

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ  
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ  
ΤΜΗΜΑΤΟΣ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑΣ ΤΟΥ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΩΝ  
ΣΗΜΕΙΩΝ

Διπλωματική Εργασία

του

Πόνου Παύλου

Θεσσαλονίκη, 07/2013



ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑΣ ΤΟΥ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΩΝ  
ΣΗΜΕΙΩΝ

Πόνος Παύλος

Πτυχίο Εφαρμοσμένης Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Μακεδονίας, 2010

Διπλωματική Εργασία

υποβαλλόμενη για τη μερική εκπλήρωση των απαιτήσεων του

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟΥ ΤΙΤΛΟΥ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ

Επιβλέπων Καθηγητής  
Σαμαράς Νικόλαος

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 02/07/2013

Σαμαράς Νικόλαος

Σατρατζέμη Μάγια

Μαργαρίτης Κωνσταντίνος

.....

.....

.....

Πόνος Παύλος

.....

# Περίληψη

Στην παρούσα διπλωματική εργασία μελετάται η υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου εξωτερικών σημείων. Για τη μελέτη αυτή χρησιμοποιήθηκε μία πληθώρα βέλτιστων στιγμιοτύπων που κατασκευάστηκαν μέσα από γεννήτριες τυχαίων προβλημάτων λαμβάνοντας υπόψιν διάφορα χαρακτηριστικά των γραμμικών προβλημάτων. Αρχικά παρουσιάζεται το θεωρητικό υπόβαθρο για τον αλγόριθμο εξωτερικών σημείων που είναι απαραίτητο για την ανάλυση που θα ακολουθήσει. Στη συνέχεια γίνεται λεπτομερής περιγραφή του πειράματος που ακολουθήθηκε ώστε να δημιουργηθούν και να επιλυθούν τα 7873 τυχαία γραμμικά προβλήματα τα οποία εκτιμήθηκαν στατιστικά μέσω της ανάλυσης παλινδρόμησης. Τα αποτελέσματα που προέκυψαν επιβεβαίωσαν τις αρχικές μας προβλέψεις για τη καλή υπολογιστική συμπεριφορά του αλγορίθμου εξωτερικών σημείων. Τελικά καταλήξαμε σε συγκεκριμένα μοντέλα χρονισμού που περιγράφουν με τον καλύτερο δυνατό τρόπο τη σχέση ανάμεσα στο χρόνο εκτέλεσης (cpu) και των ανεξάρτητων μεταβλητών των γραμμικών προβλημάτων. Παρόμοια μοντέλα χρονισμού εξήχθησαν και για τον αριθμό των επαναλήψεων (niter). Για να βεβαιωθούμε ότι τα συγκεκριμένα μοντέλα χρονισμού μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε προβλέψεις της απόδοσης του αλγορίθμου εξωτερικών σημείων, ακολουθήσαμε τη διαδικασία της επικύρωσης των αποτελεσμάτων όπου δημιουργήθηκαν 790 διαφορετικά τυχαία γραμμικά προβλήματα. Το αποτέλεσμα ήταν, ότι τα μοντέλα που προέκυψαν από την ανάλυση παλινδρόμησης ήταν αντιπροσωπευτικά της απόδοσης του αλγορίθμου εξωτερικών σημείων.

***Λέξεις Κλειδιά: Γραμμικός Προγραμματισμός, Αλγόριθμος Εξωτερικών Σημείων, Γραμμικό Πρόβλημα, Ανάλυση Παλινδρόμησης, Μοντέλα Χρονισμού***

## **Abstract**

In this master thesis, we investigate the computational complexity of the exterior point algorithm. For this purpose, a plethora of examples were randomly generated, taking into account the different characteristics of linear problems. Initially, there is a presentation of the theoretical foundation of the exterior point algorithm, which is necessary for the computational complexity analysis. Then, there is a detailed description of the procedure we followed in order to design the experiment, to create and solve 7873 random linear problems, which were statistically evaluated through regression analysis. The extracted results confirmed our initial expectations about the good behavior of the exterior point algorithm. Eventually, we were led to specific timing models, which best illustrate the relationship among the cpu time and the several characteristics of the linear problems. Similar timing models have been extracted in relation to the number of iterations (niter). To ensure that these particular timing models can be used to forecast the performance of other linear problems, we validated the results we had reached previously and we generated 790 different random linear problems. The outcome was, that the models which were derived from the regression analysis were indeed representative of the performance of the external point algorithm.

***Keywords: Linear Programming, Exterior Point Algorithm, Linear Problem, Regression Analysis, Timing Models***

## Ευχαριστίες

Με την ολοκλήρωση της διπλωματικής μου εργασίας, μου δίνεται η δυνατότητα να ευχαριστήσω θερμά τον καθηγητή μου κ. Σαμαρά Νικόλαο για την πολύτιμη βοήθεια του και την εμπιστοσύνη που μου έδειξε. Για την εκπόνηση της εργασίας απαιτήθηκε αρκετός κόπος καθώς ήταν η πρώτη φορά που ασχολήθηκα τόσο αναλυτικά με ένα αντικείμενο που με ενδιαφέρει αλλά ποτέ στο παρελθόν δεν είχα την ευκαιρία να ασχοληθώ. Αρκετά συχνά εμφανίστηκαν δυσκολίες οι οποίες χάρη στις γνώσεις και στην καθοδήγηση του κ. Σαμαρά δεν θα κατάφερνα να ξεπεράσω. Επίσης, τον ευχαριστώ θερμά για τους κώδικες που μου παραχώρησε, οι οποίοι προγραμματίστηκαν από τον ίδιο. Ο προγραμματισμός του αλγορίθμου εξωτερικών σημείων από την αρχή θα ήταν μία ιδιαίτερα χρονοβόρα διαδικασία η οποία θα καθυστερούσε σημαντικά την ολοκλήρωση της εργασίας μου. Για τους λόγους αυτούς, τον ευχαριστώ θερμά και ελπίζω να φανώ άξιος της εμπιστοσύνης και του χρόνου που αφιέρωσε.

Ευχαριστώ επίσης θερμά την οικογένειά μου και τους δικούς μου ανθρώπους για το κουράγιο και τη συμπαράσταση που μου προσέφεραν αλλά και τη κατανόηση για το λίγο χρόνο που τους αφιέρωσα όλο αυτό τον καιρό. Η στήριξη τους ήταν καταλυτική για τη συνέχιση των προσπαθειών μου και τους ευχαριστώ θερμά για αυτό.

# Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1: Εισαγωγή.....	1
1.1 Ο Γραμμικός Προγραμματισμός.....	1
1.2 Ιστορική αναδρομή.....	2
1.3 Εφαρμογές και χρήσεις του Γραμμικού Προγραμματισμού.....	4
1.4 Γνωστοί Αλγόριθμοι Γραμμικού Προγραμματισμού.....	6
1.5 Σκοπός και οργάνωση της εργασίας.....	8
Κεφάλαιο 2: Ο Αλγόριθμος Εξωτερικών Σημείων.....	11
2.1 Το γραμμικό πρόβλημα.....	11
2.2 Ο Αλγόριθμος Εξωτερικών Σημείων.....	13
2.2.1 Γεωμετρία Αλγορίθμου Εξωτερικών Σημείων.....	13
2.2.2 Περιγραφή του αλγορίθμου Εξωτερικών Σημείων.....	14
2.3 Παραδείγματα επίλυσης γραμμικών προβλημάτων.....	18
2.3.1 Επίλυση ενός βέλτιστου γραμμικού προβλήματος.....	18
2.3.2 Επίλυση ενός απεριόριστου γραμμικού προβλήματος.....	26
Κεφάλαιο 3: Περιγραφή των δεδομένων της υπολογιστικής μελέτης.....	31
3.1 Υπολογιστικό περιβάλλον για τη δημιουργία των γραμμικών προβλημάτων.....	31
3.2 Δημιουργία γραμμικών προβλημάτων.....	32
3.3 Χαρακτηριστικά γραμμικών προβλημάτων.....	33
3.3.1 Κατηγορία Α.....	34
3.3.2 Κατηγορία Β.....	34
3.3.3 Κατηγορία D.....	35
3.3.4 Κατηγορία E.....	36
Κεφάλαιο 4: Επίλυση των γραμμικών προβλημάτων με τον αλγόριθμο εξωτερικών σημείων.....	37
4.1 Υπολογιστικό περιβάλλον για την επίλυση των γραμμικών προβλημάτων.....	37
4.2 Αποτελέσματα υπολογιστικής μελέτης.....	38
4.3 Κατηγοριοποίηση των γραμμικών προβλημάτων με βάση το αποτέλεσμα του αλγορίθμου.....	39
4.4 Προβλήματα κατά την επίλυση των γραμμικών προβλημάτων.....	41
Κεφάλαιο 5: Υπολογιστική πολυπλοκότητα αλγορίθμου εξωτερικών σημείων.....	43
5.1 Ανάλυση παλινδρόμησης.....	43
5.1.1 Γραμμική παλινδρόμηση – Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων.....	44
5.2 Υπολογιστικό περιβάλλον για την ανάλυση παλινδρόμησης.....	46
5.3 Μοντέλα χρονισμού.....	47
5.3.1 Κατηγορία Α.....	51
5.3.1.1 Χρόνος εκτέλεσης (cpu).....	51
5.3.1.2 Αριθμός επαναλήψεων (niter).....	55
5.3.2 Κατηγορία Β.....	59
5.3.2.1 Χρόνος εκτέλεσης (cpu).....	59
5.3.2.2 Αριθμός επαναλήψεων (niter).....	62
5.3.3 Κατηγορία D.....	66
5.3.3.1 Χρόνος εκτέλεσης (cpu).....	66
5.3.3.2 Αριθμός επαναλήψεων (niter).....	69
5.3.4 Κατηγορία E.....	72
5.3.4.1 Χρόνος εκτέλεσης (cpu).....	72
5.3.4.2 Αριθμός επαναλήψεων (niter).....	76
5.3.5 Σύνολο των γραμμικών προβλημάτων.....	79

5.3.5.1 Χρόνος εκτέλεσης (cpu).....	79
5.3.5.2 Αριθμός επαναλήψεων (niter).....	83
5.4 Επικύρωση μοντέλων χρονισμού γραμμικών προβλημάτων.....	87
5.4.1 Αποτελέσματα επικύρωσης μοντέλων χρονισμού.....	89
Κεφάλαιο 6: Συμπεράσματα – Προτάσεις.....	92
Βιβλιογραφία.....	94



## Περιεχόμενα Πινάκων

Πίνακας 1.1 – Πολυπλοκότητες αλγορίθμων Γραμμικού Προγραμματισμού.....	8
Πίνακας 2.1 – Λεκτική περιγραφή Αλγορίθμου Εξωτερικών Σημείων.....	17
Πίνακας 3.1 – Υπολογιστικό περιβάλλον δημιουργίας των γραμμικών προβλημάτων.....	31
Πίνακας 3.2 – Εύρος τιμών των διανυσμάτων $A$ , $b$ , $c$ και $Eqn$ .....	32
Πίνακας 3.3 – Χαρακτηριστικά γραμμικών προβλημάτων Κατηγορίας $A$ .....	34
Πίνακας 3.4 – Χαρακτηριστικά γραμμικών προβλημάτων Κατηγορίας $B$ .....	35
Πίνακας 3.5 – Χαρακτηριστικά γραμμικών προβλημάτων Κατηγορίας $D$ .....	36
Πίνακας 3.6 – Χαρακτηριστικά γραμμικών προβλημάτων Κατηγορίας $E$ .....	36
Πίνακας 4.1 – Υπολογιστικό περιβάλλον επίλυσης των γραμμικών προβλημάτων.....	38
Πίνακας 4.2 – Κατηγοριοποίηση γραμμικών προβλημάτων με βάση το αποτέλεσμα επίλυσης.....	40
Πίνακας 4.3 – Αριθμός γραμμικών προβλημάτων που αντικαταστάθηκαν ανά κατηγορία επίλυσης.....	42
Πίνακας 5.1 – Υπολογιστικό περιβάλλον ανάλυσης παλινδρόμησης των γραμμικών προβλημάτων.....	47
Πίνακας 5.2 – Ανάλυση παλινδρόμησης του χρόνου εκτέλεσης (cpu) και των ανεξάρτητων μεταβλητών στο σύνολο των γραμμικών προβλημάτων.....	49
Πίνακας 5.3 – Ανάλυση παλινδρόμησης του αριθμού των επαναλήψεων (niter) και των ανεξάρτητων μεταβλητών στο σύνολο των γραμμικών προβλημάτων.....	50
Πίνακας 5.4 – Ανάλυση παλινδρόμησης του χρόνου εκτέλεσης (cpu) και των ανεξάρτητων μεταβλητών στην Κατηγορία $A$ αραιών γραμμικών προβλημάτων.....	52
Πίνακας 5.5 – Ανάλυση παλινδρόμησης του αριθμού των επαναλήψεων (niter) και των ανεξάρτητων μεταβλητών στην Κατηγορία $A$ αραιών γραμμικών προβλημάτων.....	56
Πίνακας 5.6 – Ανάλυση παλινδρόμησης του χρόνου εκτέλεσης (cpu) και των ανεξάρτητων μεταβλητών στην Κατηγορία $B$ αραιών γραμμικών προβλημάτων.....	59
Πίνακας 5.7 – Ανάλυση παλινδρόμησης του αριθμού των επαναλήψεων (niter) και των ανεξάρτητων μεταβλητών στην Κατηγορία $B$ αραιών γραμμικών προβλημάτων.....	63
Πίνακας 5.8 – Ανάλυση παλινδρόμησης του χρόνου εκτέλεσης (cpu) και των ανεξάρτητων μεταβλητών στην Κατηγορία $D$ αραιών γραμμικών προβλημάτων.....	66
Πίνακας 5.9 – Ανάλυση παλινδρόμησης του αριθμού των επαναλήψεων (niter) και των ανεξάρτητων μεταβλητών στην Κατηγορία $D$ αραιών γραμμικών προβλημάτων.....	70
Πίνακας 5.10 – Ανάλυση παλινδρόμησης του χρόνου εκτέλεσης (cpu) και των ανεξάρτητων μεταβλητών στην Κατηγορία $E$ αραιών γραμμικών προβλημάτων.....	73
Πίνακας 5.11 – Ανάλυση παλινδρόμησης του αριθμού των επαναλήψεων (niter) και των ανεξάρτητων μεταβλητών στην Κατηγορία $E$ αραιών γραμμικών προβλημάτων.....	77
Πίνακας 5.12 – Ανάλυση παλινδρόμησης του χρόνου εκτέλεσης (cpu) και των ανεξάρτητων μεταβλητών για το σύνολο των αραιών γραμμικών προβλημάτων.....	80
Πίνακας 5.13 – Ανάλυση παλινδρόμησης του αριθμού των επαναλήψεων (niter) και των ανεξάρτητων μεταβλητών για το σύνολο των αραιών γραμμικών προβλημάτων.....	84
Πίνακας 5.14 – Πλήθος προβλημάτων ανά κατηγορία επίλυσης για την επικύρωση των μοντέλων χρονισμού.....	87
Πίνακας 5.15 – Προβλήματα που αντικαταστάθηκαν ανά κατηγορία επίλυσης πριν τη διαδικασία επικύρωσης των μοντέλων χρονισμού.....	88
Πίνακας 5.16 – Προβλήματα που αντικαταστάθηκαν ανά κατηγορία επίλυσης.....	89
Πίνακας 5.17 – Διαφορές ανάμεσα στις πραγματικές και στις εκτιμημένες τιμές των εξαρτημένων μεταβλητών ανά κατηγορία επίλυσης.....	91

## Περιεχόμενα Εικόνων

Εικόνα 2.1 – Κατηγοριοποίηση Γραμμικών Προβλημάτων.....	13
Εικόνα 2.2 – Γεωμετρική αναπαράσταση γραμμικού προβλήματος.....	13
Εικόνα 4.1 – Ένα αδύνατο γραμμικό πρόβλημα.....	40
Εικόνα 5.1 – Κατάλοιπα $\epsilon_i$ γραμμικής παλινδρόμησης.....	45
Εικόνα 5.2 – Γραφική παράσταση πλήθους περιορισμών (m) Κατηγορίας A γραμμικών προβλημάτων του χρόνου εκτέλεσης (cpu).....	53
Εικόνα 5.3 – Γραφική παράσταση πλήθους μεταβλητών (n) Κατηγορίας A γραμμικών προβλημάτων του χρόνου εκτέλεσης (cpu).....	53
Εικόνα 5.4 – Γραφική παράσταση πυκνότητας (density) γραμμικών προβλημάτων Κατηγορίας A του χρόνου εκτέλεσης (cpu).....	54
Εικόνα 5.5 – Γραφική παράσταση βαθμού κατάστασης μήτρας A (cond(A)) Κατηγορίας A γραμμικών προβλημάτων του χρόνου εκτέλεσης (cpu).....	54
Εικόνα 5.6 – Κανονικότητα μοντέλου Κατηγορίας A γραμμικών προβλημάτων του χρόνου εκτέλεσης (cpu).....	55
Εικόνα 5.7 – Ιστόγραμμα καταλοίπων μοντέλου Κατηγορίας A γραμμικών προβλημάτων του χρόνου εκτέλεσης (cpu).....	55
Εικόνα 5.8 – Γραφική παράσταση πλήθους περιορισμών (m) Κατηγορίας A γραμμικών προβλημάτων του αριθμού επαναλήψεων (niter).....	57
Εικόνα 5.9 – Γραφική παράσταση πλήθους μεταβλητών (n) Κατηγορίας A γραμμικών προβλημάτων του αριθμού επαναλήψεων (niter).....	57
Εικόνα 5.10 – Γραφική παράσταση πυκνότητας (density) γραμμικών προβλημάτων Κατηγορίας A του αριθμού επαναλήψεων (niter).....	57
Εικόνα 5.11 – Κανονικότητα μοντέλου Κατηγορίας A γραμμικών προβλημάτων του αριθμού επαναλήψεων (niter) .....	58
Εικόνα 5.12 – Ιστόγραμμα καταλοίπων μοντέλου Κατηγορίας A γραμμικών προβλημάτων του αριθμού επαναλήψεων (niter).....	58
Εικόνα 5.13 – Γραφική παράσταση πλήθους περιορισμών (m) Κατηγορίας B γραμμικών προβλημάτων του χρόνου εκτέλεσης (cpu).....	60
Εικόνα 5.14 – Γραφική παράσταση πλήθους μεταβλητών (n) Κατηγορίας B γραμμικών προβλημάτων του χρόνου εκτέλεσης (cpu).....	60
Εικόνα 5.15 – Γραφική παράσταση πυκνότητας (density) γραμμικών προβλημάτων Κατηγορίας B του χρόνου εκτέλεσης (cpu).....	61
Εικόνα 5.16 – Κανονικότητα μοντέλου Κατηγορίας B γραμμικών προβλημάτων του χρόνου εκτέλεσης (cpu).....	61
Εικόνα 5.17 – Ιστόγραμμα καταλοίπων μοντέλου Κατηγορίας B γραμμικών προβλημάτων του χρόνου εκτέλεσης (cpu).....	62
Εικόνα 5.18 – Γραφική παράσταση πλήθους περιορισμών (m) Κατηγορίας B γραμμικών προβλημάτων του αριθμού επαναλήψεων (niter).....	64
Εικόνα 5.19 – Γραφική παράσταση πλήθους μεταβλητών (n) Κατηγορίας B γραμμικών προβλημάτων του αριθμού επαναλήψεων (niter).....	64
Εικόνα 5.20 – Γραφική παράσταση πυκνότητας (density) γραμμικών προβλημάτων Κατηγορίας B του αριθμού επαναλήψεων (niter).....	64
Εικόνα 5.21 – Κανονικότητα μοντέλου Κατηγορίας B γραμμικών προβλημάτων του αριθμού επαναλήψεων (niter).....	65
Εικόνα 5.22 – Ιστόγραμμα καταλοίπων μοντέλου Κατηγορίας B γραμμικών προβλημάτων του αριθμού	

επαναλήψεων (niter).....	65
Εικόνα 5.23 – Γραφική παράσταση πλήθους περιορισμών (m) Κατηγορίας D γραμμικών προβλημάτων του χρόνου εκτέλεσης (cpu).....	67
Εικόνα 5.24 – Γραφική παράσταση πυκνότητας (density) γραμμικών προβλημάτων Κατηγορίας D του χρόνου εκτέλεσης (cpu).....	68
Εικόνα 5.25 – Γραφική παράσταση βαθμού κατάστασης μήτρας A (cond(A)) Κατηγορίας D γραμμικών προβλημάτων του χρόνου εκτέλεσης (cpu).....	68
Εικόνα 5.26 – Κανονικότητα μοντέλου Κατηγορίας D γραμμικών προβλημάτων του χρόνου εκτέλεσης (cpu) .....	69
Εικόνα 5.27 – Ιστόγραμμα καταλοίπων μοντέλου Κατηγορίας D γραμμικών προβλημάτων του χρόνου εκτέλεσης (cpu).....	69
Εικόνα 5.28 – Γραφική παράσταση πλήθους περιορισμών (m) Κατηγορίας D γραμμικών προβλημάτων του αριθμού επαναλήψεων (niter).....	71
Εικόνα 5.29 – Γραφική παράσταση πυκνότητας (density) γραμμικών προβλημάτων Κατηγορίας D του αριθμού επαναλήψεων (niter).....	71
Εικόνα 5.30 – Κανονικότητα μοντέλου Κατηγορίας D γραμμικών προβλημάτων του αριθμού επαναλήψεων (niter) .....	72
Εικόνα 5.31 – Ιστόγραμμα καταλοίπων μοντέλου Κατηγορίας D γραμμικών προβλημάτων του αριθμού επαναλήψεων (niter).....	72
Εικόνα 5.32 – Γραφική παράσταση πλήθους περιορισμών (m) Κατηγορίας E γραμμικών προβλημάτων του χρόνου εκτέλεσης (cpu).....	74
Εικόνα 5.33 – Γραφική παράσταση πυκνότητας (density) γραμμικών προβλημάτων Κατηγορίας E του χρόνου εκτέλεσης (cpu).....	74
Εικόνα 5.34 – Γραφική παράσταση βαθμού κατάστασης μήτρας A (cond(A)) Κατηγορίας E γραμμικών προβλημάτων του χρόνου εκτέλεσης (cpu).....	75
Εικόνα 5.35 – Κανονικότητα μοντέλου Κατηγορίας E γραμμικών προβλημάτων του χρόνου εκτέλεσης (cpu).....	76
Εικόνα 5.36 – Ιστόγραμμα καταλοίπων μοντέλου Κατηγορίας E γραμμικών προβλημάτων του χρόνου εκτέλεσης (cpu).....	76
Εικόνα 5.37 – Γραφική παράσταση πλήθους περιορισμών (m) Κατηγορίας E γραμμικών προβλημάτων του αριθμού επαναλήψεων (niter).....	77
Εικόνα 5.38 – Γραφική παράσταση πυκνότητας (density) γραμμικών προβλημάτων Κατηγορίας E του αριθμού επαναλήψεων (niter).....	78
Εικόνα 5.39 – Κανονικότητα μοντέλου E' Κατηγορίας E γραμμικών προβλημάτων του αριθμού επαναλήψεων (niter).....	79
Εικόνα 5.40 – Ιστόγραμμα καταλοίπων μοντέλου Κατηγορίας E γραμμικών προβλημάτων του αριθμού επαναλήψεων (niter).....	79
Εικόνα 5.41 – Γραφική παράσταση πλήθους περιορισμών (m) για το σύνολο των γραμμικών προβλημάτων του χρόνου εκτέλεσης (cpu).....	81
Εικόνα 5.42 – Γραφική παράσταση πλήθους μεταβλητών (n) για το σύνολο των γραμμικών προβλημάτων του χρόνου εκτέλεσης (cpu).....	81
Εικόνα 5.43 – Γραφική παράσταση πυκνότητας (density) για το σύνολο των γραμμικών προβλημάτων του χρόνου εκτέλεσης (cpu).....	81
Εικόνα 5.44 – Γραφική παράσταση μήκους δεδομένων (L) για το σύνολο των γραμμικών προβλημάτων του χρόνου εκτέλεσης (cpu).....	82
Εικόνα 5.45 – Κανονικότητα μοντέλου για το σύνολο των γραμμικών προβλημάτων του χρόνου εκτέλεσης (cpu).....	83

Εικόνα 5.46 – Ιστόγραμμα καταλοίπων για το σύνολο των γραμμικών προβλημάτων του χρόνου εκτέλεσης (cpu).....	83
Εικόνα 5.47 – Γραφική παράσταση πλήθους περιορισμών (m) για το σύνολο των γραμμικών προβλημάτων του αριθμού επαναλήψεων (niter).....	85
Εικόνα 5.48 – Γραφική παράσταση πλήθους μεταβλητών (n) για το σύνολο των γραμμικών προβλημάτων του αριθμού επαναλήψεων (niter).....	85
Εικόνα 5.49 – Γραφική παράσταση πυκνότητας (density) για το σύνολο των γραμμικών προβλημάτων του αριθμού επαναλήψεων (niter).....	85
Εικόνα 5.50 – Κανονικότητα μοντέλου για το σύνολο των γραμμικών προβλημάτων του αριθμού επαναλήψεων (niter).....	86
Εικόνα 5.51 – Ιστόγραμμα καταλοίπων για το σύνολο των γραμμικών προβλημάτων του αριθμού επαναλήψεων (niter).....	86

# Κεφάλαιο 1: Εισαγωγή

## 1.1 Ο Γραμμικός Προγραμματισμός

Ο Γραμμικός Προγραμματισμός εμφανίστηκε σχετικά πρόσφατα στο χώρο της μαθηματικής επιστήμης και έμελλε να διαδραματίσει σημαντικό ρόλο σε πολλούς τομείς της ανθρώπινης καθημερινότητας. Οι εφαρμογές του ακόμα και σήμερα επιλύουν μία πληθώρα προβλημάτων της καθημερινότητας των ανθρώπων και των επιχειρήσεων. Θεωρείται ως ένας από τους 10 σημαντικότερους αλγορίθμους του 20ού αιώνα σύμφωνα με την IEEE [IEEE].

Σύμφωνα με τον Dantzig [Dantzig (1991)], «Ο Γραμμικός Προγραμματισμός μπορεί να θεωρηθεί μέρος μιας επαναστατικής διαδικασίας ανάπτυξης, που έδωσε στον άνθρωπο τη δυνατότητα να θέτει γενικούς στόχους και να καθορίζει μια ακολουθία αποφάσεων με σκοπό να πετύχει όσο το δυνατόν καλύτερα και αποτελεσματικότερα τους στόχους που έθεσε, όταν μάλιστα αντιμετωπίζει καταστάσεις με ιδιαίτερη πολυπλοκότητα».

Αναμφίβολα θα μπορούσε κανείς να πει ότι ο γραμμικός προγραμματισμός αποτελεί το δημοφιλέστερο πρόβλημα στο χώρο της επιχειρησιακής έρευνας. Η μεγάλη επιτυχία που είχαν οι εφαρμογές του σε προβλήματα λήψης αποφάσεων αποδίδεται από τη μια στα επιτεύγματα της έρευνας των μαθηματικών και των οικονομολόγων σε θεωρητικό επίπεδο και από την άλλη στην επαναστατική ανάπτυξη της πληροφορικής επιστήμης και τεχνολογίας [Σίσκος (1998)].

Ο γραμμικός προγραμματισμός είναι μια μαθηματική μέθοδος για την επίτευξη του καλύτερου αποτελέσματος δεδομένου ενός μαθηματικού μοντέλου το οποίο εξυπηρετεί συγκεκριμένους περιορισμούς. Χρησιμοποιείται από τους επιχειρησιακούς ερευνητές για την προσέγγιση προβλημάτων κατανομής περιορισμένων πόρων ή μέσων σε εναλλακτικές ή ανταγωνιστικές μεταξύ τους δραστηριότητες κατά τον καλύτερο δυνατό τρόπο. Πρόκειται για το γνωστό πρόβλημα κατανομής της “πίτας” [Σίσκος (1998)]. Γενικά ο γραμμικός προγραμματισμός βελτιστοποιεί (ελαχιστοποιώντας ή μεγιστοποιώντας) μια γραμμική αντικειμενική συνάρτηση που υπόκειται σε ένα σύνολο περιορισμών οι οποίοι εκφράζονται ως γραμμικές εξισώσεις, ισοτικές ή ανισοτικές.

Βασική επιδίωξη του γραμμικού προγραμματισμού είναι η βελτίωση του επιστημονικού τρόπου λήψης δύσκολων και πολύπλοκων οικονομικών και διοικητικών αποφάσεων. Για να επιτευχθεί αυτός ο στόχος είναι απαραίτητο να μελετηθεί με αυστηρό τρόπο το γραμμικό πρόβλημα και να αναλυθούν οι ιδιότητες και τα χαρακτηριστικά του. Οι αποφάσεις οι οποίες προκύπτουν από ένα σύστημα λήψης αποφάσεων δεν μπορεί παρά να είναι βέλτιστες (με κάποιο κριτήριο) κάτι το οποίο μας οδηγεί στο γεγονός ότι ο γραμμικός προγραμματισμός βρίσκεται σε συνεχή αναζήτηση βέλτιστων λύσεων [Παπαρρίζος (1999)].

Η διαδικασία που ακολουθείται για να είναι αποτελεσματική η εφαρμογή του γραμμικού προγραμματισμού στα προβλήματα της καθημερινότητας είναι τα μαθηματικά προβλήματα να περιγράφονται με λεπτομερείς μαθηματικούς όρους κάτι που είναι εφικτό με τη διατύπωση κατάλληλων μαθηματικών μοντέλων. Στη συνέχεια πρέπει να ορίζονται τεχνικές επίλυσης των μοντέλων μέσω αντίστοιχων αλγορίθμων. Τέλος, απαραίτητη προϋπόθεση για να επιλυθούν τα προβλήματα του γραμμικού προγραμματισμού είναι να έχουμε στη διάθεσή μας μηχανήματα που μπορούν να εκτελέσουν επιτυχώς τα βήματα του αλγορίθμου αλλά και το αντίστοιχο λογισμικό.

## 1.2 Ιστορική αναδρομή

Στις αρχές της δεκαετίας του 1940, εμφανίζεται η ανάγκη για την αναμόρφωση της παραγωγικής διαδικασίας καθώς και η ανάγκη για δημιουργία καινοτόμων προϊόντων υψηλής ποιότητας αλλά και ευρείας χρήσης.

Κατά τη διάρκεια του Β' παγκοσμίου, που βρίσκεται σε εξέλιξη την ίδια περίοδο, φανερώνεται η ανάγκη σε όλα τα εμπλεκόμενα μέρη να βρουν ένα τρόπο ώστε να οργανώσουν τις δαπάνες και να ελαχιστοποιήσουν το κόστος τους. Παράλληλα, η επιθυμία τους για μεγιστοποίηση των απωλειών των αντιπάλων τους μεγαλώνει. Η Αμερικανική Πολεμική Αεροπορία χρειάζεται να υλοποιήσει μία μέθοδο μηχανοποίησης της διαδικασίας σχεδιασμού των επιχειρήσεων της ώστε να υπολογίζει άμεσα ένα πρόγραμμα για τη σταδιακή, χρονικά ανάπτυξη, την εκπαίδευση και την υλικοτεχνική προμήθεια ή ανεφοδιασμό. Εκείνη την περίοδο, ο George Dantzig εκτελεί χρέη μαθηματικού συμβούλου ως έφεδρος αξιωματικός στο Πεντάγωνο. Ο Dantzig εισάγει για πρώτη φορά τη μέθοδο simplex για

γραμμικά προβλήματα ωστόσο η έρευνά του δε δημοσιεύεται μέχρι το τέλος του πολέμου καθώς χρησιμοποιούνταν ως στρατιωτική στρατηγική. Ο ίδιος δήλωσε ότι «η δύναμη της μεθόδου *simplex* είναι εκπληκτική», και εξηγεί το παράδειγμα της ανάθεσης 70 εργασιών σε 70 άτομα. Ο χρόνος που θα δαπανηθεί ώστε να ελεγχθούν όλοι οι πιθανοί συνδυασμοί και να βρεθεί ο καλύτερος συνδυασμός είναι ασύγκριτα μεγαλύτερος σε σχέση με το χρόνο που θα δαπανηθεί στην μέθοδο *simplex* για την εύρεση της βέλτιστης λύσης [Dantzig (1949)].

Πολλοί υποστηρίζουν ότι ο γραμμικός προγραμματισμός μέχρι εκείνο το σημείο είναι κάτι άγνωστο, κάτι το οποίο δεν είναι απόλυτα σωστό. Από το 1823, ο Joseph Fourier ασχολείται με θέματα επίλυσης συστημάτων γραμμικών ανισοτήτων. Το 1911, ο Βέλγος de la Valle Poussin προτείνει ένα πρωτότυπο θεώρημα για το πρόβλημα Chebyshev κάνοντας ένα σημαντικό βήμα για την πρόοδο που θα ακολουθήσει σε θέματα γραμμικού προγραμματισμού. Παρόλα αυτά, καμία από τις δύο παραπάνω προσπάθειες δεν κατάφερε να γίνει γνωστή στο ευρύ κοινό [Borwein et al (2003)].

Το 1939, ο Ρώσος μαθηματικός Leonid Kantorovich, εργαζόμενος για τη σοβιετική κυβέρνηση καλείται να βρει μία μέθοδο βελτιστοποίησης της παραγωγής σε μία βιομηχανία κατασκευής κόντρα-πλακέ. Αναπτύσσει τότε μία μέθοδο που γίνεται γνωστή ως Γραμμικός Προγραμματισμός. Η δουλειά του εκείνη την εποχή λόγω του καθεστώτος στην Σοβιετική Ένωση δεν αξιοποιείται για ιδεολογικούς λόγους παρά μόνο δεκαετίες αργότερα και ενώ στη Δύση η ανάπτυξη του γραμμικού προγραμματισμού έχει ήδη προχωρήσει [Kantorovich (1960)]. Το 1941, ο Frank Lauern Hitchcock εκδίδει μία πρωτότυπη λύση για το πρόβλημα βέλτιστης μεταφοράς και κατανομής πόρων, ωστόσο και αυτή δεν τυγχάνει της απαραίτητης προσοχής.

Ο μοναδικός λόγος που εξηγεί το μειωμένο ενδιαφέρον του κόσμου είναι ότι μέχρι εκείνη τη χρονική περίοδο δεν είχε προκύψει, έντονα ακόμη, η ανάγκη για βελτιστοποίηση τόσο στο βιομηχανικό κλάδο όσο και στην καθημερινότητα των ανθρώπων. Το 1947, ο John Von Neumann αναπτύσσει τη θεωρία της δυϊκότητας για τα γραμμικά προβλήματα, ενώ την ίδια χρονιά δημοσιεύεται η έρευνα του Dantzig για τη μέθοδο *simplex* και την επίλυση γραμμικών προβλημάτων. Να σημειωθεί εδώ ότι ο ίδιος ο Dantzig υποστήριζε ότι οι βασικές επιρροές του προήλθαν από τον Wassily Leontief που διατύπωσε το ιδιαίτερα σημαντικό μοντέλο εισροών-εκροών για την οικονομία αλλά και από τον John Von Neumann και την έρευνά του στον τομέα της Θεωρίας Παιγνίων και την ενασχόλησή του με θέματα οικονομικής ανάπτυξης [Dantzig (1949)], [Dantzig (1963)].

Σύμφωνα με τον Robert Freund από το M.I.T., «ο Dantzig συγκαταλέγεται στους τρεις ιδρυτές του Γραμμικού Προγραμματισμού μαζί με τους von Neumann και Kantorovich. Μέσα από την έρευνά του στη μαθηματική θεωρία, την υπολογιστική, την οικονομική ανάλυση και τις εφαρμογές σε προβλήματα που προκύπτουν στη βιομηχανία, συνέβαλλε περισσότερο από κάθε άλλο ερευνητή στην ανάπτυξη του Γραμμικού Προγραμματισμού» [Stanford University].

