

■ **Η ΧΡΗΣΗ ΣΙΓΜΟΕΙΔΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ
ΓΙΑ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΕΣ ΠΡΟΒΛΕΨΕΙΣ.
ΜΙΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΑ ΠΟΣΟΣΤΑ ΔΙΕΙΣΔΥΣΗΣ
ΤΗΣ ΕΓΧΡΩΜΗΣ ΤΗΛΕΟΡΑΣΗΣ.**

Πέτρος Χριστοδούλου

Πανεπιστήμιο Μακεδονίας

Περίληψη

Οι σιγμοειδείς συναρτήσεις χρησιμοποιήθηκαν και αποδείχθηκαν κατάλληλες σε πολλές περιπτώσεις τεχνολογικών προβλέψεων. Η ακολουθούμενη διαδικασία περιλαμβάνει τέσσερα στάδια: αναγνώριση, εκτίμηση, διαγνωστικό έλεγχο και αξιολόγηση των προβλέψεων. Στην παρούσα περίπτωση επιλέγεται η Γενική Τροποποιημένη Εκθετική και ειδικότερα η Gompertz ως η πλέον κατάλληλη. Η εκτίμηση των παραμέτρων γίνεται με τη μη-

γραμμική μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων. Στο επόμενο στάδιο (διαγνωστικός έλεγχος) διαπιστώνεται η ύπαρξη αυτοσυσχέτισης δευτέρας τάξεως, η οποία αντιμετωπίζεται με δύο τρόπους: α) με τις κατάλληλες διορθώσεις για την περίπτωση και β) με προσθήκη μιας ημιτονοειδούς (περιοδικής) συνάρτησης στο υπόδειγμα που κρίνεται ως πιο κατάλληλη. Τέλος, γίνεται σύγκριση των προβλέψεων που γίνονται με τα διάφορα υποδείγματα.

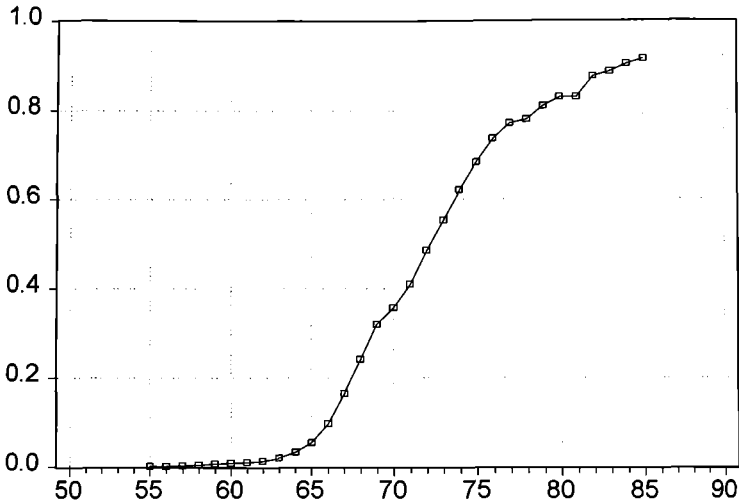
1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η καταλληλότητα των συναρτήσεων χρονικής τάσης και ιδίως των σιγμοειδών – για τεχνολογικές προβλέψεις, έχει γίνει παγκοσμίως αποδεκτή εδώ και πολλά χρόνια και ο αριθμός των δημοσιευμένων σχετικών εργασιών συνεχώς αυξάνεται. Βλέπε π.χ. Meade (1984) και Young (1993). Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιούνται τα δημοσιευμένα δεδομένα από τους Lee και Lu (1992) που αφορούν τα ποσοστά υποκατάστασης της ασπρόμαυρης τηλεόρασης από την έγχρωμη κατά το χρονικό διάστημα (1955 – 1985) στις ΗΠΑ, (βλέπε Σχήμα 1), με σκοπό την επίδειξη μιας εναλλακτικής διαδικασίας του τρόπου διενέργειας των προβλέψεων. Προς τούτο:

- (i) Επιλέγεται κατ' αρχάς μια κατάλληλη συνάρτηση χρονικής τάσης (συγκεκριμένα η Gompertz)
- (ii) Γίνεται εκτίμηση των παραμέτρων της με τη μη- γραμμική μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων και αξιολογούνται τα αποτελέσματα.
- (iii) Ακολουθεί ο διαγνωστικός έλεγχος των καταλοίπων εκ του οποίου προκύπτει η ύπαρξη αυτοσυσχέτισης β' τάξεως η οποία αποδίδεται σε οικονομικούς / εμπορικούς κύκλους.

