάς συνεχούς και με συμπαγείς τιμές αντιστοιχίας περιορισμών και ενός παράγοντα έκπτωσης που ορίζουν ένα απείρου ορίζοντα διακριτό ντετερμινιστικό μακροοικονομικό μοντέλο, οι οποίες μπορούν να βεβαιώσουν την ύπαρξη βέλτιστων πλάνων που αρχίζουν από κάποιο σημείο. Συγκεκριμένα αποδεικνύουμε το εξής:

Θεώρημα 7. *Δοθείσης οποιασδήποτε συμπαγούς ομαλής πολλαπλότητας X καταστατικών μεταβλητών, το σύνολο όλων των τριάδων*

$$(F, \phi, \beta)$$

κάτω ημισυνεχών συναρτήσεων επιστροφών μιάς περιόδου $F : X^2 \to \mathbf{R}$, συνεχών και με συμπαγείς τιμές αντιστοιχιών περιορισμών $\phi : X \to K(X)$ και παραγόντων έκπτωσης $\beta \in (0, 1)$ που ορίζουν ένα απείρου ορίζοντα διακριτό ντετερμινιστικό μακροοικονομικό μοντέλο

$$\mathcal{M} = (X, F, \phi, \beta)$$

το οποίο έχει βέλτιστο πλάνο που αρχίζει από κάποιο σημείο, δεν είναι μετρητό κατά Borel στο

$$LSC(X^2, \mathbf{R}) \times C(X, K(X)) \times (0, 1)$$

ενώ το σύνολο όλων των τριάδων

$$(F, \phi, \beta)$$

συνεχών συναρτήσεων επιστροφών μιάς περιόδου $F : X^2 \to \mathbf{R}$, συνεχών και με συμπαγείς τιμές αντιστοιχιών περιορισμών $\phi : X \to K(X)$ και παραγόντων έκπτωσης $\beta \in (0, 1)$ που ορίζουν ένα απείρου ορίζοντα διακριτό ντετερμινιστικό μακροοικονομικό μοντέλο

$$\mathcal{M} = (X, F, \phi, \beta)$$

το οποίο έχει βέλτιστο πλάνο που αρχίζει από κάποιο σημείο, είναι F_σ στο

$$C(X^2, \mathbf{R}) \times C(X, K(X)) \times (0, 1)$$

Έτσι, οποιεσδήποτε αναγκαίες και ικανές συνθήκες ύπαρξης βέλτιστων πλάνων για τριάδες κάτω ημισυνεχών συναρτήσεων επιστροφών μιάς περιόδου, συνεχών και με συμπαγείς τιμές αντιστοιχιών περιορισμών και παραγόντων έκπτωσης που ορίζουν ένα απείρου ορίζοντα διακριτό ντετερμινιστικό μακροοικονομικό μοντέλο δε μπορούν να εκφραστούν αναλυτικά μέσω συγκεκριμένων τύπων, απλών αναλυτικών εκφράσεων και τα τοιαύτα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

K. J. ARROW and G. DEBREU
[1954] *Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy*, *Econometrica* **22**, 265-290.

J. C. HARSANYI
[1967] *Games with incomplete information played by "Bayesian" players. Part* I. *The basic model*, *Management Science* **14**, 159-182.
[1968*a*] *Games with incomplete information played by "Bayesian" players. Part* II. *Bayesian equilibrium points*, *Management Science* **14**, 320-334.
[1968*b*] *Games with incomplete information played by "Bayesian" players. Part* III. *The basic probability distribution of the game*, *Management Science* **14**, 486-502.

M. W. HIRSCH, *J. E. MARSDEN and M. SHUB*
[1993] *From Topology to Computation* : *Proceedings of the Smalefest*, *Springer*, *New York*.

L. W. McKENZIE
[1954] *On equilibrium in Graham's model of world trade and other competitive systems*, *Econometrica* **22**, 147–161.

J. F. NASH
[1951] *Non-Cooperative Games*, *Annals of Mathematics* **54**, 286-295.

K. P. RATH
[1996] *Existence and upper hemicontinuity of equilibrium distributions of anonymous games with discontinuous payoffs*, *Journal of Mathematical Economics* **26**, 305-324.

P. J. RENY
[1999] *On the existence of pure and mixed strategy Nash equilibria in discontinuous games*, *Econometrica* **67**, *no.* 5, 1029-1056.

N. L. STOKEY, *R. J. LUCAS Jr. and E. C. PRESCOTT*
[1989] *Recursive Methods in Economic Dynamics*, *Harvard University Press*, *Cambridge*.

L. WALRAS
[1874] *Elements d' Economie Politique Pure*, *Corbaz*, *Lauzane*.

Κεφάλαιο 1

ΠΡΟΚΑΤΑΡΚΤΙΚΑ

1.1 Εισαγωγή

Η πλειονότητα των μεταβλητών που χρησιμοποιούνται στην επιστήμη, στην προσπάθεια των επιστημόνων να περιγράψουν τον κόσμο στον οποίο ζούμε, είναι είτε διακριτές ή συνεχείς και οι διαισθητικές έννοιες του διακριτού και του συνεχούς καλύπτονται κατά κάποιον τρόπο από τις έννοιες του συνόλου $\mathbf{N}$ των φυσικών αριθμών και του συνόλου $\mathbf{R}$ των πραγματικών αριθμών, αντιστοίχως.

Όσον αφορά τις διακριτές μεταβλητές, όταν μιά από αυτές, έστω η i, αποτελεί συνάρτηση ενός πεπερασμένου αριθμού των υπολοίπων, έστω των j_1, ..., j_k (όπου $k \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$), τότε ένα πρόβλημα πρωτεύουσας σημασίας είναι το κατά πόσον υπάρχει ή όχι αλγόριθμος που υπολογίζει την i δοθέντων των τιμών των j_1, ..., j_k. Η διαισθητική έννοια των αλγοριθμικά υπολογίσιμων διακριτών μεταβλητών καλύπτεται κατά κάποιον τρόπο από την έννοια των αναδρομικών συναρτήσεων (πολλών μη αρνητικών ακεραίων μεταβλητών), το σύνολο των οποίων ορίζεται ως η μικρότερη κλάσση που περιέχει τη σταθερή με τιμή μηδέν συνάρτηση

$$\mathbf{N} \ni i \mapsto 0 \in \mathbf{N}$$

τη συνάρτηση διαδοχής

$$\mathbf{N} \ni i \mapsto i + 1 \in \mathbf{N}$$

τις συναρτήσεις προβολής

$$P_l^k : \mathbf{N}^k \ni (j_1, ..., j_k) \mapsto j_l \in \mathbf{N}$$

όπου $1 \leq l \leq k \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$, και είναι κλειστή ως προς τις πράξεις της σύνθεσης, της αρχικής αναδρομής και της ελαχιστοποίησης. (Δείτε, για παράδειγμα, το $3A$ στις σελίδες 118-128 του *Moschovakis* [1980].) Θα πρέπει να επισημάνουμε ότι το σύνολο των αναδρομικών συναρτήσεων εισήχθει κατά τα μέσα της δεκαετίας του 1930 με διάφορες μορφές που απεδείχθει ότι είναι ισοδύναμες, μελετήθηκε από πολλούς επιστήμονες και ειδικότερα από τους *Alonzo Church*, *Stephen C. Kleene*, *Andrey A. Markov*, *Emil L. Post* και *Alan Mathison Turing* (δείτε, για παράδειγμα, το $3I$ στις σελίδες 188-189 του *Moschovakis* [1980] ή το *Kleene* [1991]) και οδήγησε στη δημιουργία και στην ανάπτυξη της θεωρίας αναδρομής ή υπολογισιμότητας. (Δείτε, για παράδειγμα, το 356 *Recursive Functions* στις σελίδες 1321-1328 του *Ito* [1987*b*] και το *Rekursivnaya Founktsiya* [Αναδρομική Συνάρτηση] στις σελίδες 960-961 του *Vinogradov* [1984].)

Όσον αφορά τις συνεχείς μεταβλητές, όταν μιά από αυτές, έστω η y, αποτελεί συνάρτηση ενός πεπερασμένου αριθμού των υπολοίπων, έστω των x_1, ..., x_n (όπου $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$), τότε ένα πρόβλημα πρωτεύουσας σημασίας είναι το κατά πόσον υπάρχει ή όχι μιά αναλυτική αναπαράσταση που εκφράζει την y συναρτήσει των x_1, ..., x_n μέσω συγκεκριμένων τύπων, απλών αναλυτικών εκφράσεων και τα τοιαύτα. (Δείτε, για παράδειγμα, την Εισαγωγή στις σελίδες 1-9 του *Moschovakis* [1980].) Η μελέτη της έννοιας της αναλυτικής αναπαραστασιμότητας προηγήθηκε ιστορικά της μελέτης της έννοιας της αλγοριθμικής υπολογισιμότητας. Πρώτα το 1899, ο *Rene Baire*, βασιζόμενος στις νεοεισαχθείσες τότε έννοιες των διατακτικών αριθμών και της υπερπεπερασμένης επαγωγής από τον *Georg Cantor* (δείτε, για παράδειγμα, το 7.22 στη σελίδα 109 και το Κεφάλαιο 12 στις σελίδες 207-228 του *Moschovakis* [1993]), εισήγαγε την έννοια των συναρτήσεων *Baire* (πολλών πραγματικών μεταβλητών), το σύνολο των οποίων ορίζεται ως η μικρότερη κλάσση που περιέχει όλες τις συνεχείς συναρτήσεις και είναι κλειστή ως προς την πράξη της λήψης κατά σημείο ορίων. Αργότερα το 1905, ο *Henri Lebesgue* όρισε την έννοια των αναλυτικά αναπαραστάσιμων συναρτήσεων (πολλών πραγματικών μεταβλητών) ως τη μικρότερη κλάσση που περιέχει όλες τις σταθερές συναρτήσεις

$$\mathbf{R} \ni x \mapsto c \in \mathbf{R}$$

όπου $c \in \mathbf{R}$, όλες τις συναρτήσεις προβολής

$$P^n_m : \mathbf{R}^n \ni (x_1, ..., x_n) \mapsto x_m \in \mathbf{R}$$

όπου $1 \leq m \leq n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$, και είναι κλειστή ως προς τις πράξεις της πρόσθεσης, του πολλαπλασιασμού και της λήψης κατά σημείο ορίων. Απέδειξε ότι ταυτίζονται με τις συναρτήσεις *Baire* και, εισάγοντας την έννοια της κατά

Borel μετρησιμότητας, απέδειξε ότι ταυτίζονται με τις μετρητές κατά *Borel* συναρτήσεις (δείτε, για παράδειγμα, το 1G.15 στη σελίδα 59, το 1G.17 στη σελίδα 59 και το 1G.20 στη σελίδα 60 του *Moschovakis* [1980], ή το 24.3 στη σελίδα 190 του *Kechris* [1995]), ενώ ένα σύνολο καλείται μετρητό κατά *Borel* αν η χαρακτηριστική του συνάρτηση είναι μετρητή κατά *Borel*, με άλλα λόγια, αν η χαρακτηριστική του συνάρτηση είναι αναλυτικά αναπαραστάσιμη. Η έννοια της κατά *Borel* μετρησιμότητας καλύπτει κατά κάποιον τρόπο τη διαισθητική έννοια της αναλυτικής αναπαραστασιμότητας για συνεχείς μεταβλητές, όπως ακριβώς η έννοια της αναδρομικότητας καλύπτει κατά κάποιον τρόπο τη διαισθητική έννοια της αλγοριθμικής υπολογισιμότητας για διακριτές μεταβλητές, ενώ η μελέτη της έννοιας της κατά *Borel* μετρησιμότητας ανήκει σε εκείνον τον κλάδο των μαθηματικών που καλείται περιγραφική θεωρία συνόλων. (Δείτε, για παράδειγμα, το 22 *Analytic Sets* στις σελίδες 109-114 του *Ito* [1987*a*] και το *Deskriptivnaya Teoriya Mnozestv* [Περιγραφική Θεωρία Συνόλων] στις σελίδες 93-97 του *Vinogradov* [1979].)

1.2 Στοιχεία από την περιγραφική θεωρία συνόλων

Περιγραφική θεωρία συνόλων είναι η μελέτη των ορίσιμων συνόλων σε Πολωνικούς χώρους, οι οποίοι ορίζονται ως διαχωρίσιμοι πλήρως μετρικοποιήσιμοι χώροι. Στη θεωρία αυτή τα σύνολα ταξινομούνται στην ιεραρχία *Borel* και στην προβολική ιεραρχία σύμφωνα με την πολυπλοκότητα του ορισμού τους. Δοθέντος ενός Πολωνικού χώρου X, το πρώτο επίπεδο της ιεραρχίας *Borel* που αντιστοιχεί στον X αποτελείται από την κλάση των $\mathbf{\Sigma}^0_1$-συνόλων ή G-συνόλων του που είναι εξ ορισμού τα ανοικτά του υποσύνολα και την κλάση των $\mathbf{\Pi}^0_1$-συνόλων ή F-συνόλων του που είναι εξ ορισμού τα κλειστά του υποσύνολα. Το δεύτερο επίπεδο αποτελείται από την κλάση των $\mathbf{\Sigma}^0_2$-συνόλων ή F_σ-συνόλων του που ορίζονται ως αριθμήσιμες ενώσεις $\mathbf{\Pi}^0_1$-συνόλων του και την κλάση των $\mathbf{\Pi}^0_2$-συνόλων ή G_δ-συνόλων του που ορίζονται ως αριθμήσιμες τομές $\mathbf{\Sigma}^0_1$-συνόλων του. Το τρίτο επίπεδο αποτελείται από την κλάση των $\mathbf{\Sigma}^0_3$-συνόλων ή $G_{\delta\sigma}$-συνόλων του που ορίζονται ως αριθμήσιμες ενώσεις $\mathbf{\Pi}^0_2$-συνόλων του και την κλάση των $\mathbf{\Pi}^0_3$-συνόλων ή $F_{\sigma\delta}$-συνόλων του που ορίζονται ως αριθμήσιμες τομές $\mathbf{\Sigma}^0_2$-συνόλων του και ούτω καθ' εξής. Πιο συγκεκριμένα, αν ξ είναι τυχών διατακτικός αριθμός μεγαλύτερος του 1 και μικρότερος του πρώτου υπεραριθμήσιμου διατακτικού αριθμού ω_1, τότε

$$\mathbf{\Sigma}^0_\xi(X) = \left\{ \bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n : (\forall n \in \mathbf{N})(\exists \xi_n < \xi)(A_n \in \mathbf{\Pi}^0_{\xi_n}(X)) \right\}$$

και

$$\mathbf{\Pi}^0_\xi(X) = \{A \in \mathcal{P}(X) : X \setminus A \in \mathbf{\Sigma}^0_\xi(X)\}$$

ενώ

$$\mathbf{\Sigma}^0_1(X) = \{O : \text{το } O \text{ είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του } X\}$$

και

$$\mathbf{\Pi}^0_1(X) = \{C : \text{το } C \text{ είναι ένα κλειστό υποσύνολο του } X\}$$

Από την άλλη μεριά, το πρώτο επίπεδο της προβολικής ιεραρχίας που αντιστοιχεί στον X αποτελείται από την κλάση των αναλυτικών ή $\mathbf{\Sigma}^1_1$-συνόλων του που ορίζονται ως συνεχείς εικόνες εντός του X Πολωνικών χώρων και την κλάση των συμπληρωμάτων αναλυτικών ή $\mathbf{\Pi}^1_1$-συνόλων του που ορίζονται ως συμπληρώματα $\mathbf{\Sigma}^1_1$-συνόλων του. Το δεύτερο επίπεδο αποτελείται από την κλάση των $\mathbf{\Sigma}^1_2$-συνόλων του που ορίζονται ως συνεχείς εικόνες εντός του X $\mathbf{\Pi}^1_1$-συνόλων του και την κλάση των $\mathbf{\Pi}^1_2$-συνόλων του που ορίζονται ως συμπληρώματα $\mathbf{\Sigma}^1_2$-συνόλων του και ούτω καθ' εξής. (Δείτε, για παράδειγμα, την Εισαγωγή, το 11.B στις σελίδες 68-70, το 25.A στις σελίδες 196-197, το 32.A στις σελίδες 242-243 και το 37.A στις σελίδες 313-316 του *Kechris* [1995].)

Δοθείσης μίας κλάσης $\mathbf{\Gamma}$ συνόλων είτε στην ιεραρχία *Borel* ή στην προβολική ιεραρχία, αν X και Y είναι οποιοιδήποτε Πολωνικοί χώροι, τότε καλούμε ένα $\mathbf{\Gamma}$-σύνολο $B \subseteq Y$ αναγώγιμο κατά *Wadge* σε ένα σύνολο $A \subseteq X$, συμβολικά $B \leq_W A$, αν υπάρχει μία συνεχής απεικόνιση $f : Y \to X$ τέτοια ώστε $B = f^{-1}[A]$. Επιπλέον, καλούμε το A $\mathbf{\Gamma}$-σκληρό, αν για κάθε Πολωνικό χώρο Y και για κάθε $\mathbf{\Gamma}$-σύνολο $B \subseteq Y$, έχουμε $B \leq_W A$, και, ειδικότερα, καλούμε το A $\mathbf{\Gamma}$-πλήρες, αν αποτελεί επίσης ένα $\mathbf{\Gamma}$-σύνολο. Μία ισχυρή τεχνική για να βρούμε ένα κάτω φράγμα για την πολυπλοκότητα δοθέντος συνόλου είναι να δείξουμε ότι είναι $\mathbf{\Gamma}$-σκληρό για κάποια κλάση $\mathbf{\Gamma}$ συνόλων είτε στην ιεραρχία *Borel* ή στην προβολική ιεραρχία, συνήθως αποδεικνύοντας ότι κάποιο άλλο σύνολο που είναι γνωστό ότι είναι $\mathbf{\Gamma}$-σκληρό είναι αναγώγιμο κατά *Wadge* σε αυτό, και δείχνοντας ότι είναι $\mathbf{\Gamma}$-πλήρες υπολογίζουμε την ακριβή του πολυπλοκότητα. (Δείτε, για παράδειγμα, το 21.13 στη σελίδα 156, το 22.B στις σελίδες 169-170 και το 26.C στις σελίδες 206-207 του *Kechris* [1995].)

1.3 Δέντρα και ζεύγη κάτω ημισυνεχών πραγματικών συναρτήσεων πραγματικής μεταβλητής

Τα δέντρα είναι βασικά συνδυαστικά εργαλεία στην περιγραφική θεωρία συνόλων. Δέντρο επί του $\mathbf{N}$ είναι ένα υποσύνολο T του συνόλου

$$\mathbf{N}^{<\mathbf{N}} = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \mathbf{N}^n$$

όλων των πεπερασμένων ακολουθιών φυσικών αριθμών που είναι κλειστό ως προς αρχικά τμήματα και το σώμα του είναι το

$$[T] = \{\alpha \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}} : (\forall n \in \mathbf{N})(\alpha|n \in T)\}$$

όπου $\alpha|n = (\alpha(0), ..., \alpha(n-1))$. Ένα δέντρο το βλέπουμε συνήθως ως ένα στοιχείο του $2^{\mathbf{N}^{<\mathbf{N}}}$ ταυτοποιώντας το με τη χαρακτηριστική του συνάρτηση, όπου το $2^{\mathbf{N}^{<\mathbf{N}}}$ είναι εφοδιασμένο με την τοπολογία γινόμενο με το $2 = \{0, 1\}$ διακριτό που καθιστά το $2^{\mathbf{N}^{<\mathbf{N}}}$ ομοιομορφικό με το χώρο του *Cantor*. Ένα κλειστό υποσύνολο του $2^{\mathbf{N}^{<\mathbf{N}}}$ είναι το σύνολο Tr όλων των δέντρων επί του $\mathbf{N}$. Έτσι, το Tr αποκτά τη δομή ενός Πολωνικού χώρου (δηλαδή, ενός διαχωρίσιμου πλήρως μετρικοποιήσιμου χώρου) και διαμερίζεται σε δύο χαρακτηριστικά υποσύνολα, το σύνολο

$$IF = \{T \in Tr : [T] \neq \emptyset\}$$

των κακώς θεμελιωμένων δέντρων επί του $\mathbf{N}$ που είναι $\mathbf{\Sigma}^1_1$-πλήρες και το σύνολο

$$WF = \{T \in Tr : [T] = \emptyset\}$$

των καλώς θεμελιωμένων δέντρων επί του $\mathbf{N}$ που είναι $\mathbf{\Pi}^1_1$-πλήρες. (Δείτε, για παράδειγμα, το 2.*A* στις σελίδες 5-6, το 4.32 στις σελίδες 27-28, το 2.*E* στη σελίδα 10, το 27.1 στη σελίδα 209 και το 32.*B* στη σελίδα 243 του *Kechris* [1995].)

Αυτό που θα παρουσιάσουμε παρακάτω αποτελεί βελτίωση της κατασκευής που δίνεται στις σελίδες 63-67 του Κεφαλαίου II της διδακτορικής διατριβής *Sofronidis* [1999] που ο γράφων εξεπόνησε στο *California Institute of Technology* κατά τη διάρκεια των ετών 1995-1999 υπό την επίβλεψη του *Alexander S. Kechris* και είναι εμπνευσμένο από την κατασκευή που δίνεται στην απόδειξη του 23.15 στη σελίδα 183 και την κατασκευή που δίνεται στην απόδειξη του 33.9 στη σελίδα 248 του *Kechris* [1995].

Ξεκινάμε με ένα στοιχειώδες λήμμα που αφορά δέντρα.

Λήμμα 1.3.1. *Αν Tr^* είναι ο Πολωνικός χώρος όλων των δέντρων επί του $\mathbf{N}^* = \mathbf{N} \setminus \{0\}$ και*

$$\Delta = \{\emptyset, (0), (0,1), (0,2), (0,2,2), (0,3), (0,3,3), (0,3,3,3), ...\}$$

τότε η απεικόνιση

$$\delta : Tr^* \ni T \mapsto \Delta \cup T \in Tr$$

είναι καλά ορισμένη, συνεχής και ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:

1) *Το $T \in Tr^*$ είναι κακώς θεμελιωμένο αν και μόνον αν το $\delta(T) \in Tr$ είναι κακώς θεμελιωμένο.*

2) *Για κάθε $T \in Tr^*$ και για κάθε $s \in \delta(T)$, υπάρχει $t \in \delta(T)$ τέτοιο ώστε $\mathrm{length}(s) < \mathrm{length}(t)$.*

Απόδειξη. Επειδή Tr^* είναι ο Πολωνικός χώρος όλων των δέντρων επί του $\mathbf{N}^*$, ο ορισμός του Δ συνεπάγεται ότι για κάθε $T \in Tr^*$, έχουμε

$$\Delta \cap T = \{\emptyset\}$$

Οπότε δοθέντος $T \in Tr^*$, για κάθε $t \in \delta(T) \setminus \{\emptyset\}$, είτε $t \in \Delta$ ή $t \in T$. Αν $t \in T$, τότε επειδή $T \in Tr^*$, έπεται ότι για κάθε $s \in (\mathbf{N}^*)^{<\mathbf{N}}$, αν το s είναι ένα αρχικό τμήμα του t, τότε $s \in T$ και συνεπώς για κάθε $s \in \mathbf{N}^{<\mathbf{N}}$, αν το s είναι ένα αρχικό τμήμα του t, τότε $s \in T$. Έτσι, σε κάθε περίπτωση, για κάθε $s \in \mathbf{N}^{<\mathbf{N}}$, αν το s είναι ένα αρχικό τμήμα του t, τότε $s \in \Delta \cup T$ και συνεπώς $\delta(T) \in Tr$. Επιπλέον, αν το $S \subseteq \mathbf{N}^{<\mathbf{N}}$ είναι μη κενό και πεπερασμένο και

$$S^* = S \cap (\mathbf{N}^*)^{<\mathbf{N}}$$

τότε

$$\begin{aligned} &\{T' \in Tr^* : (\forall s \in S)(s \in \delta(T') \iff s \in \delta(T))\} \\ &= \{T' \in Tr^* : (\forall s \in S^*)(s \in T' \iff s \in T)\} \end{aligned}$$

Έχουμε έτσι αποδείξει ότι η δ είναι καλά ορισμένη και συνεχής. Επιπρόσθετα, ο ορισμός του Δ προφανώς συνεπάγεται την 2), ενώ δοθέντος $T \in Tr^*$, επειδή το

$$(\Delta \cup T)_{(0)} = \{\emptyset, (1), (2), (2,2), (3), (3,3), (3,3,3), ...\}$$

είναι καλώς θεμελιωμένο και για κάθε $s \in \mathbf{N}^{<\mathbf{N}} \setminus \{\emptyset\}$, έχουμε

$$\begin{aligned} s(0) \neq 0 \ \Rightarrow \ (\Delta \cup T)_s &= \{t \in \mathbf{N}^{<\mathbf{N}} : s^\frown t \in \Delta \cup T\} \\ &= \{t \in (\mathbf{N}^*)^{<\mathbf{N}} : s^\frown t \in T\} \\ &= T_s \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} s(0) = 0 \ \Rightarrow \ (\Delta \cup T)_s &= \{t \in \mathbf{N}^{<\mathbf{N}} : s^\frown t \in \Delta \cup T\} \\ &= \{t \in \mathbf{N}^{<\mathbf{N}} : s^\frown t \in \Delta\} \\ &= \Delta_s \end{aligned}$$

όπου

$$s^\frown t = (s(0), ..., s(\text{length}(s) - 1), t(0), ..., t(\text{length}(t) - 1))$$

έπεται ότι

$$WF_{\delta(T)} = WF_T$$

(δείτε, για παράδειγμα, το $2.F$ στη σελίδα 11 του $Kechris$ [1995]) και συνεπώς η 1). **Όπερ έδει δεῖξαι**

Συνεχίζουμε με έναν ορισμό και μία χαρακτηριστική ιδιότητα ενός δέντρου ζευγών διαστημάτων στην πραγματική ευθεία.

Ορισμός 1.3.2. *Δοθέντων $-\infty < a < b < \infty$, θέτουμε*

$$I_\emptyset = J_\emptyset = [a, b]$$

και αν το $s \in \mathbf{N}^{<\mathbf{N}}$ είναι τέτοιο ώστε τα

$$I_s = [a_s, b_s]$$

και

$$J_s = [c_s, d_s]$$

να έχουν ήδη οριστεί, τότε για κάθε $k \in \mathbf{N}$, θέτουμε

$$I_{s^\frown k} = \left[a_s + \sum_{j=1}^{2k+1} \frac{b_s - a_s}{2^j}, a_s + \sum_{j=1}^{2k+2} \frac{b_s - a_s}{2^j} \right]$$

και

$$J_{s^\frown k} = \left[\frac{(2^{2k+2} - 1)c_s + d_s}{2^{2k+2}}, \frac{(2^{2k+1} - 1)c_s + d_s}{2^{2k+1}} \right]$$

όπου

$$s^\frown k = (s(0), ..., s(\mathrm{length}(s) - 1), k)$$

Λήμμα 1.3.3. *Αν το $T \in Tr$ είναι κακώς θεμελιωμένο και $\alpha \in [T]$, ενώ $x(\alpha)$ και $y(\alpha)$ είναι τα μοναδικά σημεία εντός των $\bigcap_{n\in\mathbf{N}} I_{\alpha|n}$ και $\bigcap_{n\in\mathbf{N}} J_{\alpha|n}$, αντιστοίχως, τότε*

$$x(\alpha) + y(\alpha) = a + b$$

Απόδειξη. Έστω $s \in \mathbf{N}^{<\mathbf{N}}$ και έστω ότι $c_s = a + b - b_s$ και $d_s = a + b - a_s$. Τότε δοθέντος $k \in \mathbf{N}$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\tfrac{(2^{2k+2}-1)c_s+d_s}{2^{2k+2}} &= \tfrac{(2^{2k+2}-1)(a+b-b_s)+(a+b-a_s)}{2^{2k+2}} \\
&= a + b - \left(a_s + (b_s - a_s)\left(1 - \tfrac{1}{2^{2k+2}}\right)\right) \\
&= a + b - \left(a_s + \sum_{j=1}^{2k+2} \tfrac{b_s - a_s}{2^j}\right)
\end{aligned}$$

και ομοίως έχουμε

$$\frac{(2^{2k+1}-1)c_s + d_s}{2^{2k+1}} = a + b - \left(a_s + \sum_{j=1}^{2k+1} \frac{b_s - a_s}{2^j}\right)$$

Οπότε για κάθε $s \in \mathbf{N}^{<\mathbf{N}}$, έχουμε $c_s = a + b - b_s$ και $d_s = a + b - a_s$ που συνεπάγεται ότι για κάθε $n \in \mathbf{N}$, έχουμε

$$c_{\alpha|n} = a + b - b_{\alpha|n}$$

και περνώντας στο όριο καθώς $n \to \infty$ λαμβάνουμε ότι

$$y(\alpha) = a + b - x(\alpha)$$

Όπερ έδει δείξαι

Στο δέντρο των ζευγών διαστημάτων στην πραγματική ευθεία που ορίσαμε παραπάνω αντιστοιχίζουμε ένα δέντρο ζευγών διαφορίσιμων πραγματικών συναρτήσεων της κλάσσεως C^∞, ως ακολούθως:

Ορισμός 1.3.4. *Δοθέντος οποιουδήποτε $s \in \mathbf{N}^{<\mathbf{N}}$ και οποιουδήποτε $k \in \mathbf{N}$, έστω ότι*

$$\phi_{s^\frown k} : [a, b] \to [0, 1]$$

και

$$\psi_{s^\frown k} : [a, b] \to [0, 1]$$

είναι αυθαίρετες αλλά σταθερές διαφορίσιμες συναρτήσεις της κλάσσεως C^∞ με τις ιδιότητες $\phi_{s^\frown k} = 1$ εντός του $I_{s^\frown k}$ και $\phi_{s^\frown k} = 0$ εκτός του

$$I^*_{s^\frown k} = \left[a_{s^\frown k} - \frac{b_{s^\frown (k+1)} - a_{s^\frown (k+1)}}{2}, b_{s^\frown k} + \frac{b_{s^\frown (k+1)} - a_{s^\frown (k+1)}}{2}\right]$$

και $\psi_{s^\frown k} = 1$ εντός του $J_{s^\frown k}$ και $\psi_{s^\frown k} = 0$ εκτός του

$$J^*_{s^\frown k} = \left[c_{s^\frown k} - \frac{d_{s^\frown (k+1)} - c_{s^\frown (k+1)}}{2}, d_{s^\frown k} + \frac{d_{s^\frown (k+1)} - c_{s^\frown (k+1)}}{2}\right]$$

(Δείτε, για παράδειγμα, την Άσκηση 2 στη σελίδα 203 του *Aliprantis-Burkinshaw* [1998].)