Το 1979, ο Leonid Khachiyan παρουσιάζει τον ελλειψοειδή αλγόριθμο επίλυσης γραμμικών προβλημάτων ωστόσο μέχρι εκείνη την περίοδο η μέθοδος simplex παραμένει σαφώς ανώτερη [Khachiyan (1979)], [Sanjeev (2005)]. Το 1984, ο Narendra Karmarkar εισάγει τη μέθοδο εσωτερικών σημείων που συνδυάζει τις θεωρητικές ιδιότητες της ελλειψοειδούς μεθόδου και τα πρακτικά πλεονεκτήματα της μεθόδου simplex [Karmarkar (1984)]. Τη δεκαετία του '90 για πρώτη φορά αναπτύσσεται μία νέα μορφή του αλγορίθμου simplex, ο αλγόριθμος εξωτερικών σημείων, ο οποίος καταφέρνει να προσεγγίσει σε λιγότερα βήματα την βέλτιστη λύση [Paparrizos (1991)]. Μέχρι και σήμερα η μέθοδος simplex μαζί με τη μέθοδο εσωτερικών σημείων αποτελούν τις κύριες μεθόδους επίλυσης προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού.

### 1.3 Εφαρμογές και χρήσεις του Γραμμικού Προγραμματισμού

Ο γραμμικός προγραμματισμός τις τελευταίες δεκαετίες είναι εξαιρετικά δημοφιλής στους ακαδημαϊκούς κύκλους συγκεντρώνοντας το ενδιαφέρον επιστημόνων που ασχολούνται με θέματα επιχειρησιακής έρευνας, οικονομικούς αναλυτές και μαθηματικούς. Όπως αναφέρθηκε σε προηγούμενη ενότητα, η χρήση του γραμμικού προγραμματισμού σε θέματα επιχειρησιακής έρευνας είναι ιδιαίτερα αυξημένη γιατί προσφέρει την καλύτερη δυνατή λύση για ένα δεδομένο σύνολο πόρων ή μέσων. Με τον όρο επιχειρησιακή έρευνα εννοούμε «την επιστήμη που ασχολείται με τη βελτιστοποίηση (optimization) της απόδοσης ενός συστήματος». Ειδικότερα, «πρόκειται για ένα σύνολο από τεχνικές οι οποίες χρησιμοποιώντας μαθηματικά μοντέλα, δημιουργούν μια ποσοτική και ορθολογική βάση για τη λήψη αποφάσεων που θα βελτιστοποιήσουν τη λειτουργία του υπό μελέτη συστήματος» [Τσάντας και Βασιλείου (2000)].

Τα προβλήματα για τα οποία βρίσκουμε λύση με τη βοήθεια του γραμμικού προγραμματισμού



εκτείνονται σε ένα μεγάλο φάσμα δυσκολιών. Αυτός είναι και ο λόγος που χρησιμοποιείται ευρέως σήμερα από απλούς ανθρώπους μέχρι πολυεθνικές εταιρίες. Αυτό που πετυχαίνουμε μέσω του γραμμικού προγραμματισμού είναι ότι λαμβάνουμε υπόψιν μας όλες τις παραμέτρους ενός προβλήματος έτσι ώστε να καταλήξουμε στην μεγιστοποίηση των κερδών, την ελαχιστοποίηση του κόστους ή ώστε να φέρουμε σε πέρας όποιο άλλο στόχο έχουμε θέσει.

Στην σημερινή ανταγωνιστική αγορά, η προσπάθεια των επιχειρήσεων να εξοικονομήσουν πόρους αλλά και χρηματικά ποσά, τις αναγκάζει να αγοράζουν ή να πουλήσουν ένα μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού που εξυπηρετεί τις ανάγκες τους ώστε να παραμείνουν ή να γίνουν ακόμα πιο ανταγωνιστικές. Αυτός είναι και ο λόγος που πολλές επιχειρήσεις χρησιμοποιούν ενεργά τον γραμμικό προγραμματισμό στα συστήματα λήψης αποφάσεών τους.

Οι περιοχές χρήσης του γραμμικού προγραμματισμού είναι η εύρεση βέλτιστων λύσεων σε προβλήματα ροής ή μεταφοράς και διάθεσης εμπορευμάτων, η μικροοικονομική επιστήμη, η επιστήμη των Η/Υ, οι βιομηχανίες, οι στρατιωτικές εφαρμογές αλλά και το management που καλύπτει τομείς όπως του σχεδιασμού, της παραγωγής, της μεταφοράς και της τεχνολογίας που χρησιμοποιείται.

Χαρακτηριστικά παραδείγματα εφαρμογής που συναντώνται συχνά στους ακαδημαϊκούς κύκλους είναι το πρόβλημα της δίαιτας (φθηνά προϊόντα – διατροφικές ανάγκες), η βελτιστοποίηση του χαρτοφυλακίου (ρίσκο – επενδύσεις), η ανάθεση πληρώματος σε πτήσεις (χαμηλό κόστος – τήρηση κανόνων), το πρόβλημα του πλανόδιου πωλητή, η κατανομή του εργατικού δυναμικού, του τεχνολογικού εξοπλισμού και πρώτων υλών σε διάφορες παραγωγικές διαδικασίες, οι τηλεπικοινωνίες και πολλά άλλα [Σίσκος (1998)].

Η ερώτηση η οποία μπορεί να προκύψει στο συγκεκριμένο σημείο είναι “κατά πόσο μπορεί να συνεχιστεί η εκτεταμένη χρήση και εφαρμογή του γραμμικού προγραμματισμού στο επιχειρησιακό και βιομηχανικό περιβάλλον, δεδομένων των συνεχόμενων μεταβολών στις συνθήκες της αγοράς;”. Αυτό που πρέπει να σημειωθεί είναι ότι πάντα οι επιχειρήσεις προσπαθούν, και θα εξακολουθούν να το πράττουν, να μεγιστοποιούν τα κέρδη τους και να ελαχιστοποιήσουν το κόστος παραγωγής τους αξιοποιώντας τους περιορισμένους πόρους που έχουν στη διάθεσή τους. Συνεπώς, τα προβλήματα που έχουν να αντιμετωπίσουν αυξάνονται και δυσκολεύουν συνεχώς και ο τρόπος να αντιμετωπιστούν, να εκφραστούν με μαθηματικό τρόπο και να επιλυθούν με μικρό κόστος, γρήγορα και αποτελεσματικά είναι με τη χρήση μεθόδων γραμμικού προγραμματισμού.

## 1.4 Γνωστοί Αλγόριθμοι Γραμμικού Προγραμματισμού

Όπως αναφέρθηκε σε προηγούμενη ενότητα, ο Γραμμικός Προγραμματισμός βελτιστοποιεί (μεγιστοποιώντας ή ελαχιστοποιώντας) μία γραμμική αντικειμενική συνάρτηση πάνω σε ένα συγκεκριμένο πρόβλημα το οποίο καθορίζεται από ένα σύνολο γραμμικών περιορισμών, ισοτικών ή ανισοτικών.

Ο αλγόριθμος simplex που αναπτύχθηκε από τον George Dantzig, υπολογίζει και εξετάζει λύσεις του γραμμικού προβλήματος μέχρι να βρει τη βέλτιστη λύση. Γεωμετρικά μπορούμε να πούμε ότι κινείται από κορυφή σε κορυφή στα όρια της εφικτής περιοχής του προβλήματος, η οποία καθορίζεται από ένα σύνολο γραμμικών περιορισμών.

Το κύριο μειονέκτημα των αλγορίθμων τύπου simplex (όπως είναι και ο αλγόριθμος εξωτερικών σημείων) είναι ότι δεν μπορούμε να προβλέψουμε τον αριθμό των επαναλήψεων που χρειάζονται για την εύρεση της βέλτιστης λύσης στο πρόβλημα. Αυτό που παρατηρείται είναι ότι όσο μεγαλώνει το μέγεθος του προβλήματος (αριθμός περιορισμών και μεταβλητών που συμμετέχουν σε αυτό) τόσο ο χρόνος υπολογισμού της βέλτιστης λύσης αυξάνει εκθετικά. Έχει αποδειχτεί από τους Klee και Minty ότι η πολυπλοκότητα χειρότερης περίπτωσης των αλγορίθμων τύπου simplex είναι εκθετική [Klee and Minty (1972)]. Παρόλα αυτά, ο Borgwardt απέδειξε ότι σε μερικούς κανόνες περιστροφής που εκτελεί ο αλγόριθμος έχει πολυωνυμική συμπεριφορά [Borgwardt (1982)].

Μετά από αυτή την ανακάλυψη των Klee και Minty, το ενδιαφέρον των επιστημόνων στράφηκε στην κατασκευή αλγορίθμων με πολυωνυμική πολυπλοκότητα καθώς η εκθετική πολυπλοκότητα χειρότερης περίπτωσης του αλγορίθμου simplex τον καθιστά αποτρεπτικό στην επίλυση προβλημάτων μεγάλης κλίμακας. Ο Ελλειψοειδής Αλγόριθμος που αναπτύχθηκε τη δεκαετία του '70 από τον Khachiyan [Khachiyan (1979)], ως τροποποίηση του αλγορίθμου του Shor, ήταν ο πρώτος αλγόριθμος με πολυωνυμική πολυπλοκότητα χειρότερης περίπτωσης. Σε αντίθεση με τον αλγόριθμο simplex που κινείται από κορυφή σε κορυφή της εφικτής περιοχής, ο Ελλειψοειδής Αλγόριθμος προσεγγίζει τη βέλτιστη λύση μέσα από μία ακολουθία συρρικνούμενων ελλειψοειδών καμπυλών. Παραδόξως, παρά τη θεωρητική του αποτελεσματικότητα, στην πράξη υστερεί σημαντικά σε σχέση με τους αλγόριθμους τύπου simplex.

Επόμενος σταθμός στην πορεία του Γραμμικού Προγραμματισμού είναι η ανάπτυξη της

μεθόδου των εσωτερικών σημείων από τον Karmarkar τη δεκαετία του '80 [Karmarkar (1984)]. Σε αντίθεση με τον αλγόριθμο simplex, η μέθοδος των εσωτερικών σημείων κινείται μέσα στην εφικτή περιοχή δημιουργώντας μία ακολουθία σημείων στο εσωτερικό της, προσεγγίζοντας με αυτό τον τρόπο τη βέλτιστη λύση [Todd (2002)]. Ο αλγόριθμος εσωτερικών σημείων παρουσιάζει πολυωνυμική συμπεριφορά και υπερέχει σημαντικά από τον simplex που εκείνη τη χρονική περίοδο ήταν ότι ο πιο γρήγορος αλγόριθμος για την επίλυση γραμμικών προβλημάτων. Σύμφωνα με τον Gondzio [Gondzio (1992)], ο αλγόριθμος εσωτερικών σημείων είναι 50 φορές ταχύτερος από τον αλγόριθμο simplex.

Παρόλο που τη δεκαετία του '80 αναπτύχθηκε ο αλγόριθμος εσωτερικών σημείων που είχε πολυωνυμική πολυπλοκότητα και είναι κατά πολύ ταχύτερος του simplex σε προβλήματα μεγάλης κλίμακας, το ενδιαφέρον των ερευνητών για τον αλγόριθμο simplex δεν έπαψε να υπάρχει κυρίως εξαιτίας της προσαρμοστικότητάς του στην επίλυση πιο γενικών προβλημάτων [Παπαρρίζος (1999)]. Τη δεκαετία του '90, αναπτύσσεται για πρώτη φορά ο αλγόριθμος εξωτερικών σημείων που αποτελεί μία νέα μορφή της μεθόδου simplex [Paparrizos (1991)], [Papamantou et al (2004)], [Paparrizos et al (2003)]. Ο αλγόριθμος εξωτερικών σημείων, σε αντίθεση με τον αλγόριθμο simplex, κατασκευάζει σημεία τα οποία είναι βασικά αλλά όχι εφικτά. Αυτό σημαίνει ότι τα εξωτερικά βασικά σημεία που κατασκευάζονται μας οδηγούν στη βέλτιστη λύση μέσα από συντομότερους δρόμους. Σε υπολογιστικές μελέτες που διενεργήθηκαν σε τυχαία γραμμικά προβλήματα, ο αλγόριθμος εξωτερικών σημείων υπερέχει μέχρι και 130 φορές έναντι του κλασικού αλγορίθμου simplex [Paparrizos et al (2003a)], [Samaras et al (2009)].

Σε αυτό το σημείο πρέπει να αναφέρουμε ότι οι αλγόριθμοι εξωτερικών σημείων δεν ακολουθούν πάντοτε σύντομους δρόμους. Για αυτό το λόγο στην υλοποίηση του αλγορίθμου δεν πρέπει με κανένα τρόπο να χαθεί η επαφή με την εφικτή περιοχή, διαφορετικά η επάνοδος σε αυτήν είναι πολύ δύσκολη, αν όχι ανέφικτη. Αυτή η επαφή διευκολύνεται με ένα δεύτερο δρόμο εφικτών σημείων, ο οποίος δεν είναι τύπου simplex. Με αυτό τον τρόπο μπορούμε να εισάγουμε στην εφικτή βάση οποιοδήποτε συνοριακό σημείο και έτσι να αποφύγουμε το σημαντικότερο υπολογιστικό μειονέκτημα των εφικτών αλγορίθμων simplex που είναι να κινούνται από γειτονική σε γειτονική κορυφή χωρίς να προχωρούν προς τη βέλτιστη λύση [Παπαρρίζος (2009)].

Οι θεωρητικές πολυπλοκότητες των αλγορίθμων που αναφέρθηκαν στην ενότητα αυτή

παρουσιάζονται στον Πίνακα 1.1 που ακολουθεί:

Πίνακας 1.1 – Πολυπλοκότητες αλγορίθμων Γραμμικού Προγραμματισμού

Αλγόριθμος	Πολυπλοκότητα	
	Χειρότερης Περίπτωσης	Καλύτερης Περίπτωσης
Simplex	$O(2^n)$	$O(n^2)$
Ελλειψοειδής	$O(n^4L)$	$O(n^4L)$
Εσωτερικών Σημείων	$O(n^{3.5}L)$	$O(n^{3.5}L)$
Εξωτερικών Σημείων	$O(2^n)$	$O(n^2)$

## 1.5 Σκοπός και οργάνωση της εργασίας

Η κλασική ανάλυση πολυπλοκότητας εξετάζει σε θεωρητικό επίπεδο τη συμπεριφορά των αλγορίθμων με βάση μόνο τη διάσταση των γραμμικών προβλημάτων που επιλύονται. Συχνά παρατηρείται το φαινόμενο γνωστοί αλγόριθμοι με θεωρητική πολυπλοκότητα πολυωνυμικού βαθμού να έχουν στην πράξη απογοητευτική συμπεριφορά.

Το πρόβλημα αυτό έγκειται στο γεγονός ότι η ανάλυση που γίνεται βασίζεται στη συμπεριφορά του αλγορίθμου στη χειρότερη και στη μέση περίπτωση. Η ανάλυση χειρότερης περίπτωσης, συχνά οδηγεί σε “άδικα” αποτελέσματα καθώς με βάση αυτήν οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι ένας αλγόριθμος έχει κακή απόδοση. Η ανάλυση μέσης περίπτωσης, είναι από την άλλη πολύ πιο αισιόδοξη καθώς λαμβάνει υπόψη της ένα δείγμα τυχαία κατασκευασμένων προβλημάτων. Ωστόσο, σε πολλές περιπτώσεις μπορεί να είναι παραπλανητική καθώς τα παραδείγματα που χρησιμοποιούνται δεν αντικατοπτρίζουν πλήρως τις περιπτώσεις που μπορεί να “συναντήσει” ένας αλγόριθμος σε πρακτικές εφαρμογές [Spielman and Shang (2004)].

Ένα ακόμα πρόβλημα με την ανάλυση ευαισθησίας των αλγορίθμων είναι ότι οι πολυπλοκότητες μέσης και χειρότερης περίπτωσης περιγράφουν το χρόνο ΚΜΕ του αλγορίθμου μόνο ως συνάρτηση των διαστάσεων του γραμμικού προβλήματος. Οι εμπειρικές μελέτες και οι πειραματικές εφαρμογές από την άλλη πλευρά επηρεάζονται συν τοις άλλοις από το γεγονός ότι ο εκάστοτε αλγόριθμος υλοποιείται σε συγκεκριμένη γλώσσα προγραμματισμού και υπολογίζεται με

αυτό τον τρόπο ο πραγματικός χρόνος εκτέλεσης και ο αριθμός των επαναλήψεων που εκτέλεσε για να βρει τη βέλτιστη λύση σε ένα συγκεκριμένο σύνολο δεδομένων. Οι δύο παραπάνω τρόποι αλληλοσυμπληρώνονται μεταξύ τους για να υπολογιστεί η πολυπλοκότητα ενός αλγορίθμου. Στην εργασία αυτή, με τη βοήθεια της ανάλυσης παλινδρόμησης, εξετάζουμε ένα μεγάλο αριθμό από μοντέλα χρονισμού για τον αλγόριθμο εξωτερικών σημείων ώστε να καταλήξουμε στην υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλλά και σε αυτά που τον αντιπροσωπεύουν καλύτερα. Για λόγους εγκυρότητας και καταλληλότητας των μοντέλων, η μελέτη αυτή γίνεται πάνω σε ένα μεγάλο δείγμα τυχαίων αραιών γραμμικών προβλημάτων.

Η διπλωματική εργασία αυτή είχε ως κύριο στόχο τη μελέτη της υπολογιστικής συμπεριφοράς του αλγορίθμου εξωτερικών σημείων μέσα από ένα πλήθος 7873 αραιών προβλημάτων. Για να καλυφθεί όλο το φάσμα των περιπτώσεων που μπορεί να “συναντήσει” ο αλγόριθμος σε πρακτικά προβλήματα δημιουργήθηκαν τέσσερις κατηγορίες αραιών προβλημάτων, η κάθε μία από αυτές είχε διαφορετικά χαρακτηριστικά όσον αφορά το πλήθος των μεταβλητών, το πλήθος των περιορισμών αλλά και το είδος αυτών. Οι διαστάσεις των τυχαίων προβλημάτων που δημιουργήθηκαν από τις γεννήτριες προβλημάτων ήταν από προβλήματα μεγέθους  $1 \times 1$  μέχρι προβλήματα μεγέθους  $5000 \times 10000$ .

Πριν ξεκινήσουμε την μελέτη έπρεπε να καταλήξουμε στο τι ακριβώς θα εξετάζαμε. Αποφασίσαμε λοιπόν ότι τα χαρακτηριστικά που μας ενδιέφεραν να εξετάσουμε στα μοντέλα χρονισμού είναι ο χρόνος εκτέλεσης του αλγορίθμου (cpu) και ο αριθμός των επαναλήψεων (niter) που εκτελούνται για να καταλήξουμε στη βέλτιστη λύση. Ο λόγος που επιλέξαμε να δημιουργήσουμε μοντέλα χρονισμού τόσο για το χρόνο εκτέλεσης (cpu) όσο και τον αριθμό των επαναλήψεων (niter) είναι γιατί θελήσαμε να έχουμε μία πιο “σφαιρική” εικόνα των δυνατοτήτων του αλγορίθμου στα πραγματικά προβλήματα που μπορεί να κληθεί να λύσει αλλά και γιατί τα συγκεκριμένα στοιχεία που καταγράψαμε είναι σημαντικά όχι μόνο για τη δική μας εργασία αλλά και όσους ασχολούνται με παρόμοια θέματα ή επιχειρούν να κάνουν ανάλογη υπολογιστική μελέτη.

Αξίζει να σημειώσουμε εδώ ότι όταν αναφερόμαστε στο χρόνο εκτέλεσης ενός αλγορίθμου πρέπει να έχουμε υπόψιν μας ότι αυτός εξαρτάται από τα δεδομένα εισόδου του αλγορίθμου, το υπολογιστικό περιβάλλον, τη γλώσσα προγραμματισμού που χρησιμοποιείται καθώς επίσης και τη συγκεκριμένη υλοποίηση του αλγορίθμου. Το ζητούμενο είναι η έννοια του χρόνου εκτέλεσης να

απλοποιηθεί σε τέτοιο βαθμό ώστε να εξαρτάται μόνο από τον αλγόριθμο και από τα δεδομένα εισόδου [Σαμαράς κ. ά. (2009)].

Ένα ακόμα στοιχείο που πρέπει να αναφέρουμε είναι ότι επιλέξαμε να χρησιμοποιήσουμε μια υλοποίηση του αλγορίθμου που είχε χρησιμοποιηθεί και στο παρελθόν και έχει αποδειχτεί ότι “τρέχει” ικανοποιητικά. Μάλιστα η συγκεκριμένη υλοποίηση έχει βελτιστοποιηθεί κάτι που σημαίνει ότι ο χρόνος εκτέλεσης που καταγράφετε είναι “καθαρός” χρόνος cpu και δεν περιλαμβάνει τυχόν καθυστερήσεις που μπορεί να οφείλονται στην υλοποίηση του αλγορίθμου. Ο λόγος που έγινε αυτό ήταν γιατί δε θελήσαμε να ρισκάρουμε με μία έκδοση αλγορίθμου που θα υλοποιούνταν εξ αρχής με συνέπεια τα αποτελέσματα που θα προέκυπταν να μην είναι αντικειμενικά. Παράλληλα, οι τιμές των παραμέτρων που χρησιμοποιήθηκαν για να δημιουργηθούν τα γραμμικά προβλήματα ήταν τέτοιες ώστε να αποτελούν πρόκληση για τον αλγόριθμο να τα λύσει.

Στο τελευταίο μέρος της εργασίας, αφού καταλήξαμε στα καλύτερα μοντέλα χρονισμού με τη βοήθεια της ανάλυσης παλινδρόμησης, δημιουργήσαμε ένα τυχαίο δείγμα 790 αραιών γραμμικών προβλημάτων έτσι ώστε να ελέγξουμε την εγκυρότητα των μοντέλων που είχαμε κρατήσει για κάθε μία από τις τέσσερις κατηγορίες προβλημάτων αλλά και για το σύνολο αυτών. Το δείγμα αυτό των γραμμικών προβλημάτων ήταν διαφορετικό από τα αρχικά μας δεδομένα και με αυτό τον τρόπο καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι τα μοντέλα χρονισμού που εξάγαμε ήταν όντως αντιπροσωπευτικά της απόδοσης του αλγορίθμου εξωτερικών σημείων.

Αναλυτικά η οργάνωση της εργασίας γίνεται ως εξής: στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάζεται ο αλγόριθμος εξωτερικών σημείων που χρησιμοποιήθηκε για την επίλυση των γραμμικών προβλημάτων, στο Κεφάλαιο 3 περιγράφονται τα δεδομένα των γραμμικών προβλημάτων της υπολογιστικής μελέτης ενώ στο Κεφάλαιο 4 γίνεται λεπτομερής περιγραφή της υπολογιστικής μελέτης που πραγματοποιήθηκε. Στο Κεφάλαιο 5 παρουσιάζονται τα μοντέλα χρονισμού για τον αλγόριθμο εξωτερικών σημείων και η διαδικασία που ακολουθήθηκε ώστε να ελέγξουμε την εγκυρότητα τους ενώ τέλος στο Κεφάλαιο 6 παραθέτονται τα συμπεράσματα της εργασίας και ορισμένες προτάσεις για περαιτέρω μελέτη με το συγκεκριμένο αλγόριθμο.

## Κεφάλαιο 2: Ο Αλγόριθμος Εξωτερικών Σημείων

### 2.1 Το γραμμικό πρόβλημα

Όπως έχει αναφερθεί στο πρώτο κεφάλαιο, το γραμμικό πρόβλημα είναι ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης (μεγιστοποίησης ή ελαχιστοποίησης), οι μεταβλητές του οποίου υπόκεινται σε γραμμικούς περιορισμούς (ισοτικούς ή ανισοτικούς).

Ένας αλγόριθμος επίλυσης γραμμικών προβλημάτων θα κληθεί να λύσει μία από τις δύο παρακάτω μορφές αναπαράστασης ενός προβλήματος, την κανονική μορφή (ή ανισοτική) ή την τυποποιημένη μορφή (ή ισοτική).

Η κανονική μορφή είναι η εξής:

$$\begin{aligned} \min (\max) \quad & c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \\ \text{s.t.} \quad & a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \quad (\leq, \geq) \quad b_1 \\ & a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n \quad (\leq, \geq) \quad b_2 \\ & \dots + \dots + \dots + \dots \quad (\leq, \geq) \quad \dots \\ & a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n \quad (\leq, \geq) \quad b_m \\ & x_j \geq 0, \quad (j = 1, \dots, n) \end{aligned}$$

Η τυποποιημένη μορφή είναι η εξής:

$$\begin{aligned} \min (\max) \quad & c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \\ \text{s.t.} \quad & a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ & a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = b_2 \\ & \dots + \dots + \dots + \dots = \dots \\ & a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n = b_m \\ & x_j \geq 0, \quad (j = 1, \dots, n) \end{aligned}$$

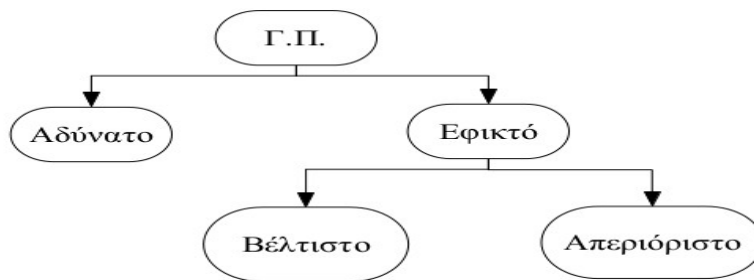
Και στις δύο παραπάνω μορφές αναπαράστασης του γραμμικού προβλήματος όλες οι μεταβλητές που χρησιμοποιούνται στο πρόβλημα “υπακούν” στους περιορισμούς μη αρνητικότητας. Εφόσον χρησιμοποιηθεί η κανονική μορφή όλοι οι περιορισμοί είναι αυστηρώς ανισοτικοί ενώ στην αντίθετη περίπτωση (τυποποιημένη μορφή) όλοι οι περιορισμοί είναι αυστηρώς ισοτικοί. Σε μορφή διανυσμάτων και μητρών το γραμμικό πρόβλημα μπορεί να αναπαρασταθεί ως εξής:

$$\min (\max) \{z = c^T x : Ax (\leq, =, \geq) b, x \geq 0\} .$$

Και στις δύο μορφές αναπαράστασης ενός γραμμικού προβλήματος, η συνάρτηση  $\min (\max) c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$  ονομάζεται αντικειμενική συνάρτηση, οι συντελεστές  $c_j$  είναι οι συντελεστές κόστους ή κέρδους της αντικειμενικής συνάρτησης ενώ οι περιορισμοί  $x_j \geq 0$  λέγονται περιορισμοί μη αρνητικότητας ή φυσικοί περιορισμοί. Όλοι οι υπόλοιποι περιορισμοί ονομάζονται τεχνολογικοί περιορισμοί και προκύπτουν από την λεκτική περιγραφή του προβλήματος. Όταν δοθεί προς επίλυση ένα γραμμικό πρόβλημα πρέπει να μετασχηματιστεί στην κατάλληλη μορφή για τον αλγόριθμο που πρόκειται να χρησιμοποιηθεί. Οι μετασχηματισμοί που θα εκτελεστούν δεν πρέπει να αλλάξουν το γραμμικό πρόβλημα. Τα δύο προβλήματα πρέπει να είναι ισοδύναμα, δηλαδή να υπάρχει αντιστοιχία μεταξύ των εφικτών σημείων και των αντικειμενικών τιμών [Παραρτίζος (2009)].

Να αναφέρουμε σε αυτό το σημείο ότι σύμφωνα με το Θεμελιώδες Θεώρημα του Γραμμικού Προγραμματισμού [Παραρτίζος (2009)], ένα γραμμικό πρόβλημα είναι αδύνατο ή εφικτό. Αν το γραμμικό πρόβλημα είναι εφικτό τότε είναι είτε βέλτιστο είτε απεριόριστο. Λύση ενός γραμμικού προβλήματος ονομάζεται ο προσδιορισμός της κατηγορίας του, δηλαδή αν είναι αδύνατο, βέλτιστο ή απεριόριστο. Αν ένα πρόβλημα είναι βέλτιστο τότε μπορούμε να βρούμε τουλάχιστον ένα βέλτιστο σημείο αυτού. Διαγραμματικά, η κατηγοριοποίηση αυτή φαίνεται στην *Εικόνα 2.1* παρακάτω:



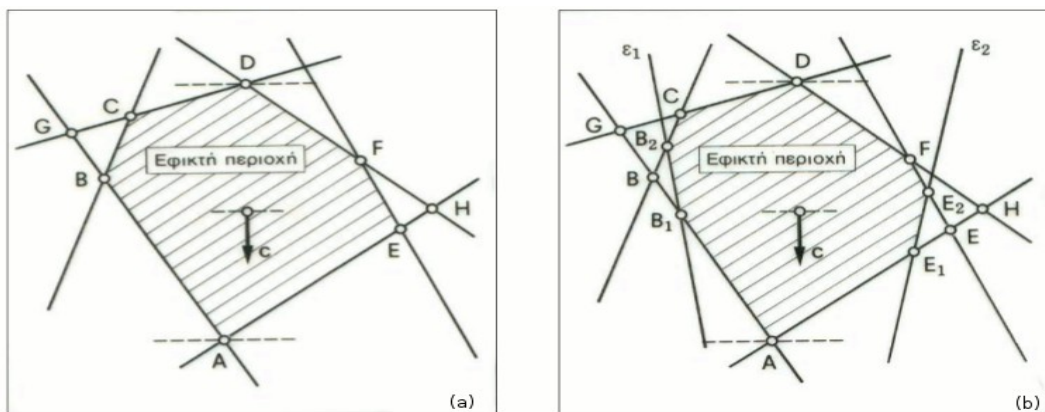


Εικόνα 2.1 – Κατηγοριοποίηση Γραμμικών Προβλημάτων

## 2.2 Ο Αλγόριθμος Εξωτερικών Σημείων

### 2.2.1 Γεωμετρία Αλγορίθμου Εξωτερικών Σημείων

Ο αλγόριθμος εξωτερικών σημείων κατασκευάζει σημεία τα οποία είναι βασικά αλλά όχι εφικτά. Η προσφυγή στα εξωτερικά βασικά σημεία μπορεί να αποδειχτεί ιδανική για την ανάπτυξη γρήγορων αλγορίθμων τύπου simplex [Παπαρρίζος (1999)]. Για να γίνει κατανοητός ο λόγος που προσφεύγουμε στα εξωτερικά σημεία θα χρησιμοποιήσουμε τη γεωμετρία ενός γραμμικού προβλήματος στο χώρο  $R^2$  όπως φαίνεται στο Εικόνα 2.2 παρακάτω:



Εικόνα 2.2 – Γεωμετρική αναπαράσταση γραμμικού προβλήματος

Έστω ότι στο παράδειγμα της Εικόνας 2.2(a) το σημείο εκκίνησης του αλγορίθμου είναι η κορυφή A ενώ η βέλτιστη λύση βρίσκεται στην κορυφή D. Ο αλγόριθμος simplex για να μπορέσει να φτάσει στο βέλτιστο σημείο θα χρειαστεί τρεις επαναλήψεις είτε ακολουθήσει το δρόμο A, B, C, D είτε

το δρόμο A, E, F, D επειδή τα σημεία που επιλέγει να κινηθεί είναι πάνω στην εφικτή περιοχή. Από την άλλη πλευρά ο αλγόριθμος εξωτερικών σημείων μπορεί να φτάσει το σημείο D εκτελώντας δύο επαναλήψεις, είτε μέσω του δρόμου A, G, D είτε μέσω του δρόμου A, H, D. Και στους δύο πιθανούς δρόμους που μπορεί να ακολουθήσει, τα σημεία G και H είναι βασικά αλλά όχι εφικτά αφού δεν είναι κορυφές του πολύγωνου της εφικτής περιοχής.

Αν προσθέσουμε έναν ακόμα περιορισμό (ευθείες  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  στην *Εικόνα 2.2(β)*) ο δρόμος που θα ακολουθήσει ο αλγόριθμος simplex είναι είτε ο δρόμος A, B<sub>1</sub>, B<sub>2</sub>, C, D είτε ο δρόμος A, E<sub>1</sub>, E<sub>2</sub>, F, D κάτι που συνεπάγεται ότι θα φτάσει στη βέλτιστη λύση εκτελώντας τέσσερις επαναλήψεις. Από την άλλη, και σε αυτή την περίπτωση ο αλγόριθμος εξωτερικών σημείων θα εκτελέσει δύο επαναλήψεις περνώντας είτε από τα σημεία A, G, D είτε από τα σημεία A, H, D.

Αυτό που προκύπτει ως συμπέρασμα είναι ότι αποφεύγοντας την εφικτή περιοχή μπορούμε να ακολουθήσουμε συντομότερους δρόμους προς τη βέλτιστη λύση, ανεξάρτητα από το πλήθος των περιορισμών που υπάρχουν στο γραμμικό πρόβλημα. Από την άλλη πλευρά όμως, όπως αναφέρθηκε και στο πρώτο κεφάλαιο, ο αλγόριθμος εξωτερικών σημείων δεν ακολουθεί πάντοτε σύντομους δρόμους και αυτό γιατί υπάρχει ο κίνδυνος να χαθεί η επαφή με την εφικτή περιοχή, σε περιπτώσεις ειδικά κατασκευασμένων προβλημάτων (benchmarks). Ο τρόπος για να κρατηθεί η επαφή με την εφικτή περιοχή είναι να κατασκευαστεί ένας δεύτερος δρόμος εφικτών σημείων που να αποτελείται από ευθύγραμμα τμήματα τα άκρα των οποίων μπορεί να είναι οποιαδήποτε συνοριακά σημεία. Έτσι αποφεύγεται το σημαντικότερο υπολογιστικό μειονέκτημα των εφικτών αλγορίθμων simplex, δηλαδή να κινούνται μόνο από κορυφή σε κορυφή της εφικτής περιοχής [Παπαρρίζος (2009)].

### **2.2.2 Περιγραφή του αλγορίθμου Εξωτερικών Σημείων**

Ο αλγόριθμος εξωτερικών σημείων που θα περιγραφεί σε αυτή την ενότητα και χρησιμοποιείται στην επίλυση των τυχαίων γραμμικών προβλημάτων της παρούσας εργασίας προέρχεται από το βιβλίο ([Παπαρρίζος (2009)]) και η πρώτη υλοποίηση αυτού του αλγορίθμου έγινε τη δεκαετία του '90 [Paparrizos (1991)], [Paparrizos (1993)] με σκοπό την ανάπτυξη ενός αλγορίθμου τύπου simplex που θα βρίσκει τη βέλτιστη λύση ενός γραμμικού προβλήματος σε λιγότερα βήματα από ότι η κλασική μέθοδος simplex.

Έστω το παρακάτω γραμμικό πρόβλημα στην τυποποιημένη μορφή:

$$\min \{c^T x : Ax = b, x \geq 0\}$$

όπου  $c, x \in \mathbb{R}^n$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$  και  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Ο αλγόριθμος ξεκινά με μία εφικτή βασική διαμέριση  $(B, N)$ .

Υπολογίζονται η μήτρα  $B^{-1}$  και τα διανύσματα  $x_B$ ,  $s_N$  και  $w^T$ . Στην πρώτη επανάληψη του αλγόριθμου ξεκινάμε μία διαμέριση όπου όλες οι χαλαρές μεταβλητές είναι βασικές και όλες οι υπόλοιπες μεταβλητές είναι μη βασικές. Στην περίπτωση που το πρόβλημα έχει εξαρχής κάποιους ισοτικούς περιορισμούς ελέγχουμε αν η επαυξημένη μήτρα  $[A | b]$  είναι πλήρους βαθμού και επιλέγουμε κάποιες από τις αρχικές μεταβλητές ως βασικές. Η μήτρα  $B^{-1}$  και τα διανύσματα  $x_B$ ,  $s_N$  και  $w^T$  βρίσκονται από τους εξής τύπους:

$$B^{-1} = B, \quad x_B = B^{-1} b, \quad s_N = (c_N)^T - w^T N \quad \text{και} \quad w^T = (c_B) B^{-1}.$$

Στη συνέχεια, υπολογίζονται τα σύνολα των μη βασικών δεικτών  $P$  και  $Q$  όπου:

$$P = \{j \in N : s_j < 0\} \quad \text{και} \quad Q = \{j \in N : s_j \geq 0\}.$$

Αν είναι  $P = \emptyset$ , το πρώτο βασικό σημείο είναι βέλτιστο και ο αλγόριθμος σταματά. Διαφορετικά, χρησιμοποιείται ένα τυχαίο θετικό διάνυσμα  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$  με το οποίο υπολογίζεται η διεύθυνση  $d_B$  και η ποσότητα  $s_0$  θέτοντας:

$$s_0 = \sum_{j \in P} \lambda_j s_j \quad \text{και}$$

$$d_B = - \sum_{j \in P} \lambda_j h_j \quad \text{όπου} \quad d_p = \lambda \quad \text{και} \quad d_Q = 0.$$

Υπενθυμίζεται ότι είναι  $h_j = A_B^{-1} a_j$  και  $s_j = c_j - w^T a_j$ .