Λόγω των ευρημάτων αυτών: (iv) γίνεται επανεκτίμηση του υποδείγματος με α) διόρθωση για αυτοσυσχέτιση α' τάξεως, β) διόρθωση για αυτοσυσχέτιση β' τάξεως και γ) με την προσθήκη μιας ημιτονοειδούς συνάρτησης στο υπόδειγμα. Τέλος: (v) υπολογίζονται οι προβλέψεις και γίνεται η αξιολόγησή τους.

Όλα τα διαγράμματα και οι υπολογισμοί έγιναν με το πρόγραμμα E-Views 2,0. (Econometric Views).



ΣΧΗΜΑ 1. Ποσοστά διείσδυσης της έγχρωμης τηλεόρασης.

2. ΕΙΔΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ (ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΩΝ) ΧΡΟΝΙΚΗΣ ΤΑΣΗΣ.

Οι γνωστότερες συναρτήσεις χρονικής τάσης που χρησιμοποιούνται στην πράξη είναι: (βλέπε και Spiegel (1988), Johnson (1972), Meade (1984), Meade and Islam (1995) κτλ.).

A) Τα πολυώνυμα: $y_t = \alpha + \beta t + \gamma t^2 + \dots$ (ευθεία, παραβολή, κτλ.)

B) Οι εκθετικές: $y_t = \exp(\alpha + \beta t + \gamma t^2 + \dots)$ (απλή εκθετική, λογαριθμική παραβολή, κτλ.)

Γ) Οι σιγμοειδείς:

(i) Η Γενική Τροποποιημένη Εκθετική (GME)

$$y_t = \alpha / (1 + \varphi \exp(-\gamma(t - \delta)))^{1/\varphi}$$

όπου α = άνω ασύμπτωτος, φ = εκθέτης, γ = κλίση και δ = σημείο καμπής.

Ειδικές περιπτώσεις της GME

1) $\varphi = 1$ Λογιστική $y_t = \alpha / (1 + \exp(-\gamma(t - \delta)))$

2) $\varphi = 0$ Gompert $y_t = \alpha \exp(-\exp(-\gamma(t - \delta)))$

3) $\varphi = -1$ Απλή Τροποποιημένη Εκθετική

$$y_t = \alpha \cdot (1 - \exp(-\gamma(t - \delta)))$$

(ii) Εκθετική αντίστροφη: $y_t = \exp(\alpha - \beta/t)$

(iii) Weibull: $y_t = \alpha(1 - \exp(-(t/\beta)^\gamma))$

όταν $\gamma = 1$ έχουμε την Απλή Τροποποιημένη Εκθετική.

(iv) Λογαριθμική Λογιστική: $y_t = \alpha / (1 + \beta \exp(-\gamma \log(t)))$

Οι παραπάνω τρεις συναρτήσεις εξαρτώνται από το έτος βάσης.

2.1 ΕΠΕΚΤΑΣΕΙΣ*A) Προσθήκη σταθερού όρου*

1) Τροποποιημένη Λογιστική / Υπόδειγμα Bass ως συνάρτηση του χρόνου:

$$y_t = (\alpha - \beta \exp(-\gamma t)) / (1 + \delta \exp(-\gamma t))$$

2) Τροποποιημένη Gompertz

3) Γενική Τροποποιημένη Εκθετική με σταθερό όρο.

B) Ύπαρξη αυτοσυσχέτισης α' τάξεως.

Όταν $y_t = f(t) + \varepsilon_t$ και $\varepsilon_t = \rho \varepsilon_{t-1} + u_t$

όπου $u_t = \text{iid}(N(0, \sigma_n^2))$ το υπόδειγμα γίνεται:

$$y_t = \rho y_{t-1} + f(t) - \rho f(t-1) + u_t, \text{ Mar-Molinerio (1980).}$$

Γ) Ύπαρξη οικονομικών/εμπορικών κύκλων

Στο υπόδειγμα προσθέτονται μία ή δύο ημιτονοειδείς συναρτήσεις Shearer (1994), οπότε:

$$y_t = f(t) + \alpha_1 \sin\left(\frac{\beta_1 + t}{2\pi\ell_1}\right) + \alpha_2 \sin\left(\frac{\beta_2 + t}{2\pi\ell_2}\right) + u_t$$

όπου α = πλάτος (amplitude)

β = συγχρονισμός (phasing / timing) και

ℓ_i = μήκος του κύκλου (length of the cycle).

3. ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ ΤΩΝ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΩΝ

Για την αναγνώριση του καταλληλότερου υποδείγματος χρονικής τάσης χρησιμοποιούνται απλές γραφικές μέθοδοι, όπως η εξέταση για γραμμικότητα των διαγραμμάτων διασποράς των δεδομένων ως προς τον χρόνο, των διαφορών (πρώτων, δεύτερων, κτλ.), και διαφόρων μετασχηματισμών αυτών (π.χ. λογαριθμικών, αντιστροφών κτλ.), βλέπε και Spiegel (1988).

Ακριβέστερη και πρωτοποριακή για την εποχή της θεωρείται η μέθοδος των Gregg et al. (1964) η οποία παρουσιάζεται στη συνέχεια και περιλαμβάνει μεθόδους αναγνώρισης σιγμοειδών συναρτήσεων.

3.1 ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗΣ GREGG ET AL.

Αν $(MA)_t$ = κινητός μέσος στο χρόνο t

$$= (y_{t-p} + \dots + y_{t-1} + y_t + y_{t+1} + \dots + y_{t+p}) / (2p+1)$$

και $(S)_t$ = κλίση στο χρόνο t .

$$= (-p \cdot y_{t-p} - \dots - y_{t-1} + y_{t+1} + \dots + p \cdot y_{t+p}) / \left(\frac{p}{3} \cdot (p+1)(2p+1)\right)$$

$p = 1, 2, 3 \dots$ εξετάζονται τα εξής διαγράμματα διασποράς:

Διάγραμμα	Κλίση απλής παλινδρόμησης	Κατάλληλη συνάρτηση
S	0	Ευθεία
S	$\neq 0$	Παραβολή
S/MA	0	Απλή Εκθετική
S/MA	$\neq 0$	Λογαριθμική Παραβολή
log (S)	αρνητική	Τροποποιημένη Εκθετική
log (S/MA)	"	Gompertz
log (S/MA ²)	"	Λογιστική
log(S)-(φ-1) /φ log (MA)	"	Γενική Τροποποιημένη Εκθετική

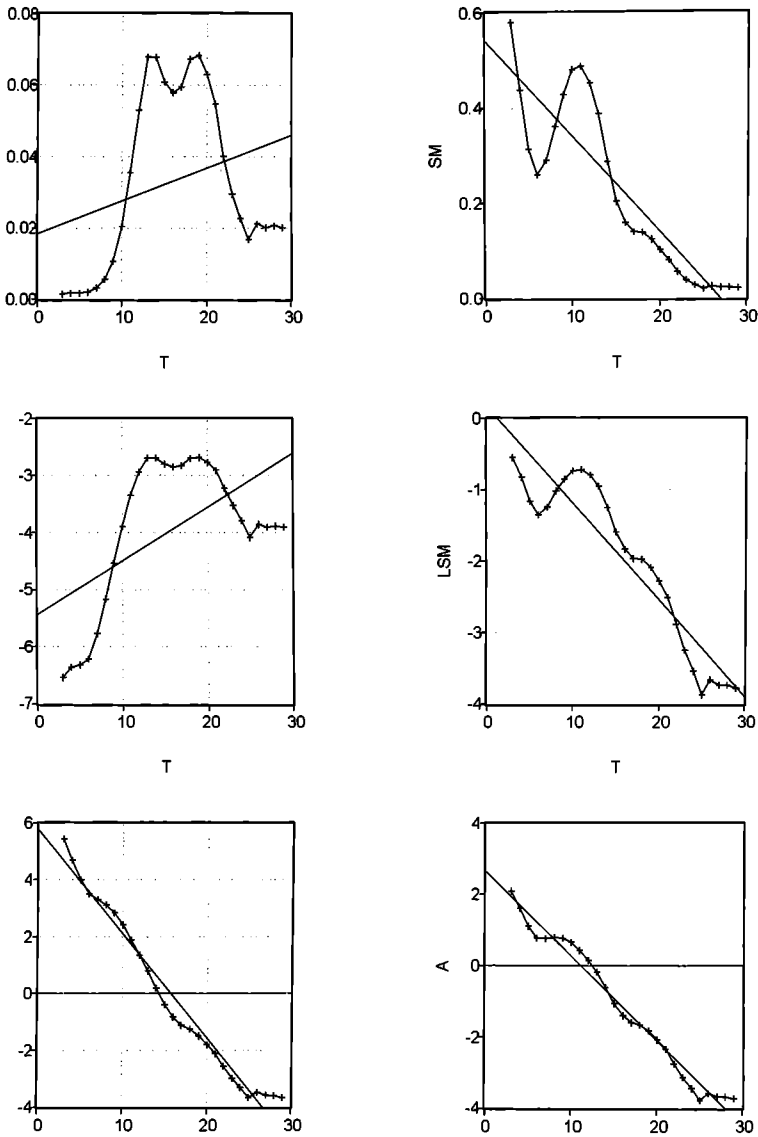
Εκτίμηση της $(\phi-1)/\phi$ λαμβάνεται από την παλινδρόμηση