Αν X είναι οποιοσδήποτε τοπικά συμπαγής Πολωνικός χώρος, τότε συμβολίζουμε με $LSC(X, \mathbf{R})$ τον συμπαγή Πολωνικό χώρο των κάτω ημισυνεχών πραγματικών συναρτήσεων επί του X εφοδιασμένο με την τοπολογία της epi-σύγκλισης ή Γ-σύγκλισης (δείτε, για παράδειγμα, το *Dal Maso* [1993] ή το 6 του Μέρους Δύο του *Jost-Li-Jost* [1998]), με άλλα λόγια, την ελάχιστη τοπολογία επί του $LSC(X, \mathbf{R})$ για την οποία η απεικόνιση

$$LSC(X, \mathbf{R}) \ni f \mapsto \mathrm{epi} f \in F(X \times \mathbf{R})$$

είναι συνεχής, όπου $F(X \times \mathbf{R})$ είναι ο συμπαγής Πολωνικός χώρος των κλειστών υποσυνόλων του $X \times \mathbf{R}$ εφοδιασμένος με την τοπολογία του *Fell* (δείτε, για παράδειγμα, το 12.7 στις σελίδες 75-76 του *Kechris* [1995]) και

$$\mathrm{epi} f = \{(x, c) \in X \times \mathbf{R} : c \geq f(x)\}$$

είναι το επιγράφημα της κάτω ημισυνεχούς συνάρτησης $f : X \to \mathbf{R}$ (δείτε, για παράδειγμα, το 1.7 στη σελίδα 8 του *Aliprantis-Border* [1999]). Μία συμβατή πλήρης μετρική επί του $LSC(X, \mathbf{R})$ δίνεται από τον τύπο

$$d_{LSC(X,\mathbf{R})}(f, g) = d_H(\mathrm{epi} f \cup \{\infty\}, \mathrm{epi} g \cup \{\infty\})$$

όπου οι f, g ανήκουν στο $LSC(X, \mathbf{R})$, d_H είναι η μετρική του $Hausdorff$ και ∞ είναι το σημείο στο άπειρο στη συμπαγοποίηση του ενός σημείου $(X \times \mathbf{R}) \cup \{\infty\}$ του $X \times \mathbf{R}$ (δείτε, για παράδειγμα, το $4.F$ στη σελίδα 25, το 5. στις σελίδες 29-30 και το 12.7 στις σελίδες 75-76 του $Kechris$ [1995]), ενώ μία φραγμένη συνάρτηση $f : X \to \mathbf{R}$ είναι κάτω ημισυνεχής αν και μόνον αν υπάρχει μία αύξουσα ακολουθία

$$f_0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$$

συνεχών συναρτήσεων $X \to \mathbf{R}$ τέτοια ώστε

$$f(x) = \sup_{n \in \mathbf{N}} f_n(x) \quad \text{για κάθε } x \in X$$

(δείτε, για παράδειγμα, το 23.19 στη σελίδα 186 του $Kechris$ [1995]).

Θεώρημα 1.3.5. *Αν για κάθε $T \in Tr^*$, θέσουμε*

$$u_T = \sum_{s \in \delta(T) \setminus \{\emptyset\}} 2^{-\mathrm{length}(s)} \phi_s$$

και

$$v_T = \sum_{s \in \delta(T) \setminus \{\emptyset\}} 2^{-\mathrm{length}(s)} \psi_s$$

τότε η απεικόνιση

$$Tr^* \ni T \mapsto (u_T, v_T) \in LSC([a, b], \mathbf{R})^2$$

είναι καλά ορισμένη, κατά συντεταγμένες αμφιμονότιμη, μετρητή κατά Borel και ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:

1) *Για κάθε $T \in Tr^*$, έχουμε $0 \leq u_T \leq 1$ και $0 \leq v_T \leq 1$.*

2) *Για κάθε κακώς θεμελιωμένο $T \in Tr^*$ και για κάθε $\alpha \in [T]$, έχουμε*

$$u_T(x(\alpha)) = v_T(y(\alpha)) = 1$$

3) *Για κάθε καλώς θεμελιωμένο $T \in Tr^*$, έχουμε $u_T < 1$ και $v_T < 1$, ενώ για κάθε θετικό ακέραιο l, αν $(0, l, \dots, l)$ είναι μιά ακολουθία μήκους $l + 1$, τότε*

$$u_T(a_{(0,l,\dots,l)}) = v_T(c_{(0,l,\dots,l)}) = \sum_{k=1}^{l+1} 2^{-k}$$

Απόδειξη. Η κατασκευή των διαστημάτων I_s και J_s συνεπάγεται ότι για κάθε $x \in [a,b]$ και για κάθε $s \in \mathbf{N}^{<\mathbf{N}}$, υπάρχει το πολύ ένα $m \in \mathbf{N}$ τέτοιο ώστε $x \in I_{s^\frown m}$ και υπάρχει το πολύ ένα $n \in \mathbf{N}$ τέτοιο ώστε $x \in J_{s^\frown n}$. Το ίδιο ισχύει και για τα έναστρα διαστήματα επίσης. Επομένως, ο ορισμός των συναρτήσεων u_T και v_T βάσει των συναρτήσεων ϕ_s και ψ_s, αντιστοίχως, συνεπάγεται ότι για κάθε $T \in Tr^*$, έχουμε

$$0 \leq u_T \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1$$

και

$$0 \leq v_T \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1$$

ενώ οι u_T και v_T λαμβάνουν την τιμή 1 αν και μόνον αν το T είναι κακώς θεμελιωμένο. Επιπλέον, αν το T είναι κακώς θεμελιωμένο και $\alpha \in [T]$, τότε

$$u_T(x(\alpha)) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-\mathrm{length}(\alpha|n)} = 1$$

και

$$v_T(y(\alpha)) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-\mathrm{length}(\alpha|n)} = 1$$

ενώ αν το T είναι καλώς θεμελιωμένο και $(0, l, ..., l)$ είναι μιά ακολουθία μήκους $l+1$, τότε

$$u_T(a_{(0,l,...,l)}) = \sum_{k=1}^{l+1} 2^{-k}$$

και

$$v_T(c_{(0,l,...,l)}) = \sum_{k=1}^{l+1} 2^{-k}$$

για κάθε θετικό ακέραιο l. Έχουμε επαληθεύσει τις 1)-3) και εκείνο που έμεινε να δείξουμε είναι ότι η απεικόνιση

$$Tr^* \ni T \mapsto (u_T, v_T) \in LSC([a,b], \mathbf{R})^2$$

είναι καλά ορισμένη, κατά συντεταγμένες αμφιμονότιμη και μετρητή κατά *Borel* ή (ισοδύναμα) ότι οι απεικονίσεις

$$Tr^* \ni T \mapsto u_T \in LSC([a,b], \mathbf{R})$$

και

$$Tr^* \ni T \mapsto v_T \in LSC([a,b], \mathbf{R})$$

είναι καλά ορισμένες, αμφιμονότιμες και μετρητές κατά *Borel*. (Δείτε, για παράδειγμα, το $10.B$ στις σελίδες 66-67 του *Kechris* [1995].) Χάριν ευκολίας θα αποδείξουμε μόνον ότι η απεικόνιση

$$Tr^* \ni T \mapsto u_T \in LSC([a,b],\mathbf{R})$$

είναι καλά ορισμένη, αμφιμονότιμη και μετρητή κατά *Borel*, διότι η απόδειξη για την απεικόνιση

$$Tr^* \ni T \mapsto v_T \in LSC([a,b],\mathbf{R})$$

είναι πανομοιότυπη. Έτσι έστω $T \in Tr^*$ και για κάθε $m \in \mathbf{N}$, έστω ότι

$$u_T^{(m)} = \sum_{s \in \mathbf{N}^{<m+1}; s \in \delta(T) \setminus \{\emptyset\}} 2^{-\mathrm{length}(s)} \phi_s$$

Τότε

$$u_T = \sup_{m \in \mathbf{N}} u_T^{(m)}$$

και για να αποδείξουμε ότι $u_T \in LSC([a,b],\mathbf{R})$, αρκεί να δείξουμε ότι δοθέντος $m \in \mathbf{N}$, έχουμε $u_T^{(m)} \in C([a,b],\mathbf{R})$. (Δείτε, για παράδειγμα, το 2.38 στη σελίδα 42 του *Aliprantis-Border* [1999].) Από το θεώρημα του *Cauchy* που αφορά αναδιατάξεις σειρών (δείτε, για παράδειγμα, το 5.2 στη σελίδα 30 του *Aliprantis-Burkinshaw* [1998]) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} u_T^{(m)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s \in \mathbf{N}^{<m}; (n)^\frown s \in \delta(T) \setminus \{\emptyset\}} 2^{-\mathrm{length}((n)^\frown s)} \phi_{(n)^\frown s} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} u_{T;n}^{(m)} \end{aligned}$$

όπου για κάθε διακεκριμένους φυσικούς αριθμούς n και k, οι συναρτήσεις $u_{T;n}^{(m)}$ και $u_{T;k}^{(m)}$ μηδενίζονται εκτός των ξένων μεταξύ τους κλειστών διαστημάτων $I_{(n)}^*$ και $I_{(k)}^*$, αντιστοίχως. Οπότε για να αποδείξουμε ότι $u_T^{(m)} \in C([a,b],\mathbf{R})$, αρκεί να δείξουμε ότι δοθέντος $n \in \mathbf{N}$, έχουμε $u_{T;n}^{(m)} \in C([a,b],\mathbf{R})$. Αλλά

$$\begin{aligned} u_{T;n}^{(m)} &= 2^{-1}\phi_{(n)} + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s \in \mathbf{N}^{<m-1}; (n,k)^\frown s \in \delta(T) \setminus \{\emptyset\}} 2^{-\mathrm{length}((n,k)^\frown s)} \phi_{(n,k)^\frown s} \\ &= 2^{-1}\phi_{(n)} + \sum_{k=0}^{\infty} u_{T;n,k}^{(m)} \end{aligned}$$

όπου για κάθε διακεκριμένους φυσικούς αριθμούς k και l, οι συναρτήσεις $u^{(m)}_{T;n,k}$ και $u^{(m)}_{T;n,l}$ μηδενίζονται εκτός των ξένων μεταξύ τους κλειστών διαστημάτων $I^*_{(n,k)}$ και $I^*_{(n,l)}$, αντιστοίχως. Οπότε για να αποδείξουμε ότι $u^{(m)}_{T;n} \in C([a,b],\mathbf{R})$, αρκεί να δείξουμε ότι δοθέντος $k \in \mathbf{N}$, έχουμε $u^{(m)}_{T;n,k} \in C([a,b],\mathbf{R})$ ... Προχωρώντας με τον ίδιο τρόπο ανάγουμε την απόδειξη της συνέχειας της $u^{(m)}_{T}$ στην προφανή συνέχεια των

$$u^{(m)}_{T;s(0),\dots,s(m)} = 2^{-(m+1)}\phi_s$$

όπου $s \in \mathbf{N}^{<m+1}$ και $s \in \delta(T) \setminus \{\emptyset\}$, ενώ $\mathrm{length}(s) = m+1$. Αποδείξαμε έτσι ότι η

$$Tr^* \ni T \mapsto u_T \in LSC([a,b],\mathbf{R})$$

είναι καλά ορισμένη και θα συνεχίσουμε αποδεικνύοντας ότι είναι μετρητή κατά *Borel* ή (ισοδύναμα) ότι η

$$Tr^* \ni T \mapsto \mathrm{epi}u_T \in F([a,b] \times \mathbf{R})$$

είναι μετρητή κατά *Borel*. Δοθέντων $a \leq \alpha < \beta \leq b$ και $-\infty < \gamma < \delta < \infty$, αρκεί να δείξουμε ότι τα σύνολα

$$A = \{T \in Tr^* : \mathrm{epi}u_T \cap ([a,\beta) \times (\gamma,\delta)) \neq \emptyset\}$$

$$B = \{T \in Tr^* : \mathrm{epi}u_T \cap ((\alpha,\beta) \times (\gamma,\delta)) \neq \emptyset\}$$

και

$$C = \{T \in Tr^* : \mathrm{epi}u_T \cap ((\alpha,b] \times (\gamma,\delta)) \neq \emptyset\}$$

είναι μετρητά κατά *Borel*. (Δείτε, για παράδειγμα, το 12.C στις σελίδες 75-76 του *Kechris* [1995].) Αλλά δοθέντος $T \in Tr^*$, επειδή $0 \leq u_T \leq 1$, έπεται ότι το κλειστό υποσύνολο $\mathrm{epi}u_T$ του $[a,b] \times \mathbf{R}$ είναι η ένωση του κλειστού και επομένως συμπαγούς υποσυνόλου $\mathrm{epi}^*u_T = \mathrm{epi}u_T \cap ([a,b] \times [0,1])$ του $[a,b] \times [0,1]$ και του ανοικτού υποσυνόλου $[a,b] \times (1,\infty)$ του $[a,b] \times \mathbf{R}$ που είναι ξένα μεταξύ τους, πράγμα το οποίο συνεπάγεται ότι

$$\delta \leq 0 \Rightarrow A = B = C = \emptyset$$

και

$$\delta > 1 \Rightarrow A = B = C = Tr^*$$

Έτσι έστω ότι $0 < \delta \leq 1$. Τότε εκείνο που χρειάζεται να δείξουμε είναι ότι τα σύνολα

$$A^* = \{T \in Tr^* : \mathrm{epi}^* u_T \cap ([a, \beta) \times (\gamma, \delta)) \neq \emptyset\}$$

$$B^* = \{T \in Tr^* : \mathrm{epi}^* u_T \cap ((\alpha, \beta) \times (\gamma, \delta)) \neq \emptyset\}$$

και

$$C^* = \{T \in Tr^* : \mathrm{epi}^* u_T \cap ((\alpha, b] \times (\gamma, \delta)) \neq \emptyset\}$$

είναι μετρητά κατά *Borel*. Θέτοντας

$$\Lambda_0 = \left[\frac{\gamma+\delta}{2} - \frac{\delta-\gamma}{2^2}, \frac{\gamma+\delta}{2} + \frac{\delta-\gamma}{2^2}\right] = \left[\lambda_0^l, \lambda_0^r\right]$$

$$\Lambda_{-1} = \left[\lambda_0^l - \frac{\delta-\gamma}{2^3}, \lambda_0^l + \frac{\delta-\gamma}{2^3}\right] = \left[\lambda_{-1}^l, \lambda_{-1}^r\right]$$

και

$$\Lambda_1 = \left[\lambda_0^r - \frac{\delta-\gamma}{2^3}, \lambda_0^r + \frac{\delta-\gamma}{2^3}\right] = \left[\lambda_1^l, \lambda_1^r\right]$$

..., θέτοντας

$$\Delta_0^{A^*} = \left[a, a + \frac{\beta-a}{2}\right] = \left[\delta_0^{A^*,l}, \delta_0^{A^*,r}\right]$$

$$\Delta_1^{A^*} = \left[\delta_0^{A^*,r} - \frac{\beta-a}{2^2}, \delta_0^{A^*,r} + \frac{\beta-a}{2^2}\right] = \left[\delta_1^{A^*,l}, \delta_1^{A^*,r}\right]$$

..., θέτοντας

$$\Delta_0^{B^*} = \left[\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\beta-\alpha}{2^2}, \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\beta-\alpha}{2^2}\right] = \left[\delta_0^{B^*,l}, \delta_0^{B^*,r}\right]$$

$$\Delta_{-1}^{B^*} = \left[\delta_0^{B^*,l} - \frac{\beta-\alpha}{2^3}, \delta_0^{B^*,l} + \frac{\beta-\alpha}{2^3}\right] = \left[\delta_{-1}^{B^*,l}, \delta_{-1}^{B^*,r}\right]$$

και

$$\Delta_1^{B^*} = \left[\delta_0^{B^*,r} - \frac{\beta-\alpha}{2^3}, \delta_0^{B^*,r} + \frac{\beta-\alpha}{2^3}\right] = \left[\delta_1^{B^*,l}, \delta_1^{B^*,r}\right]$$

... και θέτοντας

$$\Delta_0^{C^*} = \left[b - \frac{b-a}{2}, b\right] = \left[\delta_0^{C^*,l}, \delta_0^{C^*,r}\right]$$

$$\Delta_{-1}^{C^*} = \left[\delta_0^{C^*,l} - \frac{b-a}{2^2}, \delta_0^{C^*,l} + \frac{b-a}{2^2}\right] = \left[\delta_{-1}^{C^*,l}, \delta_{-1}^{C^*,r}\right]$$

..., δεν είναι δύσκολο να δει κανείς ότι

$$(\gamma,\delta) = \bigcup\nolimits_{\kappa\in\mathbf{Z}}\Lambda_\kappa$$

$$[a,\beta) = \bigcup\nolimits_{\lambda\in\mathbf{N}}\Delta_\lambda^{A^*}$$

$$(\alpha,\beta) = \bigcup\nolimits_{\mu\in\mathbf{Z}}\Delta_\mu^{B^*}$$

και

$$(\alpha,b] = \bigcup\nolimits_{\nu\in\mathbf{N}}\Delta_{-\nu}^{C^*}$$

Επιπλέον, δοθέντος $T \in Tr^*$, έχουμε

$$u_T = \sup_{m\in\mathbf{N}} u_T^{(m)}$$

όπου $u_T^{(m)} \in C([a,b],\mathbf{R})$ και $u_T^{(m)} \leq u_T^{(m+1)}$ για κάθε $m \in \mathbf{N}$. Οπότε δεν είναι δύσκολο να επαληθεύσει κανείς ότι

$$\mathrm{epi}^* u_T = \bigcap\nolimits_{m\in\mathbf{N}}\mathrm{epi}^* u_T^{(m)}$$

όπου για κάθε $m \in \mathbf{N}$, έχουμε $\mathrm{epi}^* u_T^{(m+1)} \subseteq \mathrm{epi}^* u_T^{(m)}$ και συνεπώς

$$A^* = \bigcup\nolimits_{\kappa\in\mathbf{Z}}\bigcup\nolimits_{\lambda\in\mathbf{N}}\bigcap\nolimits_{m\in\mathbf{N}}\left\{T \in Tr^* : \mathrm{epi}^* u_T^{(m)} \cap (\Delta_\lambda^{A^*} \times \Lambda_\kappa) \neq \emptyset\right\}$$

$$B^* = \bigcup\nolimits_{\kappa\in\mathbf{Z}}\bigcup\nolimits_{\mu\in\mathbf{Z}}\bigcap\nolimits_{m\in\mathbf{N}}\left\{T \in Tr^* : \mathrm{epi}^* u_T^{(m)} \cap (\Delta_\mu^{B^*} \times \Lambda_\kappa) \neq \emptyset\right\}$$

και

$$C^* = \bigcup\nolimits_{\kappa\in\mathbf{Z}}\bigcup\nolimits_{\nu\in\mathbf{N}}\bigcap\nolimits_{m\in\mathbf{N}}\left\{T \in Tr^* : \mathrm{epi}^* u_T^{(m)} \cap (\Delta_{-\nu}^{C^*} \times \Lambda_\kappa) \neq \emptyset\right\}$$

λόγω του γεγονότος ότι αν $(K_m)_{m\in\mathbf{N}}$ είναι οποιαδήποτε φθίνουσα ακολουθία συμπαγών υποσυνόλων ενός Πολωνικού χώρου X και $K \in K(X) \setminus \{\emptyset\}$, τότε

$$(\bigcap\nolimits_{m\in\mathbf{N}}K_m) \cap K \neq \emptyset \iff (\forall m \in \mathbf{N})(K_m \cap K \neq \emptyset)$$

Επομένως, για να αποδείξουμε ότι τα A^*, B^* και C^* είναι μετρητά κατά $Borel$, δοθέντων $m \in \mathbf{N}$, $a \leq a^* < b^* \leq b$ και $\gamma \leq \gamma^* < \delta^* \leq \delta$, αρκεί να δείξουμε ότι το

$$D = \left\{T \in Tr^* : \mathrm{epi}^* u_T^{(m)} \cap ([a^*,b^*] \times [\gamma^*,\delta^*]) \neq \emptyset\right\}$$

είναι μετρητό κατά *Borel*. Αλλά δοθέντος $T \in Tr^*$, έχουμε

$$u_T^{(m)} = \sup_{n \in \mathbf{N}} u_T^{(m,n)}$$

όπου έχουμε θέσει

$$u_T^{(m,n)} = \sum_{s \in \{0,...,n\}^{<m+1}; s \in \delta(T) \setminus \{\emptyset\}} 2^{-\mathrm{length}(s)} \phi_s$$

για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Πράγματι, δοθέντος $x \in [a,b]$, για κάθε $s \in \mathbf{N}^{<m}$, υπάρχει το πολύ ένα $n \in \mathbf{N}$ για το οποίο $x \in I^*_{s^\frown n}$. Οπότε αν $t \in \mathbf{N}^{<m+1}$ είναι η πεπερασμένη ακολουθία μεγίστου μήκους για την οποία $x \in I^*_t$ και

$$\tau = \max\{t(0), ..., t(\mathrm{length}(t) - 1)\}$$

τότε

$$u_T^{(m)}(x) = \sum_{s \in \delta(T) \setminus \{\emptyset\}; s = t|\mathrm{length}(s)} 2^{-\mathrm{length}(s)} \phi_s(x) = u_T^{(m,\tau)}(x)$$

Επιπλέον, για κάθε $n \in \mathbf{N}$, έχουμε $u_T^{(m,n)} \leq u_T^{(m,n+1)}$ που συνεπάγεται ότι $\mathrm{epi}^* u_T^{(m,n+1)} \subseteq \mathrm{epi}^* u_T^{(m,n)}$. Οπότε το $\mathrm{epi}^* u_T^{(m)}$ είναι η τομή της φθίνουσας ακολουθίας $(\mathrm{epi}^* u_T^{(m,n)})_{n \in \mathbf{N}}$ συμπαγών υποσυνόλων του $[a,b] \times [0,1]$ και συνεπώς

$$D = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} \left\{T \in Tr^* : \mathrm{epi}^* u_T^{(m,n)} \cap ([a^*, b^*] \times [\gamma^*, \delta^*]) \neq \emptyset\right\}$$

Επομένως, για να αποδείξουμε ότι το D είναι μετρητό κατά *Borel*, αρκεί να δείξουμε ότι το

$$D_n = \left\{T \in Tr^* : \mathrm{epi}^* u_T^{(m,n)} \cap ([a^*, b^*] \times [\gamma^*, \delta^*]) \neq \emptyset\right\}$$

είναι μετρητό κατά *Borel* για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Αλλά το

$$\{K \in K([a,b] \times [0,1]) : K \cap ([a^*, b^*] \times [\gamma^*, \delta^*]) \neq \emptyset\}$$

είναι κλειστό στο $K([a,b] \times [0,1])$ (δείτε, για παράδειγμα, το $4.F$ στις σελίδες 24-28 του *Kechris* [1995]) και συνεπώς αρκεί να δείξουμε ότι η

$$Tr^* \ni T \mapsto \mathrm{epi}^* u_T^{(m,n)} \in K([a,b] \times [0,1])$$

είναι συνεχής. Πράγματι, δοθέντος $T \in Tr^*$, λόγω του Λήμματος 1.3.1, το

$$\mathcal{O} = \left\{T' \in Tr^* : (\forall t \in \{0, ..., n\}^{<m+1})(t \in \delta(T') \iff t \in \delta(T))\right\}$$

αποτελεί μία ανοικτή περιοχή του T στο Tr^* τέτοια ώστε $u_S^{(m,n)} = u_T^{(m,n)}$ για κάθε $S \in \mathcal{O}$ που συνεπάγεται ότι $\mathrm{epi}^* u_S^{(m,n)} = \mathrm{epi}^* u_T^{(m,n)}$ για κάθε $S \in \mathcal{O}$. Έτσι έχουμε αποδείξει ότι η

$$Tr^* \ni T \mapsto u_T \in LSC([a,b], \mathbf{R})$$

είναι μετρητή κατά $Borel$ και εκείνο που έμεινε να δείξουμε είναι ότι η

$$Tr^* \ni T \mapsto u_T \in LSC([a,b], \mathbf{R})$$

είναι αμφιμονότιμη. Πράγματι, αν T, T' είναι οποιαδήποτε διακεκριμένα δέντρα στο Tr^* και $T \neq \{\emptyset\}$, τότε υπάρχει $t \in T \setminus T'$ τέτοιο ώστε για κάθε $s \in T'$, είτε το s είναι ένα αρχικό τμήμα του t ή όχι που συνεπάγεται ότι $u_T \geq \sum\limits_{\lambda=1}^{\mathrm{length}(t)} 2^{-\lambda}$ επί του I_t, ενώ $u_{T'} \leq \sum\limits_{\lambda=1}^{\mathrm{length}(t)-1} 2^{-\lambda}$ επί του I_t που συνεπάγεται με τη σειρά του ότι $u_T \neq u_{T'}$. **Όπερ έδει δεῖξαι**

Πόρισμα 1.3.6. *Για κάθε καλώς θεμελιωμένο $T \in Tr^*$ και για κάθε $\mu \in P([a,b])$, έχουμε*

$$\int_a^b u_T d\mu < 1$$

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε πρώτα ότι υπάρχει $s \in T$ τέτοιο ώστε $I_s \cap \mathrm{supp}(\mu) \neq \emptyset$ και $I_{s^\frown k} \cap \mathrm{supp}(\mu) = \emptyset$ για κάθε $k \in \mathbf{N}^*$ για το οποίο $s^\frown k \in T$. Υποθέτουμε το αντίθετο. Τότε για κάθε $s \in T$, έχουμε $I_s \cap \mathrm{supp}(\mu) = \emptyset$ ή υπάρχει $k \in \mathbf{N}^*$ τέτοιο ώστε $s^\frown k \in T$ και $I_{s^\frown k} \cap \mathrm{supp}(\mu) \neq \emptyset$. Οπότε επειδή $I_\emptyset = [a,b]$, έπεται ότι υπάρχει $k_0 \in \mathbf{N}^*$ για το οποίο $(k_0) \in T$ και $I_{(k_0)} \cap \mathrm{supp}(\mu) \neq \emptyset$ που συνεπάγεται ότι υπάρχει $k_1 \in \mathbf{N}^*$ για το οποίο $(k_0, k_1) \in T$ και $I_{(k_0,k_1)} \cap \mathrm{supp}(\mu) \neq \emptyset$ που συνεπάγεται με τη σειρά του ότι υπάρχει $k_2 \in \mathbf{N}^*$ για το οποίο $(k_0, k_1, k_2) \in T$ και $I_{(k_0,k_1,k_2)} \cap \mathrm{supp}(\mu) \neq \emptyset$ ... Προχωρώντας με τον ίδιο τρόπο λαμβάνουμε

$$\kappa = (k_0, k_1, k_2, ...) \in [T]$$

που αντίκειται στο γεγονός ότι το T είναι καλώς θεμελιωμένο. Έχουμε έτσι αποδείξει ότι υπάρχει $s \in T$ τέτοιο ώστε $I_s \cap \mathrm{supp}(\mu) \neq \emptyset$ και $I_{s^\frown k} \cap \mathrm{supp}(\mu) = \emptyset$ για κάθε $k \in \mathbf{N}^*$ για το οποίο $s^\frown k \in T$. Οπότε $u_T = \sum\limits_{k=1}^{\mathrm{length}(s)} 2^{-k}$ επί του $I_s \setminus \bigcup_{k \in \mathbf{N}^*} I_{s^\frown k}$ και αν θέσουμε

$$\nu(B) = \mu(([a,b] \setminus I_s) \cap B) + \mu(I_s) \delta_{a_{s^\frown 1}}(B)$$

οποτεδήποτε $B \in \mathbf{B}([a,b])$, τότε $\nu \in P([a,b])$ και $\nu = \mu$ επί του $[a,b] \setminus I_s$. Επομένως, επειδή $T \cup \{s^\frown 1\} \in Tr^*$ και $\delta(T) \setminus \{\emptyset\} \subseteq \delta(T \cup \{s^\frown 1\}) \setminus \{\emptyset\}$, έπεται ότι $0 \leq u_T \leq u_{T\cup\{s^\frown 1\}} \leq 1$ και συνεπώς

$$\begin{aligned}
\int_a^b u_T d\mu &= \int_{[a,b]\setminus I_s} u_T d\mu + \int_{I_s} u_T d\mu \\
&= \int_{[a,b]\setminus I_s} u_T d\mu + \int_{I_s \setminus \bigcup_{k\in\mathbf{N}^*} I_{s^\frown k}} u_T d\mu \\
&= \int_{[a,b]\setminus I_s} u_T d\mu + \sum_{k=1}^{\mathrm{length}(s)} 2^{-k}\mu(I_s \setminus \textstyle\bigcup_{k\in\mathbf{N}^*} I_{s^\frown k}) \\
&\leq \int_{[a,b]\setminus I_s} u_T d\mu + \sum_{k=1}^{\mathrm{length}(s)} 2^{-k}\mu(I_s) \\
&< \int_{[a,b]\setminus I_s} u_T d\mu + \sum_{k=1}^{\mathrm{length}(s)+1} 2^{-k}\mu(I_s) \\
&= \int_{[a,b]\setminus I_s} u_T d\mu + \int_{I_s} u_{T\cup\{s^\frown 1\}} d\delta_{a_{s^\frown 1}} \\
&\leq \int_{[a,b]\setminus I_s} u_{T\cup\{s^\frown 1\}} d\mu + \int_{I_s} u_{T\cup\{s^\frown 1\}} d\delta_{a_{s^\frown 1}} \\
&= \int_a^b u_{T\cup\{s^\frown 1\}} d\nu \\
&\leq 1
\end{aligned}$$

Όπερ έδει δείξαι

Βιβλιογραφία

C. D. ALIPRANTIS and K. C. BORDER
[1999] *Infinite Dimensional Analysis : A Hitchhiker's Guide, Second Edition, Springer, Berlin.*

C. D. ALIPRANTIS and O. BURKINSHAW
[1998] *Principles of Real Analysis, Third Edition, Academic Press, San Diego.*

G. DAL MASO
[1993] *An introduction to Γ-convergence, Progress in Non-linear*

Differential Equations and their Applications **8**, *Birkhauser*, *Boston.*

E. DE GIORGI
[1982] *G-operators and* Γ*-convergence*, *Proceedings of the ICM*82, *Warsaw.*

K. ITO
[1987*a*] *Editor*, *Encyclopedic Dictionary of Mathematics*, *Volume I*, *Second Edition*, *The MIT Press*, *Cambridge.*
[1987*b*] *Editor*, *Encyclopedic Dictionary of Mathematics*, *Volume III*, *Second Edition*, *The MIT Press*, *Cambridge.*

J. JOST and X. LI-JOST
[1998] *Calculus of Variations*, *Cambridge University Press.*

A. S. KECHRIS
[1986] *The Complexity of Antidifferentiation*, *Denjoy Totalization*, *and Hyperarithmetic Reals*, *Proceedings of the ICM*86, *Berkeley*, *California.*
[1995] *Classical Descriptive Set Theory*, *Springer*, *New York.*

S. C. KLEENE
[1991] *Introduction to Metamathematics*, *Tenth Impression*, *North-Holland*, *Amsterdam.*

Y. N. MOSCHOVAKIS
[1974] *New Methods and Results in Descriptive Set Theory*, *Proceedings of the ICM*74, *Vancouver.*
[1980] *Descriptive Set Theory*, *North-Holland*, *Amsterdam.*
[1993] *Σημειώσεις στη Συνολοθεωρία, Εκδόσεις Νεφέλη, Αθήνα.*

N. E. SOFRONIDIS
[1999] *Topics in Descriptive Set Theory related to Equivalence Relations*, *Complex Borel and Analytic Sets*, *Ph.D. Thesis*, *California Institute of Technology.*
[2001] *Analytic non-Borel sets and vertices of differentiable curves in the plane*, *Real Analysis Exchange*, *Vol.* 26(2), 2000/2001, *pp.* 735-748.