Το διάνυσμα  $d_B$  χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό της εξερχόμενης μεταβλητής  $x_{(B(r))} = x_k$ . Συγκεκριμένα τίθεται:

$$\alpha = \frac{x_{(B(r))}}{-d_{(B(r))}} = \min \left\{ \frac{x_{(B(i))}}{-d_{(B(i))}} : d_{(B(i))} < 0 \right\}.$$

Αν δεν υπάρχει εξερχόμενη μεταβλητή, δηλαδή αν είναι  $d_B \geq 0$  τότε το γραμμικό πρόβλημα είναι βέλτιστο ή απεριόριστο ανάλογα με το αν είναι  $s_0 = 0$  ή  $s_0 < 0$  αντίστοιχα. Διαφορετικά, υπολογίζεται το σημείο  $y = x + a d$  και προχωράμε στον προσδιορισμό της εισερχόμενης μεταβλητής  $x_1$ .

Υπολογίζονται τα διανύσματα  $H_{rP} = (B^{-1})_r A_P$  και  $H_{rQ} = (B^{-1})_r A_Q$  που βοηθούν στην επιλογή της εισερχόμενης μεταβλητής  $x_1$  τα οποία βρίσκονται με ένα σύνθετο έλεγχο ελαχίστου λόγου. Πιο συγκεκριμένα έχουμε

$$\theta_1 = \frac{(-s_p)}{h_{rp}} = \min \left\{ \frac{-s_j}{h_{rj}} : h_{rj} > 0 \text{ και } j \in P \right\} \text{ και}$$

$$\theta_2 = \frac{(-s_q)}{h_{rq}} = \min \left\{ \frac{-s_j}{h_{rj}} : h_{rj} < 0 \text{ και } j \in Q \right\}$$

από όπου εντοπίζονται οι δείκτες  $t_1$  και  $t_2$  έτσι ώστε  $P(t_1) = p$  και  $Q(t_2) = q$ . Αν ισχύει  $\theta_1 \leq \theta_2$  τότε θέτουμε  $l = p$ , αλλιώς  $l = q$ .

Μετά την επιλογή της εισερχόμενης και εξερχόμενης μεταβλητής ανανεώνονται τα σύνολα  $B$ ,  $P$  και  $Q$ . Η ανανέωση γίνεται ως εξής:

$$B = B \sim \{k\} \cup \{l\} \text{ και } Q = Q \cup \{k\}.$$

Αν ισχύει  $\theta_1 \leq \theta_2$  τότε τίθεται  $P = P \sim \{l\}$ , αλλιώς τίθεται  $Q = Q \sim \{l\}$ .

Χρησιμοποιώντας τη νέα βάση  $B$  υπολογίζεται η νέα βασική λύση  $y$  και ανανεώνονται διαδοχικά τα  $B^{-1}$ ,  $x_B$ ,  $s_N$ ,  $w^T$ ,  $d_B$ ,  $s_0$  και η διαδικασία επαναλαμβάνεται.

Η λεκτική περιγραφή του αλγορίθμου δίνεται στον Πίνακα 2.1 με την παρακάτω μορφή:

Πίνακας 2.1 – Λεκτική περιγραφή Αλγορίθμου Εξωτερικών Σημείων

<b>Αλγόριθμος Εξωτερικών Σημείων</b>
<p><b>Βήμα 0: Αρχικοποίηση</b></p> <p>Ξεκίνα με μία εφικτή βασική διαμέριση <math>(B, N)</math> . Υπολόγισε τα διανύσματα και τις μήτρες <math>C_B, C_N, B^{-1}, x_B, w^T, s_N</math> . Υπολόγισε τα σύνολα <math>P</math> και <math>Q</math> . Επέλεξε ένα τυχαίο θετικό διάνυσμα <math>\lambda</math> και υπολόγισε το <math>s_0</math> και το <math>d_B</math> .</p>
<p><b>Βήμα 1: Έλεγχος βελτιστότητας και επιλογή εξερχόμενης μεταβλητής</b></p> <p>a) Αν είναι <math>P = \emptyset</math> STOP, το γραμμικό πρόβλημα είναι βέλτιστο.</p> <p>b) Αν είναι <math>d_B \geq 0</math> STOP, το γραμμικό πρόβλημα είναι βέλτιστο αν ισχύει <math>s_0 = 0</math> ή απεριόριστο αν ισχύει <math>s_0 &lt; 0</math> .</p> <p>Διαφορετικά υπολόγισε τον έλεγχο ελαχίστου λόγου <math>\alpha</math> και επέλεξε την εξερχόμενη μεταβλητή <math>x_{(B(r))} = x_k</math> . Θέσε <math>y = x + \alpha d</math> .</p>
<p><b>Βήμα 2: Επιλογή εισερχόμενης μεταβλητής</b></p> <p>Υπολόγισε τα διανύσματα <math>H_{rP} = (B^{-1})_r A_P</math> και <math>H_{rQ} = (B^{-1})_r A_Q</math> , τους λόγους <math>\theta_1</math> , <math>\theta_2</math> και τους δείκτες <math>t_1</math> και <math>t_2</math> . Αν ισχύει <math>\theta_1 \leq \theta_2</math> τότε θέσε <math>l = p</math> , διαφορετικά θέσε <math>l = q</math> . Η μεταβλητή <math>x_l</math> είναι εισερχόμενη.</p>
<p><b>Βήμα 3: Περιστροφή</b></p> <p>Ανανέωσε τα σύνολα <math>B</math> , <math>P</math> και <math>Q</math> . Θέσε <math>B(r) = l</math> . Αν είναι <math>\theta_1 \leq \theta_2</math> θέσε <math>P = P \sim \{l\}</math> και <math>Q = Q \cup \{k\}</math> . Διαφορετικά θέσε <math>Q(t_2) = k</math> . Χρησιμοποιώντας τη νέα διαμέριση υπολόγισε διαδοχικά τα <math>y</math> , <math>B^{-1}</math> , <math>x_B</math> , <math>s_N</math> , <math>w^T</math> , <math>d_B</math> , <math>s_0</math> και πήγαινε στο Βήμα 1.</p>

## 2.3 Παραδείγματα επίλυσης γραμμικών προβλημάτων

### 2.3.1 Επίλυση ενός βέλτιστου γραμμικού προβλήματος

Να λυθεί το παρακάτω γραμμικό πρόβλημα:

$$\max z = 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4$$

$$\text{s.t.} \quad x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 12$$

$$-4x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 \geq -4$$

$$3x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 \leq 8$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4$$

Στο παραπάνω γραμμικό πρόβλημα προσθέτουμε χαλαρές μεταβλητές στους ανισοτικούς περιορισμούς έτσι ώστε να το φέρουμε στην κανονική μορφή. Επίσης, η αντικειμενική συνάρτηση από συνάρτηση μεγιστοποίησης μετατρέπεται σε συνάρτηση ελαχιστοποίησης. Έχουμε λοιπόν:

$$\min z = -2x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4$$

$$\text{s.t.} \quad x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 12$$

$$-4x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_6 = -4$$

$$3x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 + x_7 = 8$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$$

Σε μορφή μητρών, τα δεδομένα του γραμμικού προβλήματος αναπαρίστανται ως εξής:

$$\mathbf{c}^T = [-2 \ 1 \ -3 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0] \ , \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & -2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 12 \\ -4 \\ 8 \end{bmatrix} .$$

### Βήμα 0:

Δημιουργούμε μία εφικτή βάση  $B$  που περιέχει τις χαλαρές μεταβλητές:  $B=[5 \ 6 \ 7]$  . Όλες οι υπόλοιπες μεταβλητές πηγαίνουν στο σύνολο  $N$  :  $N=[1 \ 2 \ 3 \ 4]$  . Κατασκευάζουμε τον πίνακα  $B^{-1}$  και τα διανύσματα  $x_B$  ,  $w^T$  και  $(s_N)^T$  :

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B^{-1} , \quad x_B = B^{-1} b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ -4 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} ,$$

$$w^T = (c_B)^T B^{-1} = [0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [0 \ 0 \ 0] \text{ και}$$

$$(s_N)^T = (c_N)^T - w^T N = [-2 \ 1 \ -3 \ -1] - [0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -4 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & -1 & 2 \end{bmatrix} = [-2 \ 1 \ -3 \ -1] .$$

Διαμερίζουμε στη συνέχεια το σύνολο  $N$  στα σύνολα  $P$  και  $Q$  και έχουμε:

$$P = [1 \ 3 \ 4] \text{ και } Q = [2] .$$

Δημιουργούμε το διάνυσμα  $\lambda$  :  $\lambda = (\lambda_1 \ \lambda_2 \ \lambda_3) = [1 \ 1 \ 1]$  . Υπολογίζουμε τα  $s_0$  ,  $d_B$  και  $h_j$  :

$$s_0 = \sum_{j \in P} \lambda_j s_j = [1 \ 1 \ 1] \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix} = -6 , \quad d_B = -\sum_{j \in P} \lambda_j h_j = [1 \ 1 \ 1] \begin{bmatrix} -5 \\ -5 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -5 \\ -4 \end{bmatrix} , \text{ όπου}$$

$$h_j = B^{-1} A_{.j} = \begin{bmatrix} -5 \\ -5 \\ -4 \end{bmatrix} , \text{ με } h_1 = B^{-1} A_{.1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} , \quad h_3 = B^{-1} A_{.3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ και}$$

$$h_4 = B^{-1} A_{.4} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} .$$

## 1η Επανάληψη

### Βήμα 1: (Έλεγχος βελτιστότητας και επιλογή εξερχόμενης μεταβλητής)

- i.  $P \neq \emptyset$  , άρα το γραμμικό πρόβλημα δεν είναι βέλτιστο.
- ii. Ισχύει ότι  $d_B \neq 0$  και  $s_0 \neq 0$  , άρα το γραμμικό πρόβλημα δεν είναι βέλτιστο. Επιλέγουμε λοιπόν την εξερχόμενη μεταβλητή  $x_k = x_{(b[r])}$  από την παρακάτω σχέση:

$$\alpha = \frac{x_{(B[r])}}{-d_{(B[r])}} = \min \left\{ \frac{x_{(B[r])}}{-d_{(B[r])}} : d_{(B[r])} < 0 \right\} = \min \left\{ \frac{12}{-(-5)}, \frac{4}{-(-5)}, \frac{8}{-(-4)} \right\} = \frac{4}{5} , \text{ άρα } r = 2 .$$

Επειδή  $\alpha \neq \emptyset$  , το γραμμικό πρόβλημα δεν είναι απερίοριστο.

Η μεταβλητή που εξέρχεται από τη βάση προκύπτει από το  $B[r] = k \Rightarrow B[2] = k \Rightarrow k = 6$  , άρα είναι η μεταβλητή  $x_6$  .

### Βήμα 2: (Επιλογή εισερχόμενης μεταβλητής)

Υπολογίζουμε τα διανύσματα  $H_{rP} = (B^{-1})_r \cdot A_P$  και  $H_{rQ} = (B^{-1})_r \cdot A_Q$  με

$$H_{rP} = (B^{-1})_2 \cdot A_P = [0 \quad -1 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -4 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} = [4 \quad 2 \quad -1] \text{ και}$$

$$H_{rQ} = (B^{-1})_2 \cdot A_Q = [0 \quad -1 \quad 0] \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = -1 .$$

Στη συνέχεια, υπολογίζουμε τους λόγους  $\theta_1$  και  $\theta_2$  από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\theta_1 = \frac{(-s_p)}{h_{rp}} = \min \left\{ \frac{-s_j}{h_{rj}} : h_{rj} > 0 \text{ και } j \in P \right\} = \min \left\{ -\frac{(-2)}{4}, -\frac{(-3)}{2}, x \right\} = \frac{2}{4} \text{ και}$$

$$\theta_2 = \frac{(-s_q)}{h_{rq}} = \min \left\{ \frac{-s_j}{h_{rj}} : h_{rj} < 0 \text{ και } j \in Q \right\} = \min \left\{ \frac{-1}{-1} \right\} = 1 .$$



Από τα  $\theta_1$  και  $\theta_2$  συμπεραίνουμε ότι  $t_1 = 1$  γιατί το  $\frac{2}{4}$  είναι ο πρώτος λόγος του  $\theta_1$  ενώ αντίστοιχα προκύπτει ότι  $t_2 = 1$  από το  $\theta_2$ .

Επειδή ισχύει ότι  $\theta_1 \leq \theta_2$ , επιλέγουμε την εισερχόμενη μεταβλητή από το σύνολο  $P$ , άρα η εισερχόμενη μεταβλητή προκύπτει από τη σχέση  $l = p$  όπου  $p = P(t_1) = P(1) = 1$ . Έτσι η μεταβλητή που εισέρχεται στη βάση είναι η  $x_1$ .

### **Βήμα 3: (Περιστροφή)**

Θέτουμε  $B[r] = 1 \Rightarrow B[2] = 1$  και το σύνολο  $B$  αποτελείται πλέον από τα εξής στοιχεία:

$$B = [5 \ 1 \ 7] .$$

Εφόσον ισχύει ότι  $\theta_1 \leq \theta_2$  το σύνολο  $P$  διαμορφώνεται ως εξής:  $P = P \setminus \{1\} = [3 \ 4]$  ενώ στο σύνολο  $Q$  εισέρχεται η μεταβλητή  $x_6$ :  $Q = Q \cup \{k\} = [2 \ 6]$ . Άρα το σύνολο  $N$  αποτελείται από τις εξής μεταβλητές:  $N = [3 \ 4 \ 2 \ 6]$ .

Ανανεώνουμε το διάνυσμα  $d_B$  από την εξής σχέση:

$$\bar{d}_B = E^{-1} d_B = \begin{bmatrix} 1 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & -3/4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ -5 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15/4 \\ -5/4 \\ -1/4 \end{bmatrix} .$$

Επειδή όμως η εισερχόμενη μεταβλητή προήλθε από το σύνολο  $P$  θέτουμε  $d_{(B[r])}^- = d_{(B[r])}^- + \lambda_1 = d_{(B[2])}^- + 1$  δηλαδή το διάνυσμα  $d_B$  διαμορφώνεται ως εξής:

$$\bar{d}_B = \begin{bmatrix} -15/4 \\ -1/4 \\ -1/4 \end{bmatrix} .$$

Υπολογίζουμε εκ νέου σε αυτό το σημείο τα  $B^{-1}$ ,  $x_B$ ,  $w^T$ ,  $(s_N)^T$  και  $s_0$  και έχουμε:

$$B^{-1} = E^{-1} B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & -3/4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/4 & 0 \\ 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & 3/4 & 1 \end{bmatrix} ,$$

$$x_B = B^{-1} b = \begin{bmatrix} 1 & 1/4 & 0 \\ 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & 3/4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ -4 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} ,$$

$$w^T = (C_B)^T B^{-1} = [0 \ -2 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 1/4 & 0 \\ 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & 3/4 & 1 \end{bmatrix} = [0 \ \frac{1}{2} \ 0] ,$$

$$(s_N)^T = (C_N)^T - w^T N = [-3 \ -1 \ 1 \ 0] - [0 \ \frac{1}{2} \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} = [-2 - \frac{3}{2} \ \frac{1}{2} \ \frac{1}{2}] \text{ και}$$

$$s_0 = \sum_{j \in P} \lambda_j s_j = [1 \ 1] \begin{bmatrix} -2 \\ -3/2 \end{bmatrix} = -\frac{7}{2} .$$

## 2<sup>η</sup> Επανάληψη

### Βήμα 1: (Έλεγχος βελτιστότητας και επιλογή εξερχόμενης μεταβλητής)

- i.  $P \neq \emptyset$  , άρα το γραμμικό πρόβλημα δεν είναι βέλτιστο.
- ii. Ισχύει ότι  $d_B \neq 0$  και  $s_0 \neq 0$  , άρα το γραμμικό πρόβλημα δεν είναι βέλτιστο. Επιλέγουμε λοιπόν την εξερχόμενη μεταβλητή  $x_k = x_{(b[r])}$  από την παρακάτω σχέση:

$$\alpha = \frac{x_{(B[r])}}{-d_{(B[r])}} = \min \left\{ \frac{44}{15}, 4, 20 \right\} = \frac{44}{5} , \text{ άρα προκύπτει ότι } r = 1 . \text{ Επειδή } \alpha \neq \emptyset , \text{ το γραμμικό}$$

πρόβλημα δεν είναι απεριόριστο.

Έτσι λοιπόν η μεταβλητή η οποία εξέρχεται της βάσης είναι η  $B[r] = k \Rightarrow B[1] = k \Rightarrow k = 5$  , δηλαδή το  $x_5$  .

### Βήμα 2: (Επιλογή εισερχόμενης μεταβλητής)

Υπολογίζουμε τα διανύσματα  $H_{rP}$  και  $H_{rQ}$  :

$$H_{rP} = (B^{-1})_1. A_P = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{13}{4} \end{bmatrix} \text{ και}$$

$$H_{rQ} = (B^{-1})_1. A_Q = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} .$$

Υπολογίζουμε τους λόγους  $\theta_1$  και  $\theta_2$  :

$$\theta_1 = \frac{(-s_p)}{h_{rp}} = \min \left\{ -\frac{(-2)}{(1/2)}, -\frac{(-3/2)}{(13/4)} \right\} = \frac{6}{13} \text{ και}$$

$$\theta_2 = \frac{(-s_q)}{h_{rq}} = \min \left\{ -\frac{1/2}{(-1/4)} \right\} = 2 .$$

Από τα  $\theta_1$  και  $\theta_2$  που υπολογίστηκαν βρίσκουμε ότι  $t_1 = 2$  και  $t_2 = 1$  . Επειδή ισχύει ότι  $\theta_1 \leq \theta_2$  επιλέγουμε την εισερχόμενη μεταβλητή από το σύνολο  $P$  , άρα η εισερχόμενη μεταβλητή προκύπτει από τη σχέση  $l = p$  όπου  $p = P(t_1) = P(2) = 4$  . Έχουμε λοιπόν ως εισερχόμενη μεταβλητή την  $l = x_4$  .

### **Βήμα 3: (Περιστροφή)**

Θέτουμε  $B[r] = l \Rightarrow B[1] = 4$  με το σύνολο  $B$  να αποτελείται πλέον από τα εξής στοιχεία:  $B = [4 \ 1 \ 7]$  .

Εφόσον ισχύει ότι  $\theta_1 \leq \theta_2$  , από το σύνολο  $P$  αφαιρείται η μεταβλητή  $x_4$  και το σύνολο  $P$  αποτελείται πλέον από τα εξής στοιχεία:  $P = P \setminus \{1\} = [3]$  . Από τη άλλη, το σύνολο  $Q$  περιλαμβάνει τα στοιχεία  $Q = Q \cup \{k\} = [2 \ 6 \ 5]$  .

Έτσι, η ένωση των δύο, το σύνολο  $N$  , αποτελείται από τις εξής μεταβλητές:  $N = [3 \ 2 \ 6 \ 5]$  .

Ανανεώνουμε το διάνυσμα  $d_B$  και έχουμε:  $\bar{d}_B = E^{-1} d_B = \begin{bmatrix} -15/13 \\ -7/13 \\ 38/13 \end{bmatrix}$  . Επειδή όμως η

εισερχόμενη μεταβλητή προήλθε από το σύνολο  $P$ , θέτουμε  $d_{(B[r])}^- = d_{(B[r])}^- + \lambda_1 = d_{(B[1])}^- + 1$  και το διάνυσμα  $d_B$  διαμορφώνεται πλέον ως εξής:

$$\bar{d}_B = \begin{bmatrix} -2/13 \\ -7/13 \\ 38/13 \end{bmatrix}.$$

Υπολογίζουμε εκ νέου τα  $B^{-1}$ ,  $x_B$ ,  $w^T$ ,  $(s_N)$  και  $s_0$  και έχουμε:

$$B^{-1} = E^{-1} B^{-1} = \begin{bmatrix} 4/13 & 1/13 & 0 \\ 1/13 & -3/13 & 0 \\ -11/13 & 7/13 & 1 \end{bmatrix}, \quad x_B = B^{-1} b = \begin{bmatrix} 44/13 \\ 24/13 \\ -56/13 \end{bmatrix},$$

$$w^T = (C_B)^T B^{-1} = \left[ \frac{-6}{13} \quad \frac{5}{13} \quad 0 \right], \quad (s_N)^T = (C_N)^T - w^T N = \left[ -\frac{23}{13} \quad \frac{20}{13} \quad \frac{5}{13} \quad \frac{6}{13} \right] \quad \text{και} \quad s_0 = -\frac{23}{13}.$$

### 3<sup>η</sup> Επανάληψη

#### Βήμα 1: (Έλεγχος βελτιστότητας και επιλογή εξερχόμενης μεταβλητής)

- i.  $P \neq \emptyset$ , άρα το γραμμικό πρόβλημα δεν είναι βέλτιστο.
- ii. Ισχύει ότι  $d_B \not\leq 0$  και  $s_0 \neq 0$ , άρα το γραμμικό πρόβλημα δεν είναι βέλτιστο. Επιλέγουμε την εξερχόμενη μεταβλητή  $x_k = x_{(b[r])}$  από την παρακάτω σχέση:

$$\alpha = \frac{x_{(B[r])}}{-d_{(B[r])}^-} = \min \left\{ 22, \frac{24}{7}, x \right\} = \frac{24}{7}, \quad \text{άρα προκύπτει ότι } r = 2. \quad \text{Επειδή } \alpha \neq \emptyset, \text{ το γραμμικό}$$

πρόβλημα δεν είναι απεριόριστο.

Η εξερχόμενη μεταβλητή της βάσης είναι η  $x_1$ , κάτι το οποίο προκύπτει από το  $B[r] = k \Rightarrow B[2] = k \Rightarrow k = 1$ .

### **Βήμα 2: (Επιλογή εισερχόμενης μεταβλητής)**

Υπολογίζουμε τα διανύσματα  $H_{rP}$  και  $H_{rQ}$  :

$$H_{rP} = (B^{-1})_2 \cdot A_P = \left[ \frac{1}{13} \quad -\frac{3}{13} \quad 0 \right] \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{7}{13} \text{ και}$$

$$H_{rQ} = (B^{-1})_2 \cdot A_Q = \left[ \frac{1}{13} \quad -\frac{3}{13} \quad 0 \right] \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \left[ -\frac{1}{13} \quad \frac{3}{13} \quad \frac{1}{13} \right] .$$

Υπολογίζουμε εκ νέου τους λόγους  $\theta_1$  και  $\theta_2$  :

$$\theta_1 = \frac{(-s_p)}{h_{rp}} = \frac{23}{7} \text{ και } \theta_2 = \frac{(-s_q)}{h_{rq}} = 20 .$$

Από τα  $\theta_1$  και  $\theta_2$  προκύπτει ότι  $t_1 = 1$  και  $t_2 = 1$  . Επειδή ισχύει ότι  $\theta_1 \leq \theta_2$  επιλέγουμε την εισερχόμενη μεταβλητή από το σύνολο  $P$  , άρα έχουμε  $l = p$  όπου  $p = P(t_1) = P(1) = 3$  . Έτσι η μεταβλητή  $l = x_3$  εισέρχεται στη βάση.

### **Βήμα 3: (Περιστροφή)**

Θέτουμε  $B[r] = 1 \Rightarrow B[2] = 3$  και το σύνολο  $B$  αποτελείται πλέον από τα εξής στοιχεία:

$$B = [4 \quad 3 \quad 7] .$$

Εφόσον ισχύει ότι  $\theta_1 \leq \theta_2$  , από το σύνολο  $P$  αφαιρείται η μεταβλητή  $x_3$  και το σύνολο  $P$  είναι το κενό σύνολο:  $P = P \setminus \{1\} = \emptyset$  .

Από τη άλλη, το σύνολο  $Q$  αποτελείται πλέον από τα στοιχεία  $Q = Q \cup \{k\} = [2 \quad 6 \quad 5 \quad 1]$  . Άρα το σύνολο  $N$  περιλαμβάνει τις εξής μεταβλητές:  $N = [2 \quad 6 \quad 5 \quad 1]$  .

Ανανεώνουμε το διάνυσμα  $d_B$  και έχουμε:  $\bar{d}_B = E^{-1} d_B = \begin{bmatrix} -1/9 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  . Επειδή όμως η

εισερχόμενη μεταβλητή προήλθε από το σύνολο  $P$ , θέτουμε  $d_{(B[r])}^- = d_{(B[r])}^- + \lambda_1 = d_{(B[2])}^- + 1$  και το

διάνυσμα  $d_B$  διαμορφώνεται πλέον ως εξής: 
$$\bar{d}_B = \begin{bmatrix} 8/9 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Υπολογίζουμε τα  $B^{-1}$ ,  $x_B$ ,  $w^T$ ,  $(s_N)^T$  και  $s_0$ :

$$B^{-1} = E^{-1} B^{-1} = \begin{bmatrix} 2/7 & 1/7 & 0 \\ 1/7 & -3/7 & 0 \\ -3/7 & -5/7 & 1 \end{bmatrix}, \quad x_B = B^{-1} b = \begin{bmatrix} 20/7 \\ 24/7 \\ 40/7 \end{bmatrix},$$

$$w^T = (C_B)^T B^{-1} = [-5/7 \quad 8/7 \quad 0], \quad (s_N)^T = (C_N)^T - w^T N = \left[ \frac{9}{7} \quad \frac{8}{7} \quad \frac{5}{7} \quad \frac{23}{7} \right] \text{ και}$$

$$s_0 = 0 .$$

#### 4<sup>η</sup> Επανάληψη

##### Βήμα 1: (Έλεγχος βελτιστότητας και επιλογή εξερχόμενης μεταβλητής)

i.  $P = \emptyset$ , άρα το γραμμικό πρόβλημα είναι βέλτιστο.

### **2.3.2 Επίλυση ενός απεριόριστου γραμμικού προβλήματος**

Να λυθεί το παρακάτω γραμμικό πρόβλημα:

$$\min z = x_1 - 2x_2 + x_3$$

$$\text{s.t.} \quad x_1 + x_2 - x_3 \geq 2$$

$$-2x_1 + x_2 + x_3 \leq -1$$

$$2x_1 - x_2 - x_3 \leq 4$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3$$

Στο παραπάνω γραμμικό πρόβλημα προσθέτουμε χαλαρές μεταβλητές στους ανισοτικούς περιορισμούς έτσι ώστε να το φέρουμε στην κανονική μορφή. Έχουμε λοιπόν:

$$\begin{aligned} \min z &= x_1 - 2x_2 + x_3 \\ \text{s.t.} \quad &x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2 \\ &-2x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = -1 \\ &2x_1 - x_2 - x_3 + x_6 = 4 \\ &x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

Σε μορφή μητρών, τα δεδομένα του προβλήματος αναπαρίστανται ως εξής:

$$c^T = [1 \ -2 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0] \quad , \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} .$$

### Βήμα 0:

Δημιουργούμε μία εφικτή βάση  $B$  που περιέχει τις χαλαρές μεταβλητές:  $B = [4 \ 5 \ 6]$  .  
Όλες οι υπόλοιπες μεταβλητές πηγαίνουν στο σύνολο  $N$  :  $N = [1 \ 2 \ 3]$  .

Κατασκευάζουμε τον πίνακα  $B^{-1}$  και τα διανύσματα  $x_B$  ,  $w^T$  και  $(s_N)^T$  :

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B^{-1} \quad , \quad x_B = B^{-1} b = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} ,$$

$$w^T = (c_B)^T B^{-1} = [0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [0 \ 0 \ 0] \quad \text{και}$$

$$(s_N)^T = (c_N)^T - w^T N = [1 \ -2 \ 1] - [0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} = [1 \ -2 \ 1] .$$

Διαμερίζουμε στη συνέχεια το σύνολο  $N$  στα σύνολα  $P$  και  $Q$  και έχουμε  $P = [2]$  και

$Q = [1 \ 3]$  . Δημιουργούμε το διάνυσμα  $\lambda$  :  $\lambda = (\lambda_1) = [1]$  . Υπολογίζουμε τα  $s_0$  ,  $d_B$  και  $h_j$  :

$$s_0 = \sum_{j \in P} \lambda_j s_j = [1] [-2] = -2 \quad , \quad d_B = - \sum_{j \in P} \lambda_j h_j = [1] \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} , \text{ όπου}$$

$$h_1 = B^{-1} A_{.2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} .$$

## 1η Επανάληψη

### Βήμα 1: (Ελεγχος βελτιστότητας και επιλογή εξερχόμενης μεταβλητής)

- i.  $P \neq \emptyset$  , άρα το γραμμικό πρόβλημα δεν είναι βέλτιστο.
- ii. Ισχύει ότι  $d_B \neq 0$  και  $s_0 \neq 0$  , άρα το γραμμικό πρόβλημα δεν είναι βέλτιστο. Επιλέγουμε λοιπόν την εξερχόμενη μεταβλητή  $x_k = x_{(b[r])}$  από την παρακάτω σχέση:

$$\alpha = \frac{x_{(B[r])}}{-d_{(B[r])}} = \min \left\{ \frac{x_{(B[r])}}{-d_{(B[r])}} : d_{(B[r])} < 0 \right\} = \min \left\{ x, \frac{(-1)}{-(-1)}, x \right\} = -1 \quad \text{άρα } r = 2 .$$

Επειδή  $\alpha \neq \emptyset$  , το γραμμικό πρόβλημα δεν είναι απερίοριστο. Η μεταβλητή που εξέρχεται από τη βάση προκύπτει από το  $B[r] = k \Rightarrow B[2] = k \Rightarrow k = 5$  , άρα είναι η μεταβλητή  $x_5$  .

### Βήμα 2: (Επιλογή εισερχόμενης μεταβλητής)

Υπολογίζουμε τα διανύσματα  $H_{rP} = (B^{-1})_r \cdot A_P$  και  $H_{rQ} = (B^{-1})_r \cdot A_Q$  :

$$H_{rP} = (B^{-1})_1 \cdot A_P = [0 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 1 \quad \text{και}$$



$$H_{rQ} = (B^{-1})_2, A_Q = [0 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = [-2 \ 1] .$$

Στη συνέχεια, υπολογίζουμε τους λόγους  $\theta_1$  και  $\theta_2$  από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\theta_1 = \frac{(-s_p)}{h_{rp}} = \min \left\{ \frac{-s_j}{h_{rj}} : h_{rj} > 0 \text{ και } j \in P \right\} = \min \left\{ -\frac{(-2)}{1}, x \right\} = 2 \text{ και}$$

$$\theta_2 = \frac{(-s_q)}{h_{rq}} = \min \left\{ \frac{-s_j}{h_{rj}} : h_{rj} < 0 \text{ και } j \in Q \right\} = \min \left\{ \frac{-1}{-2}, x \right\} = \frac{1}{2} .$$

Από τα  $\theta_1$  και  $\theta_2$  συμπεραίνουμε ότι  $t_1 = 1$  και  $t_2 = 1$  .

Επειδή ισχύει ότι  $\theta_2 < \theta_1$  , επιλέγουμε την εισερχόμενη μεταβλητή από το σύνολο  $Q$  , άρα η εισερχόμενη μεταβλητή προκύπτει από τη σχέση  $l = q$  όπου  $q = Q(t_2) = Q(1) = 1$  . Έτσι η μεταβλητή που εισέρχεται στη βάση είναι η  $x_1$  .

### **Βήμα 3: (Περιστροφή)**

Θέτουμε  $B[r] = 1 \Rightarrow B[2] = 1$  και το σύνολο  $B$  αποτελείται πλέον από τα εξής στοιχεία:

$$B = [4 \ 1 \ 6] .$$

Εφόσον ισχύει ότι  $\theta_2 < \theta_1$  το σύνολο  $P$  παραμένει αμετάβλητο,  $P = [2]$  , ενώ για το σύνολο  $Q$  ισχύει ότι  $Q(t_2) = k \Rightarrow Q(1) = 5$  , δηλαδή διαμορφώνεται ως εξής:

$$Q = Q \cup \{k\} = [5 \ 3] . \text{ Άρα το σύνολο } N \text{ αποτελείται από τις εξής μεταβλητές: } N = [2 \ 5 \ 3] .$$

Ανανεώνουμε το διάνυσμα  $d_B$  από την εξής σχέση:

$$\bar{d}_B = E^{-1} d_B = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Υπολογίζουμε εκ νέου σε αυτό το σημείο τα  $B^{-1}$  ,  $x_B$  ,  $w^T$  ,  $(s_N)^T$  και  $s_0$  και έχουμε:

$$\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{E}^{-1} \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/2 \\ 1/2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{w}^T = (\mathbf{C}_B)^T \mathbf{B}^{-1} = [0 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} -1 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = [0 \ -\frac{1}{2} \ 0],$$

$$(\mathbf{s}_N)^T = (\mathbf{C}_N)^T - \mathbf{w}^T \mathbf{N} = [-2 \ 1 \ 0] - [0 \ -\frac{1}{2} \ 0] \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = [-\frac{3}{2} \ \frac{3}{2} \ \frac{1}{2}] \text{ και}$$

$$s_0 = \sum_{j \in P} \lambda_j s_j = [1] [-\frac{3}{2}] = -\frac{3}{2}.$$

## 2<sup>η</sup> Επανάληψη

### Βήμα 1: (Έλεγχος βελτιστότητας και επιλογή εξερχόμενης μεταβλητής)

- i.  $P \neq \emptyset$ , άρα το γραμμικό πρόβλημα δεν είναι βέλτιστο.
- ii. Ισχύει ότι  $d_B \geq 0$ . Επειδή  $s_0 < 0$ , το γραμμικό πρόβλημα είναι απεριορίστο.

## Κεφάλαιο 3: Περιγραφή των δεδομένων της υπολογιστικής μελέτης

Στο προηγούμενο κεφάλαιο έγινε η περιγραφή σε θεωρητικό επίπεδο του αλγορίθμου εξωτερικών σημείων που χρησιμοποιείται στην παρούσα εργασία για την επίλυση των τυχαίων γραμμικών προβλημάτων. Στο Κεφάλαιο 3 περιγράφεται το υπολογιστικό περιβάλλον όπου δημιουργήθηκαν τα τυχαία γραμμικά προβλήματα, η διαδικασία η οποία ακολουθήθηκε, οι τιμές των παραμέτρων που δόθηκαν στις γεννήτριες τυχαίων προβλημάτων, η φυσική ερμηνεία αυτών αλλά και ορισμένα στατιστικά στοιχεία για κάθε μία κατηγορία προβλημάτων.