$$\log(S) = \alpha + \beta \cdot t + (\phi - 1) / \phi \log (MA) + u_t$$

Στην παρούσα περίπτωση η εκτιμημένη τιμή της $(\phi-1)/\phi$ είναι 1,44.

3.2 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗΣ

Τα αποτελέσματα αναγνώρισης της μεθόδου Gregg et al. παρουσιάζονται στο Σχήμα 2. Από την εξέταση των διαγραμμάτων προκύπτει ότι καταλληλότερες είναι η GME και η Gompertz.



ΣΧΗΜΑ 2. Διαγράμματα διασποράς και ευθεία παλινδρόμησης:

α) (S,T) ,

β) $(S/MA,T)$,

γ) $(\text{Log}(S),T)$,

δ) $(\text{Log}(S/MA),T)$

ε) $(\text{Log}(S/MA^2),T)$,

στ) $((\text{Log}(S)-1,44\text{Log}(MA),T)$.

ΠΙΝΑΚΑΣ 1.

Αποτελέσματα Εκτιμήσεων Παραμέτρων							
	α	β	γ	ϕ	R^2	RSS	D-W
Logistic	0,891	0,339	17,4		0,996725	0,0128	0,47
Gompertz (αν. όριο 100%)	1	0,181	16,1		0,997917	0,0081	0,59
Gompertz	0,948	0,204	15,8		0,998873	0,0044	1,03
G.M.E	0,952	0,199	15,7	-0,041 (p=0,72) N.S.	0,99878	0,0044	1,03
Weibull	0,880	19,082	3,986		0,996912	0,0121	0,49

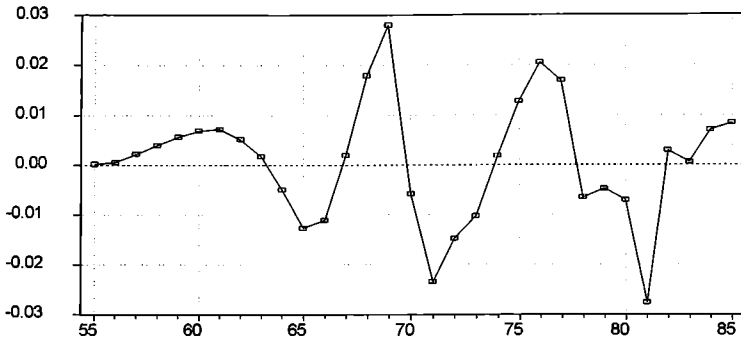
4. ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΚΑΙ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΤΩΝ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΩΝ

Για την εκτίμηση των παραμέτρων των σιγμοειδών συναρτήσεων χρησιμοποιείται η μη-γραμμική μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων, η οποία απαιτεί την εύρεση κατάλληλων αρχικών τιμών. Οι τιμές αυτές βρίσκονται είτε εμπειρικά ή ακριβέστερα με την μέθοδο των τριών σημείων Gregg et al. (1964).

Τα αποτελέσματα των εκτιμήσεων παρουσιάζονται στον Πίνακα 1.