I. M. VINOGRADOV
[1979] *Editor*, *Matematicheskaya Entsiklopediya* [Μαθηματική Εγκυκλοπαίδεια], *Volume* 2, *Sovetskaya Entsiklopediya* [Σοβιετική Εγκυκλοπαίδεια], *Moscow.*
[1984] *Editor*, *Matematicheskaya Entsiklopediya* [Μαθηματική Εγκυκλοπαίδεια], *Volume* 4, *Sovetskaya Entsiklopediya* [Σοβιετική Εγκυκλοπαίδεια], *Moscow.*

Κεφάλαιο 2

ΘΕΩΡΙΑ ΠΑΙΓΝΙΩΝ

2.1 Εισαγωγή

Δοθέντος οποιουδήποτε ακεραίου $n \geq 2$, ένα παίγνιο n ατόμων χωρίς συνεργασίες σε στρατηγική μορφή είναι μία $2n$-άδα

$$\mathcal{G} = (S_1, ..., S_n, u_1, ..., u_n)$$

που ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:

1) Για κάθε $i \in \{1, ..., n\}$, το S_i είναι ένα μη κενό σύνολο που αποτελείται από τις καθαρές στρατηγικές ή απλά τις στρατηγικές του παίκτη i και καλείται το σύνολο στρατηγικών του παίκτη i.

2) Για κάθε $i \in \{1, ..., n\}$, το u_i αποτελεί μιά πραγματική συνάρτηση που ορίζεται επί του Καρτεσιανού γινομένου $S_1 \times ... \times S_n$ και καλείται η συνάρτηση απόδοσης του παίκτη i.

Το παίγνιο παίζεται ως ακολούθως: Κάθε παίκτης i επιλέγει ταυτόχρονα με τους άλλους παίκτες μιά στρατηγική s_i στο σύνολο στρατηγικών του S_i και αφού γίνει αυτό, λαμβάνει απόδοση $u_i(s_1, ..., s_n)$, αντιστοίχως. Σε ένα τέτοιο παίγνιο $\mathcal{G}$, μία n-άδα $(s_1^*, ..., s_n^*) \in S_1 \times ... \times S_n$ καλείται ισορροπία $Nash$ χωρίς συνεργασίες σε καθαρές στρατηγικές ή απλά ισορροπία $Nash$ χωρίς συνεργασίες, αν για κάθε $i \in \{1, ..., n\}$ και για κάθε $s_i \in S_i$, έχουμε

$$u_i(s_1^*, ..., s_n^*) \geq u_i(s_1^*, ..., s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, ..., s_n^*)$$

Με άλλα λόγια, αν για κάθε $i \in \{1, ..., n\}$, το να παίξει το s_i^* είναι βέλτιστο για τον παίκτη i, δεδομένου του τι πράττουν οι άλλοι παίκτες. (Δείτε, για παράδειγμα, το 2.2 στις σελίδες 49-52 του *Aliprantis-Chakrabarti* [2000].)

Αν για κάθε $i \in \{1, ..., n\}$, το S_i αποτελεί έναν Πολωνικό χώρο (δηλαδή, ένα διαχωρίσιμο πλήρως μετρικοποιήσιμο χώρο) και το u_i αποτελεί μιά περατωμένη μετρητή κατά *Borel* συνάρτηση $S_1 \times ... \times S_n \to \mathbf{R}$, τότε το παίγνιο n ατόμων

$$\overline{\mathcal{G}} = (P(S_1), ..., P(S_n), Eu_1, ..., Eu_n)$$

χωρίς συνεργασίες σε στρατηγική μορφή καλείται η μεικτή επέκταση του $\mathcal{G}$ αν για κάθε $i \in \{1, ..., n\}$, $P(S_i)$ είναι ο Πολωνικός χώρος των *Borel* μέτρων πιθανότητας επί του S_i που αποτελείται από τις επονομαζόμενες μεικτές στρατηγικές του παίκτη i για το $\mathcal{G}$ και

$$Eu_i(\mu_1, ..., \mu_n) = \int_{S_1 \times ... \times S_n} u_i d(\mu_1 \times ... \times \mu_n)$$

για κάθε $(\mu_1, ..., \mu_n) \in P(S_1) \times ... \times P(S_n)$, ενώ μιά ισορροπία $Nash$ χωρίς συνεργασίες σε καθαρές στρατηγικές για το $\overline{\mathcal{G}}$ καλείται ισορροπία $Nash$ χωρίς συνεργασίες σε μεικτές στρατηγικές για το $\mathcal{G}$. (Δείτε, για παράδειγμα, το 3.1.1 στις σελίδες 31-34 του *Osborne-Rubinstein* [1998].)

Ο ορισμός της ισορροπίας $Nash$ χωρίς συνεργασίες και η απόδειξη της ύπαρξης ισορροπιών $Nash$ χωρίς συνεργασίες, υπό τις υποθέσεις της πλήρους συνέχειας και της χωριστής οιονεί κοιλότητας των συναρτήσεων απόδοσης, δόθηκαν από τον *John F. Nash* στο *Nash* [1951]. Αν και είναι συχνά φυσικό να μοντελοποιούμε στρατηγικές καταστάσεις στα οικονομικά ως παίγνια χωρίς συνεργασίες με τους οικονομικούς παράγοντες ως παίκτες που έχουν να επιλέξουν στρατηγικές μεταξύ ενός συνεχούς (δείτε, για παράδειγμα, τη σελίδα 1029 του *Reny* [1999]), σε πολλές περιπτώσεις οι συναρτήσεις απόδοσης προκύπτει ότι είναι ασυνεχείς (δείτε, για παράδειγμα, τη σελίδα 1029 του *Reny* [1999] ή τη σελίδα 305 του *Rath* [1996]), ενώ ικανές συνθήκες για την ύπαρξη ισορροπιών $Nash$ χωρίς συνεργασίες σε ασυνεχή παίγνια, δηλαδή, παίγνια με ασυνεχείς αποδόσεις, δόθηκαν από πολλούς ερευνητές (δείτε, για παράδειγμα, το *Reny* [1999] και ειδικότερα την Εισαγωγή στις σελίδες 1029-1032 του *Reny* [1999] ή το *Rath* [1996] και ειδικότερα την Εισαγωγή στις σελίδες 305-307 του *Rath* [1996]).

Ο πρώτος μας σκοπός σε αυτό το κεφάλαιο είναι να δείξουμε ότι για κάθε ακέραιο $n \geq 2$, δεν υπάρχουν μετρητές κατά *Borel* αναγκαίες και ικανές συνθήκες επί n κάτω ημισυνεχών συναρτήσεων απόδοσης που ορίζουν ένα παίγνιο

n ατόμων χωρίς συνεργασίες σε στρατηγική μορφή, οι οποίες μπορούν να βεβαιώσουν την ύπαρξη ισορροπιών $Nash$ χωρίς συνεργασίες (είτε σε καθαρές ή σε μεικτές στρατηγικές).

Θεώρημα 2.1.1. *Δοθέντων οποιουδήποτε ακεραίου $n \geq 2$ και οποιωνδήποτε συμπαγών ομαλών πολλαπλοτήτων*

$$M_1,\ ...,\ M_n$$

ως συνόλων στρατηγικών, το σύνολο όλων των n-άδων $(u_1, ..., u_n)$ κάτω ημισυνεχών συναρτήσεων απόδοσης που ορίζουν ένα παίγνιο n ατόμων

$$\mathcal{G} = (M_1, ..., M_n, u_1, ..., u_n)$$

χωρίς συνεργασίες σε στρατηγική μορφή, το οποίο έχει ισορροπία $Nash$ χωρίς συνεργασίες σε καθαρές στρατηγικές, δεν είναι μετρητό κατά $Borel$ στο

$$LSC(M_1 \times ... \times M_n, \mathbf{R})^n$$

Επίσης, το ίδιο ισχύει αν αντικαταστήσουμε τις καθαρές στρατηγικές από μεικτές στρατηγικές.

Έτσι, για κάθε ακέραιο $n \geq 2$, οποιεσδήποτε αναγκαίες και ικανές συνθήκες ύπαρξης ισορροπιών $Nash$ είτε σε καθαρές ή σε μεικτές στρατηγικές για n κάτω ημισυνεχείς συναρτήσεις απόδοσης που ορίζουν ένα παίγνιο n ατόμων χωρίς συνεργασίες σε στρατηγική μορφή δε μπορούν να εκφραστούν αναλυτικά μέσω συγκεκριμένων τύπων, απλών αναλυτικών εκφράσεων και τα τοιαύτα.

Ένα ανάλογο αποτέλεσμα ισχύει για τα παίγνια του $Bayes$ που παρουσιάζουμε παρακάτω.

Δοθέντος οποιουδήποτε ακεραίου $n \geq 2$, ένα παίγνιο n ατόμων με μη πλήρη πληροφόρηση που παίζεται από παίκτες τύπου $Bayes$ ή απλά ένα παίγνιο του $Bayes$ n ατόμων είναι μία τετράδα

$$\mathcal{G} = ((S_1, ..., S_n), (C_1, ..., C_n), (V_1, ..., V_n), R)$$

που ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:

1) Για κάθε $i \in \{1, ..., n\}$, το S_i είναι ένας μη κενός τοπολογικός χώρος που αποτελείται από τις στρατηγικές του παίκτη i και καλείται ο χώρος των στρατηγικών του παίκτη i.

2) Για κάθε $i \in \{1, ..., n\}$, το C_i είναι ένας μη κενός υποχώρος ενός Ευκλείδειου χώρου που αποτελείται από τα διανύσματα πληροφόρησης του παίκτη i και καλείται ο χώρος των διανυσμάτων πληροφόρησης του παίκτη i.

3) Για κάθε $i \in \{1, ..., n\}$, το V_i αποτελεί μία περατωμένη μετρητή κατά *Borel* πραγματική συνάρτηση που ορίζεται επί του Καρτεσιανού γινομένου $S_1 \times ... \times S_n \times C_1 \times ... \times C_n$ και καλείται η συνάρτηση απόδοσης του παίκτη i.

4) Το R είναι ένα *Borel* μέτρο πιθανότητας επί του $C_1 \times ... \times C_n$ με την ιδιότητα ότι

$$(\forall^*_{R_i} c_i^0 \in C_i)(R(C_1 \times ... \times C_{i-1} \times \{c_i^0\} \times C_{i+1} \times ... \times C_n) > 0)$$

για κάθε $i \in \{1, ..., n\}$ και καλείται η βασική κατανομή πιθανότητας του παιγνίου. Θα πρέπει να επισημάνουμε εδώ ότι για κάθε $i \in \{1, ..., n\}$, συμβολίζουμε με R_i το *Borel* μέτρο πιθανότητας επί του C_i που ορίζεται από τη σχέση

$$R_i(B) = R(C_1 \times ... \times C_{i-1} \times B \times C_{i+1} \times ... \times C_n)$$

οποτεδήποτε $B \in \mathbf{B}(C_i)$, και $\forall^*_{R_i}$ είναι ο αντίστοιχος ποσοδείκτης μέτρου. (Δείτε, για παράδειγμα, το 17.26 στις σελίδες 113-114 του *Kechris* [1995].)

Το παίγνιο παίζεται ως ακολούθως: Κάθε παίκτης i επιλέγει ταυτόχρονα με τους άλλους παίκτες μιά από τις κανονικοποιημένες στρατηγικές του, έστω την σ_i που είναι εξ ορισμού μιά μετρητή κατά *Borel* συνάρτηση $C_i \to S_i$, και αφού γίνει αυτό, για κάθε $c_i^0 \in C_i$ για το οποίο

$$R(C_1 \times ... \times C_{i-1} \times \{c_i^0\} \times C_{i+1} \times ... \times C_n) > 0$$

λαμβάνει αντιστοίχως προσδοκόμενη απόδοση ίση με το ολοκλήρωμα υπεράνω του $C_1 \times ... \times C_{i-1} \times C_{i+1} \times ... \times C_n$ της συνάρτησης

$$V_i(\sigma_1(\cdot), ..., \sigma_{i-1}(\cdot), \sigma_i(c_i^0), \sigma_{i+1}(\cdot), ..., \sigma_n(\cdot), \cdot, ..., \cdot, c_i^0, \cdot, ..., \cdot)$$

ως προς την κατανομή δεσμευμένης πιθανότητας $(R|c_i^0)$ που λαμβάνεται από την R για την δοθείσα τιμή c_i^0 του διανύσματος πληροφόρησης του παίκτη i, η οποία ορίζεται από τη σχέση

$$(R|c_i^0)(B) = \frac{\int_B dR(c_1, ..., c_{i-1}, c_i^0, c_{i+1}, ..., c_n)}{R(C_1 \times ... \times C_{i-1} \times \{c_i^0\} \times C_{i+1} \times ... \times C_n)}$$

οποτεδήποτε $B \in \mathbf{B}(C_1 \times ... \times C_{i-1} \times C_{i+1} \times ... \times C_n)$. Σε ένα τέτοιο παίγνιο $\mathcal{G}$, μιά n-άδα κανονικοποιημένων στρατηγικών $(\sigma_1^*, ..., \sigma_n^*)$ καλείται ισορροπία $Nash$ του $Bayes$, αν για κάθε $i \in \{1, ..., n\}$, για κάθε κανονικοποιημένη στρατηγική $\sigma_i : C_i \to S_i$ και σχεδόν για κάθε $c_i^0 \in C_i$ ως προς το R_i, έχουμε

$$\int_{C_1 \times ... \times C_{i-1} \times C_{i+1} \times ... \times C_n} V_i(\sigma_1^*(c_1), ..., \sigma_{i-1}^*(c_{i-1}), \sigma_i^*(c_i^0), \sigma_{i+1}^*(c_{i+1}), ...,$$
$$\sigma_n^*(c_n), c_1, ..., c_{i-1}, c_i^0, c_{i+1}, ..., c_n) d(R|c_i^0)(c_1, ..., c_{i-1}, c_{i+1}, ..., c_n)$$
$$\geq \int_{C_1 \times ... \times C_{i-1} \times C_{i+1} \times ... \times C_n} V_i(\sigma_1^*(c_1), ..., \sigma_{i-1}^*(c_{i-1}), \sigma_i(c_i^0), \sigma_{i+1}^*(c_{i+1}), ...,$$
$$\sigma_n^*(c_n), c_1, ..., c_{i-1}, c_i^0, c_{i+1}, ..., c_n) d(R|c_i^0)(c_1, ..., c_{i-1}, c_{i+1}, ..., c_n)$$

(Δείτε τα $Harsanyi$ [1967] και $Harsanyi$ [1968a].)

Πρόταση 2.1.2. *Αν*

$$\mathcal{G} = ((S_1, ..., S_n), (C_1, ..., C_n), (V_1, ..., V_n), R)$$

είναι τυχόν παίγνιο του Bayes n ατόμων, τότε για κάθε $i \in \{1, ..., n\}$, *υπάρχει ένα το πολύ αριθμήσιμο μη κενό υποσύνολο* A_i *του* C_i *τέτοιο, ώστε*

$$R_i = \sum_{a \in A_i} R_i(\{a\}) \delta_a$$

Απόδειξη. Αν $i \in \{1, ..., n\}$, τότε, όπως είναι γνωστό, υπάρχει μοναδικό συνεχές μέτρο μ_i επί του C_i και μοναδικό διακριτό μέτρο ν_i επί του C_i τέτοια, ώστε

$$R_i = \mu_i + \nu_i \qquad (\star)$$

(Δείτε, για παράδειγμα, το 17.4 στη σελίδα 105 του $Kechris$ [1995].) Επειδή δε

$$(\forall_{R_i}^* c_i^0 \in C_i)(R(C_1 \times ... \times C_{i-1} \times \{c_i^0\} \times C_{i+1} \times ... \times C_n) > 0)$$

έπεται ότι

$$(\forall_{R_i}^* c \in C_i)(R_i(\{c\}) > 0) \qquad (\star\star)$$

Αν, λοιπόν, θέσουμε

$$A_i = \{c \in C_i : R_i(\{c\}) > 0\}$$

τότε το A_i είναι το πολύ αριθμήσιμο και από την $(\star\star)$ προκύπτει ότι

$$R_i(A_i) = 1$$

οπότε από την $(\star)$ και από τη συνέχεια του μ_i προκύπτει ότι

$$R_i = \nu_i = \sum_{a \in A_i} R_i(\{a\})\delta_a$$

Όπερ έδει δεῖξαι

Λόγω της Προτάσεως 2.1.2, μπορούμε να επαναδιατυπώσουμε όσα είπε ο *Harsanyi* για τα παίγνια με μη πλήρη πληροφόρηση ως εξής:

Δοθέντος οποιουδήποτε ακεραίου $n \geq 2$, ένα παίγνιο n ατόμων με μη πλήρη πληροφόρηση που παίζεται από παίκτες τύπου *Bayes* ή απλά ένα παίγνιο του *Bayes* n ατόμων είναι μιά τετράδα

$$\mathcal{G} = ((S_1, ..., S_n), (C_1, ..., C_n), (V_1, ..., V_n), R)$$

που ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:

1) Για κάθε $i \in \{1, ..., n\}$, το S_i είναι ένας μη κενός τοπολογικός χώρος που αποτελείται από τις στρατηγικές του παίκτη i και καλείται χώρος των στρατηγικών του παίκτη i.

2) Για κάθε $i \in \{1, ..., n\}$, το C_i είναι ένα μη κενό το πολύ αριθμήσιμο σύνολο (εφοδιασμένο με τη διακριτή τοπολογία) που αποτελείται από τα διανύσματα πληροφόρησης του παίκτη i και καλείται χώρος των διανυσμάτων πληροφόρησης του παίκτη i.

3) Για κάθε $i \in \{1, ..., n\}$, το V_i αποτελεί μιά περατωμένη μετρητή κατά *Borel* πραγματική συνάρτηση που ορίζεται επί του Καρτεσιανού γινομένου $S_1 \times ... \times S_n \times C_1 \times ... \times C_n$ και καλείται συνάρτηση απόδοσης του παίκτη i.

4) Το R είναι ένα μέτρο πιθανότητας επί του $C_1 \times ... \times C_n$ με την ιδιότητα ότι

$$(\forall c_i^0 \in C_i)(R(C_1 \times ... \times C_{i-1} \times \{c_i^0\} \times C_{i+1} \times ... \times C_n) > 0)$$

για κάθε $i \in \{1, ..., n\}$ και καλείται βασική κατανομή πιθανότητας του παιγνίου. Θα πρέπει να επισημάνουμε εδώ ότι για κάθε $i \in \{1, ..., n\}$, συμβολίζουμε με R_i το μέτρο πιθανότητας επί του C_i που ορίζεται από τη σχέση

$$R_i(B) = R(C_1 \times ... \times C_{i-1} \times B \times C_{i+1} \times ... \times C_n)$$

οποτεδήποτε $B \in \mathbf{P}(C_i)$.

Το παίγνιο παίζεται ως ακολούθως: Κάθε παίκτης i επιλέγει ταυτόχρονα με τους άλλους παίκτες μιά από τις κανονικοποιημένες στρατηγικές του, έστω την σ_i που είναι εξ ορισμού μιά μετρητή κατά $Borel$ συνάρτηση $C_i \to S_i$, και αφού γίνει αυτό, για κάθε $c_i^0 \in C_i$, λαμβάνει αντιστοίχως προσδοκόμενη απόδοση ίση με το ολοκλήρωμα υπεράνω του $C_1 \times ... \times C_{i-1} \times C_{i+1} \times ... \times C_n$ της συνάρτησης

$$V_i(\sigma_1(\cdot), ..., \sigma_{i-1}(\cdot), \sigma_i(c_i^0), \sigma_{i+1}(\cdot), ..., \sigma_n(\cdot), \cdot, ..., \cdot, c_i^0, \cdot, ..., \cdot)$$

ως προς την κατανομή δεσμευμένης πιθανότητας $(R|c_i^0)$ που λαμβάνεται από την R για την δοθείσα τιμή c_i^0 του διανύσματος πληροφόρησης του παίκτη i, η οποία ορίζεται από τη σχέση

$$(R|c_i^0)(B) = \frac{\int_B dR(c_1, ..., c_{i-1}, c_i^0, c_{i+1}, ..., c_n)}{R(C_1 \times ... \times C_{i-1} \times \{c_i^0\} \times C_{i+1} \times ... \times C_n)}$$

οποτεδήποτε $B \in \mathbf{P}(C_1 \times ... \times C_{i-1} \times C_{i+1} \times ... \times C_n)$. Σε ένα τέτοιο παίγνιο $\mathcal{G}$, μιά n-άδα κανονικοποιημένων στρατηγικών $(\sigma_1^*, ..., \sigma_n^*)$ καλείται ισορροπία $Nash$ του $Bayes$, αν για κάθε $i \in \{1, ..., n\}$, για κάθε κανονικοποιημένη στρατηγική $\sigma_i : C_i \to S_i$ και για κάθε $c_i^0 \in C_i$, έχουμε

$$\begin{aligned}
&\int_{C_1 \times ... \times C_{i-1} \times C_{i+1} \times ... \times C_n} V_i(\sigma_1^*(c_1), ..., \sigma_{i-1}^*(c_{i-1}), \sigma_i^*(c_i^0), \sigma_{i+1}^*(c_{i+1}), ..., \\
&\quad \sigma_n^*(c_n), c_1, ..., c_{i-1}, c_i^0, c_{i+1}, ..., c_n) d(R|c_i^0)(c_1, ..., c_{i-1}, c_{i+1}, ..., c_n) \\
\geq &\int_{C_1 \times ... \times C_{i-1} \times C_{i+1} \times ... \times C_n} V_i(\sigma_1^*(c_1), ..., \sigma_{i-1}^*(c_{i-1}), \sigma_i(c_i^0), \sigma_{i+1}^*(c_{i+1}), ..., \\
&\quad \sigma_n^*(c_n), c_1, ..., c_{i-1}, c_i^0, c_{i+1}, ..., c_n) d(R|c_i^0)(c_1, ..., c_{i-1}, c_{i+1}, ..., c_n)
\end{aligned}$$

Ο δεύτερός μας σκοπός σε αυτό το κεφάλαιο είναι να δείξουμε ότι για κάθε ακέραιο $n \geq 2$, δεν υπάρχουν μετρητές κατά $Borel$ αναγκαίες και ικανές συνθήκες επί n κάτω ημισυνεχών συναρτήσεων απόδοσης που ορίζουν ένα παίγνιο του $Bayes$ n ατόμων, οι οποίες μπορούν να βεβαιώσουν την ύπαρξη ισορροπιών $Nash$ του $Bayes$. Στην πραγματικότητα λαμβάνουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Θεώρημα 2.1.3. *Δοθέντων οποιουδήποτε ακεραίου $n \geq 2$, οποιωνδήποτε συμπαγών ομαλών πολλαπλοτήτων*

$$S_1, \; ..., \; S_n$$

ως χώρων των στρατηγικών, οποιωνδήποτε μη κενών το πολύ αριθμήσιμων συνόλων

$$C_1, \; ..., \; C_n$$

(εφοδιασμένων με τη διακριτή τοπολογία) ως χώρων των διανυσμάτων πληροφόρησης και οποιουδήποτε μέτρου πιθανότητας R επί του $C_1 \times ... \times C_n$ με την ιδιότητα ότι

$$(\forall c_i^0 \in C_i)(R(C_1 \times ... \times C_{i-1} \times \{c_i^0\} \times C_{i+1} \times ... \times C_n) > 0)$$

για κάθε $i \in \{1, ..., n\}$, ως της βασικής κατανομής πιθανότητας του παιγνίου, το σύνολο όλων των n-άδων $(V_1, ..., V_n)$ κάτω ημισυνεχών συναρτήσεων απόδοσης που ορίζουν ένα παίγνιο του Bayes n ατόμων

$$\mathcal{G} = ((S_1, ..., S_n), (C_1, ..., C_n), (V_1, ..., V_n), R)$$

το οποίο έχει ισορροπία $Nash$ του Bayes, δεν είναι μετρητό κατά Borel στο

$$LSC(S_1 \times ... \times S_n \times C_1 \times ... \times C_n, \mathbf{R})^n$$

Έτσι, για κάθε ακέραιο $n \geq 2$, οποιεσδήποτε αναγκαίες και ικανές συνθήκες ύπαρξης ισορροπιών $Nash$ του $Bayes$ για n κάτω ημισυνεχείς συναρτήσεις απόδοσης που ορίζουν ένα παίγνιο του $Bayes$ n ατόμων δε μπορούν να εκφραστούν αναλυτικά μέσω συγκεκριμένων τύπων, απλών αναλυτικών εκφράσεων και τα τοιαύτα.