### 3.1 Υπολογιστικό περιβάλλον για τη δημιουργία των γραμμικών προβλημάτων

Οι κώδικες οι οποίοι χρησιμοποιήθηκαν ώστε να δημιουργηθούν τα τυχαία γραμμικά προβλήματα είναι υλοποιημένοι στη γλώσσα προγραμματισμού Matlab. Ο λόγος που επιλέχθηκε η συγκεκριμένη γλώσσα είναι γιατί μας παρέχει σε μεγάλο βαθμό την ικανότητα για γρήγορους υπολογισμούς, βελτιστοποιημένες συναρτήσεις που διευκολύνουν τις πράξεις μεταξύ πινάκων και διανυσμάτων αλλά και πιο εύκολη διαχείριση μεγάλων προβλημάτων σε σύγκριση με γλώσσες προγραμματισμού όπως η C, η C++ ή η Fortran. Το υπολογιστικό περιβάλλον στο οποίο δημιουργήθηκαν τα 7873 τυχαία γραμμικά προβλήματα περιγράφεται στον Πίνακα 3.1 παρακάτω:

*Πίνακας 3.1 – Υπολογιστικό περιβάλλον δημιουργίας των γραμμικών προβλημάτων*

---

CPU Intel® Pentium(R) B960, 2.20GHz (2 processors)
Instruction set CPU 64-bit
RAM size 6.00 GB
L2 Cache size 2 MB shared
FSB speed 1333 MHz

---

Operating System Debian GNU/Linux 7.0 Wheezy
Kernel version 3.2.0-4-amd64
Matlab version 7.10 R2010a

---

### 3.2 Δημιουργία γραμμικών προβλημάτων

Για να είναι όσο το δυνατόν πιο αντιπροσωπευτικό το δείγμα των τυχαίων γραμμικών προβλημάτων και να μετρηθεί πιο αντικειμενικά η απόδοση του αλγορίθμου εξωτερικών σημείων, δημιουργήθηκαν 7873 γραμμικά προβλήματα με γεννήτριες τυχαίων προβλημάτων. Τα προβλήματα αυτά χωρίστηκαν σε τέσσερις κατηγορίες, η κάθε μία από αυτές με διαφορετικό πλήθος μεταβλητών και περιορισμών αλλά και διαφορετικό είδος περιορισμών.

Όπως αναφέρθηκε και στο πρώτο κεφάλαιο, επιλέξαμε τα προβλήματα που θα δημιουργήσουμε να είναι διαστάσεων από  $1 \times 1$  μέχρι  $5000 \times 10000$ . Ο λόγος που πήραμε μία τέτοια απόφαση ήταν γιατί ο συγκεκριμένος αλγόριθμος δεν είχε “τρέξει” σε προβλήματα τόσων μεγάλων διαστάσεων και θα ήταν πρόκληση για αυτόν να αντεπεξέλθει. Μία ακόμα απόφαση την οποία έπρεπε να πάρουμε ήταν σχετικά με τα είδος των προβλημάτων που θα δημιουργούσαμε, αν τα γραμμικά προβλήματα θα ήταν αραιά ή πυκνά. Επιλέξαμε το σύνολο των προβλημάτων να είναι αραιά γιατί οι δυσκολίες που θα συναντούσε ο αλγόριθμος είναι μεγαλύτερες σε σχέση με την επίλυση πυκνών προβλημάτων και έτσι με αυτό τον τρόπο θα αξιολογούσαμε καλύτερα την υπολογιστική συμπεριφορά του αλγορίθμου σε “ακραίες” καταστάσεις.

Το εύρος τιμών των διανυσμάτων  $A$ ,  $b$  και  $c$  αλλά και τα είδη των περιορισμών ( $E_{qin}$ ) που υπάρχουν είναι ίδια και για τις τέσσερις κατηγορίες προβλημάτων. Οι συγκεκριμένες τιμές χρησιμοποιήθηκαν στην αρχικοποίηση των γεννητριών για τη δημιουργία των γραμμικών προβλημάτων. Το διάστημα των πιθανών τιμών που λαμβάνουν παρουσιάζεται στον Πίνακα 3.2 παρακάτω:

Πίνακας 3.2 – Εύρος τιμών των διανυσμάτων  $A$ ,  $b$ ,  $c$  και  $E_{qin}$

$A$	[10 400]
$b$	[10 100]
$c$	[-300 900]
$E_{qin}$	[-1, 0, 1]

Να αναφέρουμε σε αυτό το σημείο ότι αν ένας περιορισμός είναι  $\geq$  τότε το  $E_{qin}$  έχει τιμή ίση με 1, αν ο περιορισμός είναι ισοτικός τότε το  $E_{qin}$  είναι ίσο με 0, ενώ αν ισχύει ότι  $\leq$  η τιμή του είναι ίση με -1. Επίσης, επειδή σκοπός μας ήταν να διερευνήσουμε την υπολογιστική

συμπεριφορά του αλγορίθμου στα αραιά γραμμικά προβλήματα θέσαμε ως άνω όριο της πυκνότητας για όλες τις κατηγορίες γραμμικών προβλημάτων το 30%.

### 3.3 Χαρακτηριστικά γραμμικών προβλημάτων

Στην παρούσα ενότητα γίνεται αναλυτική περιγραφή των χαρακτηριστικών που καταγράψαμε για κάθε ένα τυχαίο γραμμικό πρόβλημα που δημιουργήθηκε. Τα στοιχεία αυτά αποτελούν τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά των γραμμικών προβλημάτων και έχουν την δική τους επίδραση στην απόδοση του αλγορίθμου εξωτερικών σημείων που εφαρμόστηκε. Τα χαρακτηριστικά των γραμμικών προβλημάτων που αποθηκεύσαμε για κάθε ένα από αυτά είναι τα εξής:

- $m$ : πλήθος των περιορισμών του γραμμικού προβλήματος
- $n$ : πλήθος των μεταβλητών του γραμμικού προβλήματος
- $density$ : πυκνότητα των δεδομένων του γραμμικού προβλήματος
- $nnz$ : αριθμός μη-μηδενικών στοιχείων του γραμμικού προβλήματος
- $L$ : μήκος των δεδομένων
- $cond(A)$ : βαθμός κατάστασης της μήτρας  $A$ . Η συγκεκριμένη τιμή όσο πιο κοντά στη μονάδα είναι τόσο καλύτερη είναι η κατάσταση των δεδομένων του προβλήματος [Jayadeep (2006)].

Επιλέξαμε να καταγράψουμε τα παραπάνω έξι χαρακτηριστικά γιατί θεωρήσαμε ότι είναι τα πιο σημαντικά ώστε να μπορέσουμε να εξάγουμε συμπεράσματα σχετικά με την υπολογιστική συμπεριφορά του αλγορίθμου εξωτερικών σημείων. Και τα έξι αυτά χαρακτηριστικά αποτελούν τις ανεξάρτητες μεταβλητές για τα υποδείγματα που θα κατασκευάσουμε ώστε να καταλήξουμε στα καλύτερα μοντέλα χρονισμού. Όπως θα δούμε αναλυτικά σε επόμενο κεφάλαιο, για να μπορέσουμε να καταλήξουμε στα καλύτερα μοντέλα χρονισμού για κάθε μία από τις κατηγορίες γραμμικών προβλημάτων χρειάστηκε να κάνουμε πολλούς συνδυασμούς με τα έξι αυτά χαρακτηριστικά αλλά και να υψώσουμε σε δύναμη ορισμένα από αυτά. Στις επόμενες τέσσερις υπό-ενότητες παρουσιάζονται για κάθε μία κατηγορία οι τιμές των παραμέτρων που δόθηκαν ως είσοδο στις γεννήτριες τυχαίων

προβλημάτων αλλά και ορισμένα στατιστικά στοιχεία για τα προβλήματα που δημιουργήθηκαν.

### 3.3.1 Κατηγορία A

Για την Κατηγορία A των τυχαίων γραμμικών προβλημάτων, δημιουργήσαμε 3000 γραμμικά προβλήματα όπου το πλήθος των μεταβλητών ( $n$ ) είναι διπλάσιο από το πλήθος των περιορισμών ( $m$ ), δηλαδή ισχύει ότι  $m \leq 2n$ . Σε αυτή την κατηγορία όλοι οι περιορισμοί είναι ανισοτικής μορφής. Για την αρχικοποίηση της γεννήτριας τυχαίων προβλημάτων δώσαμε ως seed number την τιμή 10 και θέσαμε ως άνω όριο για το πλήθος των περιορισμών ( $m$ ) το 5000 έτσι ώστε το πλήθος των μεταβλητών ( $n$ ) να είναι το πολύ ίσο με 10000. Το μικρότερο πρόβλημα που δημιουργήθηκε ήταν διαστάσεων  $1 \times 1$  ενώ αντίθετα το μεγαλύτερο πρόβλημα ήταν διαστάσεων  $4967 \times 9793$ . Επίσης, το πυκνότερο πρόβλημα που δημιουργήθηκε είχε διαστάσεις  $58 \times 101$  με πυκνότητα 28,35% ενώ το πρόβλημα με το μεγαλύτερο πλήθος μη-μηδενικών στοιχείων ήταν διαστάσεων  $4767 \times 9377$ . Τέλος να αναφέρουμε ότι το γραμμικό πρόβλημα με την χειρότερο βαθμό κατάστασης της μήτρας A ( $\text{cond}(A)$ ) ήταν ένα τετραγωνικό πρόβλημα με πλήθος περιορισμών και μεταβλητών ίσο με 23. Στο Πίνακα 3.3 που ακολουθεί παρουσιάζονται συνοπτικά ορισμένα στατιστικά στοιχεία για τα 3000 γραμμικά προβλήματα της Κατηγορίας A.

Πίνακας 3.3 – Χαρακτηριστικά γραμμικών προβλημάτων Κατηγορίας A

	m	n	density	nnz	L	cond(A)
min	1	1	0.0000	0	2.00E+01	6.41E+00
max	4999	9793	0.28354	1.19E+07	1.39E+08	9.72E+18

### 3.3.2 Κατηγορία B

Στην Κατηγορία B των τυχαίων γραμμικών προβλημάτων δημιουργήσαμε 1750 γραμμικά προβλήματα όπου το πλήθος των περιορισμών ( $m$ ) είναι διπλάσιο του πλήθους των μεταβλητών, δηλαδή ισχύει ότι  $2m \geq n$ . Στη συγκεκριμένη κατηγορία επιλέξαμε να δημιουργήσουμε μικρότερο πλήθος προβλημάτων σε σχέση με την A κατηγορία και ο λόγος ήταν γιατί τα προβλήματα αυτής της κατηγορίας επειδή έχουν μεγαλύτερο αριθμό περιορισμών από ότι αριθμό μεταβλητών είναι πιο

δύσκολα στο να επιλυθούν. Και σε αυτή την κατηγορία όλοι οι περιορισμοί ήταν ανισοτικής μορφής. Για την αρχικοποίηση της γεννήτριας τυχαίων προβλημάτων επιλέξαμε ως seed number το 10 και θέσαμε ως άνω όριο για το πλήθος των μεταβλητών το 5000 ώστε το μεγαλύτερο πρόβλημα της κατηγορίας να μην ξεπερνάει τους 10000 περιορισμούς. Και σε αυτή την κατηγορία προβλημάτων το μικρότερο πρόβλημα ήταν διαστάσεων 1x1 ενώ το μεγαλύτερο ήταν 9776x4889 . Το πυκνότερο πρόβλημα αυτής της κατηγορίας είχε 6260 περιορισμούς και 3634 μεταβλητές ενώ το γραμμικό πρόβλημα με τα περισσότερα μη-μηδενικά στοιχεία ήταν διαστάσεων 9117x4989 . Τέλος να αναφέρουμε ότι το πρόβλημα με τη χειρότερο βαθμό κατάστασης μήτρας A ( $\text{cond}(A)$ ) είναι πρόβλημα διαστάσεων 67x40 . Στο Πίνακα 3.4 που ακολουθεί παρουσιάζονται συνοπτικά τα στατιστικά στοιχεία για τα 1750 γραμμικά προβλήματα της Κατηγορίας B.

Πίνακας 3.4 – Χαρακτηριστικά γραμμικών προβλημάτων Κατηγορίας B

	m	n	density	nnz	L	cond(A)
min	1	1	0.0000	0	1.70E+01	7.16E+00
max	9776	4998	0.2830	1.18E+07	1.39E+08	1,078E+35

### 3.3.3 Κατηγορία D

Στην κατηγορία D δημιουργήσαμε 1750 τυχαία γραμμικά προβλήματα όπου το πλήθος των περιορισμών (m) είναι ίσο με το πλήθος των μεταβλητών (n), ισχύει δηλαδή ότι  $m = n$  . Επιλέξαμε και σε αυτή τη κατηγορία όλοι οι περιορισμοί να είναι ανισοτικής μορφής για τα γραμμικά προβλήματα. Για την αρχικοποίηση της γεννήτριας τυχαίων προβλημάτων ορίσαμε και εδώ ως seed number την τιμή 10 και θέσαμε ως άνω όριο για το πλήθος των περιορισμών και των μεταβλητών το 5000 . Το μικρότερο πρόβλημα ήταν διαστάσεων 1x1 ενώ αντίθετα το μεγαλύτερο ήταν 4998x4998 . Το γραμμικό πρόβλημα με τη μεγαλύτερη πυκνότητα (28,54%) είχε 74 περιορισμούς και μεταβλητές ενώ το μεγαλύτερο μήκος δεδομένων (L) είχε το γραμμικό πρόβλημα διαστάσεων 4893x4893 . Στον Πίνακα 3.5 που ακολουθεί παρουσιάζονται συνοπτικά τα στατιστικά στοιχεία για τα 1750 γραμμικά προβλήματα της Κατηγορίας D.

Πίνακας 3.5 – Χαρακτηριστικά γραμμικών προβλημάτων Κατηγορίας D

	m	n	density	nnz	L	cond(A)
min	1	1	0.0000	0	2.10E+01	1.40E+01
max	4998	4998	0.2854	6.45E+06	7.48E+07	1.87E+32

### 3.3.4 Κατηγορία E

Στην τελευταία κατηγορία δημιουργήσαμε 1373 γραμμικά προβλήματα τα οποία είναι τετραγωνικά, δηλαδή ισχύει ότι  $m = n$  (πλήθος περιορισμών ίσο με το πλήθος των μεταβλητών). Στην συγκεκριμένη κατηγορία έγινε η επιλογή οι περιορισμοί των γραμμικών προβλημάτων να είναι είτε ανισοτικής ( $\leq, \geq$ ) είτε ισοτικής μορφής ( $=$ ). Η αρχικοποίηση της γεννήτριας τυχαίων προβλημάτων έγινε και σε αυτή την κατηγορία με seed number ίσο με 10 ενώ ορίσαμε ως κάτω όριο του πλήθους των περιορισμών (m) και των μεταβλητών (n) να είναι το 10 ενώ ως άνω όριο τέθηκε η τιμή 5500. Ως βήμα (step) της γεννήτριας ορίστηκε η τιμή 4 κάτι το οποίο μας εξασφάλισε ότι μέσα στο διάστημα τιμών 10 ως 5500 θα κατανεμηθούν ομοιόμορφα τα 1373 γραμμικά προβλήματα με τέτοιο τρόπο ώστε να ισχύει  $x_{(n+1)} = x_n + 4$ , δηλαδή το γραμμικό πρόβλημα  $x_{(n+1)}$  να έχει 4 παραπάνω περιορισμούς και μεταβλητές από το γραμμικό πρόβλημα  $x_n$ . Το μικρότερο πρόβλημα ήταν διαστάσεων 10x10 ενώ αντίθετα το μεγαλύτερο ήταν διαστάσεων 5498x5498. Τα περισσότερα μη-μηδενικά στοιχεία εμφανίστηκαν στο πρόβλημα με 5402 περιορισμούς και μεταβλητές ενώ το πρόβλημα με το χειρότερο βαθμό κατάστασης της μήτρας A (cond(A)) ήταν στο πρόβλημα διαστάσεων 22x22. Στον Πίνακα 3.6 που ακολουθεί παρουσιάζονται συνοπτικά τα στατιστικά στοιχεία για τα 1373 γραμμικά προβλήματα της Κατηγορίας E.

Πίνακας 3.6 – Χαρακτηριστικά γραμμικών προβλημάτων Κατηγορίας E

	m	n	density	nnz	L	cond(A)
min	10	10	0.0248	8.00E+00	3.74E+02	5.16E+01
max	5498	5498	0.2840	8.24E+06	9.41E+07	7.47E+25



## Κεφάλαιο 4: Επίλυση των γραμμικών προβλημάτων με τον αλγόριθμο εξωτερικών σημείων

Στο προηγούμενο κεφάλαιο έγινε η περιγραφή της διαδικασίας που ακολουθήθηκε ώστε να δημιουργηθούν τα 7873 τυχαία γραμμικά προβλήματα με τις γεννήτριες τυχαίων προβλημάτων. Στο παρόν κεφάλαιο περιγράφονται τα χαρακτηριστικά τα οποία αποφασίσαμε να καταγράψουμε για κάθε ένα γραμμικό πρόβλημα, παραθέτονται τα αποτελέσματα από την επίλυση των γραμμικών προβλημάτων με τον αλγόριθμο εξωτερικών σημείων, παρουσιάζεται μία κατηγοριοποίηση των αποτελεσμάτων με βάση το αποτέλεσμα της εκτέλεσης του αλγορίθμου (αν το αποτέλεσμα είναι βέλτιστο ή αδύνατο) καθώς και ορισμένα προβλήματα και θέματα που έπρεπε να αντιμετωπιστούν πριν και κατά τη διάρκεια της υπολογιστικής μελέτης.

### 4.1 Υπολογιστικό περιβάλλον για την επίλυση των γραμμικών προβλημάτων

Οι κώδικες οι οποίοι χρησιμοποιήθηκαν για την επίλυση των γραμμικών προβλημάτων είναι υλοποιημένοι στη γλώσσα προγραμματισμού Matlab. Ο λόγος για τον οποίο επιλέχτηκε να υλοποιηθεί ο αλγόριθμος εξωτερικών σημείων στη συγκεκριμένη γλώσσα ήταν γιατί πολλές από τις συναρτήσεις για πράξεις μεταξύ πινάκων είναι υλοποιημένες με βέλτιστο τρόπο, οι υπολογισμοί και οι πράξεις γίνονται γρήγορα, η συγγραφή του κώδικα είναι ευκολότερη καθώς οι μαθηματικές εκφράσεις που χρησιμοποιούνται είναι πιο κοντά στην ανθρώπινη γλώσσα (άρα καθιστούν τον κώδικα ευανάγνωστο) αλλά και γιατί το συγκεκριμένο υπολογιστικό περιβάλλον μπορεί να χειριστεί μεγάλης κλίμακας προβλήματα με αποδοτικό τρόπο. Το υπολογιστικό περιβάλλον στο οποίο επιλύθηκαν τα 7873 τυχαία γραμμικά προβλήματα με τον αλγόριθμο εξωτερικών σημείων παρουσιάζεται στον Πίνακα 4.1 παρακάτω:

*Πίνακας 4.1 – Υπολογιστικό περιβάλλον επίλυσης των γραμμικών προβλημάτων*

---

CPU	Intel® Pentium(R) B960, 2.20GHz (2 processors)
Instruction set CPU	64-bit
RAM size	6.00 GB
L2 Cache size	2 MB shared
FSB speed	1333 MHz

---

Operating System	Debian GNU/Linux 7.0 Wheezy
Kernel version	3.2.0-4-amd64
Matlab version	7.10 R2010a

---

## 4.2 Αποτελέσματα υπολογιστικής μελέτης

Όπως αναφέρθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, το σύνολο των προβλημάτων που δημιουργήθηκαν χωρίστηκε σε τέσσερις κατηγορίες ανάλογα με το πλήθος των περιορισμών ( $m$ ) και των μεταβλητών ( $n$ ) των γραμμικών προβλημάτων αλλά και το είδος των περιορισμών. Στη διαδικασία της επίλυσης των γραμμικών προβλημάτων αποφασίσαμε να καταγράψουμε τρία χαρακτηριστικά για το κάθε ένα από τα 7873 προβλήματα. Τα χαρακτηριστικά αυτά είναι τα εξής:

- `niter`: αριθμός επαναλήψεων που απαιτούνται ώστε ο αλγόριθμος να καταλήξει στο αν το γραμμικό πρόβλημα είναι βέλτιστο ή αδύνατο
- `cpu`: χρόνος που απαιτείται για να επιλυθεί το γραμμικό πρόβλημα. Στη συγκεκριμένη υλοποίηση του αλγορίθμου ο χρόνος `cpu` είναι καθαρός χρόνος εκτέλεσης του αλγορίθμου και μετράτε σε `second`
- `status`: λογική μεταβλητή που παίρνει την τιμή 1 αν το γραμμικό πρόβλημα είναι βέλτιστο και την τιμή 0 αν το γραμμικό πρόβλημα είναι αδύνατο

Ο λόγος που επιλέξαμε τα τρία παραπάνω χαρακτηριστικά ήταν γιατί το `niter` και το `cpu` καταγράφονται από τους ερευνητές σε όλες τις υπολογιστικές μελέτες για τη μέτρηση της απόδοσης ενός αλγορίθμου και με αυτό τον τρόπο θα μπορούσαμε να έχουμε ένα μέτρο σύγκρισης με τα μοντέλα χρονισμού που θα εξάγαμε ανάμεσα στην υλοποίηση του αλγορίθμου που εφαρμόσαμε και τις ήδη

υπάρχουσες ερευνητικές μελέτες. Το `niters` και το `cpu` που καταγράψαμε από την επίλυση των γραμμικών προβλημάτων αποτελούν τις εξαρτημένες μεταβλητές των μοντέλων χρονισμού καθώς με βάση αυτά θέλουμε να υπολογίσουμε την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου. Η λογική μεταβλητή `status` καταγράφηκε γιατί ήταν αναγκαία ώστε να μπορέσουμε να διαχωρίσουμε τα προβλήματα ανάλογα με το αν είναι βέλτιστα ή αδύνατα. Περαιτέρω για τον διαχωρισμό αυτό παρουσιάζονται στην επόμενη ενότητα.

Τα χαρακτηριστικά των τυχαίων γραμμικών προβλημάτων και τα αποτελέσματα της επίλυσής τους με τον αλγόριθμο εξωτερικών σημείων παραθέτονται αναλυτικά στο *Παράρτημα* στους *Πίνακες I, II, III και IV*. Για λόγους οικονομίας χώρου (λόγω του μεγάλου όγκου των αποτελεσμάτων) το *Παράρτημα* με τα αποτελέσματα της επίλυσης των γραμμικών προβλημάτων παρουσιάζεται σε ξεχωριστό αρχείο το οποίο βρίσκεται στο συνοδευτικό cd μαζί με την εργασία.

### **4.3 Κατηγοριοποίηση των γραμμικών προβλημάτων με βάση το αποτέλεσμα του αλγορίθμου**

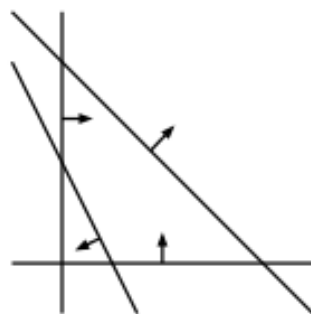
Ο αλγόριθμος εξωτερικών σημείων που εφαρμόστηκε στα τυχαία γραμμικά προβλήματα έλυσε το σύνολο των προβλημάτων για όλες τις κατηγορίες και για κάθε ένα από αυτά επέστρεψε ως αποτέλεσμα τον αριθμό των επαναλήψεων (`niters`) που εκτέλεσε, το χρόνο (`cpu`) που χρειάστηκε για να συγκλίνει αλλά και την κατάσταση του προβλήματος (`status`), αν δηλαδή το γραμμικό πρόβλημα είναι βέλτιστο ή αδύνατο.

Στον *Πίνακα 4.2* παρακάτω παρουσιάζονται αναλυτικά για κάθε μία κατηγορία προβλημάτων πόσο από αυτά είναι βέλτιστα και πόσα είναι αδύνατα.

Πίνακας 4.2 – Κατηγοριοποίηση γραμμικών προβλημάτων με βάση το αποτέλεσμα επίλυσης

	Βέλτιστα	Αδύνατα	Σύνολο
Κατηγορία A	2952	48	3000
Κατηγορία B	1721	29	1750
Κατηγορία D	1721	29	1750
Κατηγορία E	1356	17	1373
Σύνολο	7750	123	7873

Από τον Πίνακα 4.2 παραπάνω βλέπουμε ότι από το σύνολο των 7873 γραμμικών προβλημάτων μόλις το 1,56% προέκυψε ότι είναι αδύνατα, δηλαδή ότι ο αλγόριθμος εξωτερικών σημείων δεν μπόρεσε να βρει τη βέλτιστη λύση για το συγκεκριμένο σύνολο δεδομένων, σύνολο περιορισμών (m) και μεταβλητών (n). Γεωμετρικά ένα αδύνατο γραμμικό πρόβλημα (σε μικρότερη κλίμακα) φαίνεται στην *Εικόνα 4.1* παρακάτω:



Εικόνα 4.1 – Ένα αδύνατο γραμμικό πρόβλημα

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα βλέπουμε ότι όλοι οι περιορισμοί (ευθείες γραμμές) κινούνται προς διαφορετικές κατευθύνσεις με συνέπεια να μην υπάρχει κοινό σημείο επαφής και για τους τέσσερις περιορισμούς του γραμμικού συστήματος. Αυτό συνεπάγεται ότι το γραμμικό πρόβλημα του παραδείγματος είναι αδύνατο.

Από τα αποτελέσματα του Πίνακα 4.2 παρατηρούμε ότι οι κατηγορίες προβλημάτων A, B και D έχουν το ίδιο ποσοστό προβλημάτων που ήταν αδύνατα (1,6%) ενώ στην κατηγορία E το ποσοστό των προβλημάτων ανέρχεται στο 1,3% του συνόλου.

## 4.4 Προβλήματα κατά την επίλυση των γραμμικών προβλημάτων

Ο αλγόριθμος εξωτερικών σημείων, όπως και κάθε άλλος αλγόριθμος, ο οποίος καλείται να λύσει ένα γραμμικό (και όχι μόνο) πρόβλημα σε ένα δεδομένο υπολογιστικό σύστημα με δεδομένους υπολογιστικούς πόρους, έχει τον περιορισμό ότι οι πράξεις οι οποίες μπορεί να εκτελέσει σε αυτό έχουν ένα συγκεκριμένο όριο όσον αφορά την ακρίβεια των υπολογισμών και το πλήθος των δεκαδικών ψηφίων που μπορούν να αναπαρασταθούν. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι η εκτέλεση του αλγορίθμου μπορεί να σταματήσει αν για παράδειγμα πραγματοποιηθεί μία διαίρεση με ένα πολύ μεγάλο ή μικρό αριθμό ή αν υψωθεί ένας αριθμός σε ένα πολύ μεγάλο εκθέτη. Και στις δύο περιπτώσεις, η ακρίβεια της υπολογιστικής μηχανής δεν επαρκεί ώστε να αποθηκεύσει τον πολύ μεγάλο ή πολύ μικρό αριθμό και έτσι αναγκαστικά διακόπτεται η εκτέλεση του αλγορίθμου.

Μία άλλη περίπτωση όπου ο αλγόριθμος δεν μπορεί να τελειώσει ομαλά την εκτέλεσή του είναι όταν ο δρόμος εξωτερικών σημείων που ακολουθεί για να προσεγγίσει τη βέλτιστη λύση χάνει την επαφή του με την εφικτή περιοχή και δεν μπορεί να επανέλθει ποτέ ξανά σε αυτήν. Για τους δρόμους εξωτερικών σημείων και την επαφή τους με την εφικτή περιοχή γίνεται εκτενής αναφορά στην *Ενότητα 2.2*.

Και για τις δύο παραπάνω περιπτώσεις πριν ξεκινήσουμε την υπολογιστική μελέτη της εργασίας έπρεπε να πάρουμε μία απόφαση σχετικά με τα γραμμικά προβλήματα που δεν ήταν δυνατό να μας δώσουν αποτέλεσμα λόγω των παραπάνω προβλημάτων. Στην περίπτωση όπου διακοπτόταν η εκτέλεση του αλγορίθμου λόγω ακρίβειας στους υπολογισμούς η κατάσταση ήταν αρκετά ξεκάθαρη για το τι έπρεπε να κάνουμε. Για την περίπτωση όπου ο αλγόριθμος έχανε την επαφή του με την εφικτή περιοχή πήραμε την απόφαση να διακόπτουμε την εκτέλεση του όταν ο χρόνος εκτέλεσης ενός γραμμικού προβλήματος ξεπερνούσε το όριο των 4 ωρών.

Αφού λοιπόν απομακρύνθηκαν τα γραμμικά προβλήματα που δεν ήταν δυνατό να μας δώσουν αποτέλεσμα, δημιουργήσαμε τον αντίστοιχο αριθμό γραμμικών προβλημάτων ώστε να τα αντικαταστήσουμε. Επαναλάβαμε την διαδικασία όπως περιγράφηκε στο *Κεφάλαιο 3* αλλά αυτή τη φορά το seed number που χρησιμοποιήθηκε είχε την τιμή 5. Συνολικά και για τις 4 κατηγορίες χρειάστηκε να γίνει αντικατάσταση 151 γραμμικών προβλημάτων. Στον *Πίνακα 4.3* παρουσιάζεται

αναλυτικά ανά περίπτωση προβλήματος ο αριθμός των γραμμικών προβλημάτων που χρειάστηκε αντικατασταθούν.

*Πίνακας 4.3 – Αριθμός γραμμικών προβλημάτων που αντικαταστάθηκαν ανά κατηγορία επίλυσης*

	Εκτέλεση > 4 ωρών	Διακοπή λόγω ακρίβειας μηχανής	Σύνολο
Κατηγορία A	22	16	38
Κατηγορία B	40	16	56
Κατηγορία D	24	10	34
Κατηγορία E	19	4	23
Σύνολο	105	46	151

Από τον Πίνακα 4.3 μπορούμε να εξάγουμε το συμπέρασμα ότι μόλις το 1,91% του συνόλου των γραμμικών προβλημάτων χρειάστηκε αντικατάσταση και από αυτό το 69,5% λόγω του ορίου που θέσαμε στο χρόνο εκτέλεσης. Μάλιστα, αν το χρονικό περιθώριο των τεσσάρων ωρών ήταν μεγαλύτερο, το ποσοστό των γραμμικών προβλημάτων που θα χρειαζόνταν αντικατάσταση θα ήταν πολύ μικρότερο. Τέλος, σημαντικό ρόλο διαδραμάτισε το γεγονός ότι η γλώσσα προγραμματισμού που επιλέχθηκε για την υλοποίηση του αλγορίθμου εξωτερικών σημείων ήταν το Matlab καθώς η συγκεκριμένη γλώσσα προγραμματισμού προσφέρει πολύ καλό χειρισμό πυκνών πινάκων κάτι το οποίο αποδείχτηκε καθοριστικής σημασίας στο μικρό αριθμό γραμμικών προβλημάτων που χρειάστηκε να αντικατασταθούν λόγω της ακρίβειας της υπολογιστικής μηχανής.

## Κεφάλαιο 5: Υπολογιστική πολυπλοκότητα αλγορίθμου εξωτερικών σημείων

Στο προηγούμενο κεφάλαιο περιγράφηκε αναλυτικά η διαδικασία της επίλυσης των τυχαίων γραμμικών προβλημάτων. Στο Κεφάλαιο 5 παρουσιάζεται η διαδικασία που ακολουθήθηκε ώστε να καταλήξουμε στα καλύτερα μοντέλα χρονισμού για κάθε κατηγορία αλλά και στο σύνολο των γραμμικών προβλημάτων, παρουσιάζονται οι παλινδρομήσεις για το χρόνο εκτέλεσης (cpu) και τον αριθμό των επαναλήψεων (niter) κάθε κατηγορίας αλλά και του συνόλου των προβλημάτων και στο τέλος του κεφαλαίου περιγράφεται η διαδικασία που ακολουθήσαμε ώστε να επικυρώσουμε τα αποτελέσματα των μοντέλων χρονισμού που προέκυψαν.

### 5.1 Ανάλυση παλινδρόμησης

Η ανάλυση παλινδρόμησης είναι ένας συγκεκριμένος κλάδος της στατιστικής επιστήμης που εξετάζει τη σχέση δύο (ή περισσότερων) μεταβλητών, με σκοπό τη πρόβλεψη των τιμών της μίας μέσω των τιμών της άλλης (ή άλλων) μεταβλητής. Σε όλα τα προβλήματα παλινδρόμησης υπάρχουν δύο κατηγορίες μεταβλητών, οι ανεξάρτητες μεταβλητές (independent variables) και οι εξαρτημένες μεταβλητές (dependent variables). Σε μία υπολογιστική μελέτη, όπως αυτή της παρούσας εργασίας, μπορούμε να καθορίσουμε τις τιμές των ανεξάρτητων μεταβλητών (π.χ. με γεννήτριες τυχαίων προβλημάτων) ενώ οι τιμές των εξαρτημένων μεταβλητών αντανακλούν το αποτέλεσμα των μεταβολών στις ανεξάρτητες μεταβλητές [Papadopoulos (2009)], [Κάτος (2004)]. Όπως έχει αναφερθεί στα προηγούμενα κεφάλαια, οι εξαρτημένες μεταβλητές για την υπολογιστική μελέτη της παρούσας εργασίας είναι οι μεταβλητές niter και cpu ενώ οι ανεξάρτητες μεταβλητές είναι οι m, n, density, nnz, L, cond(A). Στην επόμενη υπό-ενότητα παρουσιάζονται ορισμένα θεωρητικά στοιχεία για την γραμμική παλινδρόμηση και τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων που εφαρμόσαμε στα αποτελέσματα της επίλυσης των γραμμικών προβλημάτων.

### 5.1.1 Γραμμική παλινδρόμηση – Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων

Η γραμμική παλινδρόμηση είναι η απλούστερη μορφή παλινδρόμησης όπου έχουμε μία ανεξάρτητη  $X$  και μία εξαρτημένη μεταβλητή  $Y$  η οποία προσεγγίζεται ικανοποιητικά από μία γραμμική συνάρτηση του  $X$  [Γεωργαντά (2008)]. Η σχέση η οποία συνδέει τα δύο αυτά μεγέθη είναι η:

$$Y = \alpha + \beta X$$

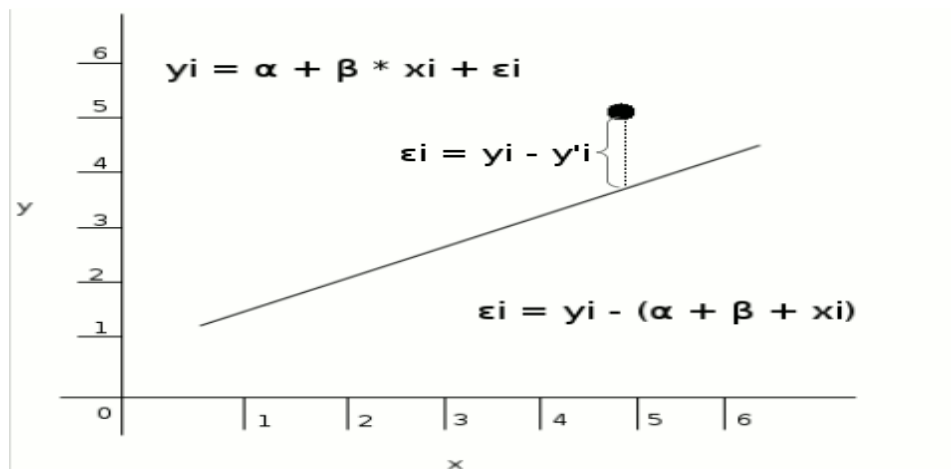
όπου  $\alpha$ ,  $\beta$  παράμετροι του γραμμικού συστήματος. Ο προσδιορισμός των παραμέτρων  $\alpha$  και  $\beta$  μας δίνει μία ευθεία που ονομάζεται ευθεία παλινδρόμησης της  $Y$  πάνω στην  $X$  και συνδέει τις τιμές των  $Y$  με δεδομένες τις τιμές των  $X$  [Papadopoulos (2009)], [Κάτος (2004)]. Για την κατασκευή της ευθείας παλινδρόμησης μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε διάφορες εμπειρικές ή μαθηματικές μεθόδους όπως αυτή των ελαχίστων τετραγώνων.