Παρατηρούμε ότι:

- α) Η Logistic έχει την χειρότερη προσαρμογή στα δεδομένα, πράγμα αναμενόμενο από το στάδιο αναγνώρισης και πρέπει να αποκλεισθεί. Ομοίως και η Weibull, η προσαρμογή της οποίας δεν βελτιώθηκε με την αλλαγή βάσης.
- β) Ο συντελεστής ϕ της GME δεν διαφέρει σημαντικά από το μηδέν. Επομένως αντί της GME μπορεί να χρησιμοποιηθεί η απλούστερη Gompertz (3 παράμετροι). Η Gompertz είναι ασύμμετρη ως προς το σημείο καμπής που εμφανίζεται στο 1/3 του ανωτέρου ορίου α . (στην περίπτωση μας το έτος 1970). Ο δε ρυθμός αύξησης της φθίνει εκθετικά με τον χρόνο.
- γ) Παλαιότερα λόγω τεχνικών δυσκολιών, ως ανώτερο όριο λαμβάνονταν το 100%. Όπως όμως δείχνουν οι υπολογισμοί μας, αυτό μπορεί να μην ισχύει. (Στην περίπτωση μας αυτό σημαίνει ότι μπορεί να μην επιτευχθεί 100% υποκατάσταση της ασπρόμαυρης από την έγχρωμη T.V.).



ΣΧΗΜΑ 3. Κατάλοιπα από την εκτίμηση της Gompertz.

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.477	0.477	7.7477	0.005	
2	-0.098	-0.420	8.0832	0.018	
3	-0.478	-0.332	16.424	0.001	
4	-0.659	-0.464	32.854	0.000	
5	-0.358	-0.066	37.898	0.000	
6	0.019	-0.240	37.913	0.000	
7	0.371	0.030	43.769	0.000	
8	0.470	-0.109	53.611	0.000	

ΣΧΗΜΑ 4. Ανάλυση Καταλοίπων.

5. ΔΙΑΓΝΩΣΤΙΚΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ ΤΩΝ ΚΑΤΑΛΟΙΠΩΝ

Τα κατάλοιπα μετά την εκτίμηση του υποδείγματος παρουσιάζονται στο Σχήμα 3 και τα διαγράμματα των συναρτήσεων αυτοσυσχετίσεων (a.f.) και μερικών αυτοσυσχετίσεων (p.a.f.) στο Σχήμα 4.

Από την εξέτασή τους προκύπτει η ύπαρξη οικονομικού κύκλου και αναγνωρίζεται η ύπαρξη αυτοσυσχέτισης α' ή β' τάξεως.

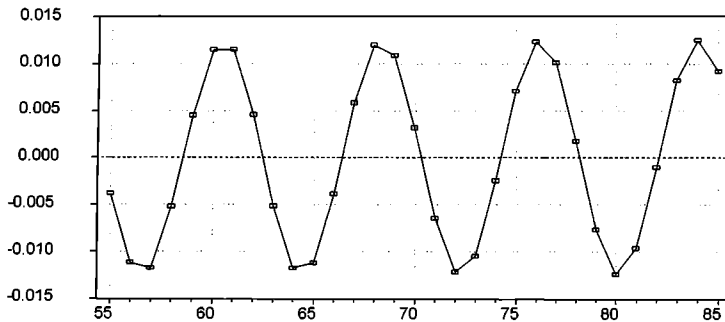
6. ΕΠΑΝΕΚΤΙΜΗΣΗ ΤΩΝ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΩΝ

Η επανεκτίμηση των υποδειγμάτων γίνεται με δύο τρόπους:

α) Με την προσθήκη μιας ημιτονοειδούς συνάρτησης στην

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.

Αποτελέσματα Εκτιμήσεων Παραμέτρων						
	α	β	γ	R^2	RSS	D-W
Gompertz (SIN)	0,943 $\alpha=0,0125$	0,206 $\beta=3,314$	15,8 $\ell=1,249$	0,999487	0,0020	1,56
GOM/AR(1)	0,951	0,203 AR(1)=0,486	15,8	0,999097	0,0034	1,59
GOM/AR(2)	0,948	0,204 AR(1)=0,685 AR(2)=-0,426	15,8	0,999220	0,0028	2,28



ΣΧΗΜΑ 5. Εκτίμηση του εμπορικού Κύκλου.

Gompertz. Με αυτόν τον τρόπο γίνεται ταυτόχρονα και η εκτίμηση του οικονομικού κύκλου.