Δοθέντος οποιουδήποτε ακεραίου $n \geq 2$, μιά ιδιαίτερη κλάση $\mathcal{C}_n$ παιγνίων n ατόμων χωρίς συνεργασίες σε στρατηγική μορφή σχηματίζεται από εκείνα των οποίων τα σύνολα στρατηγικών είναι αντίγραφα του συνόλου $\mathbf{N}$ των φυσικών αριθμών και των οποίων οι συναρτήσεις απόδοσης λαμβάνουν τιμές στο $\{-1\} \cup \mathbf{N}$. Καλούμε ένα παίγνιο $G = (\mathbf{N}, ..., \mathbf{N}, u_1, ..., u_n) \in \mathcal{C}_n$ μερικώς υπολογίσιμο, συμβολικά $G \in \mathcal{PCG}_n$, αν για κάθε $i \in \{1, ..., n\}$, η συνάρτηση απόδοσης $u_i : \mathbf{N}^n \to \{-1\} \cup \mathbf{N}$ είναι μερικώς υπολογίσιμη, όπου συνδυάζοντας τις προσεγγίσεις και το συμβολισμό των *M. Davis* και *Yu. I. Manin* (δείτε το 2 στις σελίδες 8-12 του *Davis* [1982] και το 1.3 στη σελίδα 178 του *Manin* [1977]) καλούμε μιά συνάρτηση $f : \mathbf{N}^n \to \{-1\} \cup \mathbf{N}$ μερικώς υπολογίσιμη, αν υπάρχει μηχανή *Turing* Z τέτοια ώστε για κάθε $(x_1, ..., x_n) \in \mathbf{N}^n$, να έχουμε

$$f(x_1,...,x_n) = \begin{cases} \text{ο αριθμός των εμφανίσεων} & \text{αν η } Z \text{ σταματάει} \\ \text{του 1 στο } \textit{output} \text{ της } Z \text{ όταν} & \text{όταν το } \textit{input} \\ \text{το } \textit{input} \text{ είναι } \overline{(x_1,...,x_n)} & \text{είναι } \overline{(x_1,...,x_n)} \\ & \\ -1 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Ειδικότερα καλούμε μιά μερικώς υπολογίσιμη συνάρτηση υπολογίσιμη, αν δεν λαμβάνει ποτέ την τιμή -1. Επισημαίνουμε ότι οι μερικώς υπολογίσιμες συναρτήσεις ταυτίζονται με τις αναδρομικές συναρτήσεις όπως ορίστηκαν στην Εισαγωγή του ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 1 και αυτή η επέκταση μιάς μερικώς υπολογίσιμης συνάρτησης γίνεται απλά και μόνον επειδή ο ορισμός ενός παιγνίου πολλών ατόμων χωρίς συνεργασίες σε στρατηγική μορφή απαιτεί οι συναρτήσεις απόδοσης να ορίζονται σε ολόκληρο το Καρτεσιανό γινόμενο των συνόλων στρατηγικών. Παρατηρούμε ότι αν $G = (\mathbf{N}, ..., \mathbf{N}, u_1, ..., u_n) \in \mathcal{PCG}_n$ και $i \in \{1, ..., n\}$, ενώ Z_i είναι μιά μηχανή *Turing* τέτοια ώστε για κάθε $(x_1, ..., x_n) \in \mathbf{N}^n$, να έχουμε

$$u_i(x_1,...,x_n) = \begin{cases} \text{ο αριθμός των εμφανίσεων} & \text{αν η } Z_i \text{ σταματάει} \\ \text{του 1 στο } \textit{output} \text{ της } Z_i \text{ όταν} & \text{όταν το } \textit{input} \\ \text{το } \textit{input} \text{ είναι } \overline{(x_1,...,x_n)} & \text{είναι } \overline{(x_1,...,x_n)} \\ & \\ -1 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

τότε δοθέντος $(x_1, ..., x_n) \in \mathbf{N}^n$, ο παίκτης i τιμωρείται λαμβάνωντας αρνητική απόδοση $u_i(x_1, ..., x_n) = -1$, αν αυτός ή κάποιος άλλος παίκτης, έστω ο $j \in \{1, ..., n\} \setminus \{i\}$, έχει επιλέξει μιά στρατηγική x_i ή x_j, αντιστοίχως, τέτοια ώστε η Z_i να τρέχει επ΄ άπειρον όταν το *input* είναι $\overline{(x_1, ..., x_n)}$.

Αφού ορίσαμε την κλάση $\mathcal{PCG}_n$ είναι φυσικό να θεωρήσουμε το ακόλουθο πρόβλημα απόφασης $\mathcal{P}_n$. (Για τον ορισμό των προβλημάτων απόφασης δείτε, για παράδειγμα, το 2 στις σελίδες 69-71 του *Davis* [1982].)

Υπάρχει αλγόριθμος που αποφασίζει κατά πόσον ένα παίγνιο στην $\mathcal{PCG}_n$ έχει ή όχι ισορροπία Nash χωρίς συνεργασίες σε καθαρές στρατηγικές;

Ο τρίτος μας σκοπός σε αυτό το κεφάλαιο είναι να δώσουμε αρνητική απάντηση στο $\mathcal{P}_n$. Στην πραγματικότητα λαμβάνουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Θεώρημα 2.1.4. *Για κάθε ακέραιο $n \geq 2$, δεν υπάρχει αλγόριθμος που αποφασίζει κατά πόσον ένα παίγνιο στην $\mathcal{PCG}_n$ (δηλαδή, ένα παίγνιο n ατόμων χωρίς συνεργασίες σε στρατηγική μορφή με αντίγραφα του συνόλου των φυσικών αριθμών ως σύνολα στρατηγικών και μερικώς υπολογίσιμες συναρτήσεις απόδοσης) έχει ή όχι ισορροπία $Nash$ χωρίς συνεργασίες σε καθαρές στρατηγικές.*

Θα πρέπει να επισημάνουμε ότι το θεώρημα δεν λέει ότι δοθέντος ενός συγκεκριμένου παιγνίου $G \in \mathcal{PCG}_n$ (όπου $n \geq 2$ είναι ένας ακέραιος αριθμός), δεν υπάρχει αλγόριθμος που αποφασίζει κατά πόσον το G έχει ή όχι ισορροπία $Nash$ χωρίς συνεργασίες σε καθαρές στρατηγικές. Ένας τέτοιος αλγόριθμος μπορεί κάλλιστα να υπάρχει. Αλλά δεν υπάρχει κανένας αλγόριθμος που δουλεύει για κάθε παίγνιο στην $\mathcal{PCG}_n$.

Δοθέντος και πάλι οποιουδήποτε ακεραίου $n \geq 2$, μιά ιδιαίτερη κλάση $\mathbf{G}_n$ παιγνίων n ατόμων χωρίς συνεργασίες σε στρατηγική μορφή σχηματίζεται από εκείνα των οποίων τα σύνολα στρατηγικών είναι αντίγραφα του συνόλου $\mathbf{R}$ των πραγματικών αριθμών και των οποίων οι συναρτήσεις απόδοσης ανήκουν στον υποδακτύλιο $\mathbf{S}_n$ του $C^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ που παράγεται από τις συναρτήσεις

$$\mathbf{R}^n \ni (x_1, ..., x_n) \mapsto i \in \mathbf{R}$$

$$\mathbf{R}^n \ni (x_1, ..., x_n) \mapsto x_j \in \mathbf{R}$$

$$\mathbf{R}^n \ni (x_1, ..., x_n) \mapsto \sin(x_j^k) \in \mathbf{R}$$

και

$$\mathbf{R}^n \ni (x_1, ..., x_n) \mapsto \sin(x_j \cdot \sin(x_j^k)) \in \mathbf{R}$$

όπου $(i, j, k) \in \mathbf{Z} \times \{1, 2, ..., n\} \times (\mathbf{N} \setminus \{0\})$. Ο τέταρτός μας σκοπός σε αυτό το κεφάλαιο είναι να αποδείξουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Θεώρημα 2.1.5. *Για κάθε ακέραιο $n \geq 2$, δεν υπάρχει αλγόριθμος που αποφασίζει κατά πόσον ένα παίγνιο στην $\mathbf{G}_n$ έχει ή όχι ισορροπία $Nash$ χωρίς συνεργασίες σε καθαρές στρατηγικές.*

2.2 Παίγνια με κάτω ημισυνεχείς αποδόσεις

Θεώρημα 2.2.1. *Δοθέντων οποιουδήποτε ακεραίου $n \geq 2$ και οποιωνδήποτε συμπαγών ομαλών πολλαπλοτήτων*

$$M_1, \ ..., \ M_n$$

ως συνόλων στρατηγικών, το σύνολο όλων των n-άδων

$$(u_1, ..., u_n)$$

κάτω ημισυνεχών συναρτήσεων απόδοσης που ορίζουν ένα παίγνιο n ατόμων

$$\mathcal{G} = (M_1, ..., M_n, u_1, ..., u_n)$$

χωρίς συνεργασίες σε στρατηγική μορφή, το οποίο έχει ισορροπία $Nash$ χωρίς συνεργασίες σε καθαρές στρατηγικές, δεν είναι μετρητό κατά $Borel$ στο

$$LSC(M_1 \times ... \times M_n, \mathbf{R})^n$$

Επίσης, το ίδιο ισχύει αν αντικαταστήσουμε τις καθαρές στρατηγικές από μεικτές στρατηγικές.

Απόδειξη. Ξεκινάμε με την απόδειξη του Θεωρήματος 2.2.1 για την περίπτωση των καθαρών στρατηγικών. Θα αποδείξουμε, δηλαδή, ότι το σύνολο

$$\mathcal{PNE}_{lsc} = \{(v_1, ..., v_n) \in LSC(M_1 \times ... \times M_n, \mathbf{R})^n :$$

$$(\exists (p_1^*, ..., p_n^*) \in M_1 \times ... \times M_n)((\forall p_1 \in M_1)(v_1(p_1, p_2^*, ..., p_n^*) \leq v_1(p_1^*, ..., p_n^*))$$
$$\wedge \ ... \ \wedge \ (\forall p_n \in M_n)(v_n(p_1^*, ..., p_{n-1}^*, p_n) \leq v_n(p_1^*, ..., p_n^*)))\}$$

δεν είναι μετρητό κατά $Borel$ στο $LSC(M_1 \times ... \times M_n, \mathbf{R})^n$. Έτσι έστω

$$m_i = \dim(M_i)$$

και έστω ότι $(U^{(i)}, \phi_i)$ είναι ένας αυθαίρετος αλλά σταθερός χάρτης επί της M_i, όπου

$$\phi_i(p) = (x_1^i(p), ..., x_{m_i}^i(p))$$

οποτεδήποτε $p \in U^{(i)}$ και $i \in \{1, ..., n\}$. Δεν είναι δύσκολο να επαληθεύσει κανείς ότι για κάθε $i \in \{1, ..., n\}$ και για κάθε $j \in \{1, ..., m_i\}$, υπάρχουν $-\infty < a_j^{(i)} < b_j^{(i)} < \infty$ τέτοια ώστε

$$[a_1^{(i)}, b_1^{(i)}] \times ... \times [a_{m_i}^{(i)}, b_{m_i}^{(i)}] \subseteq \phi_i[U^{(i)}]$$

Κρατώντας τους ίδιους συμβολισμούς όπως στην Παράγραφο 3 του ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 1, για κάθε $s \in \mathbf{N}^{<\mathbf{N}}$, θέτουμε

$$U_s^{(i)} = \phi_i^{-1}\left[I_s \times [a_2^{(i)}, b_2^{(i)}] \times ... \times [a_{m_i}^{(i)}, b_{m_i}^{(i)}]\right]$$

και στην περίπτωση που $s \neq \emptyset$ θέτουμε επίσης

$$U_s^{(i),*} = \phi_i^{-1}\left[I_s^* \times [a_2^{(i)}, b_2^{(i)}] \times ... \times [a_{m_i}^{(i)}, b_{m_i}^{(i)}]\right]$$

για $a = a_1^{(i)}$ και $b = b_1^{(i)}$. Επιπλέον, στην περίπτωση που $s \neq \emptyset$, θέτουμε

$$\Phi_{i,s}(p) = \begin{cases} \phi_s(x_1^i(p)) & \text{αν } p \in U^{(i)} \\ 0 & \text{αν } p \in M_i \setminus U^{(i)} \end{cases}$$

και δεν είναι δύσκολο να επαληθεύσει κανείς ότι η συνάρτηση

$$\Phi_{i,s} : M_i \to [0,1]$$

είναι διαφορίσιμη της κλάσης C^∞ με την ιδιότητα ότι

$$\Phi_{i,s} = 1 \quad \text{εντός του } U_s^{(i)}$$

και

$$\Phi_{i,s} = 0 \quad \text{εκτός του } U_s^{(i),*}$$

Έτσι, δοθέντων οποιουδήποτε $i \in \{1, ..., n\}$ και οποιουδήποτε $T \in Tr^*$, θέτουμε

$$v_i^T(p_1, ..., p_n) = \sum_{s \in \delta(T)\setminus\{\emptyset\}} 2^{-\text{length}(s)} \Phi_{i,s}(p_i)$$

οποτεδήποτε $(p_1, ..., p_n) \in M_1 \times ... \times M_n$, και μιά εφαρμογή του Θεωρήματος 1.3.5 του ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 1 δείχνει ότι η απεικόνιση

$$Tr^* \ni T \mapsto (v_1^T, ..., v_n^T) \in LSC(M_1 \times ... \times M_n, \mathbf{R})^n$$

είναι καλά ορισμένη, κατά συντεταγμένες αμφιμονότιμη, μετρητή κατά *Borel* και ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:

1) Για κάθε $T \in Tr^*$ και για κάθε $i \in \{1, ..., n\}$, έχουμε

$$0 \leq v_i^T \leq 1$$

2) Για κάθε κακώς θεμελιωμένο $T \in Tr^*$ και για κάθε $\alpha \in [T]$, έχουμε

$$\begin{aligned}
&v_i^T(\phi_1^{-1}(x_1(\alpha), a_2^{(1)}, ..., a_{m_1}^{(1)}), ..., \phi_n^{-1}(x_n(\alpha), a_2^{(n)}, ..., a_{m_n}^{(n)})) \\
&= \sum_{s\in\delta(T)\setminus\{\emptyset\}} 2^{-\text{length}(s)} \Phi_{i,s}(\phi_i^{-1}(x_i(\alpha), a_2^{(i)}, ..., a_{m_i}^{(i)})) \\
&= \sum_{s\in\delta(T)\setminus\{\emptyset\}} 2^{-\text{length}(s)} \phi_s(x_i(\alpha)) \\
&= u_T(x_i(\alpha)) \\
&= 1
\end{aligned}$$

όπου $x_i(\alpha)$ είναι το μοναδικό σημείο εντός του $\bigcap_{m\in\mathbf{N}} I_{\alpha|m}$ για $a = a_1^{(i)}$ και $b = b_1^{(i)}$, οποτεδήποτε $i \in \{1, ..., n\}$, και συνεπώς

$$(v_1^T, ..., v_n^T) \in \mathcal{PNE}_{lsc}$$

3) Για κάθε καλώς θεμελιωμένο $T \in Tr^*$, για κάθε $i \in \{1, ..., n\}$ και για κάθε $(p_1, ..., p_n) \in M_1 \times ... \times M_n$, έχουμε

$$p_i \notin U^{(i)} \Rightarrow v_i^T(p_1, ..., p_n) = \sum_{s\in\delta(T)\setminus\{\emptyset\}} 2^{-\text{length}(s)} \Phi_{i,s}(p_i) = 0$$

και

$$\begin{aligned}
p_i \in U^{(i)} \quad \Rightarrow \quad v_i^T(p_1, ..., p_n) \quad &= \sum_{s\in\delta(T)\setminus\{\emptyset\}} 2^{-\text{length}(s)} \Phi_{i,s}(p_i) \\
&= \sum_{s\in\delta(T)\setminus\{\emptyset\}} 2^{-\text{length}(s)} \phi_s(x_1^i(p_i)) \\
&= u_T(x_1^i(p_i)) \\
&< 1
\end{aligned}$$

Με άλλα λόγια, έχουμε

$$v_i^T < 1$$

Αλλά για κάθε καλώς θεμελιωμένο $T \in Tr^*$, για κάθε $i \in \{1, ..., n\}$ και για κάθε θετικό ακέραιο l, αν $(0, l, ..., l)$ είναι μιά ακολουθία μήκους $l + 1$, τότε

$$v_i^T(\phi_1^{-1}(a_{(0,l,...,l)}^{(1)}, a_2^{(1)}, ..., a_{m_1}^{(1)}), ..., \phi_n^{-1}(a_{(0,l,...,l)}^{(n)}, a_2^{(n)}, ..., a_{m_n}^{(n)}))$$

$$= \sum_{s\in\delta(T)\setminus\{\emptyset\}} 2^{-\text{length}(s)}\Phi_{i,s}(\phi_i^{-1}(a^{(i)}_{(0,l,...,l)}, a_2^{(i)}, ..., a_{m_i}^{(i)}))$$

$$= \sum_{s\in\delta(T)\setminus\{\emptyset\}} 2^{-\text{length}(s)}\phi_s(a^{(i)}_{(0,l,...,l)})$$

$$= u_T(a^{(i)}_{(0,l,...,l)})$$

$$= \sum_{k=1}^{l+1} 2^{-k}$$

όπου το $a^{(i)}_{(0,l,...,l)}$ συμβολίζει το αριστερό άκρο του $I_{(0,l,...,l)}$ για $a = a_1^{(i)}$ και $b = b_1^{(i)}$, και συνεπώς

$$(v_1^T, ..., v_n^T) \notin \mathcal{PNE}_{lsc}$$

Επομένως, το $T \in Tr^*$ είναι κακώς θεμελιωμένο αν και μόνον αν $(v_1^T, ..., v_n^T) \in \mathcal{PNE}_{lsc}$ και συνεπώς το $\mathcal{PNE}_{lsc}$ δεν είναι μετρητό κατά *Borel* στο $LSC(M_1 \times ... \times M_n, \mathbf{R})^n$.

Προχωράμε με την απόδειξη του Θεωρήματος 2.2.1 για την περίπτωση των μεικτών στρατηγικών. Θα αποδείξουμε, δηλαδή, ότι το σύνολο

$$\mathcal{MNE}_{lsc} = \{(v_1, ..., v_n) \in LSC(M_1 \times ... \times M_n, \mathbf{R})^n :$$
$$(\exists(\mu_1^*, ..., \mu_n^*) \in P(M_1) \times ... \times P(M_n))((\forall \mu_1 \in P(M_1))$$
$$(Ev_1(\mu_1, \mu_2^*, ..., \mu_n^*) \leq Ev_1(\mu_1^*, ..., \mu_n^*)) \ \wedge\ ... \ \wedge$$
$$(\forall \mu_n \in P(M_n))(Ev_n(\mu_1^*, ..., \mu_{n-1}^*, \mu_n) \leq Ev_n(\mu_1^*, ..., \mu_n^*)))\}$$

δεν είναι μετρητό κατά *Borel* στο $LSC(M_1 \times ... \times M_n, \mathbf{R})^n$. Κρατώντας τους ίδιους συμβολισμούς όπως προηγουμένως, η απεικόνιση

$$Tr^* \ni T \mapsto (v_1^T, ..., v_n^T) \in LSC(M_1 \times ... \times M_n, \mathbf{R})^n$$

είναι καλά ορισμένη, κατά συντεταγμένες αμφιμονότιμη, μετρητή κατά *Borel* και ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:
1) Για κάθε $T \in Tr^*$ και για κάθε $i \in \{1, ..., n\}$, έχουμε

$$0 \leq v_i^T \leq 1$$

Οπότε για κάθε $(\mu_1, ..., \mu_n) \in P(M_1) \times ... \times P(M_n)$, μιά εφαρμογή του θεωρήματος του *Tonelli* (δείτε, για παράδειγμα, το Θεώρημα 26.7 στη σελίδα 213 του *Aliprantis-Burkinshaw* [1998]) δείχνει ότι

$$Ev_i^T(\mu_1, ..., \mu_n) = \int_{M_1 \times ... \times M_n} v_i^T d(\mu_1 \times ... \times \mu_n) = \int_{U^{(i)}} u_T(x_1^i(p)) d\mu_i(p)$$

και συνεπώς

$$0 \le Ev_i^T \le 1$$

2) Για κάθε κακώς θεμελιωμένο $T \in Tr^*$ και για κάθε $\alpha \in [T]$, έχουμε

$$\begin{aligned} & Ev_i^T(\delta_{\phi_1^{-1}(x_1(\alpha), a_2^{(1)}, ..., a_{m_1}^{(1)})}, ..., \delta_{\phi_n^{-1}(x_n(\alpha), a_2^{(n)}, ..., a_{m_n}^{(n)})}) \\ & = \textstyle\int_{U^{(i)}} u_T(x_1^i(p)) d\delta_{\phi_i^{-1}(x_i(\alpha), a_2^{(i)}, ..., a_{m_i}^{(i)})}(p) \\ & = u_T(x_i(\alpha)) \\ & = 1 \end{aligned}$$

όπου $x_i(\alpha)$ είναι το μοναδικό σημείο εντός του $\bigcap_{m \in \mathbf{N}} I_{\alpha|m}$ για $a = a_1^{(i)}$ και $b = b_1^{(i)}$, οποτεδήποτε $i \in \{1, ..., n\}$, και συνεπώς

$$(v_1^T, ..., v_n^T) \in \mathcal{MNE}_{lsc}$$

3) Για κάθε καλώς θεμελιωμένο $T \in Tr^*$ και για κάθε $i \in \{1, ..., n\}$, έχουμε $v_i^T < 1$, ενώ για κάθε θετικό ακέραιο l, αν $(0, l, ..., l)$ είναι μιά ακολουθία με μήκος $l+1$ και το $a_{(0,l,...,l)}^{(i)}$ συμβολίζει το αριστερό άκρο του $I_{(0,l,...,l)}$ για $a = a_1^{(i)}$ και $b = b_1^{(i)}$, τότε θα αποδείξουμε ότι

$$(v_1^T, ..., v_n^T) \notin \mathcal{MNE}_{lsc}$$

Όντως, αν υποθέσουμε ότι το $(\mu_1^*, ..., \mu_n^*)$ αποτελεί μιά ισορροπία *Nash* χωρίς συνεργασίες σε μεικτές στρατηγικές για το παίγνιο n ατόμων χωρίς συνεργασίες σε στρατηγική μορφή που ορίζεται από την n-άδα $(v_1^T, ..., v_n^T)$, τότε (δείτε, για παράδειγμα, το 17.A στις σελίδες 103-105 του *Kechris* [1995])

$$\begin{aligned}
\int_{a_1^{(1)}}^{b_1^{(1)}} u_T d(x_1^1 \mu_1^*) &= \int_{U^{(1)}} u_T(x_1^1(p_1)) d\mu_1^*(p_1) \\
&= Ev_1^T(\mu_1^*, ..., \mu_n^*) \\
&= \max_{\mu_1 \in P(M_1)} Ev_1^T(\mu_1, \mu_2^*, ..., \mu_n^*) \\
&= \max_{\mu_1 \in P(M_1)} \int_{U^{(1)}} u_T(x_1^1(p_1)) d\mu_1(p_1) \\
&\geq \int_{U^{(1)}} u_T(x_1^1(p_1)) d\delta_{\phi_1^{-1}(a^{(1)}_{(0,l,...,l)}, a_2^{(1)}, ..., a_{m_1}^{(1)})}(p_1) \\
&= u_T(a^{(1)}_{(0,l,...,l)}) \\
&= \sum_{k=1}^{l+1} 2^{-k}
\end{aligned}$$

για κάθε θετικό ακέραιο l, κάτι που αντίκειται στο Πόρισμα 1.3.6 του ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 1.
Επομένως, το $T \in Tr^*$ είναι καλώς θεμελιωμένο αν και μόνον αν $(v_1^T, ..., v_n^T) \in \mathcal{MNE}_{lsc}$ και συνεπώς το $\mathcal{MNE}_{lsc}$ δεν είναι μετρητό κατά *Borel* στο $LSC(M_1 \times ... \times M_n, \mathbf{R})^n$. **Όπερ έδει δεῖξαι**

Ανοικτό Πρόβλημα. *Είναι τα σύνολα $\mathcal{PNE}_{lsc}$ και $\mathcal{MNE}_{lsc}$ αναλυτικά, δηλαδή, $\mathbf{\Sigma}_1^1$, στο $LSC(M_1 \times ... \times M_n, \mathbf{R})^n$;*

Ανοικτό Πρόβλημα. *Ποιά είναι η γενικότερη κλάσση συνόλων στρατηγικών για την οποία το Θεώρημα 2.2.1 εξακολουθεί να ισχύει;*

Θεώρημα 2.2.2. *Δοθέντων οποιουδήποτε ακεραίου $n \geq 2$, οποιωνδήποτε συμπαγών ομαλών πολλαπλοτήτων*

$$S_1, \; ..., \; S_n$$

ως χώρων των στρατηγικών, οποιωνδήποτε μη κενών το πολύ αριθμήσιμων συνόλων

$$C_1, \; ..., \; C_n$$

(εφοδιασμένων με τη διακριτή τοπολογία) ως χώρων των διανυσμάτων πληροφόρησης και οποιουδήποτε μέτρου πιθανότητας R επί του $C_1 \times ... \times C_n$ με την ιδιότητα ότι

$$(\forall c_i^0 \in C_i)(R(C_1 \times ... \times C_{i-1} \times \{c_i^0\} \times C_{i+1} \times ... \times C_n) > 0)$$

για κάθε $i \in \{1, ..., n\}$, ως της βασικής κατανομής πιθανότητας του παιγνίου, το σύνολο όλων των n-άδων

$$(V_1, ..., V_n)$$

κάτω ημισυνεχών συναρτήσεων απόδοσης που ορίζουν ένα παίγνιο του Bayes n ατόμων

$$\mathcal{G} = ((S_1, ..., S_n), (C_1, ..., C_n), (V_1, ..., V_n), R)$$

το οποίο έχει ισορροπία Nash του Bayes, δεν είναι μετρητό κατά Borel στο

$$LSC(S_1 \times ... \times S_n \times C_1 \times ... \times C_n, \mathbf{R})^n$$

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε ότι το σύνολο

$$\mathcal{BNE}_{lsc} = \{(V_1, ..., V_n) \in LSC(S_1 \times ... \times S_n \times C_1 \times ... \times C_n, \mathbf{R})^n :$$

$$(\exists(\sigma_1^*, ..., \sigma_n^*) \in S_1^{C_1} \times ... \times S_n^{C_n})(\forall i \in \{1, ..., n\})(\forall \sigma_i \in S_i^{C_i})(\forall c_i^0 \in C_i)$$

$$\bigg(\int_{C_1 \times ... \times C_{i-1} \times C_{i+1} \times ... \times C_n} V_i(\sigma_1^*(c_1), ..., \sigma_{i-1}^*(c_{i-1}), \sigma_i^*(c_i^0), \sigma_{i+1}^*(c_{i+1}), ...,$$

$$\sigma_n^*(c_n), c_1, ..., c_{i-1}, c_i^0, c_{i+1}, ..., c_n) d(R|c_i^0)(c_1, ..., c_{i-1}, c_{i+1}, ..., c_n)$$

$$\geq \int_{C_1 \times ... \times C_{i-1} \times C_{i+1} \times ... \times C_n} V_i(\sigma_1^*(c_1), ..., \sigma_{i-1}^*(c_{i-1}), \sigma_i(c_i^0), \sigma_{i+1}^*(c_{i+1}), ...,$$

$$\sigma_n^*(c_n), c_1, ..., c_{i-1}, c_i^0, c_{i+1}, ..., c_n) d(R|c_i^0)(c_1, ..., c_{i-1}, c_{i+1}, ..., c_n)\bigg)\bigg\}$$

δεν είναι μετρητό κατά *Borel* στο $LSC(S_1 \times ... \times S_n \times C_1 \times ... \times C_n, \mathbf{R})^n$. Έτσι έστω

$$d_i = \dim(S_i)$$

και έστω ότι $(U^{(i)}, \phi_i)$ είναι ένας αυθαίρετος αλλά σταθερός χάρτης επί της S_i, όπου

$$\phi_i(s_i) = (x_1^i(s_i), ..., x_{d_i}^i(s_i))$$

οποτεδήποτε $s_i \in U^{(i)}$ και $i \in \{1, ..., n\}$. Δεν είναι δύσκολο να επαληθεύσει κανείς ότι για κάθε $j \in \{1, ..., d_i\}$, υπάρχουν $-\infty < a_j^{(i)} < b_j^{(i)} < \infty$ τέτοια ώστε

$$[a_1^{(i)}, b_1^{(i)}] \times ... \times [a_{d_i}^{(i)}, b_{d_i}^{(i)}] \subseteq \phi_i[U^{(i)}]$$

Κρατώντας τους ίδιους συμβολισμούς όπως στο ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 1, για κάθε $s \in \mathbf{N}^{<\mathbf{N}}$, θέτουμε

$$U_s^{(i)} = \phi_i^{-1} \left[I_s \times [a_2^{(i)}, b_2^{(i)}] \times ... \times [a_{d_i}^{(i)}, b_{d_i}^{(i)}] \right]$$

και στην περίπτωση που $s \neq \emptyset$ θέτουμε επίσης

$$U_s^{(i),*} = \phi_i^{-1} \left[I_s^* \times [a_2^{(i)}, b_2^{(i)}] \times ... \times [a_{d_i}^{(i)}, b_{d_i}^{(i)}] \right]$$

για $a = a_1^{(i)}$ και $b = b_1^{(i)}$. Επιπλέον, στην περίπτωση που $s \neq \emptyset$, θέτουμε

$$\Phi_{i,s}(s_i) = \begin{cases} \phi_s(x_1^i(s_i)) & \text{αν } s_i \in U^{(i)} \\ 0 & \text{αν } s_i \in S_i \setminus U^{(i)} \end{cases}$$

και δεν είναι δύσκολο να επαληθεύσει κανείς ότι η συνάρτηση

$$\Phi_{i,s} : S_i \to [0, 1]$$

είναι διαφορίσιμη της κλάσης C^∞ με την ιδιότητα ότι

$$\Phi_{i,s} = 1 \quad \text{εντός του} \quad U_s^{(i)}$$

και

$$\Phi_{i,s} = 0 \quad \text{εκτός του} \quad U_s^{(i),*}$$

Έτσι, δοθέντων οποιουδήποτε $i \in \{1, ..., n\}$ και οποιουδήποτε $T \in Tr^*$, θέτουμε

$$V_i^T(s_1, ..., s_n, c_1, ..., c_n) = \sum_{s \in \delta(T) \setminus \{\emptyset\}} 2^{-\text{length}(s)} \Phi_{i,s}(s_i)$$

οποτεδήποτε η $2n$-άδα $(s_1, ..., s_n, c_1, ..., c_n)$ ανήκει στο $S_1 \times ... \times S_n \times C_1 \times ... \times C_n$, και μία εφαρμογή του Θεωρήματος 1.3.5 του ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 1 δείχνει ότι η απεικόνιση

$$Tr^* \ni T \mapsto (V_1^T, ..., V_n^T) \in LSC(S_1 \times ... \times S_n \times C_1 \times ... \times C_n, \mathbf{R})^n$$