Η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων (least-square method) αναπτύχθηκε για πρώτη φορά από τον Gauss το 1795 [Wikipedia] ενώ μέχρι σήμερα πολλοί ερευνητές έχουν βρει διάφορους τρόπους για την υλοποίηση της μεθόδου. Έστω λοιπόν ότι έχουμε (για λόγους απλότητας) μία εξαρτημένη και μία ανεξάρτητη μεταβλητή και  $n$  ζεύγη παρατηρήσεων  $(x_i, y_i)$  με  $i = 1, 2, \dots, n$ . Η προσέγγιση που επιθυμούμε να πετύχουμε θα πρέπει να έχει τη μορφή:

$$y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$$

όπου τα  $\varepsilon_i$  εκφράζουν τις αποκλίσεις (κατάλοιπα) της πραγματικής τιμής της εξαρτημένης μεταβλητής από την θεωρητική (προσαρμοσμένη) τιμή. Διαγραμματικά αυτό φαίνεται στην *Εικόνα 5.1* παρακάτω:





Εικόνα 5.1 – Κατάλοιπα  $\varepsilon_i$  γραμμικής παλινδρόμησης

Όπως γίνεται αντιληπτό από την *Εικόνα 5.1* παραπάνω, στόχος μας μέσα από την ανάλυση παλινδρόμησης και τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων είναι να προσδιοριστούν οι συντελεστές  $\alpha$  και  $\beta$  με τέτοιο τρόπο ώστε να ελαχιστοποιηθούν οι ποσότητες  $\varepsilon_i$ . Να σημειωθεί εδώ ότι η ελαχιστοποίηση του αθροίσματος  $\sum \varepsilon_i$  δεν οδηγεί σε ασφαλή επιλογή των  $\alpha$  και  $\beta$  γιατί υπάρχει η πιθανότητα ορισμένες αρνητικές ποσότητες  $\varepsilon_i$  να αναιρούν ορισμένες θετικές ποσότητες  $\varepsilon_i$ . Για να λύσουμε αυτό το πρόβλημα, υπολογίζουμε τις τιμές των  $\alpha$  και  $\beta$  που ελαχιστοποιούν το άθροισμα των τετραγώνων των  $\varepsilon_i$  [Γεωργαντά (2008)], δηλαδή τα κατάλοιπα της διαφοράς της πραγματικής με την εκτιμημένη τιμή υπολογίζονται από τον τύπο:

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \alpha - \beta x_i)^2 .$$

Επειδή η περαιτέρω ανάλυση της μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων ξεφεύγει από τα όρια αυτής της διπλωματικής εργασίας, ο αναγνώστης μπορεί να βρει περισσότερες πληροφορίες στα [Papadopoulos (2009)], [Κάτος (2004)], [Γεωργαντά (2008)].

Το γραμμικό μοντέλο που συναντάμε στην ανάλυση παλινδρόμησης πρέπει να πληρεί ορισμένες παραδοχές οι οποίες συνοψίζονται στις εξής τέσσερις [Κάτος (2004)]:

- Γραμμικότητα: οι μέσες τιμές της μεταβλητής  $Y$  για τα διάφορα επίπεδα της  $X$ , να είναι γραμμικές συναρτήσεις της  $X$

- Ομοσκεδαστικότητα και Σταθερότητα διασποράς: οι κατανομές της  $Y$  έχουν ίδια διασπορά για όλα τα επίπεδα της  $X$
- Ανεξαρτησία: οι τιμές της  $Y$  που αντιστοιχούν στα διάφορα επίπεδα της  $X$  είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους
- Κανονικότητα: η κατανομή της  $Y$  για όλα τα επίπεδα της  $X$  είναι κανονική

Όταν διαπιστωθεί μέσα από την ανάλυση παλινδρόμησης η παραβίαση μίας ή περισσότερων από τις παραπάνω παραδοχές, τότε μπορούμε να προχωρήσουμε σε κατάλληλους μετασχηματισμούς οι οποίοι θα μας δώσουν καλύτερα μοντέλα χρονισμού. Τα είδη των μετασχηματισμών που μπορούν να εφαρμοστούν σε ένα γραμμικό πρόβλημα είναι οι λογαριθμικοί, οι αντίστροφοι, οι μετασχηματισμοί σε τετραγωνικές και κυβικές τιμές αλλά και η χρήση του γινομένου συγκεκριμένων μεταβλητών [Papadopoulos (2009)], [Κάτος (2004)]. Στην εργασία αυτή, όλα τα παραπάνω είδη μετασχηματισμών εφαρμόστηκαν στις ανεξάρτητες και εξαρτημένες μεταβλητές ώστε να καταλήξουμε στα καλύτερα μοντέλα χρονισμού για κάθε μία κατηγορία αλλά και για το σύνολο των γραμμικών προβλημάτων.

## 5.2 Υπολογιστικό περιβάλλον για την ανάλυση παλινδρόμησης

Κατά τη διαδικασία της εξαγωγής των μοντέλων χρονισμού για κάθε μία κατηγορία γραμμικών προβλημάτων, χρειάστηκε να εφαρμοστεί μία πληθώρα παλινδρομήσεων ώστε να μπορέσουμε να καταλήξουμε στα καλύτερα μοντέλα. Η διαδικασία αυτή πραγματοποιήθηκε με τη χρήση συγκεκριμένου στατιστικού πακέτου το οποίο είναι εύκολο στη χρήση, αξιόπιστο και εξυπηρετεί σε μεγάλο βαθμό της ανάγκες μας.

Τα κριτήρια που είχαμε θέσει ως προϋπόθεση για τη χρήση κάποιου στατιστικού πακέτου τα πληρεί το Minitab που χρησιμοποιείται τόσο από επιχειρήσεις όσο και από ερευνητές και εκπαιδευτικά ιδρύματα. Το βασικότερο πλεονέκτημα του, το οποίο έχει αξιοποιηθεί σε ανάλογες υπολογιστικές μελέτες, είναι ότι εφαρμόζει μία προσέγγιση εύρεσης του καλύτερου μοντέλου παλινδρόμησης (Best Subset approach) χρησιμοποιώντας την τεχνική εύρεσης μονοπατιών Hamilton (Hamilton walks) [Leedham – Green (2006)]. Το συγκεκριμένο πλεονέκτημα του Minitab αποδείχτηκε πολύ χρήσιμο για την ανάλυση παλινδρόμησης της εργασίας γιατί όπως θα δούμε και παρακάτω, εκτελέστηκε ένας πολύ

μεγάλος αριθμός παλινδρομήσεων ώστε να καταλήξουμε στις καλύτερες και πιο αντιπροσωπευτικές για το σύνολο των γραμμικών προβλημάτων. Με την τεχνική εύρεσης μονοπατιών Hamilton δεν χρειαζόταν να ελέγξουμε όλους τους πιθανούς συνδυασμούς ανάμεσα στις ανεξάρτητες και εξαρτημένες μεταβλητές αλλά μόνο τα καλύτερα μοντέλα από τους συνδυασμούς που αρχικά ελέγχθηκαν.

Στον Πίνακα 5.1 που ακολουθεί παρουσιάζεται αναλυτικά το υπολογιστικό περιβάλλον που πραγματοποιήθηκε η ανάλυση παλινδρόμησης.

*Πίνακας 5.1 – Υπολογιστικό περιβάλλον ανάλυσης παλινδρόμησης των γραμμικών προβλημάτων*

---

CPU	Intel® Pentium(R) B960, 2.20GHz (2 processors)
Instruction set CPU	64-bit
RAM size	6.00 GB
L2 Cache size	2 MB shared
FSB speed	1333 MHz

---

Operating System	Debian GNU/Linux 7.0 Wheezy
Kernel version	3.2.0-4-amd64
Virtual Operating System	Microsoft Windows XP Professional SP3
Minitab version	15.1.30.0

---

### **5.3 Μοντέλα χρονισμού**

Στην παρούσα ενότητα παρουσιάζεται η διαδικασία που ακολουθήθηκε ώστε να καταλήξουμε στα καλύτερα και πιο αντιπροσωπευτικά μοντέλα χρονισμού για τη συμπεριφορά του αλγορίθμου εξωτερικών σημείων από τα αποτελέσματα της επίλυσης των 7873 τυχαίων γραμμικών προβλημάτων.

Είναι σημαντικό σε αυτό το σημείο να διευκρινίσουμε ότι για κάθε μία κατηγορία γραμμικών προβλημάτων δημιουργήσαμε ξεχωριστά μοντέλα χρονισμού για τον χρόνο εκτέλεσης (cpu) και ξεχωριστά για τον αριθμό των επαναλήψεων (niter) ενώ στο τέλος πραγματοποιήσαμε ανάλυση παλινδρόμησης και στο σύνολο των γραμμικών προβλημάτων. Έτσι καταλήξαμε στα 10 μοντέλα χρονισμού τα οποία αντιπροσωπεύουν καλύτερα την υλοποίηση του αλγορίθμου εξωτερικών σημείων

που εφαρμόσαμε στα γραμμικά προβλήματα.

Τα βασικά μεγέθη της ανάλυσης παλινδρόμησης που εξετάσαμε ώστε να καταλήξουμε στα καλύτερα μοντέλα χρονισμού είναι τα εξής:

- πρόσημα ανεξάρτητων μεταβλητών (coef)
- τιμή  $p$  (probability) ή τιμή  $t$  – Student των ανεξάρτητων μεταβλητών
- προσαρμοσμένος συντελεστής προσδιορισμού  $R_{adj}^2$
- διαγράμματα καταλοίπων και κανονικότητας μοντέλου

Τα πρόσημα των ανεξάρτητων μεταβλητών που συμμετέχουν στην ανάλυση παλινδρόμησης πρέπει να είναι σύμφωνα με την θεωρία ώστε να έχουν την επίδραση που επιθυμούμε στην εξαρτημένη μεταβλητή που εξετάζουμε. Συγκεκριμένα, οι μεταβλητές  $m$ ,  $n$ ,  $pnz$ ,  $L$  και  $cond(A)$  πρέπει να έχουν θετικό πρόσημο ενώ αντίθετα η μεταβλητή  $density$  πρέπει να έχει αρνητικό πρόσημο. Να αναφέρουμε εδώ ότι οι μεταβλητές  $pnz$  και  $density$  είναι συμπληρωματικές και δεν μπορούν να συμμετέχουν ταυτόχρονα στα μοντέλα χρονισμού. Περισσότερα για την ερμηνεία των προσήμων των ανεξάρτητων μεταβλητών παρουσιάζονται στις ενότητες όπου παραθέτονται τα τελικά μοντέλα χρονισμού.

Η τιμή  $P$  της πιθανότητας  $p$  – probability πρέπει να είναι μικρότερη του  $0.05$  για να είναι στατιστικά σημαντική η επίδραση της ανεξάρτητης μεταβλητής και να συμμετέχει δραστικά στο μοντέλο χρονισμού ενώ συμπληρωματικά μπορεί να ελεγχθεί η τιμή  $t$  – Student η οποία πρέπει να είναι μεγαλύτερη του  $1.96$  κατά απόλυτη τιμή. Ο προσαρμοσμένος συντελεστής προσδιορισμού  $R_{adj}^2$  πρέπει να είναι μεγαλύτερος του  $70\%$  ώστε να θεωρηθεί ότι οι εκτιμημένες τιμές για την εξαρτημένη μεταβλητή είναι αντιπροσωπευτικές για τα γραμμικά προβλήματα [Κάτος (2004)]. Τέλος, από τα διαγράμματα καταλοίπων και κανονικότητας μπορούμε να έχουμε μία οπτική εικόνα του μοντέλου χρονισμού και της προσαρμογής του στα δεδομένα των γραμμικών προβλημάτων.

Σε πρώτο στάδιο, προσπαθήσαμε να βρούμε μία συσχέτιση γραμμικής μορφής (που είναι και η πιο απλή μορφή γραμμικής παλινδρόμησης) ανάμεσα στο  $cpu$  και στο  $niter$  με τις ανεξάρτητες μεταβλητές. Τα αποτελέσματα από αυτή την προσπάθεια ήταν τα μοντέλα τα οποία εξάγαμε να έχουν μη ικανοποιητικά αποτελέσματα με συνέπεια να μην μπορούμε να αποδεχτούμε ότι υπάρχει γραμμική σχέση ανάμεσα στις εξαρτημένες και στις ανεξάρτητες μεταβλητές. Στους Πίνακες 5.2 και 5.3 που

ακολουθούν παρουσιάζονται ενδεικτικά οι παλινδρομήσεις του συνόλου των γραμμικών προβλημάτων της υπολογιστικής μελέτης για το χρόνο εκτέλεσης (cpu) και τον αριθμό των επαναλήψεων (niter). Αντίστοιχα αποτελέσματα υπήρχαν και για κάθε μία κατηγορία ξεχωριστά τα οποία για λόγους οικονομίας χώρου δεν παρουσιάζονται.

*Πίνακας 5.2 – Ανάλυση παλινδρόμησης του χρόνου εκτέλεσης (cpu) και των ανεξάρτητων μεταβλητών στο σύνολο των γραμμικών προβλημάτων*

```

The regression equation is
cpu = 171 + 0.121 m - 0.0313 n - 1993 density + 0.000010 L - 0.000000 cond(A)

7831 cases used, 42 cases contain missing values

Predictor      Coef      SE Coef      T      P
Constant      171.30     29.27       5.85   0.000
m              0.120639   0.008026    15.03  0.000
n             -0.031295   0.007743    -4.04  0.000
density       -1992.6     115.7      -17.22 0.000
L              0.00000977 0.00000081  12.03  0.000
cond(A)       -0.00000000 0.00000000  -0.00  0.997

S = 608.140    R-Sq = 29.9%    R-Sq(adj) = 29.8%

Analysis of Variance

Source         DF         SS         MS         F         P
Regression     5         1231734681 246346936  666.10  0.000
Residual Error 7825      2893953314  369834
Total          7830      4125687995

```

Πίνακας 5.3 – Ανάλυση παλινδρόμησης του αριθμού των επαναλήψεων (niter) και των ανεξάρτητων μεταβλητών στο σύνολο των γραμμικών προβλημάτων

```

The regression equation is
niter = 2546 + 0.462 m + 0.584 n - 14520 density - 0.000023 L - 0.000000 cond(A)

7831 cases used, 42 cases contain missing values

Predictor      Coef      SE Coef      T      P
Constant      2546.4      132.5      19.22  0.000
m              0.46234     0.03633     12.73  0.000
n              0.58445     0.03506     16.67  0.000
density       -14520.0     523.9     -27.71  0.000
L             -0.00002330  0.00000367  -6.34  0.000
cond(A)       -0.00000000  0.00000000  -1.54  0.123

S = 2753.18    R-Sq = 30.0%    R-Sq(adj) = 29.9%

Analysis of Variance

Source          DF          SS          MS          F          P
Regression      5    25398632949    5079726590    670.15    0.000
Residual Error  7825    59313294572     7579974
Total          7830    84711927521
    
```

(\*) Σημείωση: Στους Πίνακες 5.2 και 5.3 (αλλά και στη συνέχεια στους πίνακες αυτής της ενότητας), υπάρχουν περιπτώσεις γραμμικών προβλημάτων οι οποίες παραλείπονται από την ανάλυση παλινδρόμησης και ο λόγος που συμβαίνει αυτό είναι γιατί έχουν τιμή inf (άπειρο) στη μεταβλητή cond(A). Το Minitab εξαιρεί τα συγκεκριμένα γραμμικά προβλήματα από τις παλινδρομήσεις για να μην υπάρχουν λάθη στους υπολογισμούς των μοντέλων χρονισμού.

Από τα αποτελέσματα παραπάνω παρατηρούμε ότι υπάρχουν πρόσημα μεταβλητών τα οποία δεν είναι σύμφωνα με την θεωρία, η τιμή της πιθανότητας p είναι μεγαλύτερη από το κανονικό για ορισμένες μεταβλητές ενώ και ο συντελεστής  $R_{adj}^2$  είναι πολύ μικρός.

Επειδή τα αποτελέσματα της ανάλυσης παλινδρόμησης για την εξαγωγή γραμμικών συσχετίσεων ανάμεσα στις εξαρτημένες και στις ανεξάρτητες μεταβλητές δεν ήταν τα αναμενόμενα, καταφύγαμε στους αναγκαίους μετασχηματισμούς ώστε να καταλήξουμε σε καλύτερα μοντέλα χρονισμού για τη συμπεριφορά του αλγορίθμου εξωτερικών σημείων. Σε πρώτη φάση, οι μετασχηματισμοί που δοκιμάσαμε περιελάμβαναν μόνο τις ανεξάρτητες μεταβλητές και αφορούσαν το φυσικό λογάριθμο, την ύψωση σε δύναμη αλλά και το γινόμενο ορισμένων μεταβλητών. Παρόλα αυτά, τα αποτελέσματα από τις παλινδρομήσεις δεν ήταν ικανοποιητικά και έτσι το επόμενο που δοκιμάσαμε

ήταν να μετασχηματίσουμε τις εξαρτημένες μεταβλητές στο φυσικό λογάριθμο. Στις παλινδρομήσεις που δοκιμάστηκαν συμμετείχαν οι φυσικοί λογάριθμοι των εξαρτημένων μεταβλητών ( $\ln(\text{cpu})$  και  $\ln(\text{niter})$ ) αλλά και οι φυσικοί λογάριθμοι των ανεξάρτητων μεταβλητών. Σε αυτή την κατηγορία μετασχηματισμών βρέθηκαν και τα καλύτερα μοντέλα χρονισμού, αυτά δηλαδή που αντιπροσωπεύουν καλύτερα την απόδοση του αλγορίθμου εξωτερικών σημείων.

Συνολικά να αναφέρουμε πως εκτελέστηκαν 642 παλινδρομήσεις, εκτελώντας όλους αυτούς τους μετασχηματισμούς, με το στατιστικό πρόγραμμα Minitab για να αποφασίσουμε ποια μοντέλα χρονισμού είναι τα καλύτερα και πληρούν τα βασικά κριτήρια που θέσαμε. Για λόγους οικονομίας χώρου (επειδή ο αριθμός των παλινδρομήσεων είναι μεγάλος), στις υπό-επόμενες που ακολουθούν παραθέτονται μόνο τα τελικά μοντέλα χρονισμού που καταλήξαμε και η ερμηνεία αυτών ενώ το σύνολο των παλινδρομήσεων που εκτελέστηκαν βρίσκονται στο συνοδευτικό cd μαζί με την εργασία.

### **5.3.1 Κατηγορία A**

#### **5.3.1.1 Χρόνος εκτέλεσης (cpu)**

Το μοντέλο χρονισμού που προσδιορίζει καλύτερα την συμπεριφορά του αλγορίθμου εξωτερικών σημείων σε σχέση με το χρόνο εκτέλεσης (cpu) για την Κατηγορία A των αραιών γραμμικών προβλημάτων είναι το εξής:

$$\ln(\text{cpu}) = -15.9 + 1.11 \ln(m) + 1.40 \ln(n) - 0.241 \ln(\text{density}) + 0.0696 \ln(\text{cond}(A)) .$$

Η ανάλυση παλινδρόμησης όπως προέκυψε από το Minitab παρουσιάζεται στον Πίνακα 5.4 παρακάτω:

Πίνακας 5.4 – Ανάλυση παλινδρόμησης του χρόνου εκτέλεσης (cpu) και των ανεξάρτητων μεταβλητών στην Κατηγορία Α αραιών γραμμικών προβλημάτων

The regression equation is  
 $\ln(\text{cpu}) = -15.9 + 1.11 \ln(m) + 1.40 \ln(n) - 0.241 \ln(\text{density}) + 0.0696 \ln(\text{cond}(A))$

2990 cases used, 10 cases contain missing values

Predictor	Coef	SE Coef	T	P
Constant	-15.9082	0.1062	-149.79	0.000
ln(m)	1.10652	0.05913	18.71	0.000
ln(n)	1.39762	0.05829	23.98	0.000
ln(density)	-0.24138	0.01928	-12.52	0.000
ln(cond(A))	0.069595	0.005482	12.69	0.000

S = 0.593184    R-Sq = 94.2%    R-Sq(adj) = 94.2%

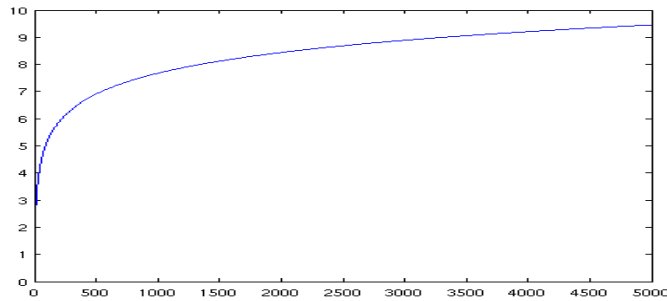
Analysis of Variance

Source	DF	SS	MS	F	P
Regression	4	16942.8	4235.7	12037.75	0.000
Residual Error	2985	1050.3	0.4		
Total	2989	17993.1			

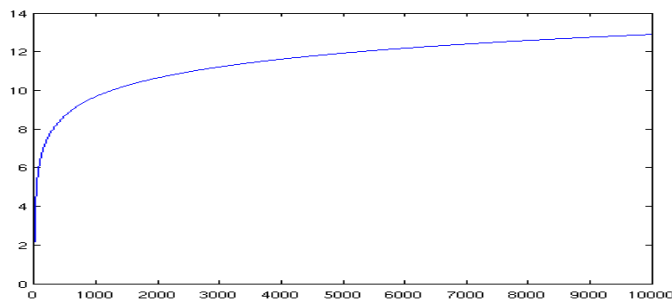
Στα αποτελέσματα της ανάλυσης παλινδρόμησης παρατηρούμε ότι:

Η σχέση του m (πλήθος περιορισμών) και του n (πλήθος μεταβλητών) με το χρόνο εκτέλεσης του αλγορίθμου (cpu) είναι θετική, όπως αναμενόταν, καθώς για μεγαλύτερες διαστάσεις ενός γραμμικού προβλήματος απαιτείται περισσότερος χρόνος για την επίλυση του. Οι *Εικόνες 5.2* και *5.3* δείχνουν τη συμπεριφορά του φυσικού λογαρίθμου (ln) για τις τιμές του πλήθους των περιορισμών (m) και του πλήθους των μεταβλητών (n) που χρησιμοποιήθηκαν στα γραμμικά προβλήματα. Από τα διαγράμματα προκύπτει ότι για μεγαλύτερες τιμές των m και n ο χρόνος που απαιτείται για την εκτέλεση του αλγορίθμου αυξάνεται, κάτι που επιβεβαιώνει τη θετική τους σχέση.



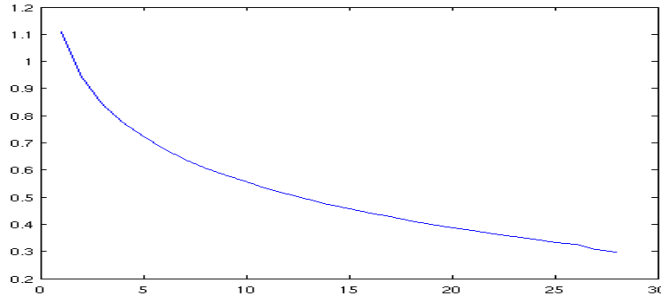


Εικόνα 5.2 – Γραφική παράσταση πλήθους περιορισμών ( $m$ ) Κατηγορίας  $A$  γραμμικών προβλημάτων του χρόνου εκτέλεσης ( $cpu$ )



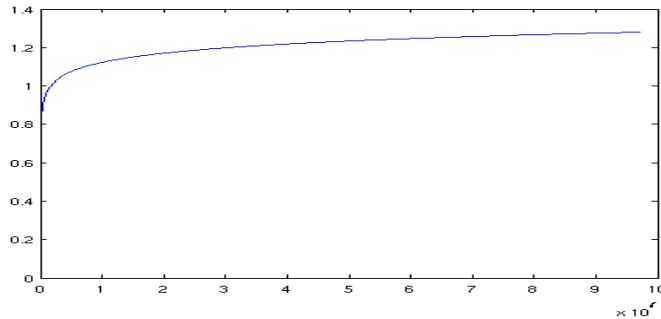
Εικόνα 5.3 – Γραφική παράσταση πλήθους μεταβλητών ( $n$ ) Κατηγορίας  $A$  γραμμικών προβλημάτων του χρόνου εκτέλεσης ( $cpu$ )

Ο συντελεστής προσδιορισμού της πυκνότητας ( $density$ ) στο υπόδειγμα είναι αρνητικός ( $Coef = -0,241$ ) κάτι το οποίο εξηγείται από το γεγονός ότι οι συναρτήσεις του Matlab που χρησιμοποιούνται στον αλγόριθμο εξωτερικών σημείων είναι βέλτιστες και προσφέρουν πολύ καλό χειρισμό πυκνών πινάκων. Δηλαδή, για μεγαλύτερες τιμές πυκνότητας ( $density$ ) σε ένα γραμμικό πρόβλημα ο χρόνος ( $cpu$ ) που απαιτείται μειώνεται. Στο διάγραμμα της Εικόνας 5.4 απεικονίζεται ο φυσικός λογάριθμος ( $\ln$ ) της πυκνότητας ( $density$ ) από όπου φαίνεται ότι για μεγαλύτερες τιμές πυκνότητας σε ένα γραμμικό πρόβλημα ο χρόνος που απαιτείται για την επίλυση του είναι μικρότερος.



Εικόνα 5.4 – Γραφική παράσταση πυκνότητας (density) γραμμικών προβλημάτων Κατηγορίας A του χρόνου εκτέλεσης (cpu)

Ο βαθμός κατάστασης της μήτρας A ( $\text{cond}(A)$ ) έχει θετικό συντελεστή προσδιορισμού (Coef=0.0696) . Η τιμή του συγκεκριμένου συντελεστή επειδή είναι θετική και κοντά στο 1 κάτι που σημαίνει ότι ο πίνακας με τα δεδομένα του προβλήματος είναι σε πολύ καλή κατάσταση. Το διάγραμμα της Εικόνας 5.5 απεικονίζει τη γραφική παράσταση του φυσικού λογαρίθμου (ln) του βαθμού κατάστασης της μήτρας A ( $\text{cond}(A)$ ) για όλες τις τιμές που λαμβάνει στα γραμμικά προβλήματα. Αυτό που παρατηρούμε είναι ότι σε όλο το πεδίο ορισμού το πρόσημο παραμένει θετικό για το χρόνο εκτέλεσης κάτι που επιβεβαιώνει τη θετική σχέση των δύο.



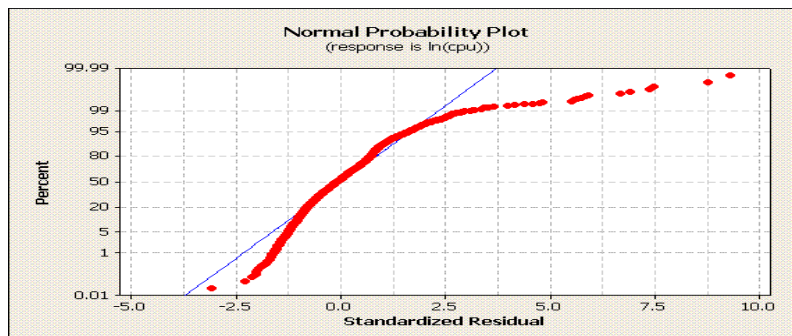
Εικόνα 5.5 – Γραφική παράσταση βαθμού κατάστασης μήτρας A ( $\text{cond}(A)$ ) Κατηγορίας A γραμμικών προβλημάτων του χρόνου εκτέλεσης (cpu)

Στα βασικά μεγέθη του μοντέλου παρατηρούμε ότι όλες οι ανεξάρτητες μεταβλητές έχουν μηδενικές τιμές p (probability). Αυτό συνεπάγεται ότι οι τιμές των συντελεστών προσδιορισμού των ανεξάρτητων μεταβλητών του μοντέλου είναι στατιστικά σημαντικές με αποτέλεσμα να επηρεάζουν δραστικά το μοντέλο που προσδιορίζει την σχέση μεταξύ του χρόνου εκτέλεσης (cpu) του αλγορίθμου και των ανεξάρτητων μεταβλητών.

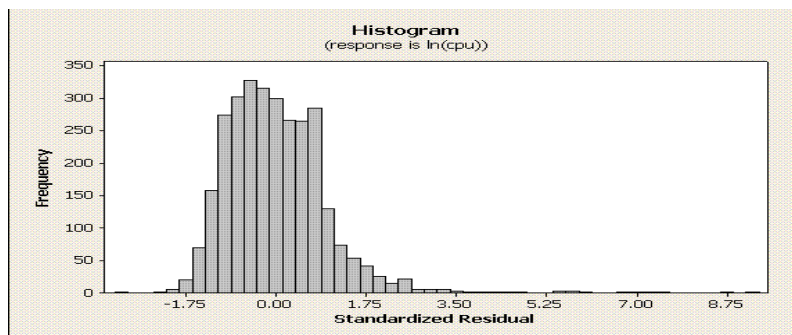
Ο προσαρμοσμένος συντελεστής προσδιορισμού  $R_{adj}^2$  είναι πολύ υψηλός (94,2%) κάτι που

υποδηλώνει ότι οι προβλέψεις για τη μεταβολή της εξαρτημένης μεταβλητής είναι αντιπροσωπευτικές με τα γραμμικά προβλήματα σε ποσοστό 94,2%.

Οι *Εικόνες 5.6 και 5.7* παρουσιάζουν την κατανομή που ακολουθούν τα δεδομένα των γραμμικών προβλημάτων. Από το διάγραμμα στην *Εικόνα 5.6* προκύπτει ότι η πλειοψηφία των δεδομένων των γραμμικών προβλημάτων προέρχεται από την κανονική κατανομή (οι δύο γραμμές βρίσκονται πολύ κοντά μεταξύ τους με εξαίρεση κάποιες μεμονωμένες τιμές) ενώ από το διάγραμμα στην *Εικόνα 5.7* φαίνεται ότι το ιστόγραμμα των καταλοίπων των γραμμικών προβλημάτων ακολουθεί την κανονική κατανομή.



*Εικόνα 5.6 – Κανονικότητα μοντέλου Κατηγορίας Α γραμμικών προβλημάτων του χρόνου εκτέλεσης (cpu)*



*Εικόνα 5.7 – Ιστόγραμμα καταλοίπων μοντέλου Κατηγορίας Α γραμμικών προβλημάτων του χρόνου εκτέλεσης (cpu)*

### **5.3.1.2 Αριθμός επαναλήψεων (niter)**

Το μοντέλο που προσδιορίζει καλύτερα την συμπεριφορά του αλγόριθμου εξωτερικών σημείων σε σχέση με τον αριθμό των επαναλήψεων (niter) για την Κατηγορία Α των αραιών γραμμικών

προβλημάτων είναι το εξής:

$$\ln(\text{niter}) = -1.27 + 0.348 \ln(m) + 0.660 \ln(n) - 0.499 \ln(\text{density}) .$$

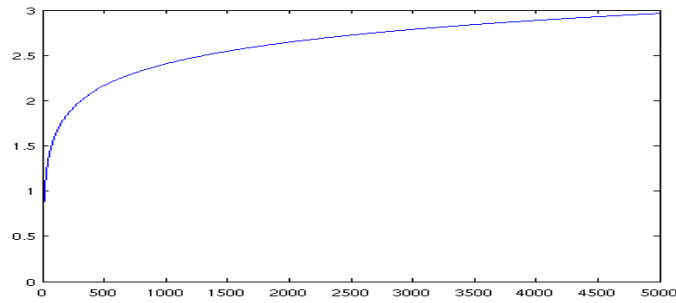
Η ανάλυση παλινδρόμησης παρουσιάζεται στον Πίνακα 5.5 παρακάτω:

Πίνακας 5.5 – Ανάλυση παλινδρόμησης του αριθμού των επαναλήψεων (niter) και των ανεξάρτητων μεταβλητών στην Κατηγορία Α αραιών γραμμικών προβλημάτων

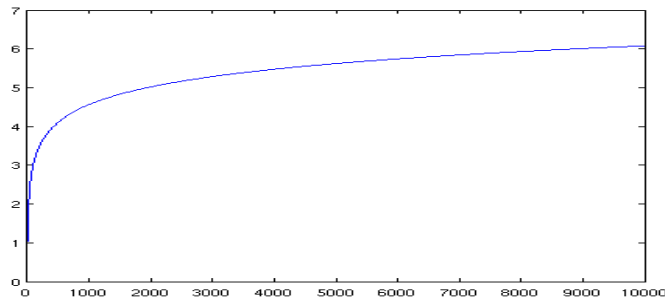
The regression equation is					
$\ln(\text{niter}) = -1.27 + 0.348 \ln(m) + 0.660 \ln(n) - 0.499 \ln(\text{density})$					
2998 cases used, 2 cases contain missing values					
Predictor	Coef	SE Coef	T	P	
Constant	-1.26831	0.06129	-20.69	0.000	
ln(m)	0.34786	0.03533	9.85	0.000	
ln(n)	0.65991	0.03470	19.02	0.000	
ln(density)	-0.49872	0.01228	-40.61	0.000	
S = 0.381341    R-Sq = 88.0%    R-Sq(adj) = 87.9%					
Analysis of Variance					
Source	DF	SS	MS	F	P
Regression	3	3179.8	1059.9	7288.75	0.000
Residual Error	2994	435.4	0.1		
Total	2997	3615.2			

Από την ανάλυση παλινδρόμησης του μοντέλου παρατηρούμε ότι:

Το πλήθος των περιορισμών (m) και το πλήθος των μεταβλητών (n) έχουν θετική σχέση με τον αριθμό των επαναλήψεων (niter) που εκτελεί ο αλγόριθμος, κάτι που προκύπτει από το πρόσημο των συντελεστών προσδιορισμού (Coef) που έχουν. Το αποτέλεσμα αυτό είναι αναμενόμενο καθώς όσο μεγαλώνουν οι διαστάσεις του γραμμικού προβλήματος (m και n) τόσο αυξάνουν και οι επαναλήψεις (niter) που απαιτούνται για την επίλυσή του. Στις Εικόνες 5.8 και 5.9 παρουσιάζονται τα διαγράμματα των φυσικών λογαρίθμων (ln) των m (πλήθος περιορισμών) και n (πλήθος μεταβλητών) για τις τιμές που λαμβάνουν στα γραμμικά προβλήματα από όπου φαίνεται ότι όσο μεγαλώνει η διάσταση ενός γραμμικού προβλήματος τόσο αυξάνεται και ο αριθμός των επαναλήψεων του.

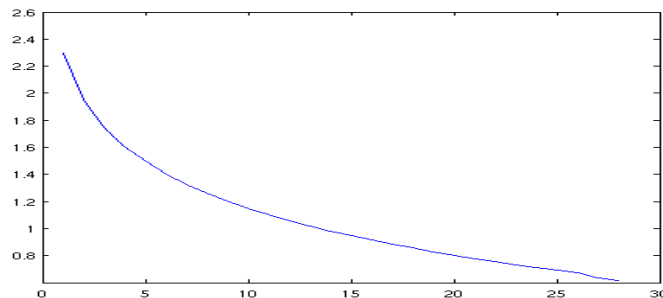


Εικόνα 5.8 – Γραφική παράσταση πλήθους περιορισμών ( $m$ ) Κατηγορίας  $A$  γραμμικών προβλημάτων του αριθμού επαναλήψεων ( $niter$ )



Εικόνα 5.9 – Γραφική παράσταση πλήθους μεταβλητών ( $n$ ) Κατηγορίας  $A$  γραμμικών προβλημάτων του αριθμού επαναλήψεων ( $niter$ )

Η σχέση της πυκνότητας ( $density$ ) με τον αριθμό των επαναλήψεων ( $niter$ ) του αλγόριθμου είναι αρνητική ( $Coef = -0,499$ ). Οι συναρτήσεις που χρησιμοποιήθηκαν στον αλγόριθμο είναι βέλτιστες και προφέρουν πολύ καλό χειρισμό πυκνών πινάκων, δηλαδή για μεγαλύτερες τιμές πυκνότητας ( $density$ ) οι επαναλήψεις ( $niter$ ) που χρειάζεται ο αλγόριθμος για να συγκλίνει είναι λιγότερες. Στο διάγραμμα της *Εικόνας 5.10* απεικονίζεται ο φυσικός λογάριθμος ( $\ln$ ) της πυκνότητας ( $density$ ) από όπου επιβεβαιώνεται ότι όσο μεγαλώνει η πυκνότητα ενός γραμμικού προβλήματος τόσο μειώνονται οι επαναλήψεις.