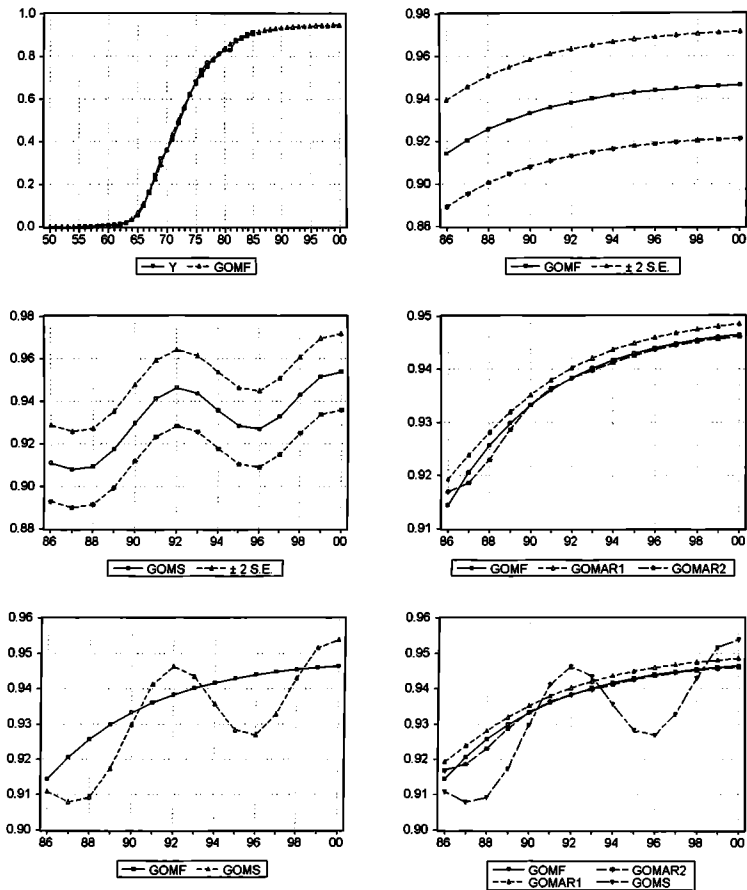
β) Με την διόρθωση αυτοσυσχέτισης α' και β' τάξεως. (Η μέθοδος του Mar-Molinero (1980) βασίζεται στην μέθοδο Durbin που γενικεύεται και σε περιπτώσεις αυτοσυσχέτισης ανωτέρας τάξεως όπως η παρούσα).

Τα αποτελέσματα εκτίμησης παρουσιάζονται στον Πίνακα 2 και ο οικονομικός κύκλος που έχει διάρκεια 5 περίπου έτη στο Σχήμα 5.

Σε όλες τις περιπτώσεις παρατηρείται σημαντική βελτίωση της προσαρμογής στα δεδομένα και ελάττωση της αυτοσυσχέτισης.

7. ΠΡΟΒΛΕΨΕΙΣ

Οι προβλέψεις των διαφόρων υποδειγμάτων παρουσιάζονται στο Σχήμα 6, και συνοδεύονται από τις ανάλογες



ΣΧΗΜΑ 6. Προβλέψεις:

α) *Gompertz* και αρχικά δεδομένα,

β) *Gompertz* $\pm 2S.E.$,

γ) *Gompertz(SIN)* $\pm 2S.E.$,

δ) *Gompertz*, *Gompertz(AR1)*, *Gompertz(AR2)*,

ε) *Gompertz*, *Gompertz(SIN)*

στ) *Gompertz*, *Gompertz(AR1)*, *Gompertz(AR2)*, *Gompertz(SIN)*.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.

Αξιολόγηση προβλέψεων (1955-1985), 31 παρατηρήσεις.						
	Logistic	GME	Gompertz	Gom($\alpha=1$)	Gom (S)	Weibull
RMSE	0,0203	0,01192	0,01192	0,0162	0,00804	0,0197
MAE	0,0158	0,00907	0,00907	0,01267	0,00661	0,01469
MAPE	134,62	26,21	26,211	26,566	188,815	30,291
Theils In.Co.	0,01898	0,01113	0,01113	0,01508	0,00751	0,01843
Bias prop.	0,04096	0,00373	0,00373	0,02857	0,02815	0,02006
Variance prop.	0,06768	0,00271	0,00271	0,02311	0,03146	0,03580
Covar. prop.	0,89137	0,99355	0,99355	0,94831	0,94038	0,94413

Σημείωση: Εξαιρούνται οι περιπτώσεις με διόρθωση για αυτοσυσχέτιση α' και β' τάξεως.