είναι καλά ορισμένη, κατά συντεταγμένες αμφιμονότιμη, μετρητή κατά *Borel* και ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:
1) Για κάθε $T \in Tr^*$ και για κάθε $i \in \{1, ..., n\}$, έχουμε

$$0 \leq V_i^T \leq 1$$

Οπότε, επειδή για κάθε $c_i^0 \in C_i$, έχουμε

$$(R|c_i^0) \in P(C_1 \times ... \times C_{i-1} \times C_{i+1} \times ... \times C_n)$$

για κάθε $(\sigma_1, ..., \sigma_n) \in S_1^{C_1} \times ... \times S_n^{C_n}$, θα έχουμε

$$\int_{C_1 \times ... \times C_{i-1} \times C_{i+1} \times ... \times C_n} V_i^T(\sigma_1(c_1), ..., \sigma_{i-1}(c_{i-1}), \sigma_i(c_i^0), \sigma_{i+1}(c_{i+1}), ...,$$

$$\sigma_n(c_n), c_1, ..., c_{i-1}, c_i^0, c_{i+1}, ..., c_n) d(R|c_i^0)(c_1, ..., c_{i-1}, c_{i+1}, ..., c_n) \leq 1$$

2) Για κάθε κακώς θεμελιωμένο $T \in Tr^*$ και για κάθε $\alpha \in [T]$, έχουμε

$$\int_{C_1 \times ... \times C_{i-1} \times C_{i+1} \times ... \times C_n} V_i^T(\phi_1^{-1}(x_1(\alpha), a_2^{(1)}, ..., a_{d_1}^{(1)}), ..., \phi_n^{-1}(x_n(\alpha), a_2^{(n)}, ...,$$

$$a_{d_n}^{(n)}), c_1, ..., c_{i-1}, c_i^0, c_{i+1}, ..., c_n) d(R|c_i^0)(c_1, ..., c_{i-1}, c_{i+1}, ..., c_n) =$$

$$\int_{C_1 \times ... \times C_{i-1} \times C_{i+1} \times ... \times C_n} \left(\sum_{s \in \delta(T) \setminus \{\emptyset\}} 2^{-\text{length}(s)} \Phi_{i,s} \left(\phi_i^{-1}(x_i(\alpha), a_2^{(i)}, ..., a_{d_i}^{(i)}) \right) \right)$$

$$d(R|c_i^0)(c_1, ..., c_{i-1}, c_{i+1}, ..., c_n) = \int_{C_1 \times ... \times C_{i-1} \times C_{i+1} \times ... \times C_n} \left(\sum_{s \in \delta(T) \setminus \{\emptyset\}} \right.$$

$$\left. 2^{-\text{length}(s)} \phi_s(x_i(\alpha)) \right) d(R|c_i^0)(c_1, ..., c_{i-1}, c_{i+1}, ..., c_n)$$

$$= \sum_{s \in \delta(T) \setminus \{\emptyset\}} 2^{-\text{length}(s)} \phi_s(x_i(\alpha)) = u_T(x_i(\alpha)) = 1$$

όπου $x_i(\alpha)$ είναι το μοναδικό σημείο εντός του $\bigcap_{m \in \mathbf{N}} I_{\alpha|m}$ για $a = a_1^{(i)}$ και $b = b_1^{(i)}$, οποτεδήποτε $i \in \{1, ..., n\}$ και $c_i^0 \in C_i$, και συνεπώς

$$(V_1^T, ..., V_n^T) \in \mathcal{BNE}_{lsc}$$

3) Για κάθε καλώς θεμελιωμένο $T \in Tr^*$ και για κάθε $i \in \{1, ..., n\}$, έχουμε

$$V_i^T < 1$$

ενώ για κάθε θετικό ακέραιο l, αν $(0, l, ..., l)$ είναι μιά ακολουθία μήκους $l + 1$ και το $a^{(i)}_{(0,l,...,l)}$ συμβολίζει το αριστερό άκρο του $I_{(0,l,...,l)}$ για $a = a^{(i)}_1$ και $b = b^{(i)}_1$, τότε θα αποδείξουμε ότι

$$(V_1^T, ..., V_n^T) \notin \mathcal{BNE}_{lsc}$$

Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι το $(\sigma_1^*, ..., \sigma_n^*)$ αποτελεί μιά ισορροπία *Nash* του *Bayes* για το παίγνιο του *Bayes* n ατόμων που ορίζεται από την n-άδα $(V_1^T, ..., V_n^T)$, τότε για κάθε $c_i^0 \in C_i$, έχουμε

$$1 > V_i^T(\sigma_1^*(\cdot), ..., \sigma_{i-1}^*(\cdot), \sigma_i^*(c_i^0), \sigma_{i+1}^*(\cdot), ..., \sigma_n^*(\cdot), \cdot, ..., \cdot, c_i^0, \cdot, ..., \cdot) =$$

$$\sum_{s \in \delta(T) \setminus \{\emptyset\}} 2^{-\mathrm{length}(s)} \Phi_{i,s}(\sigma_i^*(c_i^0)) = \int_{C_1 \times ... \times C_{i-1} \times C_{i+1} \times ... \times C_n}$$

$$\left(\sum_{s \in \delta(T) \setminus \{\emptyset\}} 2^{-\mathrm{length}(s)} \Phi_{i,s}(\sigma_i^*(c_i^0)) \right) d(R|c_i^0)(c_1, ..., c_{i-1}, c_{i+1}, ..., c_n) =$$

$$\int_{C_1 \times ... \times C_{i-1} \times C_{i+1} \times ... \times C_n} V_i^T(\sigma_1^*(c_1), ..., \sigma_{i-1}^*(c_{i-1}), \sigma_i^*(c_i^0),$$

$$\sigma_{i+1}^*(c_{i+1}), ..., \sigma_n^*(c_n), c_1, ..., c_{i-1}, c_i^0, c_{i+1}, ..., c_n)$$

$$d(R|c_i^0)(c_1, ..., c_{i-1}, c_{i+1}, ..., c_n) =$$

$$\max_{\sigma_i \in C(C_i, S_i)} \int_{C_1 \times ... \times C_{i-1} \times C_{i+1} \times ... \times C_n} V_i^T(\sigma_1^*(c_1), ..., \sigma_{i-1}^*(c_{i-1}), \sigma_i(c_i^0),$$

$$\sigma_{i+1}^*(c_{i+1}), ..., \sigma_n^*(c_n), c_1, ..., c_{i-1}, c_i^0, c_{i+1}, ..., c_n)$$

$$d(R|c_i^0)(c_1, ..., c_{i-1}, c_{i+1}, ..., c_n) =$$

$$\max_{\sigma_i \in C(C_i, S_i)} \sum_{s \in \delta(T) \setminus \{\emptyset\}} 2^{-\mathrm{length}(s)} \Phi_{i,s}(\sigma_i(c_i^0)) \geq$$

$$\sum_{s \in \delta(T) \setminus \{\emptyset\}} 2^{-\mathrm{length}(s)} \Phi_{i,s}(\phi_i^{-1}(a^{(i)}_{(0,l,...,l)}, a_2^{(i)}, ..., a_{d_i}^{(i)})) =$$

$$\sum_{s \in \delta(T) \setminus \{\emptyset\}} 2^{-\mathrm{length}(s)} \phi_s(a^{(i)}_{(0,l,...,l)}) = u_T(a^{(i)}_{(0,l,...,l)}) = \sum_{k=1}^{l+1} 2^{-k}$$

για κάθε θετικό ακέραιο l, που είναι μιά αντίφαση.
Επομένως, το $T \in Tr^*$ είναι κακώς θεμελιωμένο αν και μόνον αν $(V_1^T, ..., V_n^T) \in \mathcal{BNE}_{lsc}$ και συνεπώς το $\mathcal{BNE}_{lsc}$ δεν είναι μετρητό κατά *Borel* στο $LSC(S_1 \times ... \times S_n \times C_1 \times ... \times C_n, \mathbf{R})^n$. **Όπερ έδει δεῖξαι**

2.3 Παίγνια με μερικώς υπολογίσιμες αποδόσεις

Για να αποδείξουμε το Θεώρημα 2.1.4, ανάγουμε το $\mathcal{P}_n$, όπου $n \geq 2$ είναι ένας ακέραιος αριθμός, στο πρόβλημα απόφασης για ένα υποσύνολο Γ_n του $\mathbf{N}^n$. (Δείτε, για παράδειγμα, τη σελίδα 69 του *Davis* [1982].) Για το σκοπό αυτό, χρειαζόμαστε ένα από τα πιο βασικά εργαλεία στη θεωρία υπολογισιμότητας που είναι το Θεώρημα Κανονικής Μορφής του *Kleene*. (Δείτε, για παράδειγμα, το IX της §58 στη σελίδα 288, το XIX της §63 στη σελίδα 330 και ειδικότερα το $XXII$ της §65 στη σελίδα 341 του *Kleene* [1991].) Το διατυπώνουμε εδώ στη μορφή που αντιστοιχεί στον ορισμό που δώσαμε για τις μερικά υπολογίσιμες συναρτήσεις.

Θεώρημα Κανονικής Μορφής του *Kleene*. *Για κάθε θετικό ακέραιο n, υπάρχει μιά μερικώς υπολογίσιμη συνάρτηση $\Phi_n : \mathbf{N}^{n+1} \to \{-1\} \cup \mathbf{N}$ με την ιδιότητα ότι για κάθε μερικώς υπολογίσιμη συνάρτηση $f : \mathbf{N}^n \to \{-1\} \cup \mathbf{N}$, υπάρχει $z \in \mathbf{N}$ τέτοιο ώστε $f(\mathbf{x}) = \Phi_n(z, \mathbf{x})$ για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbf{N}^n$.*

Έτσι, δοθέντος οποιουδήποτε θετικού ακεραίου n, μπορούμε να απαριθμήσουμε αποτελεσματικά τις μερικώς υπολογίσιμες συναρτήσεις $\mathbf{N}^n \to \{-1\} \cup \mathbf{N}$ μέσω της απεικόνισης

$$z \mapsto \Phi_n(z, \cdot)$$

όπου $z \in \mathbf{N}$. Αυτό συνεπάγεται ότι, όταν $n \in \mathbf{N} \setminus \{0, 1\}$, μπορούμε να απαριθμήσουμε αποτελεσματικά την κλάση $\mathcal{PCG}_n$ μέσω της απεικόνισης

$$\mathbf{N}^n \ni \mathbf{z} = (z_1, ..., z_n) \mapsto G(\mathbf{z}) = (\mathbf{N}, ..., \mathbf{N}, \Phi_n(z_1, \cdot), ..., \Phi_n(z_n, \cdot)) \in \mathcal{PCG}_n$$

και αν $\Gamma_n = \{\mathbf{z} \in \mathbf{N}^n :$ το $G(\mathbf{z})$ έχει ισορροπία *Nash* χωρίς συνεργασίες σε καθαρές στρατηγικές $\}$, τότε το $\mathcal{P}_n$ ανάγεται στο πρόβλημα απόφασης για το Γ_n. Πράγματι, αν υπάρχει αλγόριθμος $\mathcal{A}_n$ που αποφασίζει κατά πόσον ένα παίγνιο στην $\mathcal{PCG}_n$ έχει ή όχι ισορροπία *Nash* χωρίς συνεργασίες σε καθαρές στρατηγικές, τότε ο $\mathcal{A}_n$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να πάρουμε έναν αλγόριθμο α_n που αποφασίζει κατά πόσον ένα στοιχείο $\mathbf{z}$ του $\mathbf{N}^n$ ανήκει στο Γ_n ή όχι, ως ακολούθως: Αν $\mathbf{z} \in \mathbf{N}^n$, τότε εφαρμόζουμε τον $\mathcal{A}_n$ στο $G(\mathbf{z})$. Αν ο $\mathcal{A}_n$ δείχνει ότι το $G(\mathbf{z})$ έχει ισορροπία *Nash* χωρίς συνεργασίες σε καθαρές στρατηγικές, τότε (εξ ορισμού) $\mathbf{z} \in \Gamma_n$, ενώ αν ο $\mathcal{A}_n$ δείχνει ότι το $G(\mathbf{z})$ δεν έχει ισορροπία *Nash* χωρίς συνεργασίες σε καθαρές στρατηγικές, τότε (εξ ορισμού) $\mathbf{z} \notin \Gamma_n$. Επομένως, για να αποδείξουμε το Θεώρημα 2.1.4, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε ακέραιο $n \geq 2$, το πρόβλημα απόφασης για το Γ_n έχει αρνητική λύση. Εφαρμόζοντας την καθολικά αποδεκτή Θέση του *Church* (δείτε, για παράδειγμα, το 2.5 στη σελίδα 183 και το 2.6 στις σελίδες 183-184 του *Manin* [1977]), αρκεί να δείξουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Θεώρημα 2.3.1. *Για κάθε ακέραιο $n \geq 2$, το σύνολο Γ_n δεν είναι αναδρομικό.*

Για τον ορισμό και τις βασικές ιδιότητες των αναδρομικών και των αναδρομικά απαριθμήσιμων συνόλων παραπέμπουμε τον αναγνώστη σε οποιοδήποτε από τα *Manin* [1977], *Davis* [1982], *Ershov-Palyutin* [1984], *Kleene* [1991].

Απόδειξη. Για να αποδείξουμε το Θεώρημα 2.3.1, πέρα από το Θεώρημα Κανονικής Μορφής του *Kleene*, χρειαζόμαστε ακόμη ένα βασικό εργαλείο στη θεωρία υπολογισιμότητας που είναι το Δεύτερο Θεώρημα Αναδρομής του *Kleene*. (Δείτε, για παράδειγμα, το *XXVII* της §66 στις σελίδες 352-353 του *Kleene* [1991].) Το διατυπώνουμε εδώ στη μορφή που αντιστοιχεί στον ορισμό που δώσαμε για τις μερικώς υπολογίσιμες συναρτήσεις.

Δεύτερο Θεώρημα Αναδρομής του *Kleene*. *Για κάθε θετικό ακέραιο n και για κάθε μερικώς υπολογίσιμη συνάρτηση $f : \mathbf{N}^{n+1} \to \{-1\} \cup \mathbf{N}$, υπάρχει $e \in \mathbf{N}$ τέτοιο ώστε $\Phi_n(e, \mathbf{x}) = f(e, \mathbf{x})$ για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbf{N}^n$.*

Έτσι έστω $n \in \mathbf{N} \setminus \{0, 1\}$. Για να αποδείξουμε ότι το Γ_n δεν είναι αναδρομικό, υποθέτουμε το αντίθετο. Τότε η χαρακτηριστική συνάρτηση χ_{Γ_n} του Γ_n είναι υπολογίσιμη και λόγω του Θεωρήματος Κανονικής Μορφής του *Kleene*, υπάρχει $z \in \mathbf{N}$ τέτοιο ώστε $\Phi_n(z, \cdot) = \chi_{\Gamma_n}(\cdot)$. Μία πρώτη εφαρμογή του Δεύτερου Θεωρήματος Αναδρομής του *Kleene* δείχνει ότι υπάρχει $e_1 \in \mathbf{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n) \in \mathbf{N}^n$, να έχουμε

$$\Phi_n(e_1, \mathbf{x}) = \Phi_n(z, e_1, x_2, ..., x_n) \cdot (x_1 + 1)$$

και αν το $i \in \{2, ..., n\}$ είναι τέτοιο ώστε τα e_1, ..., e_{i-1} να έχουν ήδη οριστεί, τότε μία i-οστή εφαρμογή του Δεύτερου Θεωρήματος Αναδρομής του *Kleene* δείχνει ότι υπάρχει $e_i \in \mathbf{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n) \in \mathbf{N}^n$, να έχουμε

$$\Phi_n(e_i, \mathbf{x}) = \Phi_n(z, e_1, ..., e_i, x_{i+1}, ..., x_n) \cdot (x_i + 1)$$

Αν υποθέσουμε ότι $(e_1, ..., e_n) \notin \Gamma_n$, τότε

$$\Phi_n(z, e_1, ..., e_n) = \chi_{\Gamma_n}(e_1, ..., e_n) = 0$$

Οπότε για κάθε $i \in \{1, ..., n\}$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\Phi_n(e_i, e_1, ..., e_n) &= \Phi_n(z, e_1, ..., e_n) \cdot (e_i + 1) \\
&= 0 \cdot (e_i + 1) \\
&= \max_{x_i \in \mathbf{N}} (0 \cdot (x_i + 1)) \\
&= \max_{x_i \in \mathbf{N}} (\Phi_n(z, e_1, ..., e_i, e_{i+1}, ..., e_n) \cdot (x_i + 1)) \\
&= \max_{x_i \in \mathbf{N}} \Phi_n(e_i, e_1, ..., e_{i-1}, x_i, e_{i+1}, ..., e_n)
\end{aligned}$$

και συνεπώς η n-άδα $(e_1, ..., e_n)$ αποτελεί μιά ισορροπία *Nash* χωρίς συνεργασίες σε καθαρές στρατηγικές του παιγνίου $G(e_1, ..., e_n)$ που συνεπάγεται ότι

$$(e_1, ..., e_n) \in \Gamma_n$$

Από την άλλη μεριά, αν υποθέσουμε ότι $(e_1, ..., e_n) \in \Gamma_n$, τότε το $G(e_1, ..., e_n)$ έχει μιά ισορροπία *Nash* χωρίς συνεργασίες σε καθαρές στρατηγικές, έστω την $(m_1, ..., m_n) \in \mathbf{N}^n$. Οπότε

$$\begin{aligned}
\chi_{\Gamma_n}(e_1, ..., e_n) \cdot (m_n + 1) &= \Phi_n(z, e_1, ..., e_n) \cdot (m_n + 1) \\
&= \Phi_n(e_n, m_1, ..., m_n) \\
&= \max_{x_n \in \mathbf{N}} \Phi_n(e_n, m_1, ..., m_{n-1}, x_n) \\
&= \max_{x_n \in \mathbf{N}} (\Phi_n(z, e_1, ..., e_n) \cdot (x_n + 1)) \\
&= \max_{x_n \in \mathbf{N}} (\chi_{\Gamma_n}(e_1, ..., e_n) \cdot (x_n + 1))
\end{aligned}$$

και συνεπώς $\chi_{\Gamma_n}(e_1, ..., e_n) = 0$ που συνεπάγεται ότι

$$(e_1, ..., e_n) \notin \Gamma_n$$

Έχουμε έτσι αποδείξει ότι

$$(e_1, ..., e_n) \in \Gamma_n \iff (e_1, ..., e_n) \notin \Gamma_n$$

που είναι μιά αντίφαση. Επομένως, το Γ_n δεν είναι αναδρομικό. **Όπερ έδει δεῖξαι**

Ανοικτό Πρόβλημα. *Αν $n \in \mathbf{N} \setminus \{0, 1\}$ και $\mathcal{CG}_n$ είναι η κλάση των υπολογίσιμων παιγνίων, δηλαδή, παιγνίων στην $\mathcal{C}_n$ με υπολογίσιμες συναρτήσεις απόδοσης, τότε υπάρχει αλγόριθμος που αποφασίζει κατά πόσον ένα παίγνιο στην $\mathcal{CG}_n$ έχει ή όχι ισορροπία Nash χωρίς συνεργασίες σε καθαρές στρατηγικές;*

2.4 Παίγνια με C^∞ αποδόσεις

Το Θεώρημα 2.1.5 αποτελεί πόρισμα του ακόλουθου αποτελέσματος που αποδείχθει πρόσφατα από τον *M. Laczkovich*. (Δείτε το Θεώρημα 1 στο *Laczkovich* [2003].)

Θεώρημα. (*Laczkovich*) *Αν* $\mathbf{S}_1$ *είναι ο υποδακτύλιος του* $C^\infty(\mathbf{R},\mathbf{R})$ *που παράγεται από τις συναρτήσεις*

$$\mathbf{R} \ni x \mapsto j \in \mathbf{R}$$

$$\mathbf{R} \ni x \mapsto x \in \mathbf{R}$$

$$\mathbf{R} \ni x \mapsto \sin(x^k) \in \mathbf{R}$$

και

$$\mathbf{R} \ni x \mapsto \sin(x \cdot \sin(x^k)) \in \mathbf{R}$$

όπου $(j,k) \in \mathbf{Z} \times (\mathbf{N} \setminus \{0\})$, *τότε δεν υπάρχει αλγόριθμος που αποφασίζει κατά πόσον μιά συνάρτηση εντός του* $\mathbf{S}_1$ *λαμβάνει ή όχι την τιμή μηδέν.*

Πράγματι, δοθέντος οποιουδήποτε ακεραίου $n \geq 2$ και οποιασδήποτε συνάρτησης $\sigma \in \mathbf{S}_1$, αν θέσουμε

$$\Gamma_n^\sigma = (\mathbf{R}, ..., \mathbf{R}, \gamma_1^\sigma, ..., \gamma_n^\sigma)$$

όπου

$$\gamma_i^\sigma = 0$$

για κάθε $i \in \{1, ..., n-1\}$ και

$$\gamma_n^\sigma(x_1, x_2, ..., x_n) = (\sigma(x_1))^2 x_n$$

για κάθε $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n$, τότε $\Gamma_n^\sigma \in \mathbf{G}_n$ και το Θεώρημα 4 έπεται από το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Λήμμα 2.4.1. *Αν* $n \in \mathbf{N} \setminus \{0,1\}$ *και* $\sigma \in \mathbf{S}_1$, *τότε το παίγνιο* Γ_n^σ *έχει ισορροπία Nash χωρίς συνεργασίες σε καθαρές στρατηγικές αν και μόνον αν η συνάρτηση* σ *λαμβάνει την τιμή μηδέν.*

Απόδειξη. Αν η συνάρτηση σ λαμβάνει την τιμή μηδέν, έστω στο σημείο $a \in \mathbf{R}$, τότε δεν είναι δύσκολο να επαληθεύσει κανείς ότι η n-άδα $(a, 0, ..., 0) \in$

$\mathbf{R}^n$ αποτελεί μιά ισορροπία *Nash* χωρίς συνεργασίες σε καθαρές στρατηγικές για το παίγνιο Γ_n^σ. Αντιστρόφως, αν το παίγνιο Γ_n^σ έχει μιά ισορροπία *Nash* χωρίς συνεργασίες σε καθαρές στρατηγικές, έστω την $(a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbf{R}^n$, τότε

$$\begin{aligned}(\sigma(a_1))^2 a_n &= \gamma_n^\sigma(a_1, a_2, ..., a_n)\\ &= \max_{x_n \in \mathbf{R}} \gamma_n^\sigma(a_1, ..., a_{n-1}, x_n)\\ &= \max_{x_n \in \mathbf{R}}((\sigma(a_1))^2 x_n)\end{aligned}$$

που συνεπάγεται ότι $\sigma(a_1) = 0$, με άλλα λόγια, η συνάρτηση σ λαμβάνει την τιμή μηδέν. **Όπερ έδει δεῖξαι**

2.5 Παρατηρήσεις

Το Θεώρημα 2.1.1 συμπληρώνει τα θεωρήματα που απεδείχθεισαν από τους *Le Breton* και *Glicksberg* στα *Le Breton* [1987] και *Glicksberg* [1952], όπου εξετάζεται το πρόβλημα ύπαρξης ισορροπιών *Nash* σε καθαρές και μεικτές στρατηγικές αντιστοίχως σε συνεχή παίγνια, δηλαδή σε παίγνια με συνεχείς αποδόσεις. Το Θεώρημα 2.1.4 θα μπορούσε να συγκριθεί με το θεώρημα που απεδείχθει από τον *Prasad* στο *Prasad* [1991], ενώ το θεώρημα που απεδείχθει από τον *Prasad* στο *Prasad* [1997], όσον αφορά τις καθαρές στρατηγικές, προκύπτει πλέον ως πόρισμα του Θεωρήματος 2.1.5.

Βιβλιογραφία

C. D. ALIPRANTIS and O. BURKINSHAW
[1998] *Principles of Real Analysis*, *Third Edition*, *Academic Press*, *San Diego*.

C. D. ALIPRANTIS and S. K. CHAKRABARTI
[2000] *Games and Decision Making*, *Oxford University Press*, *New York*.

P. DASGUPTA and E. MASKIN
[1986*a*] *The existence of equilibrium in discontinuous economic games*. I. *Theory*, *Rev. Econom. Stud.* **53**, *no.* 1, 1-26.
[1986*b*] *The existence of equilibrium in discontinuous economic games*. II. *Applications*, *Rev. Econom. Stud.* **53**, *no.* 1, 27-41.

M. DAVIS
[1982] *Computability and Unsolvability*, *Dover Publications*, *New York.*

YU. L. ERSHOV and E. A. PALYUTIN
[1984] *Mathematical Logic*, *Mir Publishers*, *Moscow.*

I. L. GLICKSBERG
[1952] "*A further generalization of the Kakutani fixed point theorem with application to Nash equilibrium points*", *Proceedings of the American Mathematical Society* **3**, *pp.* 170-174

J. C. HARSANYI
[1967] *Games with incomplete information played by "Bayesian" players. Part* I. *The basic model*, *Management Science* **14**, 159-182.
[1968*a*] *Games with incomplete information played by "Bayesian" players. Part* II. *Bayesian equilibrium points*, *Management Science* **14**, 320-334.
[1968*b*] *Games with incomplete information played by "Bayesian" players. Part* III. *The basic probability distribution of the game*, *Management Science* **14**, 486-502.

A. S. KECHRIS
[1995] *Classical Descriptive Set Theory*, *Springer*, *New York.*

S. C. KLEENE
[1991] *Introduction to Metamathematics*, *Tenth Impression*, *North-Holland*, *Amsterdam.*

M. LACZKOVICH
[2003] *The removal of* π *from some undecidable problems involving elementary functions*, *Proceedings of the American Mathematical Society* **131**, 2235-2240.

M. LE BRETON
[1987] "*On the generic non-existence of pure strategy Nash equilibria in continuous games*", *Journal of Economic Theory* **43**, *pp.* 374-382.

YU. I. MANIN
[1977] *A Course in Mathematical Logic*, *Springer*, *New York.*

J. F. NASH
[1951] *Non-Cooperative Games*, *Annals of Mathematics* **54**, 286-295.

M. J. OSBORNE and A. RUBINSTEIN
[1998] *A Course in Game Theory*, *Fifth Printing*, *The MIT Press*, *Cambridge.*

K. PRASAD
[1991] "*Computability and randomness of Nash equilibrium in infinite games*", *Journal of Mathematical Economics* **20**, *pp.* 429-442.
[1997] "*On the computability of Nash equilibria*", *Journal of Economic Dynamics and Control* **21**, *pp.* 943-953.

K. P. RATH
[1996] *Existence and upper hemicontinuity of equilibrium distributions of anonymous games with discontinuous payoffs*, *Journal of Mathematical Economics* **26**, 305-324.

P. J. RENY
[1999] *On the existence of pure and mixed strategy Nash equilibria in discontinuous games*, *Econometrica* **67**, *no.* 5, 1029-1056.

H. L. ROYDEN
[1988] *Real Analysis*, *Third Edition*, *MacMillan*, *New York and London.*

Κεφάλαιο 3

ΘΕΩΡΙΑ ΓΕΝΙΚΩΝ ΙΣΟΡΡΟΠΙΩΝ

3.1 Εισαγωγή

Σύμφωνα με τον *Gerard Debreu* : '*Η οικονομική θεωρία των γενικών ισορροπιών περιγράφει την παρατηρούμενη κατάσταση μιάς οικονομίας ως το αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης μέσω αγορών δύο τύπων παραγόντων, καταναλωτών και παραγωγών. Καθένας από αυτούς τους παράγοντες αποφασίζει βάσει των τιμών ποια ποσότητα από καθένα από τα διάφορα αγαθά να παράγει, να ανταλλάξει και να καταναλώσει. Ο μεγάλος αριθμός των αγαθών, ο εξίσου μεγάλος αριθμός των τιμών τους και ο μεγάλος αριθμός των αλληλεπιδρόντων παραγόντων κάνουν τη χρήση ενός μαθηματικού μοντέλου επιτακτική για αυτήν την περιγραφή.*' (Δείτε τη σελίδα 132 της Παραγράφου 14 του *Hirsch-Marsden-Shub* [1993].) Η οικονομική θεωρία των γενικών ισορροπιών αναπτύχθηκε από πολλές γενεές οικονομολόγων ξεκινώντας με τον *Leon Walras* (δείτε το *Walras* [1874]) και η μοντέρνα προσέγγιση που θα παρουσιάσουμε παρακάτω βασίζεται στο μοντέλο που εδόθει επό τους *Kenneth J. Arrow* και *Gerard Debreu* στο *Arrow-Debreu* [1954]. Θα πρέπει να επισημάνουμε ότι το ίδιο μοντέλο εδόθει και από τον *Lionel W. McKenzie* στο *McKenzie* [1954], σχεδόν ταυτόχρονα και ανεξάρτητα από τους *Kenneth J. Arrow* και *Gerard Debreu*, αφού η παρουσίαση και των δύο εργασιών έγινε στο ίδιο *meeting* με τη διαφορά ότι η εργασία του *Lionel W. McKenzie* παρουσιάστηκε μισή ώρα αργότερα. (Δείτε επίσης τα *McKenzie* [1955], [1959] και [1981].)