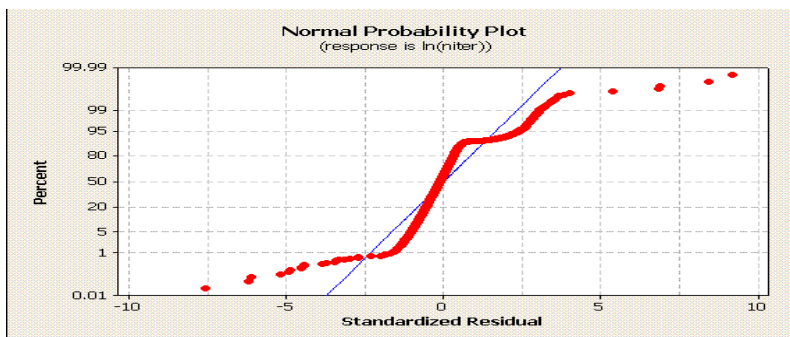


Εικόνα 5.10 – Γραφική παράσταση πυκνότητας ( $density$ ) γραμμικών προβλημάτων Κατηγορίας  $A$  του αριθμού επαναλήψεων ( $niter$ )

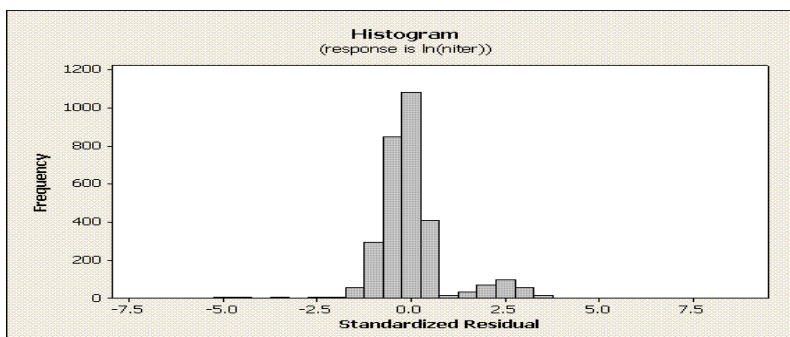
Στα βασικά μεγέθη του μοντέλου παρατηρούμε ότι όλες οι ανεξάρτητες μεταβλητές έχουν μηδενικές τιμές p (probability). Αυτό συνεπάγεται ότι οι τιμές των συντελεστών προσδιορισμού των ανεξάρτητων μεταβλητών του μοντέλου είναι στατιστικά σημαντικές με αποτέλεσμα να επηρεάζουν δραστικά το μοντέλο που προσδιορίζει την σχέση μεταξύ του αριθμού των επαναλήψεων του αλγορίθμου (niter) και των ανεξάρτητων μεταβλητών.

Ο προσαρμοσμένος συντελεστής προσδιορισμού  $R_{adj}^2$  είναι αρκετά υψηλός (87,9%) κάτι που υποδηλώνει ότι οι προβλέψεις για τη μεταβολή της εξαρτημένης μεταβλητής είναι αντιπροσωπευτικές με τα γραμμικά προβλήματα σε ποσοστό 87,9%.

Οι *Εικόνες 5.11* και *5.12* παρουσιάζουν την κατανομή που ακολουθούν τα δεδομένα των γραμμικών προβλημάτων. Από το διάγραμμα στην *Εικόνα 5.11* προκύπτει ότι η πλειοψηφία των δεδομένων των γραμμικών προβλημάτων προέρχεται από την κανονική κατανομή ενώ από το διάγραμμα στην *Εικόνα 5.12* φαίνεται ότι το ιστόγραμμα των καταλοίπων ακολουθεί την κανονική κατανομή.



*Εικόνα 5.11 – Κανονικότητα μοντέλου Κατηγορίας Α γραμμικών προβλημάτων του αριθμού επαναλήψεων (niter)*



*Εικόνα 5.12 – Ιστόγραμμα καταλοίπων μοντέλου Κατηγορίας Α γραμμικών προβλημάτων του αριθμού επαναλήψεων (niter)*

## 5.3.2 Κατηγορία Β

### 5.3.2.1 Χρόνος εκτέλεσης (cpu)

Το μοντέλο που προσδιορίζει καλύτερα την συμπεριφορά του αλγόριθμου εξωτερικών σημείων σε σχέση με το χρόνο εκτέλεσης (cpu) για την Κατηγορία Β των αραιών γραμμικών προβλημάτων είναι το εξής:

$$\ln(\text{cpu}) = -15.5 + 1.96 \ln(m) + 0.442 \ln(n) - 0.661 \ln(\text{density}) .$$

Στον Πίνακα 5.6 παρακάτω παρουσιάζεται η ανάλυση παλινδρόμησης για το χρόνο εκτέλεσης:

Πίνακας 5.6 – Ανάλυση παλινδρόμησης του χρόνου εκτέλεσης (cpu) και των ανεξάρτητων μεταβλητών στην Κατηγορία Β αραιών γραμμικών προβλημάτων

```
The regression equation is
ln(cpu) = - 15.5 + 1.96 ln(m) + 0.442 ln(n) - 0.661 ln(density)

1749 cases used, 1 cases contain missing values

Predictor      Coef    SE Coef      T      P
Constant      -15.4866  0.1401    -110.56  0.000
ln(m)          1.95776  0.08615    22.72   0.000
ln(n)          0.44156  0.08711     5.07   0.000
ln(density)   -0.66075  0.02944   -22.45   0.000

S = 0.702378   R-Sq = 93.1%   R-Sq(adj) = 93.1%

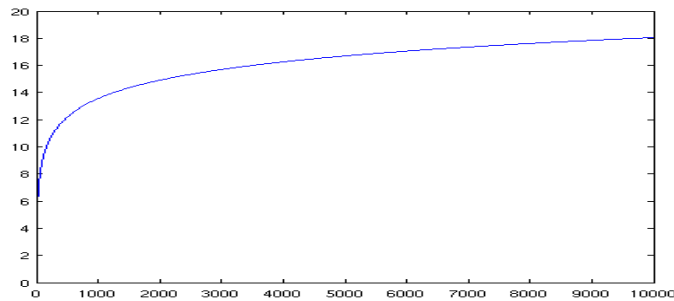
Analysis of Variance

Source         DF      SS      MS      F      P
Regression     3    11657.1  3885.7  7876.39  0.000
Residual Error 1745    860.9    0.5
Total          1748   12518.0
```

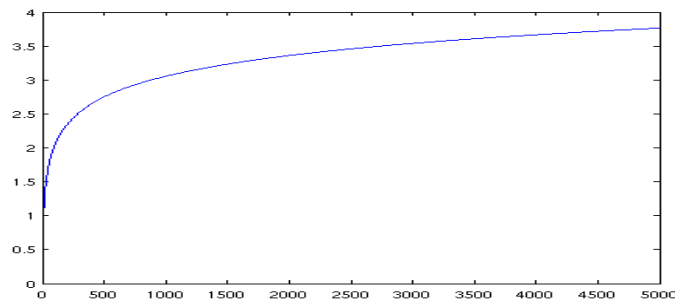
Από την ανάλυση παλινδρόμησης του υποδείγματος εξάγονται τα εξής συμπεράσματα:

Η σχέση μεταξύ του πλήθους των περιορισμών (m) και του πλήθους των μεταβλητών (n) με το χρόνο εκτέλεσης (cpu) του αλγορίθμου είναι θετική, κάτι που προκύπτει από τα θετικά πρόσημα των συντελεστών προσδιορισμού (Coef). Η σχέση αυτή είναι αναμενόμενη καθώς όσο αυξάνεται η

διάσταση ενός γραμμικού προβλήματος τόσο αυξάνει και ο χρόνος επίλυσής του (cpu). Στις *Εικόνες 5.13* και *5.14* αναπαριστώνται οι γραφικές παραστάσεις του φυσικού λογαρίθμου (ln) για το m (πλήθος περιορισμών) και το n (πλήθος μεταβλητών). Από τα διαγράμματα προκύπτει ότι για μεγαλύτερες τιμές των m και n ο χρόνος που απαιτείται για την εκτέλεση του αλγορίθμου αυξάνεται, κάτι που επιβεβαιώνει τη μεταξύ τους θετική σχέση.



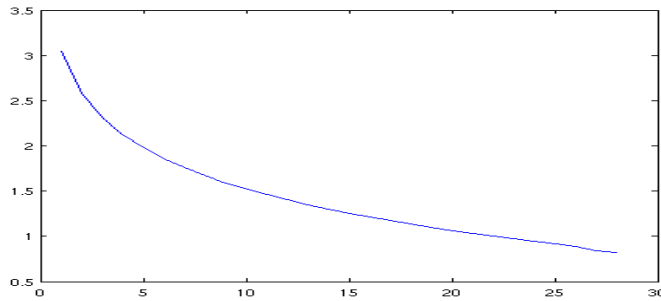
*Εικόνα 5.13 – Γραφική παράσταση πλήθους περιορισμών (m) Κατηγορίας B γραμμικών προβλημάτων του χρόνου εκτέλεσης (cpu)*



*Εικόνα 5.14 – Γραφική παράσταση πλήθους μεταβλητών (n) Κατηγορίας B γραμμικών προβλημάτων του χρόνου εκτέλεσης (cpu)*

Ο συντελεστής προσδιορισμού της πυκνότητας (density) στο υπόδειγμα είναι αρνητικός (Coef=-0,661) κάτι το οποίο εξηγείται από το γεγονός ότι οι συναρτήσεις του Matlab που χρησιμοποιούνται στον αλγόριθμο εξωτερικών σημείων είναι βέλτιστες και προσφέρουν πολύ καλό χειρισμό των πυκνών πινάκων. Δηλαδή, για μεγαλύτερες τιμές πυκνότητας (density) σε ένα γραμμικό πρόβλημα ο χρόνος (cpu) που απαιτείται μειώνεται. Στο διάγραμμα της *Εικόνας 5.15* απεικονίζεται ο φυσικός λογάριθμος (ln) της πυκνότητας (density) από όπου φαίνεται ότι για μεγαλύτερες τιμές πυκνότητας σε ένα γραμμικό πρόβλημα ο χρόνος που απαιτείται για την επίλυση του είναι μικρότερος.



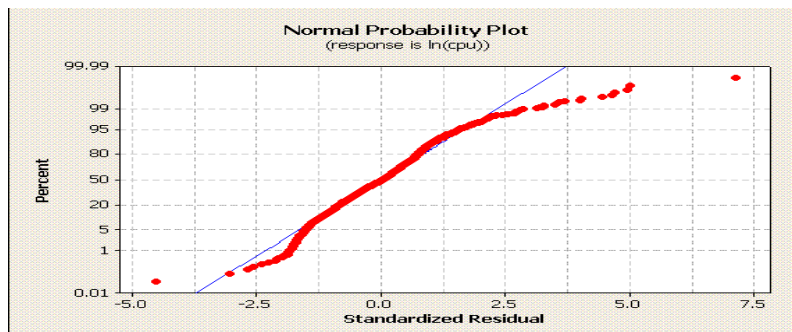


Εικόνα 5.15 – Γραφική παράσταση πυκνότητας (density) γραμμικών προβλημάτων Κατηγορίας B του χρόνου εκτέλεσης (cpu)

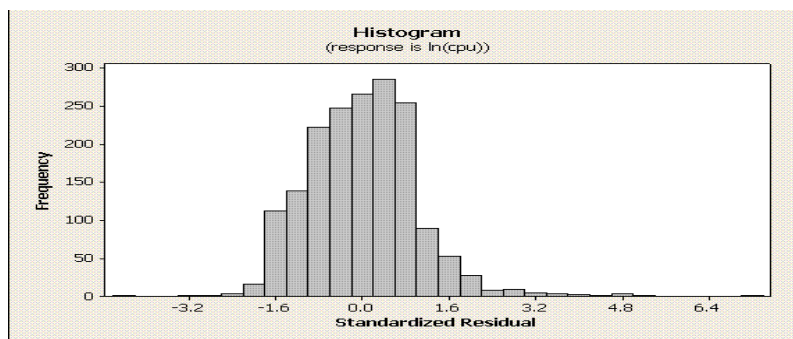
Στα βασικά μεγέθη του υποδείγματος, όλες οι ανεξάρτητες μεταβλητές έχουν τιμές μεγαλύτερες το 1.96 για το t – student. Από αυτό εξάγεται το συμπέρασμα ότι όλες οι ανεξάρτητες μεταβλητές είναι στατιστικά σημαντικές για το μοντέλο και επηρεάζουν σημαντικά το χρόνο εκτέλεσης του αλγορίθμου.

Ο προσαρμοσμένος συντελεστής προσδιορισμού  $R_{adj}^2$  είναι πολύ υψηλός (93,1%) κάτι που συνεπάγεται ότι οι προβλέψεις του χρόνο εκτέλεσης των γραμμικών προβλημάτων είναι ακριβείς σε ποσοστό 93,1%.

Οι Εικόνες 5.16 και 5.17 παρουσιάζουν την κατανομή των γραμμικών προβλημάτων. Και για τα δύο διαγράμματα μπορούμε να πούμε ότι η προσαρμογή του μοντέλου χρονισμού είναι πολύ καλή στα δεδομένα της κατηγορίας.



Εικόνα 5.16 – Κανονικότητα μοντέλου Κατηγορίας B γραμμικών προβλημάτων του χρόνου εκτέλεσης (cpu)



Εικόνα 5.17 – Ιστόγραμμα καταλοίπων μοντέλου Κατηγορίας Β γραμμικών προβλημάτων του χρόνου εκτέλεσης (cpu)

### 5.3.2.2 Αριθμός επαναλήψεων (niter)

Το μοντέλο που προσδιορίζει καλύτερα την συμπεριφορά του αλγόριθμου εξωτερικών σημείων σε σχέση με τον αριθμό των επαναλήψεων (niter) για την Κατηγορία Β των αραιών γραμμικών προβλημάτων είναι το εξής:

$$\ln(\text{niter}) = -1.21 + 0.483 \ln(m) + 0.436 \ln(n) - 0.789 \ln(\text{density}) .$$

Η ανάλυση παλινδρόμησης όπως προέκυψε από το Minitab παρουσιάζεται στον Πίνακα 5.7 παρακάτω:

Πίνακας 5.7 – Ανάλυση παλινδρόμησης του αριθμού των επαναλήψεων (niter) και των ανεξάρτητων μεταβλητών στην Κατηγορία Β αραιών γραμμικών προβλημάτων

The regression equation is  
 $\ln(\text{niter}) = -1.21 + 0.483 \ln(m) + 0.436 \ln(n) - 0.789 \ln(\text{density})$

1749 cases used, 1 cases contain missing values

Predictor	Coef	SE Coef	T	P
Constant	-1.2060	0.1076	-11.21	0.000
ln(m)	0.48256	0.06616	7.29	0.000
ln(n)	0.43588	0.06690	6.52	0.000
ln(density)	-0.78896	0.02261	-34.90	0.000

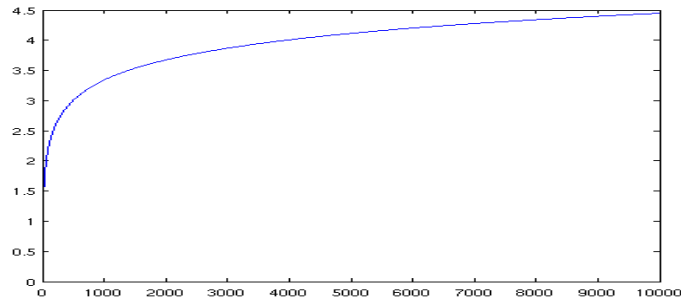
S = 0.539379    R-Sq = 79.4%    R-Sq(adj) = 79.4%

Analysis of Variance

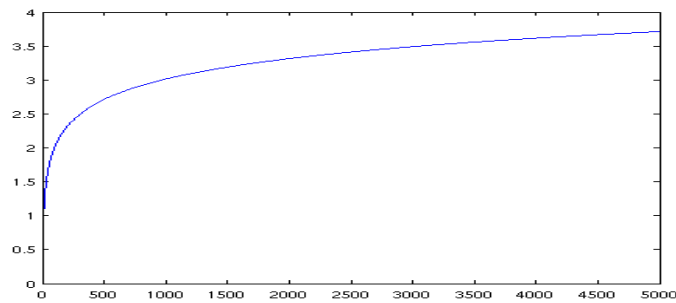
Source	DF	SS	MS	F	P
Regression	3	1955.39	651.80	2240.39	0.000
Residual Error	1745	507.67	0.29		
Total	1748	2463.06			

Από τα αποτελέσματα της ανάλυσης παλινδρόμησης παρατηρούμε τα εξής:

Η σχέση του πλήθους των περιορισμών (m) και του πλήθους των μεταβλητών (n) είναι θετική με τον αριθμό των επαναλήψεων (niter) του αλγορίθμου. Αυτό αποδεικνύεται από τα θετικά πρόσημα και των δύο συντελεστών προσδιορισμού (Coef) και είναι αναμενόμενο καθώς για μεγαλύτερες διαστάσεις ενός προβλήματος απαιτούνται περισσότερες επαναλήψεις (niter) για την επίλυση του. Οι *Εικόνες 5.18* και *5.19* δείχνουν ότι το πρόσημο και των δύο φυσικών λογαρίθμων (ln) που χρησιμοποιούνται είναι θετικό σε όλο το πεδίο ορισμού των m (πλήθος περιορισμών) και n (πλήθος μεταβλητών) για τα γραμμικά προβλήματα. Από τα διαγράμματα φαίνεται ότι για μεγαλύτερες τιμές των m και n ο αριθμός των επαναλήψεων που απαιτούνται αυξάνεται, κάτι που επιβεβαιώνει τη θετική τους σχέση.

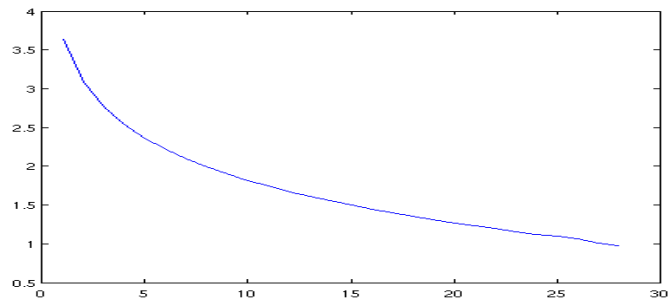


Εικόνα 5.18 – Γραφική παράσταση πλήθους περιορισμών ( $m$ ) Κατηγορίας B γραμμικών προβλημάτων του αριθμού επαναλήψεων ( $niter$ )



Εικόνα 5.19 – Γραφική παράσταση πλήθους μεταβλητών ( $n$ ) Κατηγορίας B γραμμικών προβλημάτων του αριθμού επαναλήψεων ( $niter$ )

Η σχέση της πυκνότητας ( $density$ ) με τον αριθμό των επαναλήψεων ( $niter$ ) του αλγόριθμου είναι αρνητική ( $Coef = -0,789$ ). Οι συναρτήσεις που χρησιμοποιήθηκαν στον αλγόριθμο είναι βέλτιστες και προφέρουν πολύ καλό χειρισμό πυκνών πινάκων, δηλαδή για μεγαλύτερες τιμές πυκνότητας ( $density$ ) οι επαναλήψεις ( $niter$ ) που χρειάζεται ο αλγόριθμος για να συγκλίνει είναι λιγότερες. Στο διάγραμμα της Εικόνας 5.20 απεικονίζεται ο φυσικός λογάριθμος ( $\ln$ ) της πυκνότητας ( $density$ ) από όπου επιβεβαιώνεται ότι όσο μεγαλώνει η πυκνότητα ενός γραμμικού προβλήματος τόσο μειώνονται οι επαναλήψεις.

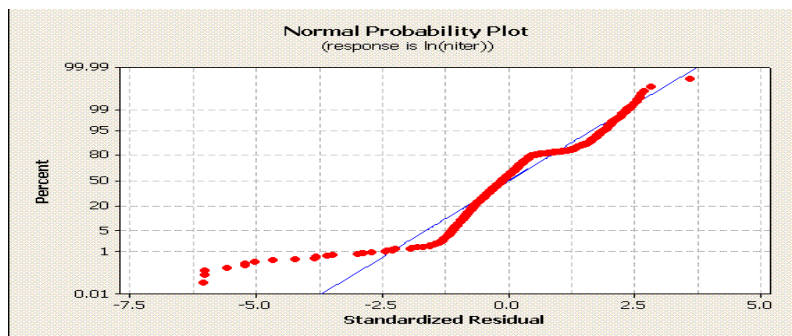


Εικόνα 5.20 – Γραφική παράσταση πυκνότητας ( $density$ ) γραμμικών προβλημάτων Κατηγορίας B του αριθμού επαναλήψεων ( $niter$ )

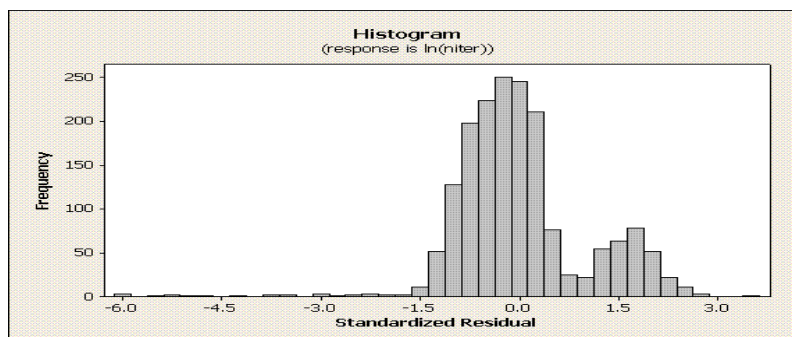
Οι συντελεστές προσδιορισμού των ανεξάρτητων μεταβλητών του υποδείγματος είναι σημαντικοί καθώς οι τιμές των  $p$  (probability) είναι μικρότερες του  $0,05$ . Άρα η επίδραση τους στο υπόδειγμα του αριθμού των επαναλήψεων είναι σημαντική.

Ο προσαρμοσμένος συντελεστής προσδιορισμού  $R_{adj}^2$  είναι σχετικά υψηλός (79,4%) κάτι που συνεπάγεται ότι οι προβλέψεις του αριθμού των επαναλήψεων των γραμμικών προβλημάτων για το υπόδειγμα είναι ακριβείς σε ποσοστό 79,4%.

Οι *Εικόνες 5.21* και *5.22* παρουσιάζουν την κατανομή που ακολουθούν τα δεδομένα των γραμμικών προβλημάτων. Από το διάγραμμα στην *Εικόνα 5.21* προκύπτει ότι η πλειοψηφία των δεδομένων των γραμμικών προβλημάτων προέρχεται από την κανονική κατανομή ενώ από το διάγραμμα στην *Εικόνα 5.22* φαίνεται ότι το ιστόγραμμα των καταλοίπων των γραμμικών προβλημάτων ακολουθεί την κανονική κατανομή.



*Εικόνα 5.21 – Κανονικότητα μοντέλου Κατηγορίας Β γραμμικών προβλημάτων του αριθμού επαναλήψεων (niter)*



*Εικόνα 5.22 – Ιστόγραμμα καταλοίπων μοντέλου Κατηγορίας Β γραμμικών προβλημάτων του αριθμού επαναλήψεων (niter)*

### 5.3.3 Κατηγορία D

#### 5.3.3.1 Χρόνος εκτέλεσης (cpu)

Το μοντέλο που προσδιορίζει καλύτερα την συμπεριφορά του αλγόριθμου εξωτερικών σημείων σε σχέση με το χρόνο εκτέλεσης (cpu) του αλγορίθμου για την Κατηγορία D των αραιών γραμμικών προβλημάτων είναι το εξής:

$$\ln(\text{cpu}) = -15.4 + 2.35 \ln(m) - 0.668 \ln(\text{density}) + 0.0230 \ln(\text{cond}(A)) .$$

Στο συγκεκριμένο υπόδειγμα επειδή το πλήθος των περιορισμών (m) και το πλήθος των μεταβλητών (n) είναι ίδιο, στην ανάλυση παλινδρόμησης συμπεριλήφθηκε μόνο το πλήθος των περιορισμών (m).

Η ανάλυση παλινδρόμησης όπως προέκυψε από το Minitab παρουσιάζεται στον Πίνακα 5.8 παρακάτω:

Πίνακας 5.8 – Ανάλυση παλινδρόμησης του χρόνου εκτέλεσης (cpu) και των ανεξάρτητων μεταβλητών στην Κατηγορία D αραιών γραμμικών προβλημάτων

```
The regression equation is
ln(cpu) = - 15.4 + 2.35 ln(m) - 0.668 ln(density) + 0.0230 ln(cond(A))

1741 cases used, 9 cases contain missing values

Predictor      Coef      SE Coef      T      P
Constant      -15.4241   0.1353      -113.97  0.000
ln(m)         2.34939   0.01585     148.20  0.000
ln(density)   -0.66830   0.02617     -25.53  0.000
ln(cond(A))   0.023019  0.004785      4.81   0.000

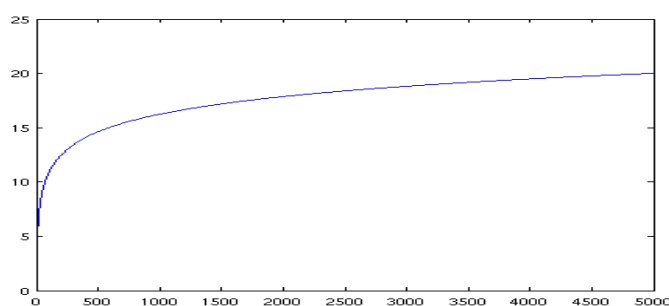
S = 0.633162    R-Sq = 93.1%    R-Sq(adj) = 93.1%

Analysis of Variance

Source         DF         SS         MS         F         P
Regression     3         9352.4    3117.5    7776.29  0.000
Residual Error 1737      696.4     0.4
Total          1740     10048.8
```

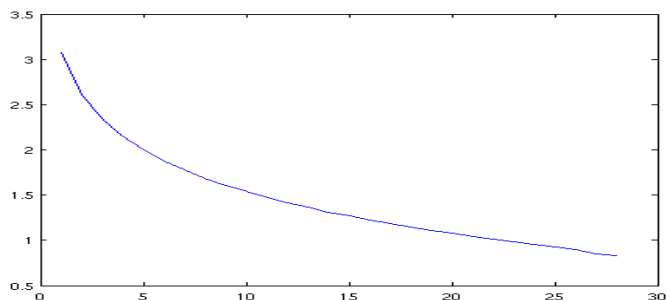
Από τα αποτελέσματα της ανάλυσης παλινδρόμησης για το υπόδειγμα παρατηρούμε ότι:

Η σχέση του πλήθους των περιορισμών ( $m$ ) με το χρόνο εκτέλεσης ( $c_{pu}$ ) του αλγορίθμου είναι θετική ( $Coef=2,35$ ) . Το αποτέλεσμα είναι αναμενόμενο καθώς σε γραμμικά προβλήματα μεγαλύτερων διαστάσεων απαιτείται περισσότερος χρόνος για την επίλυσή τους. Η *Εικόνα 5.23* δείχνει τη γραφική παράσταση του φυσικού λογαρίθμου ( $\ln$ ) για τις τιμές του πλήθους των περιορισμών ( $m$ ) που χρησιμοποιήθηκαν στα γραμμικά προβλήματα. Φαίνεται ξεκάθαρα ότι για όλες τις τιμές του πεδίου ορισμού του  $m$  (πλήθος περιορισμών) η τιμή του φυσικού λογαρίθμου ( $\ln$ ) είναι θετική, κάτι που επιβεβαιώνει τη θετική τους σχέση.



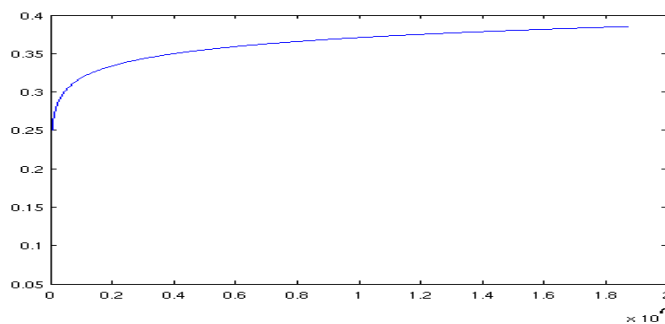
*Εικόνα 5.23 – Γραφική παράσταση πλήθους περιορισμών ( $m$ ) Κατηγορίας D γραμμικών προβλημάτων του χρόνου εκτέλεσης ( $c_{pu}$ )*

Η σχέση ανάμεσα στην πυκνότητα ( $density$ ) και στο χρόνο εκτέλεσης ( $c_{pu}$ ) είναι αρνητική ( $Coef=-0,668$ ) κάτι το οποίο εξηγείται από το γεγονός ότι οι συναρτήσεις του Matlab που χρησιμοποιούνται στον αλγόριθμο εξωτερικών σημείων είναι βέλτιστες και προσφέρουν πολύ καλό χειρισμό πυκνών πινάκων. Δηλαδή, για μεγαλύτερες τιμές πυκνότητας ( $density$ ) σε ένα γραμμικό πρόβλημα ο χρόνος ( $c_{pu}$ ) που απαιτείται μειώνεται. Στο διάγραμμα της *Εικόνας 5.24* απεικονίζεται ο φυσικός λογάριθμος ( $\ln$ ) της πυκνότητας ( $density$ ) από όπου φαίνεται ότι για μεγαλύτερες τιμές πυκνότητας σε ένα γραμμικό πρόβλημα ο χρόνος που απαιτείται για την επίλυση του είναι μικρότερος.



Εικόνα 5.24 – Γραφική παράσταση πυκνότητας (density) γραμμικών προβλημάτων Κατηγορίας D του χρόνου εκτέλεσης (cpu)

Ο βαθμός κατάστασης της μήτρας A ( $\text{cond}(A)$ ) έχει θετικό συντελεστή προσδιορισμού ( $\text{Coef}=0.023$ ) . Η τιμή του συγκεκριμένου συντελεστή επειδή βρίσκεται κοντά στο 1 κάτι το οποίο σημαίνει ότι ο πίνακας με τα δεδομένα του προβλήματος είναι σε πολύ καλή κατάσταση. Η θετική σχέση του χρόνου εκτέλεσης (cpu) και του βαθμού κατάστασης της μήτρας A ( $\text{cond}(A)$ ) φαίνεται στο διάγραμμα της Εικόνας 5.25. Παρατηρούμε ότι για όλες τις τιμές που λαμβάνει στα γραμμικά προβλήματα το  $\text{cond}(A)$  ο χρόνος εκτέλεσης παραμένει θετικός.



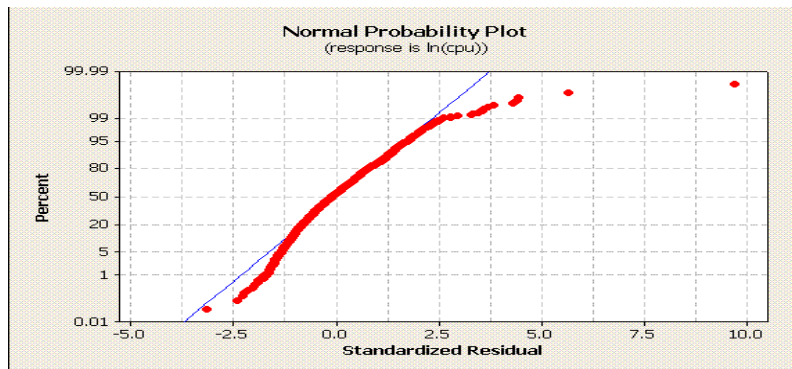
Εικόνα 5.25 – Γραφική παράσταση βαθμού κατάστασης μήτρας A ( $\text{cond}(A)$ ) Κατηγορίας D γραμμικών προβλημάτων του χρόνου εκτέλεσης (cpu)

Στα βασικά μεγέθη του μοντέλου παρατηρούμε ότι όλες οι ανεξάρτητες μεταβλητές του υποδείγματος έχουν τιμές για το t – student μεγαλύτερες του 1,96 . Αυτό υποδεικνύει ότι οι τιμές των συντελεστών προσδιορισμού (Coef) των ανεξάρτητων μεταβλητών του υποδείγματος είναι σημαντικές με αποτέλεσμα να έχουν σημαντική επίδραση στο χρόνο εκτέλεσης (cpu) του αλγορίθμου.

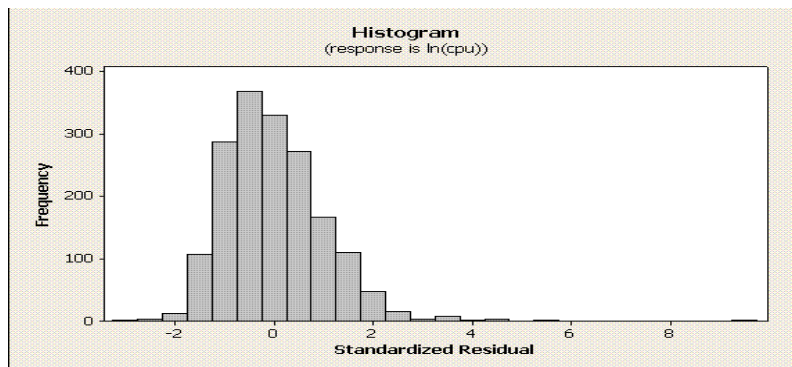
Ο προσαρμοσμένος συντελεστής προσδιορισμού  $R_{\text{adj}}^2$  είναι πολύ υψηλός (93,1%) και υποδηλώνει ότι οι προβλέψεις για την μεταβολή της εξαρτημένης μεταβλητής είναι αντιπροσωπευτικές με τα γραμμικά προβλήματα σε ποσοστό 93,1%.



Οι *Εικόνες 5.26* και *5.27* παρουσιάζουν την κατανομή που ακολουθείται από τα γραμμικά προβλήματα. Συγκεκριμένα, το διάγραμμα της *Εικόνας 5.26* δείχνει ότι η πλειοψηφία των δεδομένων των γραμμικών προβλημάτων προέρχεται από την κανονική κατανομή (οι δύο γραμμές εφάπτονται) ενώ από την *Εικόνα 5.27* παρατηρείται ότι το ιστόγραμμα των καταλοίπων ακολουθεί και αυτό την κανονική κατανομή.



*Εικόνα 5.26 – Κανονικότητα μοντέλου Κατηγορίας D γραμμικών προβλημάτων του χρόνου εκτέλεσης (cpu)*



*Εικόνα 5.27 – Ιστόγραμμα καταλοίπων μοντέλου Κατηγορίας D γραμμικών προβλημάτων του χρόνου εκτέλεσης (cpu)*

### 5.3.3.2 Αριθμός επαναλήψεων (*niter*)

Το μοντέλο που προσδιορίζει καλύτερα την συμπεριφορά του αλγόριθμου εξωτερικών σημείων σε σχέση με τον αριθμό των επαναλήψεων (*niter*) για την Κατηγορία D των αραιών γραμμικών προβλημάτων είναι το εξής:

$$\ln(niter) = -1.57 + 0.974 \ln(m) - 0.788 \ln(\text{density}) \quad .$$

Και στο συγκεκριμένο υπόδειγμα επειδή το πλήθος των περιορισμών (m) και το πλήθος των μεταβλητών (n) είναι ίδιο, στην ανάλυση παλινδρόμησης συμπεριλήφθηκε μόνο το πλήθος των περιορισμών (m).