ζώνες εμπιστοσύνης. Οι ζώνες εμπιστοσύνης (confidence bands), που υπολογίζονται από το πρόγραμμα είναι τα ± 2 S.E. (τυπικά σφάλματα εκτίμησης). Όταν στα υποδείγματα περιλαμβάνονται και χρονικές υστερήσεις ή όροι ARMA, οι προβλέψεις ονομάζονται Δυναμική Προσομοίωση (Dynamic Simulation), αρχίζουν από τον χρόνο (t+1) και οι ζώνες εμπιστοσύνης έχουν σχήμα βεντάλιας.

Η επίδραση της διόρθωσης για αυτοσυσχέτιση α' ή β' τάξεως στις τιμές των παραμέτρων των υποδειγμάτων είναι ελάχιστη, στις δε προβλέψεις διαρκεί μόνο 2 ή 3 χρονικές περιόδους.

Αξιολόγηση των προβλέψεων μπορεί να γίνει (i) υποκειμενικά και (ii) με τα διάφορα στατιστικά μέτρα όπως το MSE, MAPE κτλ. (ex-post). Στην παρούσα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα αξιολόγησης εντός της δειγματικής περιόδου για τα διάφορα υποδείγματα στον Πίνακα 3.

8. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Καταλληλότερη θεωρείται η συνάρτηση Gompertz, στην οποία τείνει η GME. Η διόρθωση για αυτοσυσχέτιση α' και β' τάξεως βελτιώνει την προσαρμογή του υποδείγματος. Η προσθήκη μιας ημιτονοειδούς συνάρτησης βελτιώνεται περισσότερο την προσαρμογή του υποδείγματος, εξαλείφει την αυτοσυσχέτιση στα κατάλοιπα και δίνει μια εκτίμηση του οικονομικού / εμπορικού κύκλου και πιθανώς ακριβέστερες προβλέψεις αν το φαινόμενο συνεχισθεί (δηλ. δεν παρουσιασθούν διαρθρωτικές αλλαγές στο σύστημα.).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Franses, P.H., (1994): A Method to Select between Gompertz and Logistic Trend Curves. *Technological Forecasting and Social Change* 46, p-p 45-49.
- Gregg J.V., Hossell C.H. & Richardson J. T., (1964): *Mathematical Trend Curves: an Aid to Forecasting. I.C.I. Monograph No 1*, Oliver and Boyd, Edinburgh.
- Johnston J. (1972) *Econometric Methods*, 2nd Edition, McGraw-Hill.
- Lee J.C., Lu K.W. & Horng S.C. (1987) On a family of Data-Based Transformed Models Useful in Forecasting Technological Substitutions. *Technological Forecasting and Social Change* Vol. 31, p-p 61-78.
- Lee J.C. & Lu K.W. (1992) Technological Forecasting with Non-linear Models. *Journal of Forecasting* Vol. 11, p-p 195-206.
- Lilien D.M. et al (1996): *Eviews (Econometric Views) Version 2.0*, Quantitative Micro Software Los Angeles.
- Mar-Moliner, C. (1980): Tractors in Spain: a Logistic Analysis, *Journal of Operational Research Society* 31, 141-152.
- McGowan, I., (1986): Note: The Use of Growth Curves in Forecasting Market Development. *Journal of Forecasting*, Vol. 5, pp. 69-71.
- Meade N. (1984): The Use of Growth Curves in Forecasting Market Development – a Review and Appraisal *Journal of Forecasting*, 3, pp. 429 – 451.
- Meade N., & Islam T., (1995): Forecasting with growth curves: An empirical comparison *International Journal of Forecasting*. 11, p-p 119- 215.
- Sharif M.N & Islam M.N. (1980): The Weibull Distributions as a General Model for Forecasting Technological Change. *Technological Forecasting and Social Change*, 18, p-p 247-256.
- Shearer P., (1994): *Business Forecasting and Planning*. Prentice Hall Int. (U.K.)
- Spiegel M.R. (1988): *Theory and Problems of Statistics*, 2nd ed. Schaum's Outline Series.
- Young P. (1993) Technological Growth Curves. A competition of Forecasting Models. *Technological Forecasting and Social Change* 44, p-p 375-389.
- Young P. and Ord J.K. (1989) Model Selection and Estimation for Technological Growth Curves. *International Journal of Forecasting*. Vol. 5 p-p 501-513.