Μιά οικονομία ιδιωτικής ιδιοκτησίας με m καταναλωτές, k παραγωγούς και

l αγαθά είναι μιά τριάδα

$$\mathcal{E} = (((\leq_1, \omega_1), ..., (\leq_m, \omega_m)), (Y_1, ..., Y_k), (\theta_{ij}))$$

που ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:

1) Υπάρχουν l αγαθά και m καταναλωτές έτσι ώστε ο καταναλωτής i να χαρακτηρίζεται από μία σχέση προτίμησης $\leq_i$, με άλλα λόγια, μία ανακλαστική, πλήρη (δηλαδή, ολική) και μεταβατική σχέση επί του χώρου αγαθών $\mathbf{R}^l_+$, και μία αρχική προίκιση $\omega_i \in \mathbf{R}^l_+ \setminus \{\mathbf{0}\}$ εις τρόπον ώστε η ολική προίκιση $\sum\limits_{\mu=1}^{m} \omega_\mu$ να ανήκει στο $(0, \infty)^l$. Υποτίθεται, βέβαια, ότι μία μονάδα μέτρησης έχει επιλεγεί για κάθε αγαθό και έτσι ένα διάνυσμα κατανάλωσης $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_l)$ στον χώρο αγαθών $\mathbf{R}^l_+$ περιγράφει την ποσότητα καθενός από τα l αγαθά που ένας παράγοντας αποφασίζει να καταναλώσει.

2) Υπάρχουν k παραγωγοί έτσι ώστε ο παραγωγός j να χαρακτηρίζεται από ένα σύνολο παραγωγής Y_j, με άλλα λόγια, ένα σύνολο τεχνολογικά εφικτών διανυσμάτων παραγωγής, το οποίο είναι ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbf{R}^l$ που ικανοποιεί τις συνθήκες:

   (i) το Y_j είναι κλειστό,

   (ii) το Y_j είναι κυρτό,

   (iii) $\mathbf{R}^l_+ \cap Y_j = \{\mathbf{0}\}$ και

   (iv) το Y_j είναι άνω περατωμένο, δηλαδή, υπάρχει $\mathbf{a} = (a_1, ..., a_l) \in \mathbf{R}^l_+$ τέτοιο, ώστε για κάθε $\mathbf{y} = (y_1, ..., y_l) \in Y_j$, να έχουμε $\mathbf{y} \leq \mathbf{a}$, ήτοι, για κάθε $i \in \{1, ..., l\}$, είναι $y_i \leq a_i$.

   Η συνθήκη (i) βεβαιώνει ότι το όριο μιάς ακολουθίας τεχνολογικά εφικτών διανυσμάτων παραγωγής είναι επίσης τεχνολογικά εφικτό. Η συνθήκη (ii) βεβαιώνει ότι αν τα διανύσματα παραγωγής $\mathbf{y} = (y_1, ..., y_l)$ και $\mathbf{z} = (z_1, ..., z_l)$ είναι τεχνολογικά εφικτά, τότε για κάθε $\alpha \in [0, 1]$, το διάνυσμα παραγωγής $(1-\alpha)\mathbf{y}+\alpha\mathbf{z} = ((1-\alpha)y_1+\alpha z_1, ..., (1-\alpha)y_l+\alpha z_l)$ είναι επίσης τεχνολογικά εφικτό. Η συνθήκη (iii) βεβαιώνει ότι είναι αδύνατο να παραχθεί κάτι από το τίποτα. Ενώ η συνθήκη (iv) βεβαιώνει ότι καθένα από τα l αγαθά δε μπορεί να παραχθεί σε ποσότητες που αυξάνουν στο άπειρο. Αν $Y_1 = ... = Y_k = \{\mathbf{0}\}$, τότε μιλάμε για μιά οικονομία ανταλλαγής, ενώ αν υπάρχει $j \in \{1, ..., k\}$ τέτοιο ώστε $Y_j \neq \{\mathbf{0}\}$, τότε μιλάμε για μιά οικονομία παραγωγής.

3) Η οικονομία είναι μιά οικονομία ιδιωτικής ιδιοκτησίας υπό την έννοια ότι οι εταιρίες ανήκουν στους καταναλωτές. Ο μη αρνητικός αριθμός θ_{ij} παριστάνει το μερίδιο του καταναλωτή i από το κέρδος του παραγωγού j και $\sum_{\kappa=1}^{k} \theta_{i\kappa} = 1$, με άλλα λόγια, ο μη αρνητικός $m \times k$ πίνακας (θ_{ij}) είναι στοχαστικός.

Σε μιά τέτοια οικονομία $\mathcal{E}$, μιά $(m+k+1)$-άδα

$$(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_m, \mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_k, \mathbf{p}) \in (\mathbf{R}^l_+)^m \times (Y_1 \times ... \times Y_k) \times (0, \infty)^l$$

καλείται ανταγωνιστική ισορροπία, αν

$$\sum_{i=1}^{m} \mathbf{x}_i - \sum_{j=1}^{k} \mathbf{y}_j = \sum_{i=1}^{m} \omega_i$$

και για κάθε $i \in \{1, ..., m\}$, το διάνυσμα κατανάλωσης $\mathbf{x}_i$ αποτελεί ένα μεγιστικό στοιχείο της σχέσης προτίμησης $\leq_i$ στο σύνολο προϋπολογισμού

$$B_{\omega_i}(\mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_k; \mathbf{p}) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^l_+ : \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{p} \cdot \omega_i + \sum_{j=1}^{k} \theta_{ij} \mathbf{p} \cdot \mathbf{y}_j \right\}$$

ενώ για κάθε $j \in \{1, ..., k\}$, το διάνυσμα παραγωγής $\mathbf{y}_j$ μεγιστοποιεί το κέρδος του παραγωγού j ως προς το διάνυσμα τιμών $\mathbf{p}$, με άλλα λόγια, έχουμε

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{y}_j = \max_{\mathbf{y} \in Y_j} \mathbf{p} \cdot \mathbf{y}$$

Η συνθήκη

$$\sum_{i=1}^{m} \mathbf{x}_i - \sum_{j=1}^{k} \mathbf{y}_j = \sum_{i=1}^{m} \omega_i$$

βεβαιώνει ότι στην ανταγωνιστική ισορροπία το άθροισμα της ολικής προίκισης και της ολικής παραγωγής ισούται με την ολική κατανάλωση, με άλλα λόγια, η ολική προσφορά ισούται με την ολική ζήτηση. Στην περίπτωση που οι σχέσεις προτίμησης $\leq_i$ σε μιά οικονομία ιδιωτικής ιδιοκτησίας $\mathcal{E}$ με m καταναλωτές, k παραγωγούς και l αγαθά αναπαρίστανται από συναρτήσεις ωφέλειας $u_i : \mathbf{R}^l_+ \to \mathbf{R}$ υπό την έννοια ότι για κάθε $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}'$ που ανήκουν στο $\mathbf{R}^l_+$, έχουμε

$$\mathbf{x} \leq_i \mathbf{x}' \iff u_i(\mathbf{x}) \leq u_i(\mathbf{x}')$$

θεωρούμε ότι

$$\mathcal{E} = (((u_1, \omega_1), ..., (u_m, \omega_m)), (Y_1, ..., Y_k), (\theta_{ij}))$$

και ειδικότερα στην περίπτωση που τα σύνολα παραγωγής Y_1, ..., Y_k δίνονται ως σταθερά, θεωρούμε ότι

$$\mathcal{E} = (((u_1, \omega_1), ..., (u_m, \omega_m)), (\theta_{ij}))$$

(Δείτε, για παράδειγμα, το Κεφάλαιο 1 στις σελίδες 1-85 του *Aliprantis-Brown-Burkinshaw* [1990] και την Παράγραφο 14 στις σελίδες 131-146 του *Hirsch-Marsden-Shub* [1993].)

Έτσι αν το μαθηματικό μοντέλο των *Kenneth J. Arrow* και *Gerard Debreu* περιγράφει την παρατηρούμενη κατάσταση μιάς οικονομίας ικανοποιητικά, τότε όπως έγραψε ο *Gerard Debreu* : '*Μία θεμελιώδης ερώτηση εγείρεται εδώ. Δηλαδή, υπό ποιες συνθήκες επί της οικονομίας ιδιωτικής ιδιοκτησίας $\mathcal{E}$ μπορεί κανείς να βεβαιώσει ότι υπάρχει μιά κατάσταση ισορροπίας;*' (Δείτε τη σελίδα 134 της Παραγράφου 14 του *Hirsch-Marsden-Shub* [1993].)

Ο σκοπός μας σε αυτό το κεφάλαιο είναι να αποδείξουμε ότι δεν υπάρχουν μετρητές κατά *Borel* αναγκαίες και ικανές συνθήκες επί των οικονομιών ιδιωτικής ιδιοκτησίας με σχέσεις προτίμησης που αναπαρίστανται από κάτω ημισυνεχείς συναρτήσεις ωφέλειας, οι οποίες μπορούν να βεβαιώσουν την ύπαρξη ανταγωνιστικών ισορροπιών. Αυτό μπορεί να το δει κανείς ως μία αρνητική απάντηση στη θεμελιώδη ερώτηση που διατυπώθηκε από τον *Gerard Debreu* (δείτε τη σελίδα 134 της Παραγράφου 14 του *Hirsch-Marsden-Shub* [1993]) και μπορεί να συγκριθεί με ένα αντίστοιχο αποτέλεσμα στην αρμονική ανάλυση και την περιγραφική θεωρία συνόλων (δείτε, για παράδειγμα, το 33.C στις σελίδες 246-248 και ειδικότερα το 33.6 στη σελίδα 247 του *Kechris* [1995]). Προτού διατυπώσουμε το αποτέλεσμά μας, θα πρέπει να επισημάνουμε ότι συμβολίζουμε με $SM(m, k)$ το συμπαγή Πολωνικό χώρο των στοχαστικών πινάκων (δείτε, για παράδειγμα, το 260A στη σελίδα 963 του *Ito* [1987]), μιά πλήρης συμβατή μετρική για τον οποίο δίνεται από τον τύπο

$$d_{SM(m,k)}(A, B) = \|A - B\|$$

όπου τα $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ ανήκουν στο $SM(m, k) \subset GL(m, k)$ και $GL(m, k)$ είναι ο χώρος *Banach* των $m \times k$ πινάκων με στοιχεία από το $\mathbf{R}$, ενώ αν X, Y είναι οποιοιδήποτε τοπολογικοί χώροι, τότε παριστάνουμε με $C(X, Y)$ τον τοπολογικό χώρο των συνεχών απεικονίσεων $X \to Y$ εφοδιασμένο με τη συμπαγή-ανοικτή τοπολογία (δείτε, για παράδειγμα, το Πρόβλημα 8 στη σελίδα 193 του *Royden* [1988]).

Θεώρημα 3.1.1. *Δοθέντων οποιωνδήποτε αυστηρά κυρτών συνόλων παραγωγής* Y_1, ..., Y_k *για οικονομίες με* l *αγαθά, το σύνολο όλων των οικονομιών ιδιωτικής ιδιοκτησίας* $\mathcal{E}$ *με* m *καταναλωτές,* k *παραγωγούς και* l *αγαθά και με σχέσεις προτίμησης που αναπαρίστανται από κάτω ημισυνεχείς συναρτήσεις ωφέλειας, οι οποίες έχουν ανταγωνιστικές ισορροπίες, δεν είναι μετρητό κατά Borel στο*

$$(LSC(\mathbf{R}_+^l, \mathbf{R}) \times (\mathbf{R}_+^l \setminus \{\mathbf{0}\}))^m \times SM(m, k)$$

ενώ το σύνολο όλων των οικονομιών ιδιωτικής ιδιοκτησίας $\mathcal{E}$ *με* m *καταναλωτές,* k *παραγωγούς και* l *αγαθά και με σχέσεις προτίμησης που αναπαρίστανται από συνεχείς συναρτήσεις ωφέλειας, οι οποίες έχουν ανταγωνιστικές ισορροπίες, είναι* F_σ *στο*

$$(C(\mathbf{R}_+^l, \mathbf{R}) \times (\mathbf{R}_+^l \setminus \{\mathbf{0}\}))^m \times SM(m, k)$$

Έτσι, δεν υπάρχουν μετρητές κατά *Borel* αναγκαίες και ικανές συνθήκες επί των οικονομιών ιδιωτικής ιδιοκτησίας με σχέσεις προτίμησης που αναπαρίστανται από κάτω ημισυνεχείς συναρτήσεις ωφέλειας, οι οποίες μπορούν να βεβαιώσουν την ύπαρξη ανταγωνιστικών ισορροπιών. Με άλλα λόγια, οποιεσδήποτε αναγκαίες και ικανές συνθήκες ύπαρξης ανταγωνιστικών ισορροπιών για οικονομίες ιδιωτικής ιδιοκτησίας με σχέσεις προτίμησης που αναπαρίστανται από κάτω ημισυνεχείς συναρτήσεις ωφέλειας δε μπορούν να εκφραστούν αναλυτικά μέσω συγκεκριμένων τύπων, απλών αναλυτικών εκφράσεων και τα τοιαύτα.

Πόρισμα 3.1.2. *Το σύνολο όλων των οικονομιών ανταλλαγής* $\mathcal{E}$ *με* m *καταναλωτές και* l *αγαθά και με σχέσεις προτίμησης που αναπαρίστανται από κάτω ημισυνεχείς συναρτήσεις ωφέλειας, οι οποίες έχουν ανταγωνιστικές ισορροπίες, δεν είναι μετρητό κατά Borel στο*

$$(LSC(\mathbf{R}_+^l, \mathbf{R}) \times (\mathbf{R}_+^l \setminus \{\mathbf{0}\}))^m$$

ενώ το σύνολο όλων των οικονομιών ανταλλαγής $\mathcal{E}$ *με* m *καταναλωτές και* l *αγαθά και με σχέσεις προτίμησης που αναπαρίστανται από συνεχείς συναρτήσεις ωφέλειας, οι οποίες έχουν ανταγωνιστικές ισορροπίες, είναι* F_σ *στο*

$$(C(\mathbf{R}_+^l, \mathbf{R}) \times (\mathbf{R}_+^l \setminus \{\mathbf{0}\}))^m$$

Έτσι, δεν υπάρχουν μετρητές κατά *Borel* αναγκαίες και ικανές συνθήκες επί των οικονομιών ανταλλαγής με σχέσεις προτίμησης που αναπαρίστανται από κάτω ημισυνεχείς συναρτήσεις ωφέλειας, οι οποίες μπορούν να βεβαιώσουν την ύπαρξη ανταγωνιστικών ισορροπιών. Με άλλα λόγια, οποιεσδήποτε αναγκαίες και ικανές συνθήκες ύπαρξης ανταγωνιστικών ισορροπιών για οικονομίες ανταλλαγής με σχέσεις προτίμησης που αναπαρίστανται από κάτω ημισυνεχείς συναρτήσεις ωφέλειας δε μπορούν να εκφραστούν αναλυτικά μέσω συγκεκριμένων τύπων, απλών αναλυτικών εκφράσεων και τα τοιαύτα.

3.2 Οικονομίες ιδιωτικής ιδιοκτησίας με κάτω ημισυνεχείς ωφέλειες

Θεώρημα 3.2.1. *Δοθέντων οποιωνδήποτε αυστηρά κυρτών συνόλων παραγωγής Y_1, ..., Y_k για οικονομίες με l αγαθά, το σύνολο όλων των οικονομιών ιδιωτικής ιδιοκτησίας $\mathcal{E}$ με m καταναλωτές, k παραγωγούς και l αγαθά και με σχέσεις προτίμησης που αναπαρίστανται από κάτω ημισυνεχείς συναρτήσεις ωφέλειας, οι οποίες έχουν ανταγωνιστικές ισορροπίες, δεν είναι μετρητό κατά Borel στο*

$$(LSC(\mathbf{R}^l_+, \mathbf{R}) \times (\mathbf{R}^l_+ \setminus \{\mathbf{0}\}))^m \times SM(m,k)$$

ενώ το σύνολο όλων των οικονομιών ιδιωτικής ιδιοκτησίας $\mathcal{E}$ με m καταναλωτές, k παραγωγούς και l αγαθά και με σχέσεις προτίμησης που αναπαρίστανται από συνεχείς συναρτήσεις ωφέλειας, οι οποίες έχουν ανταγωνιστικές ισορροπίες, είναι F_σ στο

$$(C(\mathbf{R}^l_+, \mathbf{R}) \times (\mathbf{R}^l_+ \setminus \{\mathbf{0}\}))^m \times SM(m,k)$$

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε πρώτα το θεώρημα για $m = k$. Ξεκινάμε αποδεικνύοντας ότι το σύνολο

$$\mathcal{CE}_{lsc} = \Big\{\mathcal{E} \in (LSC(\mathbf{R}^l_+, \mathbf{R}) \times (\mathbf{R}^l_+ \setminus \{\mathbf{0}\}))^m \times SM(m,m) :$$

$$(\exists(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_m, \mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_m, \mathbf{p}) \in (\mathbf{R}^l_+)^m \times (Y_1 \times ... \times Y_m) \times (0,\infty)^l)$$

$$\left(\sum_{i=1}^m \mathbf{x}_i - \sum_{j=1}^m \mathbf{y}_j = \sum_{i=1}^m \omega_i \ \wedge \ (\forall i \in \{1, ..., m\})\right.$$

$$\left(\mathbf{x}_i \in B_{\omega_i}(\mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_m; \mathbf{p}) \;\wedge\; u_i(\mathbf{x}_i) = \max_{\mathbf{x}\in B_{\omega_i}(\mathbf{y}_1,...,\mathbf{y}_m;\mathbf{p})} u_i(\mathbf{x})\right)$$
$$\wedge\ (\forall j \in \{1, ..., m\})\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{y}_j = \max_{\mathbf{y}\in Y_j}\mathbf{p}\cdot\mathbf{y}\right)\Big)\Big\}$$

δεν είναι μετρητό κατά *Borel* στο $(LSC(\mathbf{R}^l_+, \mathbf{R}) \times (\mathbf{R}^l_+ \setminus \{\mathbf{0}\}))^m \times SM(m, m)$, όπου $u_i = \mathrm{proj}_{LSC(\mathbf{R}^l_+,\mathbf{R})}(\mathrm{pr}_1\mathcal{E})(i)$, $\omega_i = \mathrm{proj}_{\mathbf{R}^l_+\setminus\{\mathbf{0}\}}(\mathrm{pr}_1\mathcal{E})(i)$ και $(\theta_{\mu\nu}) = \mathrm{pr}_2\mathcal{E}$, ενώ

$$B_{\omega_i}(\mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_m; \mathbf{p}) = \left\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^l_+ : \mathbf{p}\cdot\mathbf{x} \le \mathbf{p}\cdot\omega_i + \sum_{j=1}^m \theta_{ij}\mathbf{p}\cdot\mathbf{y}_j\right\}$$

για κάθε $(\mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_m, \mathbf{p}) \in (Y_1 \times ... \times Y_m) \times (0, \infty)^l$ και για κάθε $i \in \{1, ..., m\}$. Από τον ορισμό των συνόλων παραγωγής έπεται ότι για κάθε $i \in \{1, ..., m\}$ και για κάθε $\mathbf{p} \in (0, \infty)^l$, υπάρχει μοναδικό $y_j(\mathbf{p}) \in Y_j$ τέτοιο ώστε

$$\mathbf{p}\cdot y_j(\mathbf{p}) = \max_{\mathbf{y}\in Y_j}\mathbf{p}\cdot\mathbf{y} \ge 0$$

(Δείτε, για παράδειγμα, το 1.7.3 στη σελίδα 70 και το 1.7.6 στη σελίδα 72 του *Aliprantis-Brown-Burkinshaw* [1990].) Έτσι, κρατώντας τους ίδιους συμβολισμούς όπως στην Παράγραφο 3 του ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 1, αν $\mathbf{p} = (1, ..., 1)$, τότε για κάθε $T \in Tr^*$ και για κάθε $(x_1, ..., x_l) \in \mathbf{R}^l_+$, θέτουμε

$$u_1^T(x_1, ..., x_l) = u_T(x_1)$$

και

$$u_2^T(x_1, ..., x_l) = v_T(x_1)$$

για $a = \max\{0, \max\{\mathrm{pr}_\lambda y_j(\mathbf{p}) : 1 \le \lambda \le l \;\wedge\; 1 \le j \le m\}\}$ και $b = a + 1$, ενώ θέτουμε

$$u_i^T(x_1, ..., x_l) = 1$$

για κάθε $i \in \{3, ..., m\}$. Θέτουμε επίσης

$$\omega_1^T = (a, b, b, ..., b) - y_1(\mathbf{p}) \in \mathbf{R}^l_+ \setminus \{\mathbf{0}\}$$

και

$$\omega_2^T = (b, a, b, ..., b) - y_2(\mathbf{p}) \in \mathbf{R}^l_+ \setminus \{\mathbf{0}\}$$

ενώ θέτουμε

$$\omega_i^T = (b, ..., b) - y_i(\mathbf{p}) \in \mathbf{R}^l_+ \setminus \{\mathbf{0}\}$$

για κάθε $i \in \{3, ..., m\}$. Τότε, λόγω του Θεωρήματος 1.3.5 του ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 1, η απεικόνιση

$$Tr^* \ni T \mapsto \mathcal{E}_T \in (LSC(\mathbf{R}^l_+, \mathbf{R}) \times (\mathbf{R}^l_+ \setminus \{\mathbf{0}\}))^m \times SM(m, m)$$

όπου

$$\mathcal{E}_T = (((u_1^T, \omega_1^T), ..., (u_m^T, \omega_m^T)), (\theta_{\mu\nu}^T))$$

και

$$(\theta_{\mu\nu}^T) = (\delta_{\mu\nu})$$

για κάθε $T \in Tr^*$, είναι καλά ορισμένη, αμφιμονότιμη, μετρητή κατά *Borel* και ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:
1) Για κάθε $T \in Tr^*$ και για κάθε $i \in \{1, ..., m\}$, έχουμε

$$0 \leq u_i^T \leq 1$$

2) Για κάθε κακώς θεμελιωμένο $T \in Tr^*$ και για κάθε $\alpha \in [T]$, έχουμε

$$u_1^T(x(\alpha), y(\alpha), b, ..., b) = 1$$

και

$$u_2^T(y(\alpha), x(\alpha), b, ..., b) = 1$$

ενώ

$$u_i^T(b, ..., b) = 1$$

για κάθε $i \in \{3, ..., m\}$ και $x(\alpha) + y(\alpha) = a + b$. Οπότε $(x(\alpha), y(\alpha), b, ..., b) + (y(\alpha), x(\alpha), b, ..., b) + \sum_{i=3}^{m}(b, ..., b) - \sum_{j=1}^{m} y_j(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{m} \omega_i^T$, το

$$B_{\omega_1^T}(y_1(\mathbf{p}), ..., y_m(\mathbf{p}); \mathbf{p}) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^l_+ : \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{p} \cdot \omega_1^T + \sum_{j=1}^{m} \theta_{1j}^T \mathbf{p} \cdot y_j(\mathbf{p}) \right\}$$

$$= \left\{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^l_+ : \sum_{i=1}^{m} x_i \leq a + (l-1)b - \mathbf{p} \cdot y_1(\mathbf{p}) + \sum_{j=1}^{m} \delta_{1j} \mathbf{p} \cdot y_j(\mathbf{p}) \right\}$$

περιέχει το $(x(\alpha), y(\alpha), b, ..., b)$ και το

$$B_{\omega_2^T}(y_1(\mathbf{p}), ..., y_m(\mathbf{p}); \mathbf{p}) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^l_+ : \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{p} \cdot \omega_2^T + \sum_{j=1}^{m} \theta_{2j}^T \mathbf{p} \cdot y_j(\mathbf{p}) \right\}$$

$$= \left\{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^l_+ : \sum_{i=1}^m x_i \leq a + (l-1)b - \mathbf{p} \cdot y_2(\mathbf{p}) + \sum_{j=1}^m \delta_{2j} \mathbf{p} \cdot y_j(\mathbf{p}) \right\}$$

περιέχει το $(y(\alpha), x(\alpha), b, ..., b)$, ενώ το

$$B_{\omega_i^T}(y_1(\mathbf{p}), ..., y_m(\mathbf{p}); \mathbf{p}) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^l_+ : \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{p} \cdot \omega_i^T + \sum_{j=1}^m \theta_{ij}^T \mathbf{p} \cdot y_j(\mathbf{p}) \right\}$$

$$= \left\{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^l_+ : \sum_{i'=1}^m x_{i'} \leq lb - \mathbf{p} \cdot y_i(\mathbf{p}) + \sum_{j=1}^m \delta_{ij} \mathbf{p} \cdot y_j(\mathbf{p}) \right\}$$

περιέχει το $(b, ..., b)$, οποτεδήποτε $i \in \{3, ..., m\}$. Επιπλέον, έχουμε

$$u_1^T(x(\alpha), y(\alpha), b, ..., b) = \max \left\{ u_1^T(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in B_{\omega_1^T}(y_1(\mathbf{p}), ..., y_m(\mathbf{p}); \mathbf{p}) \right\}$$

και

$$u_2^T(y(\alpha), x(\alpha), b, ..., b) = \max \left\{ u_2^T(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in B_{\omega_2^T}(y_1(\mathbf{p}), ..., y_m(\mathbf{p}); \mathbf{p}) \right\}$$

ενώ

$$u_i^T(b, ..., b) = \max \left\{ u_i^T(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in B_{\omega_i^T}(y_1(\mathbf{p}), ..., y_m(\mathbf{p}); \mathbf{p}) \right\}$$

για κάθε $i \in \{3, ..., m\}$ που συνεπάγεται ότι

$$\mathcal{E}_T \in \mathcal{CE}_{lsc}$$

3) Για κάθε καλώς θεμελιωμένο $T \in Tr^*$, έχουμε

$$u_1^T < 1 \quad \text{και} \quad u_2^T < 1$$

ενώ για κάθε θετικό ακέραιο l, αν $(0, l, ..., l)$ είναι μιά ακολουθία μήκους $l+1$, τότε θα αποδείξουμε ότι

$$\mathcal{E}_T \notin \mathcal{CE}_{lsc}$$

Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι η οικονομία ιδιωτικής ιδιοκτησίας $\mathcal{E}_T$ έχει μιά ανταγωνιστική ισορροπία, τότε υπάρχει μιά $(2m+1)$-άδα

$$(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_m, \mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_m, \mathbf{q}) \in (\mathbf{R}^l_+)^m \times (Y_1 \times ... \times Y_m) \times (0, \infty)^l$$

τέτοια ώστε για κάθε $i \in \{1, ..., m\}$, να έχουμε

$$u_i^T(\mathbf{x}_i) = \max \left\{ u_i^T(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in B_{\omega_i^T}(\mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_m; \mathbf{q}) \right\}$$

ενώ για κάθε $j \in \{1, ..., m\}$, να έχουμε

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{y}_j = \max_{\mathbf{y} \in Y_j} \mathbf{q} \cdot \mathbf{y}$$

και η συνθήκη

$$\sum_{i=1}^{m} \mathbf{x}_i - \sum_{j=1}^{m} \mathbf{y}_j = \sum_{i=1}^{m} \omega_i^T$$

να ικανοποιείται. Οπότε

$$\max \left\{ u_1^T(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in B_{\omega_1^T}(\mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_m; \mathbf{q}) \right\} = u_1^T(\mathbf{x}_1) < 1$$

και

$$\max \left\{ u_2^T(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in B_{\omega_2^T}(\mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_m; \mathbf{q}) \right\} = u_2^T(\mathbf{x}_2) < 1$$

Για $q_2 \geq q_1$, έπεται ότι

$$\begin{aligned}
q_1 \cdot a_{(0,l,...,l)} + \sum_{\lambda=2}^{l} q_\lambda \cdot 0 &= q_1 a_{(0,l,...,l)} \\
&\leq q_1 b \\
&\leq q_2 b \\
&\leq q_1 a + b \sum_{i=2}^{m} q_i \\
&= q_1 a + b \sum_{i=2}^{m} q_i - \mathbf{q} \cdot y_1(\mathbf{q}) + \sum_{j=1}^{m} \delta_{1j} \mathbf{q} \cdot \mathbf{y}_j \\
&= \mathbf{q} \cdot \omega_1^T + \sum_{j=1}^{m} \theta_{1j}^T \mathbf{q} \cdot \mathbf{y}_j
\end{aligned}$$

διότι $\mathbf{y}_1 = y_1(\mathbf{q})$ (δείτε, για παράδειγμα, τις σελίδες 72-73 του *Aliprantis-Brown-Burkinshaw* [1990]) και συνεπώς

$$\sum_{k=1}^{l+1} 2^{-k} = u_T(a_{(0,l,...,l)}) = u_1^T(a_{(0,l,...,l)}, 0, ..., 0) \leq u_1^T(\mathbf{x}_1) < 1$$

για κάθε θετικό ακέραιο l που είναι μιά αντίφαση, ενώ για $q_1 > q_2$, έπεται ότι

$$\begin{aligned} q_1 \cdot c_{(0,l,\dots,l)} + \sum_{\lambda=2}^{l} q_\lambda \cdot 0 &= q_1 c_{(0,l,\dots,l)} \\ &\leq q_1 b \\ &\leq q_1 b + q_2 a + b \sum_{i=3}^{m} q_i \\ &= q_1 b + q_2 a + b \sum_{i=3}^{m} q_i - \mathbf{q} \cdot y_2(\mathbf{q}) + \sum_{j=1}^{m} \delta_{2j} \mathbf{q} \cdot \mathbf{y}_j \\ &= \mathbf{q} \cdot \omega_2^T + \sum_{j=1}^{m} \theta_{2j}^T \mathbf{q} \cdot \mathbf{y}_j \end{aligned}$$

διότι $\mathbf{y}_2 = y_2(\mathbf{q})$ (δείτε, για παράδειγμα, τις σελίδες 72-73 του *Aliprantis-Brown-Burkinshaw* [1990]) και συνεπώς

$$\sum_{k=1}^{l+1} 2^{-k} = \upsilon_T(c_{(0,l,\dots,l)}) = u_2^T(c_{(0,l,\dots,l)}, 0, \dots, 0) \leq u_2^T(\mathbf{x}_2) < 1$$

για κάθε θετικό ακέραιο l που είναι πάλι μιά αντίφαση.
Επομένως, το $T \in Tr^*$ είναι κακώς θεμελιωμένο αν και μόνον αν $\mathcal{E}_T \in \mathcal{CE}_{lsc}$ και συνεπώς το $\mathcal{CE}_{lsc}$ δεν είναι μετρητό κατά *Borel* στο $(LSC(\mathbf{R}_+^l, \mathbf{R}) \times (\mathbf{R}_+^l \setminus \{\mathbf{0}\}))^m \times SM(m, m)$.