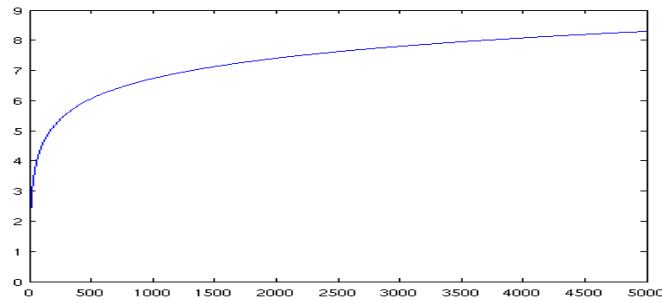
Η ανάλυση παλινδρόμησης όπως προέκυψε από το Minitab παρουσιάζεται στον Πίνακα 5.9 παρακάτω:

Πίνακας 5.9 – Ανάλυση παλινδρόμησης του αριθμού των επαναλήψεων (niter) και των ανεξάρτητων μεταβλητών στην Κατηγορία D αραιών γραμμικών προβλημάτων

The regression equation is					
$\ln(\text{niter}) = - 1.57 + 0.974 \ln(m) - 0.788 \ln(\text{density})$					
1749 cases used, 1 cases contain missing values					
Predictor	Coef	SE Coef	T	P	
Constant	-1.56834	0.09206	-17.04	0.000	
ln(m)	0.97437	0.01098	88.76	0.000	
ln(density)	-0.78835	0.01933	-40.78	0.000	
S = 0.469007    R-Sq = 84.4%    R-Sq(adj) = 84.4%					
Analysis of Variance					
Source	DF	SS	MS	F	P
Regression	2	2078.2	1039.1	4723.94	0.000
Residual Error	1746	384.1	0.2		
Total	1748	2462.3			

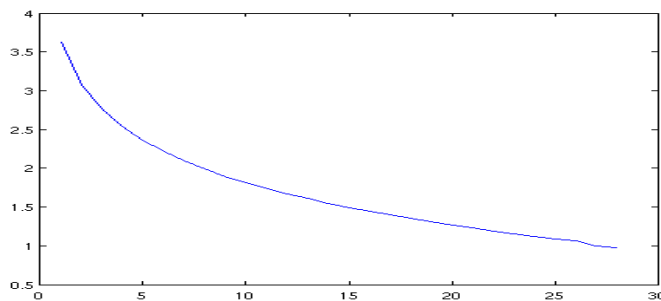
Στα αποτελέσματα της ανάλυσης παλινδρόμησης παρατηρούμε τα εξής:

Ο συντελεστής προσδιορισμού (Coef = 0,974) υποδηλώνει ότι υπάρχει θετική σχέση μεταξύ του πλήθους των περιορισμών (m) και του αριθμού των επαναλήψεων (niter). Το αποτέλεσμα είναι αναμενόμενο καθώς όσο μεγαλύτερες είναι οι διαστάσεις ενός προβλήματος τόσο περισσότερες επαναλήψεις απαιτούνται για την επίλυση του. Η Εικόνα 5.28 αναπαριστά τη γραφική παράσταση του φυσικού λογαρίθμου (ln) για τις διάφορες τιμές του πλήθους των περιορισμών (m). Από το διάγραμμα προκύπτει το θετικό πρόσημο του φυσικού λογαρίθμου του πλήθους των περιορισμών (ln(m)) για όλες τις τιμές που χρησιμοποιήθηκαν στα γραμμικά προβλήματα και η θετική τους σχέση με τον αριθμό των επαναλήψεων (niter).



Εικόνα 5.28 – Γραφική παράσταση πλήθους περιορισμών (m) Κατηγορίας D γραμμικών προβλημάτων του αριθμού επαναλήψεων (niter)

Η σχέση της πυκνότητας (density) με τον αριθμό των επαναλήψεων (niter) του αλγόριθμου είναι αρνητική (Coef = -0,788) . Οι συναρτήσεις του Matlab για το χειρισμό πυκνών πινάκων είναι βέλτιστες κάτι το οποίο σημαίνει ότι για μεγαλύτερες τιμές πυκνότητας (density) οι επαναλήψεις (niter) που χρειάζεται ο αλγόριθμος για να συγκλίνει είναι λιγότερες. Στο διάγραμμα της Εικόνας 5.29 απεικονίζεται ο φυσικός λογάριθμος (ln) της πυκνότητας (density) από όπου επιβεβαιώνεται ότι όσο μεγαλώνει η πυκνότητα ενός γραμμικού προβλήματος τόσο μειώνονται οι επαναλήψεις.

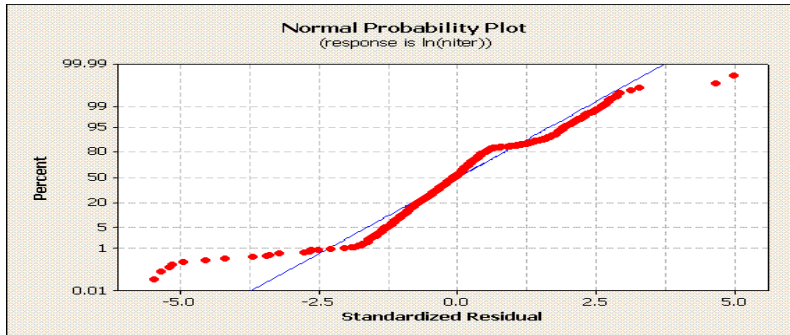


Εικόνα 5.29 – Γραφική παράσταση πυκνότητας (density) γραμμικών προβλημάτων Κατηγορίας D του αριθμού επαναλήψεων (niter)

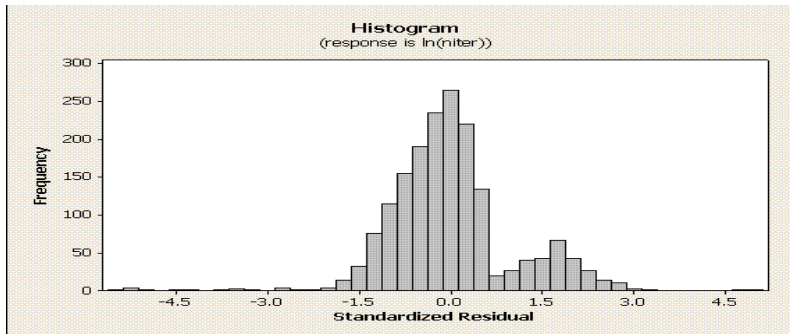
Οι συντελεστές προσδιορισμού των ανεξάρτητων μεταβλητών του υποδείγματος είναι σημαντικοί καθώς από την ανάλυση παλινδρόμησης προκύπτει ότι οι τιμές των p (probability) είναι μικρότερες του 0,05 . Άρα η επίδραση τους στο υπόδειγμα του αριθμού των επαναλήψεων είναι σημαντική.

Ο προσαρμοσμένος συντελεστής προσδιορισμού  $R_{adj}^2$  είναι αρκετά υψηλός (84,4%) κάτι που υποδηλώνει ότι οι προβλέψεις για την μεταβολή του αριθμού των επαναλήψεων είναι ακριβείς σε σχέση με τα γραμμικά προβλήματα σε ποσοστό 84,4%.

Οι Εικόνες 5.30 και 5.31 παρουσιάζουν την κατανομή που ακολουθείται από τα γραμμικά προβλήματα. Και από τα δύο διαγράμματα προκύπτει ότι η προσαρμογή του μοντέλου είναι πολύ κοντά στα πραγματικά δεδομένα των γραμμικών προβλημάτων.



Εικόνα 5.30 – Κανονικότητα μοντέλου Κατηγορίας D γραμμικών προβλημάτων του αριθμού επαναλήψεων (niter)



Εικόνα 5.31 – Ιστόγραμμα καταλοίπων μοντέλου Κατηγορίας D γραμμικών προβλημάτων του αριθμού επαναλήψεων (niter)

### 5.3.4 Κατηγορία E

#### 5.3.4.1 Χρόνος εκτέλεσης (cpu)

Το μοντέλο που προσδιορίζει καλύτερα την συμπεριφορά του αλγόριθμου εξωτερικών σημείων σε σχέση με το χρόνο εκτέλεσης (cpu) του αλγορίθμου για την Κατηγορία E των αραιών γραμμικών προβλημάτων είναι το εξής:

$$\ln(\text{cpu}) = -15.7 + 2.42 \ln(m) - 0.493 \ln(\text{density}) + 0.0390 \ln(\text{cond}(A)) \quad .$$

Στο συγκεκριμένο υπόδειγμα επειδή το πλήθος των περιορισμών (m) και το πλήθος των

μεταβλητών (n) είναι ίδιο, στην ανάλυση παλινδρόμησης συμπεριλήφθηκε μόνο το πλήθος των περιορισμών (m).

Η ανάλυση παλινδρόμησης παρουσιάζεται στον Πίνακα 5.10 παρακάτω:

Πίνακας 5.10 – Ανάλυση παλινδρόμησης του χρόνου εκτέλεσης (cpu) και των ανεξάρτητων μεταβλητών στην Κατηγορία Ε αραιών γραμμικών προβλημάτων

```

The regression equation is
ln(cpu) = - 15.7 + 2.42 ln(m) - 0.493 ln(density) + 0.0390 ln(cond(A))

1371 cases used, 2 cases contain missing values

Predictor      Coef      SE Coef      T      P
Constant      -15.6551   0.1570     -99.71  0.000
ln(m)         2.41512   0.01842    131.08  0.000
ln(density)   -0.49286   0.02989    -16.49  0.000
ln(cond(A))   0.038994  0.006016     6.48   0.000

S = 0.633791   R-Sq = 93.1%   R-Sq(adj) = 93.1%

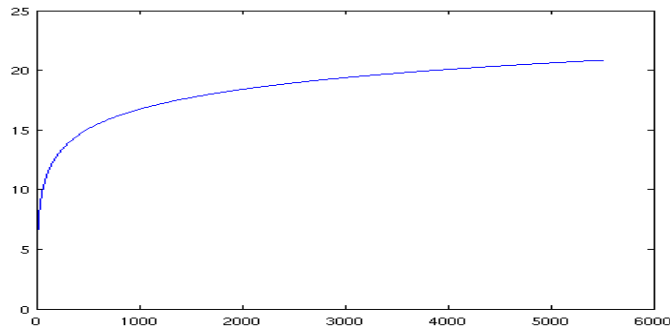
Analysis of Variance

Source          DF      SS      MS      F      P
Regression      3      7465.3  2488.4  6194.88  0.000
Residual Error 1367    549.1   0.4
Total           1370   8014.4

```

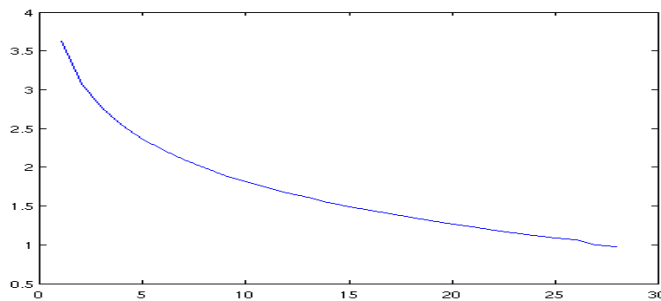
Από τα αποτελέσματα της ανάλυσης παλινδρόμησης παρατηρούμε ότι:

Η σχέση του πλήθους των περιορισμών (m) με το χρόνο εκτέλεσης (cpu) του αλγορίθμου είναι θετική (Coef=2,42) . Το αποτέλεσμα είναι αναμενόμενο καθώς σε γραμμικά προβλήματα μεγαλύτερων διαστάσεων απαιτείται περισσότερος χρόνος για την επίλυσή τους. Η Εικόνα 5.32 δείχνει τη γραφική παράσταση του φυσικού λογαρίθμου (ln) για τις τιμές του πλήθους των περιορισμών (m) που χρησιμοποιήθηκαν στα γραμμικά προβλήματα. Από το διάγραμμα της εικόνας προκύπτει ότι για μεγαλύτερες τιμές του m ο χρόνος που απαιτείται για την εκτέλεση του αλγορίθμου αυξάνεται, κάτι που επιβεβαιώνει τη μεταξύ τους θετική σχέση.



Εικόνα 5.32 – Γραφική παράσταση πλήθους περιορισμών ( $m$ ) Κατηγορίας E γραμμικών προβλημάτων του χρόνου εκτέλεσης ( $cpu$ )

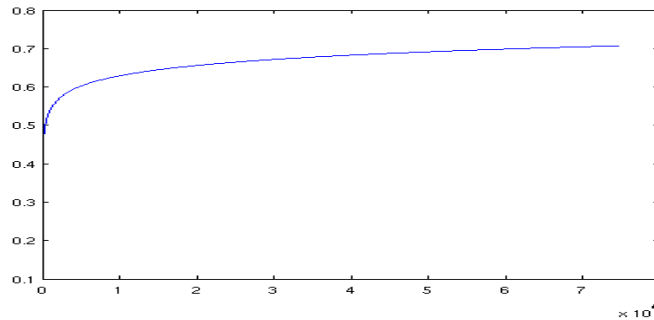
Ο συντελεστής προσδιορισμού της πυκνότητας (density) στο υπόδειγμα είναι αρνητικός (Coef = -0,493) κάτι το οποίο εξηγείται από το γεγονός ότι οι συναρτήσεις του Matlab που χρησιμοποιούνται στον αλγόριθμο εξωτερικών σημείων είναι βέλτιστες και προσφέρουν πολύ καλό χειρισμό πυκνών πινάκων. Δηλαδή, για μικρότερες τιμές πυκνότητας (density) σε ένα γραμμικό πρόβλημα ο χρόνος ( $cpu$ ) που απαιτείται αυξάνεται. Στο διάγραμμα της Εικόνας 5.33 απεικονίζεται ο φυσικός λογάριθμος ( $\ln$ ) της πυκνότητας (density) από όπου φαίνεται ότι για μεγαλύτερες τιμές πυκνότητας σε ένα γραμμικό πρόβλημα ο χρόνος που απαιτείται για την επίλυση του είναι μικρότερος.



Εικόνα 5.33 – Γραφική παράσταση πυκνότητας (density) γραμμικών προβλημάτων Κατηγορίας E του χρόνου εκτέλεσης ( $cpu$ )

Η σχέση ανάμεσα στο βαθμό κατάστασης της μήτρας A ( $\text{cond}(A)$ ) και του χρόνου εκτέλεσης ( $cpu$ ) είναι θετική κάτι που φαίνεται από το θετικό συντελεστή προσδιορισμού (Coef = 0,039) . Η τιμή του συγκεκριμένου συντελεστή επειδή βρίσκεται κοντά στο 1 σημαίνει ότι ο πίνακας με τα δεδομένα του προβλήματος είναι σε πολύ καλή κατάσταση. Το διάγραμμα της Εικόνας 5.34 απεικονίζει τη γραφική παράσταση του φυσικού λογαρίθμου ( $\ln$ ) του βαθμού κατάστασης της μήτρας A ( $\text{cond}(A)$ ) για όλες τις τιμές που λαμβάνει στα γραμμικά προβλήματα. Αυτό που παρατηρούμε είναι ότι σε όλο το πεδίο ορισμού το πρόσημο παραμένει θετικό για το χρόνο εκτέλεσης κάτι που

υποδηλώνει τη θετική σχέση των δύο.

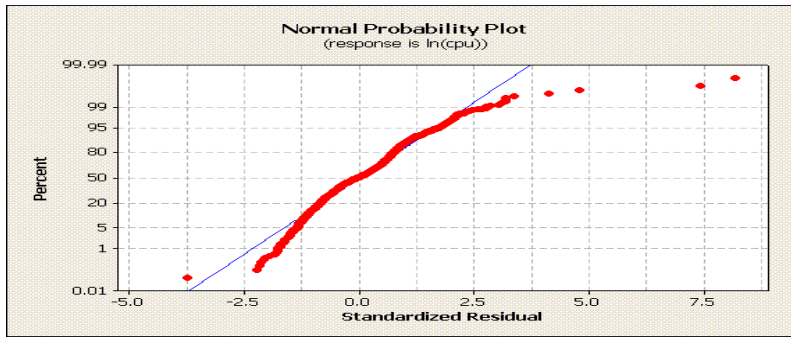


Εικόνα 5.34 – Γραφική παράσταση βαθμού κατάστασης μήτρας  $A$  ( $cond(A)$ ) Κατηγορίας  $E$  γραμμικών προβλημάτων του χρόνου εκτέλεσης ( $cpu$ )

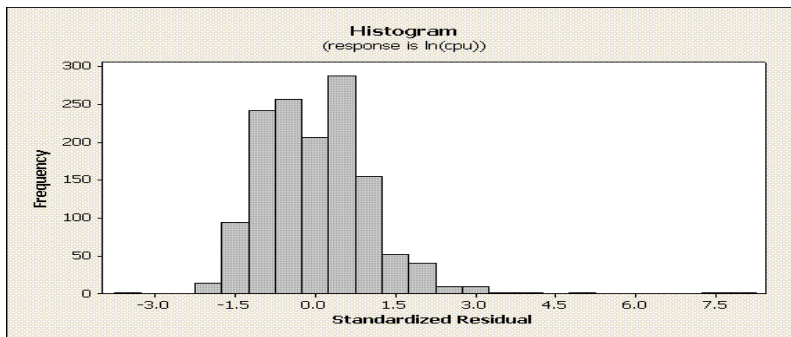
Στα βασικά μεγέθη του μοντέλου παρατηρούμε ότι όλες οι ανεξάρτητες μεταβλητές του υποδείγματος έχουν τιμές για το  $t$  – student μεγαλύτερες το 1.96 κάτι που υποδηλώνει ότι οι τιμές των συντελεστών προσδιορισμού (Coef) των ανεξάρτητων μεταβλητών του υποδείγματος είναι σημαντικές με αποτέλεσμα να έχουν σημαντική επίδραση στο μοντέλο του χρόνου εκτέλεσης του αλγορίθμου ( $cpu$ ).

Ο συντελεστής  $R_{adj}^2$  είναι πολύ υψηλός (93,1%) κάτι που υποδηλώνει ότι οι προβλέψεις για την μεταβολή της εξαρτημένης μεταβλητής είναι ακριβείς για τα γραμμικά προβλήματα σε ποσοστό 93,1%.

Οι Εικόνες 5.35 και 5.36 παρουσιάζουν την κατανομή που ακολουθείται από τα γραμμικά προβλήματα. Συγκεκριμένα, το διάγραμμα της Εικόνας 5.35 δείχνει ότι η πλειοψηφία των δεδομένων των γραμμικών προβλημάτων (με ελάχιστες εξαιρέσεις) προέρχεται από την κανονική κατανομή ενώ από την Εικόνα 5.36 παρατηρείται ότι το ιστόγραμμα των καταλοίπων ακολουθεί και αυτό την κανονική κατανομή.



Εικόνα 5.35 – Κανονικότητα μοντέλου Κατηγορίας E γραμμικών προβλημάτων του χρόνου εκτέλεσης (cpu)



Εικόνα 5.36 – Ιστόγραμμα καταλοίπων μοντέλου Κατηγορίας E γραμμικών προβλημάτων του χρόνου εκτέλεσης (cpu)

### 5.3.4.2 Αριθμός επαναλήψεων (niter)

Το μοντέλο που προσδιορίζει καλύτερα την συμπεριφορά του αλγόριθμου εξωτερικών σημείων σε σχέση με τον αριθμό των επαναλήψεων (niter) για την Κατηγορία E των αραιών γραμμικών προβλημάτων είναι το εξής:

$$\ln(\text{niter}) = -1.00 + 0.919 \ln(m) - 0.714 \ln(\text{density}) \quad .$$

Και για συγκεκριμένο υπόδειγμα επειδή το πλήθος των περιορισμών (m) και το πλήθος των μεταβλητών (n) είναι ίδιο, στην ανάλυση παλινδρόμησης συμπεριλήφθηκε μόνο το πλήθος των περιορισμών (m).

Η ανάλυση παλινδρόμησης όπως προέκυψε από το Minitab παρουσιάζεται στον Πίνακα 5.11 παρακάτω:



Πίνακας 5.11 – Ανάλυση παλινδρόμησης του αριθμού των επαναλήψεων (niter) και των ανεξάρτητων μεταβλητών στην Κατηγορία E αραιών γραμμικών προβλημάτων

The regression equation is  
 $\ln(\text{niter}) = -1.00 + 0.919 \ln(m) - 0.714 \ln(\text{density})$

Predictor	Coef	SE Coef	T	P
Constant	-1.0005	0.1078	-9.28	0.000
$\ln(m)$	0.91891	0.01281	71.71	0.000
$\ln(\text{density})$	-0.71448	0.02164	-33.02	0.000

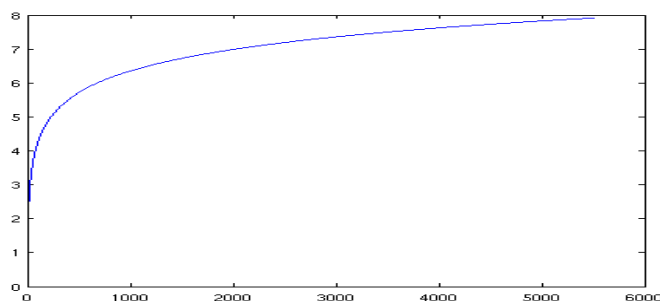
S = 0.459743    R-Sq = 81.9%    R-Sq(adj) = 81.9%

Analysis of Variance

Source	DF	SS	MS	F	P
Regression	2	1310.34	655.17	3099.72	0.000
Residual Error	1370	289.57	0.21		
Total	1372	1599.90			

Στα αποτελέσματα της ανάλυσης παλινδρόμησης παρατηρούμε τα εξής:

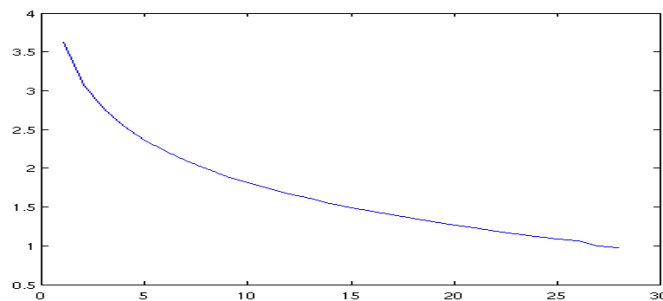
Υπάρχει θετική συσχέτιση μεταξύ του πλήθους των περιορισμών (m) με τον αριθμό των επαναλήψεων (niter), κάτι που αποδεικνύεται από τον θετικό συντελεστή προσδιορισμού (Coef = 0,919) . Το αποτέλεσμα είναι αναμενόμενο καθώς όσο μεγαλύτερες είναι οι διαστάσεις ενός προβλήματος τόσο περισσότερες επαναλήψεις απαιτούνται για την επίλυση του. Η *Εικόνα 5.37* αναπαριστά τη γραφική παράσταση του φυσικού λογαρίθμου (ln) για τις διάφορες τιμές του πλήθους των περιορισμών (m). Από το διάγραμμα προκύπτει το θετικό πρόσημο του πλήθους των περιορισμών (m) σε όλο το πεδίο ορισμού και τη θετική του σχέση με τον αριθμό των επαναλήψεων (niter).



Εικόνα 5.37 – Γραφική παράσταση πλήθους περιορισμών (m) Κατηγορίας E γραμμικών προβλημάτων του αριθμού επαναλήψεων (niter)

Υπάρχει θετική σχέση ανάμεσα στην πυκνότητα (density) και στον αριθμό των επαναλήψεων

(niter), κάτι που υποδηλώνεται από τον αρνητικό συντελεστή προσδιορισμού της πυκνότητας ( $\text{Coef} = -0,714$ ). Οι συναρτήσεις που χρησιμοποιήθηκαν στον αλγόριθμο είναι βέλτιστες και προφέρουν πολύ καλό χειρισμό πυκνών πινάκων, δηλαδή για μικρότερες τιμές πυκνότητας (density) οι επαναλήψεις (niter) που χρειάζεται ο αλγόριθμος για να συγκλίνει είναι περισσότερες. Στο διάγραμμα της *Εικόνας 5.38* απεικονίζεται ο φυσικός λογάριθμος ( $\ln$ ) της πυκνότητας (density) από όπου επιβεβαιώνεται ότι όσο μεγαλώνει η πυκνότητα ενός γραμμικού προβλήματος τόσο μειώνονται οι επαναλήψεις.

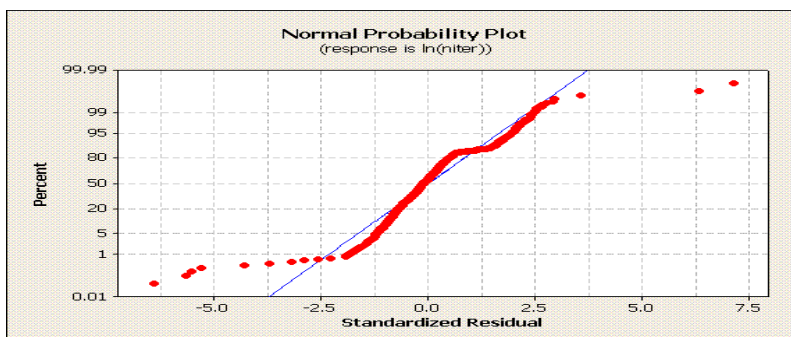


*Εικόνα 5.38 – Γραφική παράσταση πυκνότητας (density) γραμμικών προβλημάτων Κατηγορίας E του αριθμού επαναλήψεων (niter)*

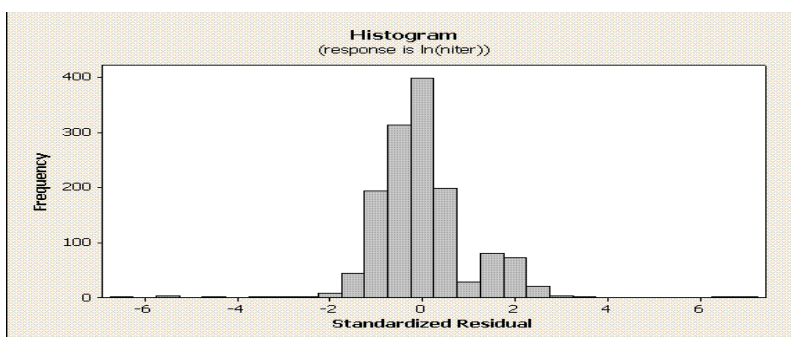
Οι συντελεστές προσδιορισμού των ανεξάρτητων μεταβλητών του υποδείγματος είναι σημαντικοί καθώς από την ανάλυση παλινδρόμησης προκύπτει ότι οι τιμές των  $p$  (probability) είναι μικρότερες του  $0,05$ . Άρα η επίδραση τους στο υπόδειγμα του αριθμού των επαναλήψεων είναι σημαντική.

Ο προσαρμοσμένος συντελεστής  $R_{\text{adj}}^2$  είναι αρκετά υψηλός (81,9%) κάτι που υποδηλώνει ότι οι προβλέψεις για την μεταβολή του αριθμού των επαναλήψεων είναι ακριβείς σε σχέση με τα γραμμικά προβλήματα της Κατηγορίας E σε ποσοστό 81,9%.

Οι *Εικόνες 5.39* και *5.40* παρουσιάζουν την κατανομή που ακολουθείται από τα γραμμικά προβλήματα. Και από τις δύο εικόνες παρατηρούμε ότι η προσαρμογή της εξαρτημένης μεταβλητής είναι πολύ κοντά στα δεδομένα των γραμμικών προβλημάτων.



Εικόνα 5.39 – Κανονικότητα μοντέλου E' Κατηγορίας E γραμμικών προβλημάτων του αριθμού επαναλήψεων (niter)



Εικόνα 5.40 – Ιστόγραμμα καταλοίπων μοντέλου Κατηγορίας E γραμμικών προβλημάτων του αριθμού επαναλήψεων (niter)

### 5.3.5 Σύνολο των γραμμικών προβλημάτων

#### 5.3.5.1 Χρόνος εκτέλεσης (cpu)

Το μοντέλο που προσδιορίζει καλύτερα την συμπεριφορά του αλγόριθμου εξωτερικών σημείων σε σχέση με το χρόνο εκτέλεσης (cpu) για το σύνολο των αραιών γραμμικών προβλημάτων είναι το εξής:

$$\ln(\text{cpu}) = -13.8 + 0.000269m + 0.000098n - 0.899\ln(\text{density}) + 0.944\ln(L) \quad .$$

Στον Πίνακα 5.12 παρουσιάζεται η ανάλυση παλινδρόμησης για το σύνολο των γραμμικών προβλημάτων με βάση το χρόνο εκτέλεσης (cpu):

Πίνακας 5.12 – Ανάλυση παλινδρόμησης του χρόνου εκτέλεσης (cpu) και των ανεξάρτητων μεταβλητών για το σύνολο των αραιών γραμμικών προβλημάτων

The regression equation is  
 $\ln(\text{cpu}) = -13.8 + 0.000269 m + 0.000098 n - 0.899 \ln(\text{density}) + 0.944 \ln(L)$

7869 cases used, 4 cases contain missing values

Predictor	Coef	SE Coef	T	P
Constant	-13.7809	0.0982	-140.35	0.000
m	0.00026949	0.00000684	39.42	0.000
n	0.00009752	0.00000620	15.72	0.000
ln(density)	-0.89895	0.01206	-74.52	0.000
ln(L)	0.943575	0.006654	141.80	0.000

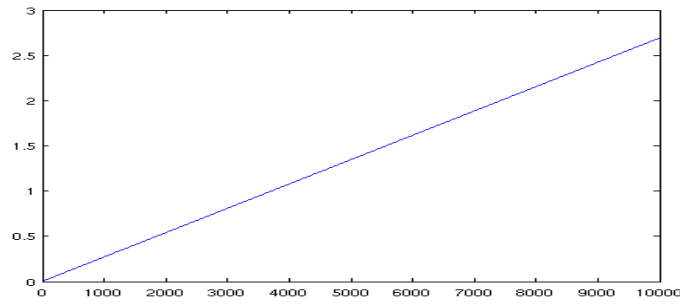
S = 0.587802    R-Sq = 94.6%    R-Sq(adj) = 94.6%

Analysis of Variance

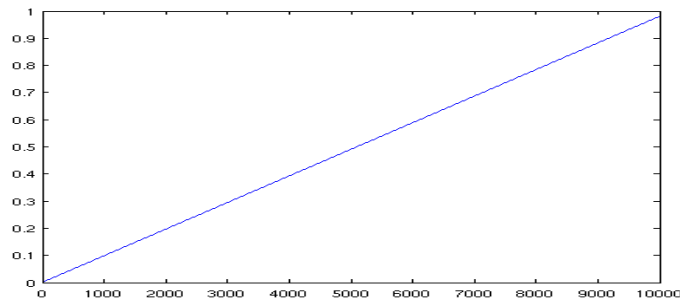
Source	DF	SS	MS	F	P
Regression	4	47529	11882	34390.30	0.000
Residual Error	7864	2717	0		
Total	7868	50246			

Στα αποτελέσματα της ανάλυσης παλινδρόμησης παρατηρούμε ότι:

Η σχέση του m (πλήθος περιορισμών) και του n (πλήθος μεταβλητών) με το χρόνο εκτέλεσης του αλγορίθμου (cpu) είναι γραμμική και θετική, καθώς όσο αυξάνονται οι διαστάσεις ενός γραμμικού προβλήματος τόσο αυξάνεται ο χρόνος για την επίλυση του. Οι *Εικόνες 5.41* και *5.42* δείχνουν την συμπεριφορά του πλήθους των περιορισμών (m) και του πλήθους των μεταβλητών (n) για τις τιμές που χρησιμοποιήθηκαν στα γραμμικά προβλήματα. Προκύπτει το συμπέρασμα ότι για όλες τις τιμές που λαμβάνουν στο πεδίο ορισμού τους υπάρχει θετική γραμμική σχέση με το χρόνο εκτέλεσης του αλγορίθμου (cpu), δηλαδή όσο αυξάνεται η διάσταση ενός προβλήματος τόσο αυξάνεται ο χρόνος εκτέλεσης του (cpu).

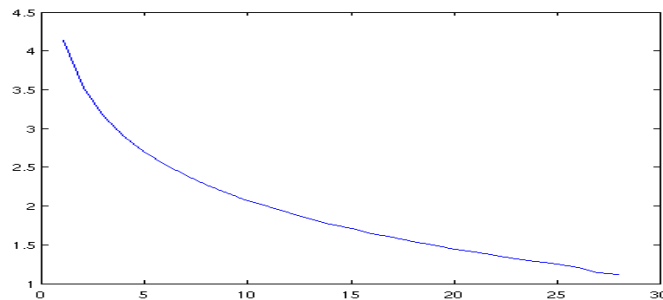


Εικόνα 5.41 – Γραφική παράσταση πλήθους περιορισμών ( $m$ ) για το σύνολο των γραμμικών προβλημάτων του χρόνου εκτέλεσης ( $cpu$ )



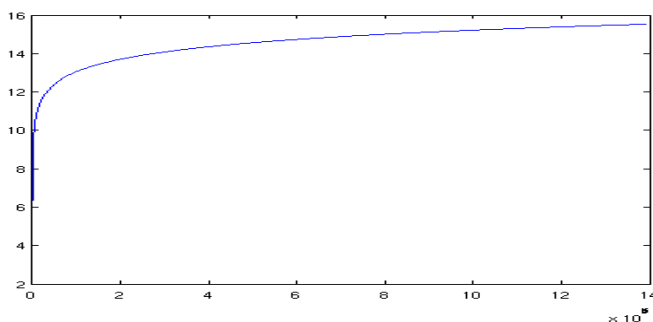
Εικόνα 5.42 – Γραφική παράσταση πλήθους μεταβλητών ( $n$ ) για το σύνολο των γραμμικών προβλημάτων του χρόνου εκτέλεσης ( $cpu$ )

Ο συντελεστής προσδιορισμού της πυκνότητας ( $density$ ) στο υπόδειγμα είναι αρνητικός ( $Coef = -0,899$ ) κάτι το οποίο εξηγείται από το γεγονός ότι οι συναρτήσεις του Matlab που χρησιμοποιούνται στον αλγόριθμο εξωτερικών σημείων είναι βέλτιστες και προσφέρουν πολύ καλό χειρισμό πυκνών πινάκων. Δηλαδή, για μεγαλύτερες τιμές πυκνότητας ( $density$ ) σε ένα γραμμικό πρόβλημα ο χρόνος ( $cpu$ ) που απαιτείται μειώνεται. Στο διάγραμμα της Εικόνας 5.43 απεικονίζεται ο φυσικός λογάριθμος ( $\ln$ ) της πυκνότητας ( $density$ ) από όπου φαίνεται ότι για μεγαλύτερες τιμές πυκνότητας σε ένα γραμμικό πρόβλημα ο χρόνος που απαιτείται για την επίλυση του είναι μικρότερος.



Εικόνα 5.43 – Γραφική παράσταση πυκνότητας ( $density$ ) για το σύνολο των γραμμικών προβλημάτων του χρόνου εκτέλεσης ( $cpu$ )

Το μήκος των δεδομένων του προβλήματος ( $L$ ) έχει θετικό συντελεστή προσδιορισμού ( $\text{Coef}=0,94$ ) κάτι που υποδεικνύει θετική σχέση με το χρόνο εκτέλεσης του αλγορίθμου ( $\text{cpu}$ ). Το αποτέλεσμα είναι αναμενόμενο καθώς όσο μεγαλώνουν οι διαστάσεις των προβλημάτων τόσο αυξάνεται και το μήκος των δεδομένων τους ( $L$ ) και κατά συνέπεια και ο χρόνος ( $\text{cpu}$ ) που απαιτείται για να συγκλίνει ο αλγόριθμος. Το διάγραμμα της *Εικόνας 5.44* δείχνει τη συμπεριφορά του  $L$  (μήκος δεδομένων) για τις τιμές που λαμβάνει στα γραμμικά προβλήματα. Αυτό που παρατηρείται είναι ότι η επιρροή του στο χρόνο εκτέλεσης ( $\text{cpu}$ ) είναι θετική σε όλο του πεδίο ορισμού του.

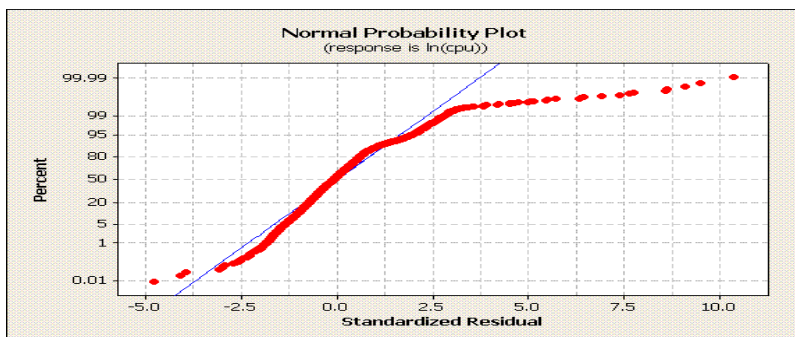


*Εικόνα 5.44 – Γραφική παράσταση μήκους δεδομένων ( $L$ ) για το σύνολο των γραμμικών προβλημάτων του χρόνου εκτέλεσης ( $\text{cpu}$ )*

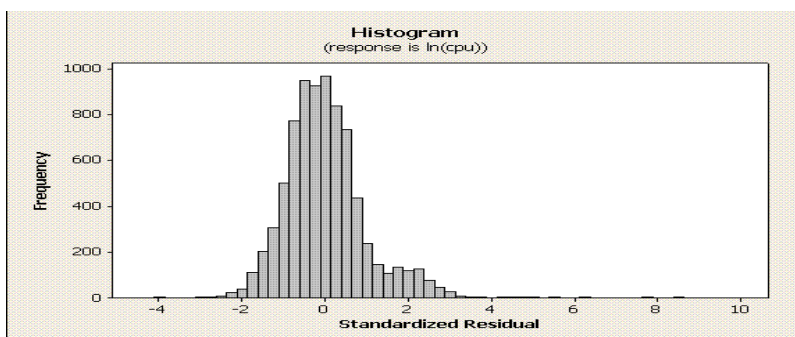
Στα βασικά μεγέθη του μοντέλου παρατηρούμε ότι όλες οι ανεξάρτητες μεταβλητές έχουν υψηλές τιμές  $t$  – student (κατά απόλυτη τιμή) και μικρές τιμές Probability. Αυτό συνεπάγεται ότι οι τιμές των συντελεστών προσδιορισμού των ανεξάρτητων μεταβλητών του μοντέλου είναι στατιστικά σημαντικές με αποτέλεσμα να επηρεάζουν δραστικά το μοντέλο που προσδιορίζει την σχέση μεταξύ του χρόνου εκτέλεσης του αλγορίθμου και των ανεξάρτητων μεταβλητών.