Εκείνο που έμεινε να δείξουμε είναι ότι το σύνολο

$$\mathcal{CE}_c = \Big\{ \mathcal{E} \in (C(\mathbf{R}_+^l, \mathbf{R}) \times (\mathbf{R}_+^l \setminus \{\mathbf{0}\}))^m \times SM(m, m) :$$

$$(\exists (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m, \mathbf{p}) \in (\mathbf{R}_+^l)^m \times (Y_1 \times \dots \times Y_m) \times (0, \infty)^l)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \mathbf{x}_i - \sum_{j=1}^{m} \mathbf{y}_j = \sum_{i=1}^{m} \omega_i \ \wedge \ (\forall i \in \{1, \dots, m\}) \right.$$

$$\left(\mathbf{x}_i \in B_{\omega_i}(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m; \mathbf{p}) \ \wedge \ u_i(\mathbf{x}_i) = \max_{\mathbf{x} \in B_{\omega_i}(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m; \mathbf{p})} u_i(\mathbf{x}) \right)$$

$$\left. \wedge \ (\forall j \in \{1, \dots, m\}) \left(\mathbf{p} \cdot \mathbf{y}_j = \max_{\mathbf{y} \in Y_j} \mathbf{p} \cdot \mathbf{y} \right) \right) \Big\}$$

είναι F_σ στο $(C(\mathbf{R}^l_+, \mathbf{R}) \times (\mathbf{R}^l_+ \setminus \{\mathbf{0}\}))^m \times SM(m,m)$. Παρατηρούμε ότι

$$\mathcal{CE}_c = \bigcup\nolimits_{\nu \in \mathbf{N} \setminus \{0\}} \mathcal{CE}_c^{(\nu)}$$

όπου για κάθε θετικό ακέραιο ν, έχουμε θέσει

$$\mathcal{CE}_c^{(\nu)} = \Big\{ \mathcal{E} \in (C(\mathbf{R}^l_+, \mathbf{R}) \times (\mathbf{R}^l_+ \setminus \{\mathbf{0}\}))^m \times SM(m,m) :$$

$$(\exists (\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_m, \mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_m, \mathbf{p}) \in ([0,\nu]^l)^m \times (Y_1 \times ... \times Y_m) \times [\nu^{-1}, \nu]^l)$$

$$\left(\sum_{i=1}^m \mathbf{x}_i - \sum_{j=1}^m \mathbf{y}_j = \sum_{i=1}^m \omega_i \ \wedge \ (\forall i \in \{1, ..., m\}) \right.$$

$$\left(\mathbf{x}_i \in B_{\omega_i}(\mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_m; \mathbf{p}) \ \wedge \ u_i(\mathbf{x}_i) = \max_{\mathbf{x} \in B_{\omega_i}(\mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_m; \mathbf{p})} u_i(\mathbf{x}) \right)$$

$$\left. \wedge \ (\forall j \in \{1, ..., m\}) \left(\mathbf{p} \cdot \mathbf{y}_j = \max_{\mathbf{y} \in Y_j} \mathbf{p} \cdot \mathbf{y} \right) \right) \Big\}$$

Οπότε δοθέντος οποιουδήποτε θετικού ακεραίου ν, αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο $\mathcal{CE}_c^{(\nu)}$ είναι κλειστό στο $(C(\mathbf{R}^l_+, \mathbf{R}) \times (\mathbf{R}^l_+ \setminus \{\mathbf{0}\}))^m \times SM(m,m)$. Έτσι έστω ότι $\mathcal{E}^{k'} \to \mathcal{E}$ εντός του $(C(\mathbf{R}^l_+, \mathbf{R}) \times (\mathbf{R}^l_+ \setminus \{\mathbf{0}\}))^m \times SM(m,m)$ καθώς το $k' \to \infty$ και υποθέσατε ότι το $(\mathbf{x}_1^{k'}, ..., \mathbf{x}_m^{k'}, \mathbf{y}_1^{k'}, ..., \mathbf{y}_m^{k'}, \mathbf{p}^{k'})$ είναι μιά ανταγωνιστική ισορροπία της οικονομίας ιδιωτικής ιδιοκτησίας $\mathcal{E}^{k'} \in \mathcal{CE}_c^{(\nu)}$, οποτεδήποτε $k' \in \mathbf{N}$. Τότε για κάθε $k' \in \mathbf{N}$, έχουμε

$$(\mathbf{x}_1^{k'}, ..., \mathbf{x}_m^{k'}, \mathbf{y}_1^{k'}, ..., \mathbf{y}_m^{k'}, \mathbf{p}^{k'}) = (\mathbf{x}_1^{k'}, ..., \mathbf{x}_m^{k'}, y_1(\mathbf{p}^{k'}), ..., y_m(\mathbf{p}^{k'}), \mathbf{p}^{k'})$$

(Δείτε, για παράδειγμα, τις σελίδες 72-73 του *Aliprantis-Brown-Burkinshaw* [1990].) Η συμπάγεια του συνόλου $([0,\nu]^l)^m \times [\nu^{-1}, \nu]^l$ συνεπάγεται ότι υπάρχει μιά υπακολουθία $((\mathbf{x}_1^{k'_j}, ..., \mathbf{x}_m^{k'_j}, \mathbf{p}^{k'_j}))_{j \in \mathbf{N}}$ της ακολουθίας $((\mathbf{x}_1^{k'}, ..., \mathbf{x}_m^{k'}, \mathbf{p}^{k'}))_{k' \in \mathbf{N}}$ που συγκλίνει σε κάποιο σημείο $(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_m, \mathbf{p})$ του συνόλου $([0,\nu]^l)^m \times [\nu^{-1}, \nu]^l$. Τότε η κλειστότητα του συνόλου $([0,\nu]^l)^m \times (Y_1 \times ... \times Y_m) \times [\nu^{-1}, \nu]^l$ και η συνέχεια των συναρτήσεων $y_j : (0,\infty)^l \to \mathbf{R}^l$ (δείτε, για παράδειγμα, το 1.7.7 στη σελίδα 73 του *Aliprantis-Brown-Burkinshaw* [1990]) συνεπάγονται ότι

$$(\mathbf{x}_1^{k'_j}, ..., \mathbf{x}_m^{k'_j}, y_1(\mathbf{p}^{k'_j}), ..., y_m(\mathbf{p}^{k'_j}), \mathbf{p}^{k'_j}) \to (\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_m, y_1(\mathbf{p}), ..., y_m(\mathbf{p}), \mathbf{p})$$

εντός του $([0,\nu]^l)^m \times (Y_1 \times ... \times Y_m) \times [\nu^{-1}, \nu]^l$ καθώς το $j \to \infty$. Οπότε δοθέντος οποιουδήποτε $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^l_+$ για το οποίο $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} < \mathbf{p} \cdot \omega_i + \sum\limits_{j=1}^m \theta_{ij} \mathbf{p} \cdot y_j(\mathbf{p})$, η συνέχεια του εσωτερικού γινομένου, των γραμμικών συναρτήσεων και των συναρτήσεων $y_j : (0,\infty)^l \to \mathbf{R}^l$ συνεπάγεται ότι υπάρχει $J \in \mathbf{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε ακέραιο $j \geq J$, να έχουμε

$$\mathbf{p}^{k'_j} \cdot \mathbf{x}^{k'_j} < \mathbf{p}^{k'_j} \cdot \omega_i^{k'_j} + \sum_{\mu=1}^{m} \theta_{i\mu}^{k'_j} \mathbf{p}^{k'_j} \cdot y_\mu(\mathbf{p}^{k'_j})$$

με άλλα λόγια, είναι

$$\mathbf{x}^{k'_j} \in B_{\omega_i^{k'_j}}(y_1(\mathbf{p}^{k'_j}), ..., y_m(\mathbf{p}^{k'_j}); \mathbf{p}^{k'_j})$$

Οπότε $u_i^{k'_j}(\mathbf{x}_i^{k'_j}) \geq u_i^{k'_j}(\mathbf{x})$ για κάθε ακέραιο $j \geq J$ και βάσει του γεγονότος ότι - για πλήρεις μετρικούς χώρους - η ομοιόμορφη σύγκλιση επί συμπαγών είναι ισοδύναμη προς τη συνεχή σύγκλιση (δείτε, για παράδειγμα, το Πρόβλημα 40 στη σελίδα 162 του *Royden* [1988]), έχουμε

$$u_i(\mathbf{x}_i) = \lim_{j\to\infty} u_i^{k'_j}(\mathbf{x}_i^{k'_j}) \geq \lim_{j\to\infty} u_i^{k'_j}(\mathbf{x}) = u_i(\mathbf{x})$$

για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^l_+$ για το οποίο $\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} < \mathbf{p}\cdot\omega_i + \sum_{j=1}^{m} \theta_{ij}\mathbf{p}\cdot y_j(\mathbf{p})$. Επιπλέον, αν το $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^l_+$ είναι τέτοιο ώστε $\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{p}\cdot\omega_i + \sum_{j=1}^{m} \theta_{ij}\mathbf{p}\cdot y_j(\mathbf{p})$, τότε για κάθε $n \in \mathbf{N}$, έχουμε $\frac{n}{n+1}\mathbf{x} \in \mathbf{R}^l_+$ και $\mathbf{p}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\mathbf{x}\right) < \mathbf{p}\cdot\omega_i + \sum_{j=1}^{m} \theta_{ij}\mathbf{p}\cdot y_j(\mathbf{p})$, οπότε $u_i(\mathbf{x}_i) \geq u_i\left(\frac{n}{n+1}\mathbf{x}\right)$ και η συνέχεια της u_i συνεπάγεται ότι $u_i(\mathbf{x}_i) \geq \lim_{n\to\infty} u_i\left(\frac{n}{n+1}\mathbf{x}\right) = u_i(\mathbf{x})$. Τέλος, επειδή για κάθε $j \in \mathbf{N}$, έχουμε $\mathbf{p}^{k'_j} \cdot \mathbf{x}_i^{k'_j} \leq \mathbf{p}^{k'_j} \cdot \omega_i^{k'_j} + \sum_{\mu=1}^{m} \theta_{i\mu}^{k'_j} \mathbf{p}^{k'_j} \cdot y_\mu(\mathbf{p}^{k'_j})$, η συνέχεια του εσωτερικού γινομένου, των γραμμικών συναρτήσεων και των συναρτήσεων $y_j : (0,\infty)^l \to \mathbf{R}^l$ συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}_i &= \lim_{j\to\infty}(\mathbf{p}^{k'_j} \cdot \mathbf{x}_i^{k'_j}) \\
&\leq \lim_{j\to\infty}\left(\mathbf{p}^{k'_j} \cdot \omega_i^{k'_j} + \sum_{\mu=1}^{m} \theta_{i\mu}^{k'_j} \mathbf{p}^{k'_j} \cdot y_\mu(\mathbf{p}^{k'_j})\right) \\
&= \mathbf{p}\cdot\omega_i + \sum_{\mu=1}^{m} \theta_{i\mu}\mathbf{p}\cdot y_\mu(\mathbf{p})
\end{aligned}$$

ή (ισοδύναμα)

$$\mathbf{x}_i \in B_{\omega_i}(y_1(\mathbf{p}), ..., y_m(\mathbf{p}); \mathbf{p})$$

και

$$u_i(\mathbf{x}_i) = \max\{u_i(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in B_{\omega_i}(y_1(\mathbf{p}), ..., y_m(\mathbf{p}); \mathbf{p})\}$$

για κάθε $i \in \{1, ..., m\}$, ενώ

$$\sum_{i=1}^m \mathbf{x}_i - \sum_{j=1}^m y_j(\mathbf{p}) = \lim_{j\to\infty}\left(\sum_{i=1}^m \mathbf{x}_i^{k'_j} - \sum_{\mu=1}^m y_\mu(\mathbf{p}^{k'_j})\right) = \lim_{j\to\infty}\sum_{i=1}^m \omega_i^{k'_j} = \sum_{i=1}^m \omega_i$$

Με άλλα λόγια, η $(2m+1)$-άδα $(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_m, y_1(\mathbf{p}), ..., y_m(\mathbf{p}), \mathbf{p})$ που ανήκει στο $([0,\nu]^l)^m \times (Y_1 \times ... \times Y_m) \times [\nu^{-1}, \nu]^l$ αποτελεί μιά ανταγωνιστική ισορροπία για την οικονομία ιδιωτικής ιδιοκτησίας $\mathcal{E}$ που συνεπάγεται ότι το σύνολο $\mathcal{CE}_c^{(\nu)}$ είναι κλειστό στο $(C(\mathbf{R}_+^l, \mathbf{R}) \times (\mathbf{R}_+^l \setminus \{\mathbf{0}\}))^m \times SM(m,m)$.

Συνεχίζουμε με την απόδειξη του θεωρήματος για $m \neq k$. Η απόδειξη ότι το σύνολο

$$\mathcal{CE}_c^* = \Big\{\mathcal{E} \in (C(\mathbf{R}_+^l, \mathbf{R}) \times (\mathbf{R}_+^l \setminus \{\mathbf{0}\}))^m \times SM(m,k) :$$

$$(\exists(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_m, \mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_k, \mathbf{p}) \in (\mathbf{R}_+^l)^m \times (Y_1 \times ... \times Y_k) \times (0,\infty)^l)$$

$$\Bigg(\sum_{i=1}^m \mathbf{x}_i - \sum_{j=1}^k \mathbf{y}_j = \sum_{i=1}^m \omega_i \;\wedge\; (\forall i \in \{1, ..., m\})$$

$$\left(\mathbf{x}_i \in B_{\omega_i}(\mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_k; \mathbf{p}) \;\wedge\; u_i(\mathbf{x}_i) = \max_{\mathbf{x}\in B_{\omega_i}(\mathbf{y}_1,...,\mathbf{y}_k;\mathbf{p})} u_i(\mathbf{x})\right)$$

$$\wedge\; (\forall j \in \{1, ..., k\})\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{y}_j = \max_{\mathbf{y}\in Y_j} \mathbf{p}\cdot\mathbf{y}\right)\Bigg)\Big\}$$

είναι F_σ στο $(C(\mathbf{R}_+^l, \mathbf{R}) \times (\mathbf{R}_+^l \setminus \{\mathbf{0}\}))^m \times SM(m,k)$ αποτελεί απλή επανάληψη του αντίστοιχου ισχυρισμού για $m = k$. Θα αποδείξουμε μόνον ότι το σύνολο

$$\mathcal{CE}_{lsc}^* = \Big\{\mathcal{E} \in (LSC(\mathbf{R}_+^l, \mathbf{R}) \times (\mathbf{R}_+^l \setminus \{\mathbf{0}\}))^m \times SM(m,k) :$$

$$(\exists(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_m, \mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_k, \mathbf{p}) \in (\mathbf{R}_+^l)^m \times (Y_1 \times ... \times Y_k) \times (0,\infty)^l)$$

$$\Bigg(\sum_{i=1}^m \mathbf{x}_i - \sum_{j=1}^k \mathbf{y}_j = \sum_{i=1}^m \omega_i \;\wedge\; (\forall i \in \{1, ..., m\})$$

$$\left(\mathbf{x}_i \in B_{\omega_i}(\mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_k; \mathbf{p}) \ \wedge \ u_i(\mathbf{x}_i) = \max_{\mathbf{x} \in B_{\omega_i}(\mathbf{y}_1,...,\mathbf{y}_k;\mathbf{p})} u_i(\mathbf{x})\right)$$

$$\left.\left.\wedge \ (\forall j \in \{1, ..., k\}) \left(\mathbf{p} \cdot \mathbf{y}_j = \max_{\mathbf{y} \in Y_j} \mathbf{p} \cdot \mathbf{y}\right)\right)\right\}$$

δεν είναι μετρητό κατά *Borel* στο $(LSC(\mathbf{R}^l_+, \mathbf{R}) \times (\mathbf{R}^l_+ \setminus \{\mathbf{0}\}))^m \times SM(m,k)$. Έτσι έστω

$$Y_{k+1} = ... = Y_{m+k} = \{\mathbf{0}\}$$

και έστω ότι $\mathcal{E} = (((u_1, \omega_1), ..., (u_m, \omega_m)), (\theta_{ij}))$ είναι μιά οποιαδήποτε οικονομία ιδιωτικής ιδιοκτησίας που ανήκει στο $(LSC(\mathbf{R}^l_+, \mathbf{R}) \times (\mathbf{R}^l_+ \setminus \{\mathbf{0}\}))^m \times SM(m,k)$. Αν θέσουμε

$$\mathcal{E}^* = (((u^*_1, \omega^*_1), ..., (u^*_{m+k}, \omega^*_{m+k})), (\theta^*_{ij}))$$

όπου

$$(u^*_i, \omega^*_i) = (u_i, \omega_i)$$

οποτεδήποτε $i \in \{1, ..., m\}$ και

$$(u^*_i, \omega^*_i) = \left(\mathbf{R}^l_+ \ni \mathbf{x} \mapsto -\|\mathbf{x} - \omega^*_i\|^2 \in (-\infty, 0] \ , \ (1, 0, ..., 0)\right)$$

οποτεδήποτε $i \in \{m+1, ..., m+k\}$, ενώ

$$(\theta^*_{ij}) = \begin{pmatrix} \theta_{11} & ... & \theta_{1k} & 0 & ... & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \theta_{m1} & ... & \theta_{mk} & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & ... & 0 & & ... & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & ... & 0 & 0 & ... & 1 & 0 \\ 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 & 1 \end{pmatrix} \in SM(m+k, m+k)$$

τότε είναι εύκολο να δει κανείς ότι η απεικόνιση $(LSC(\mathbf{R}^l_+, \mathbf{R}) \times (\mathbf{R}^l_+ \setminus \{\mathbf{0}\}))^m \times SM(m,k) \ni \mathcal{E} \mapsto \mathcal{E}^* \in (LSC(\mathbf{R}^l_+, \mathbf{R}) \times (\mathbf{R}^l_+ \setminus \{\mathbf{0}\}))^{m+k} \times SM(m+k, m+k)$ είναι αμφιμονότιμη και συνεχής και για να αποδείξουμε ότι το $\mathcal{CE}^*_{lsc}$ δεν είναι μετρητό κατά *Borel* στο $(LSC(\mathbf{R}^l_+, \mathbf{R}) \times (\mathbf{R}^l_+ \setminus \{\mathbf{0}\}))^m \times SM(m,k)$, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_{m+k}, \mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_{m+k}, \mathbf{p}) \in (\mathbf{R}^l_+)^{m+k} \times (Y_1 \times ... \times Y_{m+k}) \times (0, \infty)^l$, η $(2(m+k)+1)$-άδα $(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_{m+k}, \mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_{m+k}, \mathbf{p})$ αποτελεί μιά ανταγωνιστική ισορροπία για την οικονομία ιδιωτικής ιδιοκτησίας $\mathcal{E}^*$ αν και μόνον αν η $(m+k+1)$-άδα $(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_m, \mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_k, \mathbf{p})$ αποτελεί μιά ανταγωνιστική ισορροπία για την οικονομία ιδιωτικής ιδιοκτησίας $\mathcal{E}$ και $\mathbf{x}_i = \omega_i^*$ για κάθε $i \in \{m+1, ..., m+k\}$. Αλλά αυτό έπεται από το γεγονός ότι για κάθε $i \in \{1, ..., m\}$, έχουμε $u_i^* = u_i$ και

$$\begin{aligned}
B_{\omega_i^*}(\mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_{m+k}; \mathbf{p}) &= \left\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}_+^l : \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{p} \cdot \omega_i^* + \sum_{j=1}^{m+k} \theta_{ij}^* \mathbf{p} \cdot \mathbf{y}_j\right\} \\
&= \left\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}_+^l : \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{p} \cdot \omega_i + \sum_{j=1}^{k} \theta_{ij} \mathbf{p} \cdot \mathbf{y}_j\right\} \\
&= B_{\omega_i}(\mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_k; \mathbf{p})
\end{aligned}$$

που συνεπάγεται ότι $u_i^*(\mathbf{x}_i) = \max\left\{u_i^*(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in B_{\omega_i^*}(\mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_{m+k}; \mathbf{p})\right\} \iff u_i(\mathbf{x}_i) = \max\left\{u_i(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in B_{\omega_i}(\mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_k; \mathbf{p})\right\}$ και από το γεγονός ότι για κάθε $i \in \{m+1, ..., m+k\}$, έχουμε

$$\begin{aligned}
B_{\omega_i^*}(\mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_{m+k}; \mathbf{p}) &= \left\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}_+^l : \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{p} \cdot \omega_i^* + \sum_{j=1}^{m+k} \theta_{ij}^* \mathbf{p} \cdot \mathbf{y}_j\right\} \\
&= \left\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}_+^l : \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{p} \cdot \omega_i^* + \sum_{j=k+1}^{m+k} \theta_{ij}^* \mathbf{p} \cdot \mathbf{y}_j\right\} \\
&= \left\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}_+^l : \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{p} \cdot \omega_i^* + \sum_{j=k+1}^{m+k} \theta_{ij}^* \mathbf{p} \cdot \mathbf{0}\right\} \\
&= \left\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}_+^l : \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{p} \cdot \omega_i^*\right\} \ni \omega_i^*
\end{aligned}$$

και

$$u_i^*(\mathbf{x}_i) = \max\left\{u_i^*(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in B_{\omega_i^*}(\mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_{m+k}; \mathbf{p})\right\} \iff \mathbf{x}_i = \omega_i^*$$

ενώ για κάθε $j \in \{k+1, ..., m+k\}$, έχουμε

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{y}_j = \mathbf{p} \cdot \mathbf{0} = \max_{\mathbf{y} \in \{\mathbf{0}\}} \mathbf{p} \cdot \mathbf{y} = \max_{\mathbf{y} \in Y_j} \mathbf{p} \cdot \mathbf{y}$$

και

$$\sum_{i=1}^{m+k} \mathbf{x}_i - \sum_{j=1}^{m+k} \mathbf{y}_j = \sum_{i=1}^{m+k} \omega_i^* \iff \sum_{i=1}^{m} \mathbf{x}_i - \sum_{j=1}^{k} \mathbf{y}_j - \sum_{i=1}^{m} \omega_i = \sum_{i=m+1}^{m+k} \omega_i^* - \sum_{i=m+1}^{m+k} \mathbf{x}_i$$

Όπερ έδει δεῖξαι

3.3 Συμπέρασμα

Σύμφωνα με τον *Kenneth J. Arrow* '*η συνήθης αντίδραση του λόγιου κοινωνικού επιστήμονα όταν αντικρύζει ένα μαθηματικό σύστημα που είναι σχεδιασμένο ως ένα μοντέλο της πραγματικότητας είναι να βεβαιώνει ότι είναι υπεραπλουστευμένο, ότι δεν αναπαριστάνει όλες τις πολυπλοκότητες της πραγματικότητας*' (δείτε τη σελίδα 130 του *Arrow* [1951]). Η μοντέρνα φιλοσοφία των εφαρμοσμένων μαθηματικών είναι η '*συμβιωτική αλληλεπίδραση*' μεταξύ όλων των κλάδων στο ακόλουθο σχήμα (δείτε τη σελίδα 137 του *Arnold-Atiyah-Lax-Mazur* [2000]):

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \text{Μαθηματική Θεωρία} & & \\
 & \swarrow\nearrow & & \nwarrow\searrow & \\
\begin{array}{l}\text{Ποιοτική}\\ \text{και/ή}\\ \text{Ασυμπτωτική}\\ \text{Μοντελοποίηση}\end{array} & & & & \begin{array}{l}\text{Αριθμητική}\\ \text{Ανάλυση}\\ \text{και}\\ \text{Μοντελοποίηση}\end{array} \\
 & \searrow\nwarrow & & \nearrow\swarrow & \\
 & & \begin{array}{l}\text{Παρατηρούμενα Φαινόμενα}\\ \text{Πειραματικά Δεδομένα}\end{array} & &
\end{array}$$

Το μαθηματικό σύστημα των οικονομιών ιδιωτικής ιδιοκτησίας που οι *Kenneth J. Arrow* και *Gerard Debreu* σχεδίασαν ως ένα ποιοτικό μοντέλο των πραγματικών οικονομιών (δείτε το *Arrow-Debreu* [1954]), χωρίς να έχει σημασία το πόσο απλουστευμένο είναι, αποτελεί προϊόν της αλληλεπίδρασης των μαθηματικών με τα παρατηρούμενα φαινόμενα και τα πειραματικά δεδομένα και το ίδιο ισχύει και για την έννοια της ανταγωνιστικής ισορροπίας. Όπως προκύπτει από το 11.6 στις σελίδες 71-72 και από τα 24.1, 24.3 και 24.10 στις σελίδες 190 και 192 του *Kechris* [1995], το θεώρημα που αποδείξαμε σε αυτό το κεφάλαιο βεβαιώνει ότι δεν υπάρχει καμιά διαδικασία που μπορεί να αποφασίζει επί της ύπαρξης ή όχι ανταγωνιστικής ισορροπίας για κάθε οικονομία ιδιωτικής ιδιοκτησίας με σχέσεις προτίμησης που αναπαρίστανται από κάτω ημισυνεχείς συναρτήσεις ωφέλειας, κάνοντας χρήση συνεχών πραγματικών συναρτήσεων επί του χώρου των οικονομιών αυτών και συναρτήσεων που προκύπτουν διαδοχικά από αυτές κάνοντας μόνον την πράξη της λήψης κατά σημείο ορίων.

Βιβλιογραφία

C. D. ALIPRANTIS, D. J. BROWN and O. BURKINSHAW
[1990] *Existence and Optimality of Competitive Equilibria, Springer, Berlin.*

V. ARNOLD, M. ATIYAH, P. LAX and B. MAZUR
[2000] *Editors, Mathematics : Frontiers and Perspectives, International Mathematical Union, American Mathematical Society.*

K. J. ARROW
[1951] *Mathematical Models in the Social Sciences, Policy Sciences in the United States, edited by H. D. Lasswell and D. T. Lerner, Stanford University Press*, 129-154.

K. J. ARROW and G. DEBREU
[1954] *Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy, Econometrica* **22**, 265-290.

M. W. HIRSCH, J. E. MARSDEN and M. SHUB
[1993] *From Topology to Computation : Proceedings of the Smalefest, Springer, New York.*

K. ITO
[1987] *Editor, Encyclopedic Dictionary of Mathematics, Volume* II, *Second Edition, The MIT Press, Cambridge.*

A. S. KECHRIS
[1995] *Classical Descriptive Set Theory, Springer, New York.*

L. W. McKENZIE
[1954] *On equilibrium in Graham's model of world trade and other competitive systems, Econometrica* **22**, 147–161.
[1955] *Competitive equilibrium with dependent consumer preferences, in H. A. Antosiewicz, Ed., Proceedings of the Second Symposium in Linear Programming (National Bureau of Standards, Washington, DC*, 1955), 277–294.
[1959] *On the existence of general equilibrium for a competitive market, Econometrica* **27**, 54–71.
[1981] *The classical theorem on existence of competitive equilibrium, Econometrica* **49**, 819–841.

H. L. ROYDEN
[1988] *Real Analysis*, *Third Edition*, *MacMillan Publishing Company*, *New York*.

L. WALRAS
[1874] *Elements d′ Economie Politique Pure*, *Corbaz*, *Lauzane*.

Κεφάλαιο 4

ΜΑΚΡΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ

4.1 Εισαγωγή

Με τον όρο μακροοικονομικά ονομάζουμε τη μελέτη ευρέων οικονομικών φαινομένων συμπεριλαμβανομένων του πληθωρισμού, της ανεργίας και της οικονομικής μεγέθυνσης. Η δεσπόζουσα θεωρητική προσέγγιση φαίνεται να είναι εκείνη που παρουσιάζεται στο *Stokey-Lucas-Prescott* [1989], όπου αναπτύσσεται η θεωρία των ντετερμινιστικών ή στοχαστικών, διακριτών ή συνεχών, πεπερασμένου ή απείρου ορίζοντα μακροοικονομικών μοντέλων.

Ένα απείρου ορίζοντα διακριτό ντετερμινιστικό μακροοικονομικό μοντέλο ορίζεται ως μιά τετράδα

$$\mathcal{M} = (X, F, \Gamma, \beta)$$

που ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:

1) Το X είναι ένα μη κενό σύνολο που αποτελείται από όλες τις δυνατές τιμές της καταστατικής μεταβλητής που το τυπικό νοικοκυριό πρέπει να επιλέξει στο τέλος κάθε περιόδου και καλείται το σύνολο των καταστατικών μεταβλητών του $\mathcal{M}$.

2) Η F είναι μιά πραγματική συνάρτηση επί του X^2, της οποίας η τιμή $F(x, y)$ εκφράζει τις επιστροφές που το τυπικό νοικοκυριό λαμβάνει όταν η τιμή της καταστατικής μεταβλητής κατά την έναρξη μιάς περιόδου είναι x και η τιμή της καταστατικής μεταβλητής κατά το τέλος της περιόδου είναι y και καλείται η συνάρτηση επιστροφών μιάς περιόδου του $\mathcal{M}$.

3) Η Γ είναι μιά απεικόνιση που αντιστοιχίζει σε κάθε καταστατική μεταβλητή x το σύνολο $\Gamma(x)$ όλων των εφικτών τιμών για την καταστατική

μεταβλητή κατά το τέλος μιάς περιόδου αν η καταστατική μεταβλητή κατά την έναρξη της περιόδου είναι x και καλείται η αντιστοιχία περιορισμών του $\mathcal{M}$.

4) Το β είναι ένας αριθμός στο ανοικτό διάστημα $(0,1)$ και καλείται ο παράγοντας έκπτωσης για το μέλλον στο $\mathcal{M}$.

Σε ένα τέτοιο μοντέλο $\mathcal{M}$, μιά ακολουθία $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, ...)$ καταστατικών μεταβλητών καλείται ένα εφικτό πλάνο ή απλά ένα πλάνο για το τυπικό νοικοκυριό που αρχίζει από την καταστατική μεταβλητή x_0, αν για κάθε $t \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$, έχουμε $x_t \in \Gamma(x_{t-1})$ και συμβολίζουμε με $\Pi_\Gamma(x_0)$ το σύνολο όλων των πλάνων για το τυπικό νοικοκυριό που αρχίζουν από την καταστατική μεταβλητή x_0. Δοθέντος οποιουδήποτε $x_0 \in X$, ένα πλάνο $\mathbf{x}^* \in \Pi_\Gamma(x_0)$ καλείται βέλτιστο για το τυπικό νοικοκυριό στο $\mathcal{M}$ ή απλά βέλτιστο για το $\mathcal{M}$, αν μεγιστοποιεί τη συνάρτηση ωφέλειας του βίου του επί του $\Pi_\Gamma(x_0)$, με άλλα λόγια, αν

$$U_{F,\Gamma,\beta}(\mathbf{x}^*) = \max_{\mathbf{x} \in \Pi_\Gamma(x_0)} U_{F,\Gamma,\beta}(\mathbf{x})$$

όπου

$$U_{F,\Gamma,\beta}(\mathbf{x}) = \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} F(x_{t-1}, x_t)$$

για κάθε $\mathbf{x} \in X^{\mathbf{N}}$. (Δείτε, για παράδειγμα, το Μέρος ΙΙ στις σελίδες 39-162 του *Stokey-Lucas-Prescott* [1989].)

Ο σκοπός μας σε αυτό το κεφάλαιο είναι να δείξουμε ότι δεν υπάρχουν μετρητές κατά *Borel* αναγκαίες και ικανές συνθήκες επί μιάς τριάδας μιάς κάτω ημισυνεχούς συνάρτησης επιστροφών μιάς περιόδου, μιάς συνεχούς και με συμπαγείς τιμές αντιστοιχίας περιορισμών και ενός παράγοντα έκπτωσης που ορίζουν ένα απείρου ορίζοντα διακριτό ντετερμινιστικό μακροοικονομικό μοντέλο, οι οποίες μπορούν να βεβαιώσουν την ύπαρξη βέλτιστων πλάνων που αρχίζουν από κάποιο σημείο. Προτού διατυπώσουμε το αποτέλεσμά μας, θα πρέπει να επισημάνουμε ότι αν X είναι οποιοσδήποτε Πολωνικός χώρος, τότε συμβολίζουμε με $K(X)$ τον Πολωνικό χώρο όλων των συμπαγών υποσυνόλων του X εφοδιασμένο με την τοπολογία του *Vietoris*, μιά πλήρης συμβατή μετρική επί του οποίου είναι η μετρική d_H του $Hausdorff$. (Δείτε, για παράδειγμα, το $4.F$ στις σελίδες 24-28 του *Kechris* [1995].)

Θεώρημα 4.1.1. *Δοθείσης οποιασδήποτε συμπαγούς ομαλής πολλαπλότητας X καταστατικών μεταβλητών, το σύνολο όλων των τριάδων*

$$(F, \phi, \beta)$$

κάτω ημισυνεχών συναρτήσεων επιστροφών μιάς περιόδου $F : X^2 \to \mathbf{R}$, συνεχών και με συμπαγείς τιμές αντιστοιχιών περιορισμών $\phi : X \to K(X)$ και παραγόντων έκπτωσης $\beta \in (0,1)$ που ορίζουν ένα απείρου ορίζοντα διακριτό ντετερμινιστικό μακροοικονομικό μοντέλο

$$\mathcal{M} = (X, F, \phi, \beta)$$

το οποίο έχει βέλτιστο πλάνο που αρχίζει από κάποιο σημείο, δεν είναι μετρητό κατά Borel στο

$$LSC(X^2, \mathbf{R}) \times C(X, K(X)) \times (0,1)$$

ενώ το σύνολο όλων των τριάδων

$$(F, \phi, \beta)$$

συνεχών συναρτήσεων επιστροφών μιάς περιόδου $F : X^2 \to \mathbf{R}$, συνεχών και με συμπαγείς τιμές αντιστοιχιών περιορισμών $\phi : X \to K(X)$ και παραγόντων έκπτωσης $\beta \in (0,1)$ που ορίζουν ένα απείρου ορίζοντα διακριτό ντετερμινιστικό μακροοικονομικό μοντέλο

$$\mathcal{M} = (X, F, \phi, \beta)$$

το οποίο έχει βέλτιστο πλάνο που αρχίζει από κάποιο σημείο, είναι F_σ στο

$$C(X^2, \mathbf{R}) \times C(X, K(X)) \times (0,1)$$

Έτσι, οποιεσδήποτε αναγκαίες και ικανές συνθήκες ύπαρξης βέλτιστων πλάνων για τριάδες κάτω ημισυνεχών συναρτήσεων επιστροφών μιάς περιόδου, συνεχών και με συμπαγείς τιμές αντιστοιχιών περιορισμών και παραγόντων έκπτωσης που ορίζουν ένα απείρου ορίζοντα διακριτό ντετερμινιστικό μακροοικονομικό μοντέλο δε μπορούν να εκφραστούν αναλυτικά μέσω συγκεκριμένων τύπων, απλών αναλυτικών εκφράσεων και τα τοιαύτα.

4.2 Απείρου ορίζοντα διακριτά ντετερμινιστικά μακροοικονομικά μοντέλα

Θεώρημα 4.2.1. *Δοθείσης οποιασδήποτε συμπαγούς ομαλής πολλαπλότητας X καταστατικών μεταβλητών, το σύνολο όλων των τριάδων*

$$(F, \phi, \beta)$$

κάτω ημισυνεχών συναρτήσεων επιστροφών μιάς περιόδου $F : X^2 \to \mathbf{R}$, συνεχών και με συμπαγείς τιμές αντιστοιχιών περιορισμών $\phi : X \to K(X)$ και παραγόντων έκπτωσης $\beta \in (0,1)$ που ορίζουν ένα απείρου ορίζοντα διακριτό ντετερμινιστικό μακροοικονομικό μοντέλο

$$\mathcal{M} = (X, F, \phi, \beta)$$

το οποίο έχει βέλτιστο πλάνο που αρχίζει από κάποιο σημείο, δεν είναι μετρητό κατά Borel στο

$$LSC(X^2, \mathbf{R}) \times C(X, K(X)) \times (0,1)$$

ενώ το σύνολο όλων των τριάδων

$$(F, \phi, \beta)$$

συνεχών συναρτήσεων επιστροφών μιάς περιόδου $F : X^2 \to \mathbf{R}$, συνεχών και με συμπαγείς τιμές αντιστοιχιών περιορισμών $\phi : X \to K(X)$ και παραγόντων έκπτωσης $\beta \in (0,1)$ που ορίζουν ένα απείρου ορίζοντα διακριτό ντετερμινιστικό μακροοικονομικό μοντέλο

$$\mathcal{M} = (X, F, \phi, \beta)$$

το οποίο έχει βέλτιστο πλάνο που αρχίζει από κάποιο σημείο, είναι F_σ στο

$$C(X^2, \mathbf{R}) \times C(X, K(X)) \times (0,1)$$

Απόδειξη. Ξεκινάμε αποδεικνύοντας ότι το σύνολο

$$\mathcal{DDIHMM}_{lsc,c} = \Big\{(F, \phi, \beta) \in LSC(X^2, \mathbf{R}) \times C(X, K(X)) \times (0,1) :$$

$$(\exists x_0 \in X)(\exists \mathbf{x} \in \Pi_\phi(x_0)) \left(U_{F,\phi,\beta}(\mathbf{x}) = \max_{\mathbf{y} \in \Pi_\phi(x_0)} U_{F,\phi,\beta}(\mathbf{y})\right)\Big\}$$

δεν είναι μετρητό κατά *Borel* στο $LSC(X^2, \mathbf{R}) \times C(X, K(X)) \times (0,1)$. Έτσι έστω

$$n = \dim(X)$$

και έστω ότι (V, ψ) είναι ένας αυθαίρετος αλλά σταθερός χάρτης επί της X, όπου

$$\psi(v) = (y^1(v), ..., y^n(v))$$

οποτεδήποτε $v \in V$. Δεν είναι δύσκολο να επαληθεύσει κανείς ότι για κάθε $j \in \{1, ..., n\}$, υπάρχουν $-\infty < a_j < b_j < \infty$ τέτοια ώστε

$$[a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n] \subseteq \psi[V]$$

Κρατώντας τους ίδιους συμβολισμούς όπως στην Παράγραφο 3 του ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 1, για κάθε $s \in \mathbf{N}^{<\mathbf{N}}$, θέτουμε

$$V_s = \psi^{-1}\left[I_s \times [a_2, b_2] \times ... \times [a_n, b_n]\right]$$

και στην περίπτωση που $s \neq \emptyset$ θέτουμε

$$V_s^* = \psi^{-1}\left[I_s^* \times [a_2, b_2] \times ... \times [a_n, b_n]\right]$$

για $a = a_1$ και $b = b_1$. Επιπλέον, στην περίπτωση που $s \neq \emptyset$, θέτουμε επίσης

$$\Phi_s(v) = \begin{cases} \phi_s(y^1(v)) & \text{αν } v \in V \\ 0 & \text{αν } v \in X \setminus V \end{cases}$$

και δεν είναι δύσκολο να επαληθεύσει κανείς ότι η συνάρτηση

$$\Phi_s : X \to [0, 1]$$

είναι διαφορίσιμη της κλάσης C^∞ με την ιδιότητα ότι

$$\Phi_s = 1 \quad \text{εντός του } V_s$$

και

$$\Phi_s = 0 \quad \text{εκτός του } V_s^*$$

Έτσι, δοθέντος οποιουδήποτε $T \in Tr^*$, αν θέσουμε

$$F_T(u, v) = \sum_{s \in \delta(T) \setminus \{\emptyset\}} 2^{-\text{length}(s)} \Phi_s(v)$$

οποτεδήποτε $(u, v) \in X^2$, τότε το Θεώρημα 1.3.5 του ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 1 συνεπάγεται ότι η απεικόνιση

$$Tr^* \ni T \mapsto F_T \in LSC(X^2, \mathbf{R})$$

είναι καλά ορισμένη, αμφιμονότιμη, μετρητή κατά *Borel* και ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:
1) Για κάθε $T \in Tr^*$, έχουμε

$$0 \leq F_T \leq 1$$

2) Για κάθε κακώς θεμελιωμένο $T \in Tr^*$ και για κάθε $\alpha \in [T]$, έχουμε

$$
\begin{aligned}
&F_T(\cdot, \psi^{-1}(x(\alpha), a_2, ..., a_n)) \\
&= \sum_{s \in \delta(T) \setminus \{\emptyset\}} 2^{-\mathrm{length}(s)} \Phi_s(\psi^{-1}(x(\alpha), a_2, ..., a_n)) \\
&= \sum_{s \in \delta(T) \setminus \{\emptyset\}} 2^{-\mathrm{length}(s)} \phi_s(x(\alpha)) \\
&= u_T(x(\alpha)) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

όπου $x(\alpha)$ είναι το μοναδικό σημείο εντός του $\bigcap_{m \in \mathbf{N}} I_{\alpha|m}$ για $a = a_1$ και $b = b_1$, και συνεπώς για κάθε $\beta \in (0,1)$ και για $\phi(x) = X$, οποτεδήποτε $x \in X$, έχουμε

$$(F_T, \phi, \beta) \in \mathcal{DDIHMM}_{lsc,c}$$

3) Για κάθε καλώς θεμελιωμένο $T \in Tr^*$ και για κάθε $v \in X$, έχουμε ότι

$$v \notin V \Rightarrow F_T(\cdot, v) = \sum_{s \in \delta(T) \setminus \{\emptyset\}} 2^{-\mathrm{length}(s)} \Phi_s(v) = 0$$

και

$$
\begin{aligned}
v \in V \;\; \Rightarrow \;\; F_T(\cdot, v) \;\; &= \sum_{s \in \delta(T) \setminus \{\emptyset\}} 2^{-\mathrm{length}(s)} \Phi_s(v) \\
&= \sum_{s \in \delta(T) \setminus \{\emptyset\}} 2^{-\mathrm{length}(s)} \phi_s(y^1(v)) \\
&= u_T(y^1(v)) \\
&< 1
\end{aligned}
$$

Με άλλα λόγια, $F_T < 1$. Στην περίπτωση αυτή, θα αποδείξουμε ότι για κάθε $\beta \in (0,1)$ και για $\phi(x) = X$, οποτεδήποτε $x \in X$, έχουμε

$$(F_T, \phi, \beta) \notin \mathcal{DDIHMM}_{lsc,c}$$

Πράγματι, δοθέντος $\beta \in (0,1)$, αν υποθέσουμε ότι το $\mathbf{x} = (x_0, x_1, ...) \in X^{\mathbf{N}}$ αποτελεί βέλτιστο πλάνο για το απείρου ορίζοντα διακριτό ντετερμινιστικό μακροοικονομικό μοντέλο που ορίζεται από την τριάδα (F_T, ϕ, β), τότε

$$\frac{1}{1-\beta} \geq \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} F_T(x_{t-1}, x_t) = U_{F_T,\phi,\beta}(\mathbf{x}) = \max_{\mathbf{y} \in \Pi_\phi(x_0)} U_{F_T,\phi,\beta}(\mathbf{y})$$

$$= \max_{\mathbf{y}\in X^{\mathbf{N}};y_0=x_0} U_{F_T,\phi,\beta}(\mathbf{y}) \geq F_T(x_0, \psi^{-1}(a_{(0,l,...,l)}, a_2, ..., a_n))$$

$$+\sum_{t=2}^{\infty} \beta^{t-1} F_T(\psi^{-1}(a_{(0,l,...,l)}, a_2, ..., a_n), \psi^{-1}(a_{(0,l,...,l)}, a_2, ..., a_n))$$

$$= \frac{1}{1-\beta} u_T(a_{(0,l,...,l)}) = \frac{1}{1-\beta} \sum_{k=1}^{l+1} 2^{-k}$$

για κάθε θετικό ακέραιο l που συνεπάγεται ότι $\sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} F_T(x_{t-1}, x_t) = \frac{1}{1-\beta}$. Αλλά επειδή $F_T(x_0, x_1) < 1$, υπάρχει $l \in \mathbf{N}$ τέτοιο ώστε $F_T(x_0, x_1) < \sum_{k=1}^{l+1} 2^{-k}$ και συνεπώς

$$\frac{1}{1-\beta} \geq U_{F_T,\phi,\beta}((x_0, \psi^{-1}(a_{(0,l,...,l)}, a_2, ..., a_n), x_2, x_3, ...))$$

$$= u_T(a_{(0,l,...,l)}) \ + \ \beta F_T(\psi^{-1}(a_{(0,l,...,l)}, a_2, ..., a_n), x_2)$$

$$+ \ \sum_{t=3}^{\infty} \beta^{t-1} F_T(x_{t-1}, x_t) > \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} F_T(x_{t-1}, x_t) = \frac{1}{1-\beta}$$

που είναι μιά αντίφαση.
Επομένως, δοθέντος οποιουδήποτε $\beta \in (0,1)$ και θέτοντας $\phi(x) = X$ για κάθε $x \in X$, το $T \in Tr^*$ είναι κακώς θεμελιωμένο αν και μόνον αν $(F_T, \phi, \beta) \in \mathcal{DDIHMM}_{lsc,c}$ και συνεπώς το $\mathcal{DDIHMM}_{lsc,c}$ δεν είναι μετρητό κατά *Borel* στο $LSC(X^2, \mathbf{R}) \times C(X, K(X)) \times (0,1)$.

Εκείνο που έμεινε να δείξουμε είναι ότι το σύνολο

$$\mathcal{DDIHMM}_{c,c} = \Big\{(F, \phi, \beta) \in C(X^2, \mathbf{R}) \times C(X, K(X)) \times (0,1) :$$

$$(\exists x_0 \in X)(\exists \mathbf{x} \in \Pi_\phi(x_0)) \left(U_{F,\phi,\beta}(\mathbf{x}) = \max_{\mathbf{y}\in\Pi_\phi(x_0)} U_{F,\phi,\beta}(\mathbf{y}) \right) \Big\}$$

είναι F_σ στο $C(X^2, \mathbf{R}) \times C(X, K(X)) \times (0,1)$. Παρατηρούμε ότι

$$\mathcal{DDIHMM}_{c,c} = \bigcup\nolimits_{\nu\in\mathbf{N}\setminus\{0,1\}} \mathcal{DDIHMM}_{c,c}^{(\nu)}$$

όπου για κάθε ακέραιο $\nu > 1$, έχουμε θέσει

$$\mathcal{DDIHMM}_{c,c}^{(\nu)} = \Big\{(F, \phi, \beta) \in C(X^2, \mathbf{R}) \times C(X, K(X)) \times [\nu^{-1}, 1-\nu^{-1}]) :$$

$$(\exists x_0 \in X)(\exists \mathbf{x} \in \Pi_\phi(x_0)) \left(U_{F,\phi,\beta}(\mathbf{x}) = \max_{\mathbf{y} \in \Pi_\phi(x_0)} U_{F,\phi,\beta}(\mathbf{y}) \right) \Big\}$$

Οπότε δοθέντος οποιουδήποτε ακεραίου $\nu > 1$, αρκεί να δείξουμε ότι το $\mathcal{DDIHMM}_{c,c}^{(\nu)}$ είναι κλειστό στο $C(X^2, \mathbf{R}) \times C(X, K(X)) \times [\nu^{-1}, 1 - \nu^{-1}]$. Έτσι έστω ότι

$$(F_k, \phi_k, \beta_k) \to (F, \phi, \beta)$$

εντός του $C(X^2, \mathbf{R}) \times C(X, K(X)) \times [\nu^{-1}, 1 - \nu^{-1}]$ καθώς το $k \to \infty$ και έστω ότι το $(x_0^k, \mathbf{x}^k) \in X \times \Pi_{\phi_k}(x_0^k) \subseteq X \times X^{\mathbf{N}}$ είναι τέτοιο ώστε για κάθε $k \in \mathbf{N}$, να έχουμε

$$U_{F_k,\phi_k,\beta_k}(\mathbf{x}^k) = \max_{\mathbf{y} \in \Pi_{\phi_k}(x_0^k)} U_{F_k,\phi_k,\beta_k}(\mathbf{y})$$

Η συμπάγεια του $X \times X^{\mathbf{N}}$ συνεπάγεται ότι υπάρχει μιά υπακολουθία $((x_0^{k_j}, \mathbf{x}^{k_j}))_{j \in \mathbf{N}}$ της ακολουθίας $((x_0^k, \mathbf{x}^k))_{k \in \mathbf{N}}$ που συγκλίνει σε κάποιο σημείο $(x_0, \mathbf{x})$ εντός του $X \times X^{\mathbf{N}}$. Δοθέντος $t \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$, για κάθε $j \in \mathbf{N}$, έχουμε $x_t^{k_j} \in \phi_{k_j}(x_{t-1}^{k_j})$. Έτσι, επειδή - για πλήρεις μετρικούς χώρους - η ομοιόμορφη σύγκλιση επί συμπαγών είναι ισοδύναμη προς τη συνεχή σύγκλιση (δείτε, για παράδειγμα, το Πρόβλημα 40 στη σελίδα 162 του *Royden* [1988]) και επειδή η σχέση του ανήκειν είναι κλειστή στο $X \times K(X)$ (δείτε, για παράδειγμα, το 4.29 στη σελίδα 27 του *Kechris* [1995]), περνώντας στο όριο καθώς το $j \to \infty$, λαμβάνουμε ότι $x_t \in \phi(x_{t-1})$, οποτεδήποτε $t \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$. Με άλλα λόγια, $\mathbf{x} \in \Pi_\phi(x_0)$ και εκείνο που έμεινε να δείξουμε είναι ότι δοθέντος οποιουδήποτε $\mathbf{y} \in \Pi_\phi(x_0)$, έχουμε $U_{F,\phi,\beta}(\mathbf{x}) \geq U_{F,\phi,\beta}(\mathbf{y})$. Έτσι έστω $\mathbf{y} \in \Pi_\phi(x_0)$. Ισχυριζόμαστε ότι για κάθε $j \in \mathbf{N}$, υπάρχει $\mathbf{y}^j \in \Pi_{\phi_{k_j}}(x_0^{k_j})$ τέτοιο ώστε $\mathbf{y}^j \to \mathbf{y}$ εντός του $X^{\mathbf{N}}$ καθώς το $j \to \infty$. Θέτοντας $y_0^j = x_0^{k_j}$, οποτεδήποτε $j \in \mathbf{N}$, αν το $t \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ είναι τέτοιο ώστε η ακολουθία $(y_{t-1}^j)_{j \in \mathbf{N}}$ να έχει ήδη οριστεί εις τρόπον ώστε $y_{t-1}^j \to y_{t-1}$ εντός του X καθώς το $j \to \infty$, τότε αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $j \in \mathbf{N}$, υπάρχει $y_t^j \in \phi_{k_j}(y_{t-1}^j)$ τέτοιο ώστε $y_t^j \to y_t$ εντός του X καθώς το $j \to \infty$. Πράγματι, επειδή $\phi_k \to \phi$ εντός του $C(X, K(X))$ καθώς το $j \to \infty$, το γεγονός ότι - για πλήρεις μετρικούς χώρους - η ομοιόμορφη σύγκλιση επί συμπαγών είναι ισοδύναμη προς τη συνεχή σύγκλιση (δείτε, για παράδειγμα, το Πρόβλημα 40 στη σελίδα 162 του *Royden* [1988]) συνεπάγεται ότι $\phi_{k_j}(y_{t-1}^j) \to \phi(y_{t-1})$ εντός του $K(X)$ καθώς το $j \to \infty$, με άλλα λόγια, $d_H(\phi_{k_j}(y_{t-1}^j), \phi(y_{t-1})) \to 0$ καθώς το $j \to \infty$ (δείτε, για παράδειγμα, τη σελίδα 25 του *Kechris* [1995]) και δοθέντος $j \in \mathbf{N}$, η συμπάγεια του $\phi_{k_j}(y_{t-1}^j)$

συνεπάγεται ότι υπάρχει $y_t^j \in \phi_{k_j}(y_{t-1}^j)$ για το οποίο

$$d(y_t, y_t^j) = \max_{y \in \phi_{k_j}(y_{t-1}^j)} d(y_t, y) = d(y_t, \phi_{k_j}(y_{t-1}^j))$$

$$\leq \max_{y \in \phi(y_{t-1})} d(y, \phi_{k_j}(y_{t-1}^j)) = \delta(\phi(y_{t-1}), \phi_{k_j}(y_{t-1}^j)) \leq d_H(\phi(y_{t-1}), \phi_{k_j}(y_{t-1}^j))$$

Οπότε έπεται ο ισχυρισμός. Έτσι, για κάθε $j \in \mathbf{N}$, έχουμε $U_{F_{k_j},\phi_{k_j},\beta_{k_j}}(\mathbf{y}^j) \leq U_{F_{k_j},\phi_{k_j},\beta_{k_j}}(\mathbf{x}^{k_j})$ και για να συνάγουμε ότι $U_{F,\phi,\beta}(\mathbf{y}) \leq U_{F,\phi,\beta}(\mathbf{x})$, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\lim_{j\to\infty} U_{F_{k_j},\phi_{k_j},\beta_{k_j}}(\mathbf{y}^j) = U_{F,\phi,\beta}(\mathbf{y})$$

και συγχρόνως

$$\lim_{j\to\infty} U_{F_{k_j},\phi_{k_j},\beta_{k_j}}(\mathbf{x}^{k_j}) = U_{F,\phi,\beta}(\mathbf{x})$$

Χάριν ευκολίας, θα αποδείξουμε μόνον ότι $\lim\limits_{j\to\infty} U_{F_{k_j},\phi_{k_j},\beta_{k_j}}(\mathbf{x}^{k_j}) = U_{F,\phi,\beta}(\mathbf{x})$, διότι η απόδειξη ότι $\lim\limits_{j\to\infty} U_{F_{k_j},\phi_{k_j},\beta_{k_j}}(\mathbf{y}^j) = U_{F,\phi,\beta}(\mathbf{y})$ είναι πανομοιότυπη. Αλλά αυτό έπεται από το γεγονός ότι για κάθε $j \in \mathbf{N}$, έχουμε

$$|U_{F_{k_j},\phi_{k_j},\beta_{k_j}}(\mathbf{x}^{k_j}) - U_{F,\phi,\beta}(\mathbf{x})| \leq \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} |F_{k_j}(x_{t-1}^{k_j}, x_t^{k_j}) - F(x_{t-1}, x_t)|$$

$$+ \sum_{t=2}^{\infty} |\beta_{k_j}^{t-1} - \beta^{t-1}| \cdot |F_{k_j}(x_{t-1}^{k_j}, x_t^{k_j})|$$

$$\leq \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} |F_{k_j}(x_{t-1}^{k_j}, x_t^{k_j}) - F(x_{t-1}, x_t)|$$

$$+ \sum_{t=2}^{\infty} |\beta_{k_j} - \beta| \cdot |\beta_{k_j}^{t-2} + \beta_{k_j}^{t-3}\beta + ... + \beta_{k_j}\beta^{t-3} + \beta^{t-2}| \cdot \|F_{k_j}\|_\infty$$

$$\leq \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} \cdot |F_{k_j}(x_{t-1}^{k_j}, x_t^{k_j}) - F(x_{t-1}, x_t)|$$

$$+ \sum_{t=2}^{\infty} |\beta_{k_j} - \beta|(t-1)(1-\nu^{-1})^{t-2}(\|F_{k_j} - F\|_\infty + \|F\|_\infty)$$

όπου

$$\sum_{t=2}^{\infty} |\beta_{k_j} - \beta|(t-1)(1-\nu^{-1})^{t-2}(\|F_{k_j} - F\|_\infty + \|F\|_\infty)$$

$$= |\beta_{k_j} - \beta|(\|F_{k_j} - F\|_\infty + \|F\|_\infty)\nu^2 \to 0$$

καθώς το $j \to \infty$. Πράγματι, δοθέντος $\epsilon > 0$, υπάρχει $J \in \mathbf{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε ακέραιο $j \geq J$, να έχουμε $\|F_{k_j} - F\|_\infty < 1$ και υπάρχει $t' \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ τέτοιο ώστε $\sum_{t>t'} \beta^{t-1} < \frac{\epsilon}{2(2\|F\|_\infty + 1)}$. Οπότε το γεγονός ότι - για πλήρεις μετρικούς χώρους - η ομοιόμορφη σύγκλιση επί συμπαγών είναι ισοδύναμη προς τη συνεχή σύγκλιση (δείτε, για παράδειγμα, το Πρόβλημα 40 στη σελίδα 162 του *Royden* [1988]) συνεπάγεται ότι για κάθε $t \in \{1, ..., t'\}$, έχουμε

$$\lim_{j\to\infty} F_{k_j}(x_{t-1}^{k_j}, x_t^{k_j}) = F(x_{t-1}, x_t)$$

και συνεπώς υπάρχει ένας ακέραιος $J' \geq J$ τέτοιος ώστε για κάθε ακέραιο $j \geq J'$, να έχουμε

$$\sum_{t=1}^{t'} \beta^{t-1} |F_{k_j}(x_{t-1}^{k_j}, x_t^{k_j}) - F(x_{t-1}, x_t)| < \frac{\epsilon}{2}$$

που συνεπάγεται με την σειρά του ότι

$$\sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} |F_{k_j}(x_{t-1}^{k_j}, x_t^{k_j}) - F(x_{t-1}, x_t)|$$

$$\leq \sum_{t=1}^{t'} \beta^{t-1} |F_{k_j}(x_{t-1}^{k_j}, x_t^{k_j}) - F(x_{t-1}, x_t)|$$

$$+ \sum_{t>t'} \beta^{t-1}(\|F_{k_j}\|_\infty + \|F\|_\infty)$$

$$< \frac{\epsilon}{2} + \sum_{t>t'} \beta^{t-1}(\|F_{k_j} - F\|_\infty + 2\|F\|_\infty) < \epsilon$$

Έχουμε έτσι αποδείξει ότι το $\mathcal{DDIHMM}_{c,c}$ είναι F_σ στο χώρο γινόμενο $C(X^2, \mathbf{R}) \times C(X, K(X)) \times (0, 1)$. **Όπερ έδει δεῖξαι**

Ανοικτό Πρόβλημα. *Είναι το σύνολο* $\mathcal{DDIHMM}_{lsc,c}$ *αναλυτικό, δηλαδή,* $\mathbf{\Sigma}_1^1$*, στο χώρο γινόμενο* $LSC(X^2, \mathbf{R}) \times C(X, K(X)) \times (0, 1)$*;*

Βιβλιογραφία

A. S. KECHRIS
[1995] *Classical Descriptive Set Theory*, *Springer*, *New York*.

H. L. ROYDEN
[1988] *Real Analysis*, *Third Edition*, *MacMillan Publishing Company*, *New York*.

N. L. STOKEY, *R. J. LUCAS Jr. and E. C. PRESCOTT*
[1989] *Recursive Methods in Economic Dynamics*, *Harvard University Press*, *Cambridge*.