Ο προσαρμοσμένος συντελεστής  $R_{\text{adj}}^2$  είναι πολύ υψηλός (94,6%) κάτι που υποδηλώνει ότι οι προβλέψεις για τη μεταβολή της εξαρτημένης μεταβλητής είναι αντιπροσωπευτικές για το σύνολο των γραμμικών προβλημάτων σε ποσοστό 94,6%.

Οι *Εικόνες 5.45* και *5.46* παρουσιάζουν την κατανομή που ακολουθούν τα δεδομένα των γραμμικών προβλημάτων. Από το διάγραμμα στην *Εικόνα 5.45* προκύπτει ότι η πλειοψηφία των δεδομένων των γραμμικών προβλημάτων προέρχεται από την κανονική κατανομή ενώ από το διάγραμμα στην *Εικόνα 5.46* φαίνεται ότι το ιστόγραμμα των καταλοίπων των δεδομένων ακολουθεί την κανονική κατανομή.



Εικόνα 5.45 – Κανονικότητα μοντέλου για το σύνολο των γραμμικών προβλημάτων του χρόνου εκτέλεσης (cpu)



Εικόνα 5.46 – Ιστόγραμμα καταλοίπων για το σύνολο των γραμμικών προβλημάτων του χρόνου εκτέλεσης (cpu)

### 5.3.5.2 Αριθμός επαναλήψεων (niter)

Το μοντέλο που προσδιορίζει καλύτερα την συμπεριφορά του αλγόριθμου εξωτερικών σημείων σε σχέση με τον αριθμό των επαναλήψεων (niter) για το σύνολο των αραιών προβλημάτων είναι το εξής:

$$\ln(\text{niter}) = -1.25 + 0.361 \ln(m) + 0.603 \ln(n) - 0.667 \ln(\text{density}) \quad .$$

Η ανάλυση παλινδρόμησης όπως προέκυψε από το Minitab παρουσιάζεται στον Πίνακα 5.13 παρακάτω:

Πίνακας 5.13 – Ανάλυση παλινδρόμησης του αριθμού των επαναλήψεων (*niter*) και των ανεξάρτητων μεταβλητών για το σύνολο των αραιών γραμμικών προβλημάτων

The regression equation is  

$$\ln(\text{niter}) = -1.25 + 0.361 \ln(m) + 0.603 \ln(n) - 0.667 \ln(\text{density})$$

7869 cases used, 4 cases contain missing values

Predictor	Coef	SE Coef	T	P
Constant	-1.25466	0.04399	-28.52	0.000
ln(m)	0.36093	0.01605	22.49	0.000
ln(n)	0.60325	0.01586	38.03	0.000
ln(density)	-0.667258	0.009102	-73.31	0.000

S = 0.461851    R-Sq = 83.6%    R-Sq(adj) = 83.6%

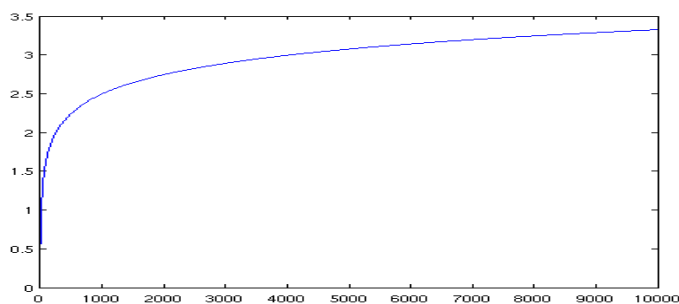
Analysis of Variance

Source	DF	SS	MS	F	P
Regression	3	8530.5	2843.5	13330.60	0.000
Residual Error	7865	1677.7	0.2		
Total	7868	10208.1			

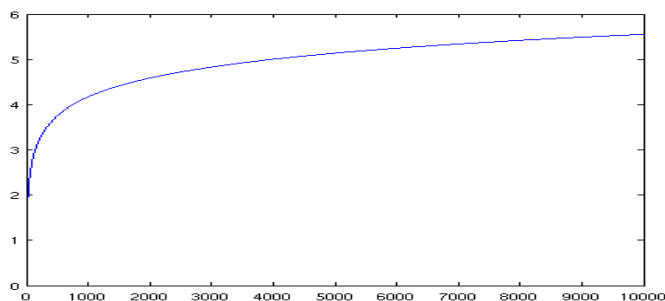
Από την ανάλυση παλινδρόμησης του μοντέλου παρατηρούμε ότι:

Υπάρχει θετική σχέση ανάμεσα στο πλήθος των περιορισμών (*m*) και στο πλήθος των μεταβλητών (*n*) με τον αριθμό των επαναλήψεων (*niter*) που εκτελεί ο αλγόριθμος, κάτι που προκύπτει από το πρόσημο των συντελεστών προσδιορισμού (*Coef*) που έχουν. Το αποτέλεσμα αυτό είναι αναμενόμενο καθώς για μεγαλύτερες διαστάσεις γραμμικών προβλημάτων (*m* και *n*) αυξάνουν αντίστοιχα και οι επαναλήψεις (*niter*) που απαιτούνται για την επίλυσή του. Στις *Εικόνες 5.47* και *5.48* παρουσιάζονται τα διαγράμματα των φυσικών λογαρίθμων (*ln*) των *m* (πλήθος περιορισμών) και *n* (πλήθος μεταβλητών) για τις τιμές που λαμβάνουν στα γραμμικά προβλήματα από όπου επιβεβαιώνεται η θετική σχέση τους με τον αριθμό επαναλήψεων (*niter*) του αλγορίθμου.



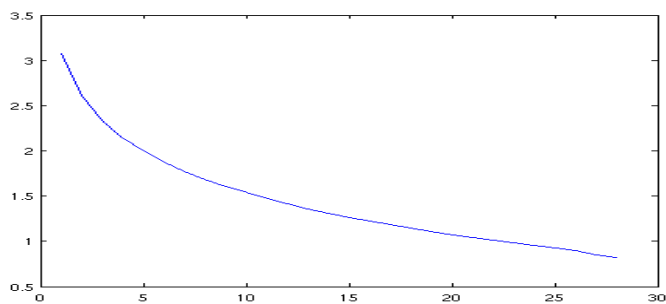


Εικόνα 5.47 – Γραφική παράσταση πλήθους περιορισμών ( $m$ ) για το σύνολο των γραμμικών προβλημάτων του αριθμού επαναλήψεων ( $niter$ )



Εικόνα 5.48 – Γραφική παράσταση πλήθους μεταβλητών ( $n$ ) για το σύνολο των γραμμικών προβλημάτων του αριθμού επαναλήψεων ( $niter$ )

Από τα στατιστικά αποτελέσματα προκύπτει ότι η σχέση της πυκνότητας ( $density$ ) με τον αριθμό των επαναλήψεων ( $niter$ ) του αλγόριθμου είναι αρνητική ( $Coef = -0,667$ ). Ο χειρισμός πυκνών πινάκων από το Matlab γίνεται με αποδοτικό τρόπο με συνέπεια για μεγαλύτερες τιμές πυκνότητας ( $density$ ) οι επαναλήψεις ( $niter$ ) που χρειάζεται ο αλγόριθμος για να συγκλίνει να είναι μικρότερες. Στο διάγραμμα της Εικόνας 5.49 απεικονίζεται ο φυσικός λογάριθμος ( $\ln$ ) της πυκνότητας ( $density$ ) από όπου επιβεβαιώνεται ότι όσο μεγαλώνει η πυκνότητα ενός γραμμικού προβλήματος τόσο μειώνονται οι επαναλήψεις.

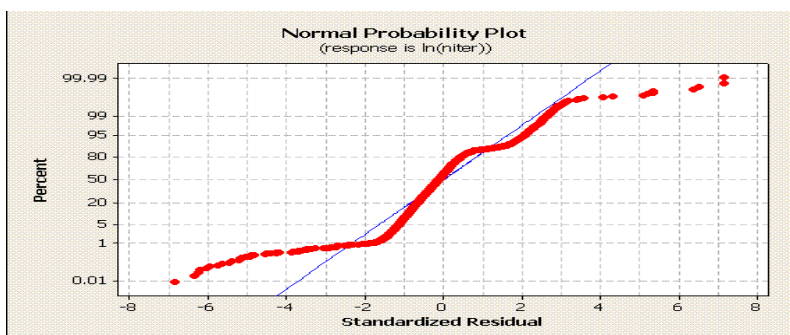


Εικόνα 5.49 – Γραφική παράσταση πυκνότητας ( $density$ ) για το σύνολο των γραμμικών προβλημάτων του αριθμού επαναλήψεων ( $niter$ )

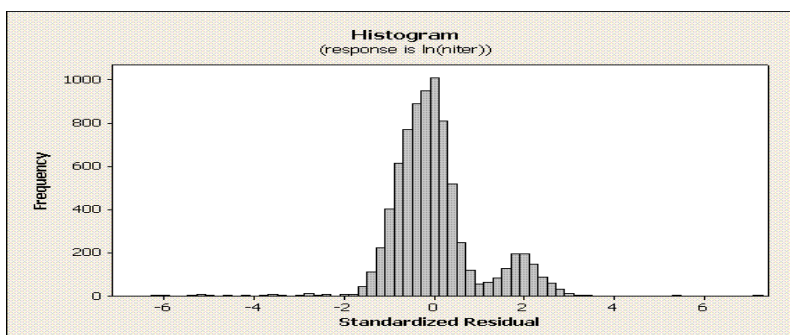
Όλοι οι συντελεστές προσδιορισμού των ανεξάρτητων μεταβλητών του υποδείγματος είναι σημαντικοί καθώς όπως φαίνεται από τα αποτελέσματα της ανάλυσης παλινδρόμησης έχουν τιμές για το t-student μεγαλύτερες (κατά απόλυτη τιμή) του 1,96 . Από το αποτέλεσμα αυτό εξάγεται το συμπέρασμα ότι η επίδραση των ανεξάρτητων μεταβλητών στον αριθμό των επαναλήψεων (niter) είναι δραστική.

Ο συντελεστής  $R_{adj}^2$  είναι αρκετά υψηλός (83,6%) με συνέπεια οι προβλέψεις για τη μεταβολή της εξαρτημένης μεταβλητής να είναι αντιπροσωπευτικές με το σύνολο των γραμμικών προβλημάτων σε ποσοστό 83,6%.

Στα διαγράμματα των *Εικόνων 5.50* και *5.51* παρουσιάζονται οι κατανομές που ακολουθούν τα γραμμικά προβλήματα. Και από τα δύο διαγράμματα παρατηρούμε ότι το μοντέλο χρονισμού για τον αριθμό των επαναλήψεων έχει πολύ καλή προσαρμογή ενώ και το ιστόγραμμα των καταλοίπων ακολουθεί την κανονική κατανομή.



*Εικόνα 5.50 – Κανονικότητα μοντέλου για το σύνολο των γραμμικών προβλημάτων του αριθμού επαναλήψεων (niter)*



*Εικόνα 5.51 – Ιστόγραμμα καταλοίπων για το σύνολο των γραμμικών προβλημάτων του αριθμού επαναλήψεων (niter)*

## 5.4 Επικύρωση μοντέλων χρονισμού γραμμικών προβλημάτων

Στην προηγούμενη ενότητα παρουσιάστηκαν αναλυτικά τα μοντέλα χρονισμού τα οποία αντιπροσωπεύουν στο μεγαλύτερο βαθμό τα τυχαία γραμμικά προβλήματα που δημιουργήθηκαν. Για να μπορέσουμε να βεβαιωθούμε ότι τα μοντέλα που καταλήξαμε είναι τα καλύτερα δυνατά, έπρεπε να δημιουργήσαμε ένα σύνολο τυχαίων γραμμικών προβλημάτων με τις γεννήτριες που χρησιμοποιήθηκαν και για την δημιουργία του αρχικού συνόλου δεδομένων ώστε να ελέγξουμε την εγκυρότητα των αποτελεσμάτων.

Πιο συγκεκριμένα, αποφασίσαμε ότι ένα τυχαίο δείγμα στο 10% του αρχικού συνόλου κάθε κατηγορίας, διαφορετικό από τα αρχικά 7873 γραμμικά προβλήματα, θα έπρεπε να δημιουργηθεί και να λυθεί με τον αλγόριθμο εξωτερικών σημείων. Η διαδικασία η οποία ακολουθήθηκε για την κατασκευή των τυχαίων προβλημάτων ήταν ίδια με αυτή που περιγράφηκε στο *Κεφάλαιο 3*. Στην διαδικασία της επικύρωσης επιλέξαμε η τιμή του seed number για τις γεννήτριες των τυχαίων προβλημάτων να είναι ίση με 11. Το μέγιστο πλήθος των περιορισμών (m), το μέγιστο πλήθος των μεταβλητών (n) αλλά και το είδος των περιορισμών που είχε κάθε μία κατηγορία είναι ίδια με αυτά που περιγράφηκαν στο *Κεφάλαιο 3*. Επίσης, τα χαρακτηριστικά που καταγράψαμε για κάθε ένα γραμμικό πρόβλημα είναι τα ίδια με που αναφέρθηκαν και νωρίτερα ενώ από τη διαδικασία επίλυσης των προβλημάτων μας ενδιέφεραν (και καταγράφηκαν) οι ίδιες εξαρτημένες μεταβλητές. Το υπολογιστικό περιβάλλον που δημιουργήθηκαν και επιλύθηκαν τα τυχαία γραμμικά προβλήματα παρουσιάζεται στους *Πίνακες 3.1* και *4.1* των αντίστοιχων κεφαλαίων.

Το πλήθος των προβλημάτων που δημιουργήθηκαν ανά κατηγορία παρουσιάζεται στον *Πίνακα 5.14* παρακάτω:

*Πίνακας 5.14 – Πλήθος προβλημάτων ανά κατηγορία επίλυσης για την επικύρωση των μοντέλων χρονισμού*

Πλήθος προβλημάτων ανά κατηγορία	
Κατηγορία Α	300
Κατηγορία Β	175
Κατηγορία D	175
Κατηγορία E	140
Σύνολο	790

Από το σύνολο προβλημάτων που δημιουργήσαμε έπρεπε να εξαιρέσουμε εκείνα τα προβλήματα τα οποία είχαν είτε πλήθος περιορισμών (m) είτε πλήθος μεταβλητών (n) μικρότερο του 300 . Ο λόγος που οδηγηθήκαμε σε αυτήν την ενέργεια ήταν γιατί η επίλυση πολύ μικρών (σε διαστάσεις) προβλημάτων δεν μας οδηγούν σε αποτελέσματα τα οποία είναι αντικειμενικά της απόδοσης του αλγορίθμου για τα μοντέλα χρονισμού που εξάγαμε. Για αυτό το λόγο δημιουργήσαμε τυχαία γραμμικά προβλήματα για αυτά που έπρεπε να αντικατασταθούν με seed number ίσο με 15 . Στον Πίνακα 5.15 που ακολουθεί φαίνεται αναλυτικά ο αριθμός των προβλημάτων που κρίθηκε αναγκαίο να αντικατασταθεί. Να σημειώσουμε εδώ ότι για την Κατηγορία E δεν χρειάστηκε να γίνει καμία αντικατάσταση γιατί εξ αρχής είχαμε ορίσει ως μικρότερο πλήθος περιορισμών και μεταβλητών το 337 ενώ το βήμα (step) της γεννήτριας ήταν η τιμή 37 δηλαδή ισχύει ότι  $x_{(n+1)} = x_n + 37$  .

Πίνακας 5.15 – Προβλήματα που αντικαταστάθηκαν ανά κατηγορία επίλυσης πριν τη διαδικασία επικύρωσης των μοντέλων χρονισμού

Προβλήματα που αντικαταστάθηκαν ανά κατηγορία	
Κατηγορία A	20
Κατηγορία B	9
Κατηγορία D	3
Σύνολο	42

Τέλος, το πρόβλημα το οποίο περιγράφηκε αναλυτικά στην *Ενότητα 4.4* μας απασχόλησε και κατά τη διαδικασία της επικύρωσης και το αντιμετωπίσαμε με τον ίδιο ακριβώς τρόπο. Τα προβλήματα που διέκοπταν την εκτέλεση του αλγορίθμου λόγω ακρίβειας στους υπολογισμούς αλλά και αυτά που ξεπερνούσαν το όριο των τεσσάρων ωρών εκτέλεσης έπρεπε να αντικατασταθούν με διαφορετικά τυχαία γραμμικά προβλήματα που δημιουργήθηκαν με seed number ίσο με 20 . Στον Πίνακα 5.16 παρουσιάζεται ο αριθμός των προβλημάτων ανά κατηγορία που αντικαταστάθηκαν.

Πίνακας 5.16 – Προβλήματα που αντικαταστάθηκαν ανά κατηγορία επίλυσης

	Εκτέλεση > 4 ωρών	Διακοπή λόγω ακρίβειας μηχανής	Σύνολο
Κατηγορία A	2	1	3
Κατηγορία B	6	1	7
Κατηγορία D	2	2	4
Κατηγορία E	1	1	2
Σύνολο	11	5	16

Από τον Πίνακα 5.16 βλέπουμε ότι μόλις το 2% του συνόλου των γραμμικών προβλημάτων χρειάστηκε αντικατάσταση και από αυτό το 68.75% λόγω του ορίου που θέσαμε στο χρόνο εκτέλεσης. Και σε αυτήν την περίπτωση (όπως και τη διάρκεια επίλυσης των αρχικών γραμμικών προβλημάτων), ένα τέτοιο φαινόμενο είναι φυσιολογικό αφού τα γραμμικά προβλήματα δημιουργήθηκαν με τυχαίο τρόπο μέσα από γεννήτριες τυχαίων αριθμών και ένα ποσοστό αυτών είναι δυνατόν να μην μπορεί να επιλυθεί και να χρειάζεται αντικατάσταση.

Τα αποτελέσματα της επίλυσης των τυχαίων γραμμικών προβλημάτων κατά τη διαδικασία της επικύρωσης των μοντέλων χρονισμού παρουσιάζονται στους Πίνακες V, VI, VII και VIII στο Παράρτημα. Για λόγους οικονομίας χώρου (λόγω του μεγάλου όγκου των αποτελεσμάτων) το Παράρτημα με τα αποτελέσματα της επίλυσης των γραμμικών προβλημάτων παρουσιάζεται σε ξεχωριστό αρχείο το οποίο βρίσκεται στο συνοδευτικό cd μαζί με την εργασία.

#### 5.4.1 Αποτελέσματα επικύρωσης μοντέλων χρονισμού

Στην Ενότητα 5.3 παρουσιάστηκαν αναλυτικά τα μοντέλα χρονισμού που καταλήξαμε για κάθε μία κατηγορία γραμμικών προβλημάτων ξεχωριστά αλλά και για το σύνολο των 7873 προβλημάτων. Με δεδομένα αυτά τα μοντέλα και έχοντας τα αποτελέσματα της επίλυσης των 790 τυχαίων γραμμικών προβλημάτων που δημιουργήσαμε, επόμενο βήμα (και τελικό) ήταν η επαλήθευση των αποτελεσμάτων μέσα από τη διαδικασία που περιγράφεται σε αυτή την υπό-ενότητα.

Από τα αποτελέσματα της επίλυσης των γραμμικών προβλημάτων, κρατήσαμε για κάθε μία κατηγορία μόνο τις ανεξάρτητες μεταβλητές που μας ενδιέφεραν με κριτήριο αν συμμετέχουν ή όχι

στα υποδείγματα που περιγράφουν τη συμπεριφορά του αλγορίθμου εξωτερικών σημείων για το πλήθος των επαναλήψεων (niter) και το χρόνο εκτέλεσης (cpu).

Έχοντας ως δεδομένο τις πραγματικές τιμές του χρόνου εκτέλεσης (cpu) και του αριθμού των επαναλήψεων (niter) όπως προέκυψαν από την επίλυση των γραμμικών προβλημάτων, κάναμε αντικατάσταση των τιμών των ανεξάρτητων μεταβλητών στα μοντέλα χρονισμού και καταγράψαμε για κάθε ένα τις εκτιμημένες τιμές των εξαρτημένων μεταβλητών. Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να διαπιστώσουμε πόσο καλές και αξιόπιστες προβλέψεις μπορούν να γίνουν για την απόδοση του αλγορίθμου εξωτερικών σημείων με τα μοντέλα χρονισμού που προέκυψαν κατά την ανάλυση παλινδρόμησης.

Για να έχουμε ένα μέτρο σύγκρισης των πραγματικών τιμών και των εκτιμημένων τιμών των εξαρτημένων μεταβλητών υπολογίσαμε τους παρακάτω λόγους για κάθε ένα γραμμικό πρόβλημα ώστε να δούμε τη διαφορά ανάμεσα στην πραγματική και στην εκτιμημένη τιμή των εξαρτημένων μεταβλητών. Οι λόγοι που υπολογίσαμε είναι οι εξής:

$$\text{diff} = \frac{(\ln(\text{cpu}) - \ln(\text{cpu} - \text{estimated}))}{(\ln(\text{cpu}))} \quad \text{και} \quad \text{diff} = \frac{(\ln(\text{niter}) - \ln(\text{niter} - \text{estimated}))}{(\ln(\text{niter}))}$$

όπου  $\ln(\text{cpu} - \text{estimated})$  και  $\ln(\text{niter} - \text{estimated})$  είναι οι εκτιμημένες τιμές όπως προέκυψαν από την αντικατάσταση των τιμών των ανεξάρτητων μεταβλητών στα μοντέλα χρονισμού κάθε κατηγορίας. Αντίστοιχα οι τιμές  $\ln(\text{cpu})$  και  $\ln(\text{niter})$  είναι οι πραγματικές τιμές που καταγράψαμε από την επίλυση των γραμμικών προβλημάτων κατά τη διαδικασία της επικύρωσης των μοντέλων χρονισμού.

Στον Πίνακα 5.17 παρουσιάζονται ορισμένα στατιστικά στοιχεία σχετικά με τις διαφορές που υπήρχαν ανάμεσα στις πραγματικές και στις εκτιμημένες τιμές. Συγκεκριμένα, παρουσιάζονται η μεγαλύτερη και η μικρότερη διαφορά ανάμεσα στην πραγματική και στην εκτιμημένη τιμή αλλά και ο μέσος όρος της διαφοράς τους όσον αφορά το χρόνο εκτέλεσης (cpu) και το πλήθος των επαναλήψεων (niter) των προβλημάτων κάθε κατηγορίας αλλά και του συνόλου.

Πίνακας 5.17 – Διαφορές ανάμεσα στις πραγματικές και στις εκτιμημένες τιμές των εξαρτημένων μεταβλητών ανά κατηγορία επίλυσης

	Κατηγορία A		Κατηγορία B		Κατηγορία D		Κατηγορία E		Σύνολο	
	cpu	niter	cpu	niter	cpu	niter	cpu	niter	cpu	niter
min	-85,12%	-7,24%	-90,99%	-9,17%	-78,53%	-10,10%	-93,03%	-11,05%	-84,80%	-10,31%
max	71,72%	17,06%	51,30%	24,73%	70,83%	26,61%	86,75%	15,60%	91,63%	27,35%
average	-2,82%	0,17%	-3,08%	0,35%	-2,63%	0,02%	-2,87%	0,24%	0,26%	0,11%

Με μία πρώτη ματιά στα αποτελέσματα του πίνακα παραπάνω, μπορούμε να πούμε ότι τα μοντέλα χρονισμού που καταλήξαμε για τον αριθμό των επαναλήψεων (niter) που χρειάζεται ο αλγόριθμος ώστε να συγκλίνει είναι πολύ καλύτερα από τα μοντέλα χρονισμού για τον χρόνο εκτέλεσης (cpu). Μάλιστα οι εκτιμήσεις με αυτά βρίσκονται πολύ κοντά στις πραγματικές τιμές. Αυτό φαίνεται από το γεγονός ότι η μικρότερη και η μεγαλύτερη διαφορά σε όλες τις κατηγορίες αλλά και στο σύνολο των προβλημάτων είναι πολύ πιο μικρές (και κοντά στην πραγματική τιμή του αριθμού των επαναλήψεων) σε σχέση με τον εκτιμημένο αριθμό επαναλήψεων.

Κοιτώντας πιο αναλυτικά στις διαφορές ανάμεσα στις εκτιμημένες και στις πραγματικές τιμές του χρόνου εκτέλεσης (cpu) παρατηρούμε ότι οι μεγάλες αποκλίσεις παρουσιάζονται στα πολύ αραιά προβλήματα (με πυκνότητα μικρότερη του 8%). Σε όλα τα υπόλοιπα γραμμικά προβλήματα οι διαφορές στο χρόνο εκτέλεσης (cpu) ανάμεσα στις εκτιμημένες και στις πραγματικές τιμές είναι της τάξης του 5-15%. Άρα, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι τα μοντέλα χρονισμού του χρόνου εκτέλεσης (cpu) είναι αξιόπιστα για γραμμικά προβλήματα πυκνότητας άνω του 8%.

Για να επιβεβαιωθούν οι παραπάνω ισχυρισμοί επιλέχθηκε τυχαία ένα γραμμικό πρόβλημα διαστάσεων  $4254 \times 6780$ , πυκνότητας (density) 14% στο οποίο παρατηρούμε ότι η πραγματική τιμή του φυσικού λογαρίθμου του χρόνου εκτέλεσης είναι  $\ln(\text{cpu}) = 6,82$  ενώ αντίστοιχα η εκτιμημένη τιμή είναι  $\ln(\text{cpu} - \text{estimated}) = 6,68$ . Η διαφορά ανάμεσα στην πραγματική και στην εκτιμημένη τιμή του χρόνου εκτέλεσης (cpu) είναι της τάξης του 2,00%. Αντίστοιχα, η διαφορά πραγματικής και εκτιμημένης τιμής για τον αριθμό των επαναλήψεων (niter) είναι 0,64% καθώς η πραγματική τιμή του αριθμού των επαναλήψεων είναι  $\ln(\text{niter}) = 8,43$  ενώ αντίστοιχα η εκτιμημένη τιμή είναι  $\ln(\text{niter} - \text{estimated}) = 8,38$ . Αντίθετα, σε πρόβλημα πυκνότητας 3,5% και διαστάσεων  $2631 \times 2631$ , οι αποκλίσεις είναι της τάξης του 19% και 9% για το χρόνο εκτέλεσης (cpu) και τον αριθμό των επαναλήψεων (niter) αντίστοιχα.

## Κεφάλαιο 6: Συμπεράσματα – Προτάσεις

Η διεξοδική μελέτη όπως παρουσιάστηκε στα προηγούμενα κεφάλαια, μας οδήγησε στην εξαγωγή χρήσιμων συμπερασμάτων και αποτελεσματικών μοντέλων για την υπολογιστική συμπεριφορά του αλγορίθμου εξωτερικών σημείων κατά την επίλυση των τυχαίων γραμμικών προβλημάτων που δημιουργήθηκαν. Μέσα από τα αποτελέσματα της ανάλυσης παλινδρόμησης, που παρουσιάστηκαν αναλυτικά στο *Κεφάλαιο 5*, παρατηρήσαμε ότι δεν μπορεί να υπάρξει γραμμική σχέση μεταξύ των ανεξάρτητων μεταβλητών που αποφασίσαμε να καταγράψουμε για τα γραμμικά προβλήματα και των εξαρτημένων μεταβλητών (χρόνος εκτέλεσης (cpu), αριθμός επαναλήψεων (niter)) των μοντέλων χρονισμού. Οι σχέσεις που αντιπροσωπεύουν με το καλύτερο δυνατό τρόπο τον αλγόριθμο εξωτερικών σημείων για όλες τις κατηγορίες αλλά και για το σύνολο των προβλημάτων είναι λογαριθμικής μορφής.

Αυτό που εξάγεται ως συμπέρασμα παρατηρώντας τα μοντέλα χρονισμού είναι ότι σε όλες τις κατηγορίες γραμμικών προβλημάτων συμμετέχουν το πλήθος των περιορισμών ( $m$ ), το πλήθος των μεταβλητών ( $n$ ) και η πυκνότητα των γραμμικών προβλημάτων (density). Σε μικρότερο βαθμό συμμετέχει στα μοντέλα χρονισμού ο βαθμός κατάστασης της μήτρας  $A$  ( $\text{cond}(A)$ ) ενώ μόλις σε μία περίπτωση το μήκος των δεδομένων ( $L$ ). Άρα καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι ο αλγόριθμος εξωτερικών σημείων εξαρτάται κατά κύριο λόγο από το μέγεθος (διαστάσεις) του γραμμικού προβλήματος και την πυκνότητά του.

Στα πλαίσια μιας διπλωματικής εργασίας και με δεδομένο το χρονικό περιορισμό που υπάρχει όσον αφορά τη δημιουργία και την επίλυση των γραμμικών προβλημάτων, δεν μπορέσαμε να δημιουργήσουμε μεγαλύτερο πλήθος προβλημάτων, μεγαλύτερων σε διαστάσεις και μάλιστα μία ακόμα πρόκληση θα ήταν η επίλυση πυκνών προβλημάτων μεγάλης κλίμακας. Προτείνεται λοιπόν σε παρόμοιες μελλοντικές εργασίες να δημιουργηθούν περισσότερα τυχαία γραμμικά προβλήματα μεγαλύτερων διαστάσεων και μεγαλύτερης πυκνότητας. Με αυτόν τον τρόπο το δείγμα των γραμμικών προβλημάτων γίνεται πιο αντιπροσωπευτικό όσον αφορά την κλίμακα των δυσκολιών που θα κληθεί να λύσει σε πραγματικές εφαρμογές. Τέλος, μία ακόμα πρόταση για μελλοντικές εργασίες είναι η χρήση επιπλέον στατιστικών πακέτων για την πολλαπλή επαλήθευση των αποτελεσμάτων των



παλινδρομήσεων.

Κλείνοντας, το σίγουρο είναι πως θέματα επίλυσης γραμμικών προβλημάτων και βελτιστοποίησης των αποτελεσμάτων που εξάγουμε θα συνεχίσουν να μας απασχολούν καθώς ο γραμμικός προγραμματισμός συνεχίζει να εξελίσσεται και να βρίσκει εφαρμογές σε ολοένα και περισσότερους τομείς όπως η βιομηχανία, η οικονομία και η εκπαίδευση. Η προηγμένη τεχνολογία και οι ισχυροί Η/Υ οδηγούν στην αντιμετώπιση προβλημάτων που εμφανίζονται στην καθημερινή μας ζωή. Μένει να φανεί πώς αυτό θα επηρεάσει τις αποφάσεις και τον τρόπο που ενεργούμε.

## Βιβλιογραφία

- Γεωργαντά Ζ., (2008), Οικονομετρία Τόμος Α', Εκδόσεις Μπαρμπουνάκης, Θεσσαλονίκη
- Κάτος Α., (2004), Οικονομετρία: Θεωρία και Εφαρμογές, Εκδόσεις Ζυγός, Θεσσαλονίκη
- Παπαρρίζος Κ., (1999), Γραμμικός Προγραμματισμός – Αλγόριθμοι και Εφαρμογές, Εκδόσεις Ζυγός, Θεσσαλονίκη
- Παπαρρίζος Κ., (2009), Γραμμικός Προγραμματισμός – Μια προσέγγιση με Matlab, Εκδόσεις Ζυγός, Θεσσαλονίκη
- Σαμαράς Ν., Σατρατζέμη Μ., Στεφανίδης Γ., (2009), “Ειδικά θέματα αλγορίθμων”, διαλέξεις μαθημάτων, Πανεπιστήμιο Μακεδονίας, Τμήμα Εφαρμοσμένης Πληροφορικής
- Σίσκος Ι., (1998), Γραμμικός Προγραμματισμός, Εκδόσεις Νέες Τεχνολογίες, Αθήνα
- Τσάντας Ν.Δ., Βασιλείου Π.Γ, (2000), Εισαγωγή στην επιχειρησιακή έρευνα, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη
- Borgwardt K.H., (1982), “Some distribution independent results about the asymptotic order of the average number of pivot steps in the simplex method”, *Mathematics of Operation Research*, vol.7 (3), pp. 441 – 462.
- Dantzig G.B., (1949), “Programming of Interdependent Activities, II, Mathematical Model”, *Econometrica*, 17 (3 & 4), pp. 200 – 211.
- Dantzig G.B., (1963), “Linear Programming and Extensions”, Princeton University Press.
- Dantzig G.B., (1991), “Linear Programming”, in “History of Mathematical Programming: A Collection of personal Reminiscences”, J.K. Lenstra, A.H.G. Rinnoy, A. Schrijver (Eds), Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam, The Netherlands.

- Gondzio J., (1992), “Splitting dense columns of constraint matrix in interior point methods for large-scale linear programming”, *Optimization*, vol.24, pp. 285 – 297.
- IEEE, available at <<http://ieeexplore.ieee.org/xpl/tocresult.jsp?isnumber=17639>> viewed 7 January 2013
- Jayadeep U.B., (2006), “The condition of a Matrix”, MED, National Institute of Technology Calicut, available at <[http://www.nitc.ac.in/nitc/bulletin/files/opt\\_2261\\_338662662.pdf](http://www.nitc.ac.in/nitc/bulletin/files/opt_2261_338662662.pdf)> viewed 8 January 2013
- Kantorovich L.V., (1960), “Mathematical Methods of Organizing and Planning Production”, *Management Science*, vol.6 (4), pp. 366 – 422.
- Khachiyan L.G., (1979), “A polynomial algorithm in linear programming”, *Soviet Mathematics Doklady*, 20, pp. 191 – 194.
- Karmarkar N., (1984), “A New Polynomial-Time Algorithm for Linear Programming”, *Combinatorica*, 4(4), pp. 373 – 395.
- Klee V., Minty G.J., (1972), “How good is the Simplex algorithm?”, in: Shisha O (Eds), *Inequalities III*, New York: Academic Press; 158 – 172.
- Leedham – Green C.R., (2006), “Graph Theory and Applications”, chapt. 4, School of Mathematical Sciences, Queen Mary and Westfield College (related link: <http://www.maths.qmul.ac.uk/~crlg/Graphs/Chapter4.pdf>).
- Papadopoulos G., (2009), “Regression Analysis”, Agricultural University of Athens , available at <<http://www.aua.gr/gpapadopoulos/files/regression9.pdf>> viewed 8 February 2013
- Papamanthou Ch., Paparrizos K., Samaras N., (2004), “Computational experience with exterior point algorithms for the transportation problem”, *Applied Mathematics and Computation*, vol. 158, pp. 459 – 475.
- Paparrizos K., Samaras N., Stephanides G., (2003), “An efficient simplex type algorithm for sparse and dense linear problems”, *European Journal of Operational Research*, vol. 148, pp. 323 – 334.

- Paparrizos K., Samaras N., Stephanides G., (2003a), “A new efficient primal dual simplex algorithm”, Computers and Operations Research, vol. 30(9), pp. 1393 – 1399.
- Paparrizos K., (1991), “An infeasible (exterior point) simplex algorithm for assignment problems”, Mathematical Programming, vol. 51, pp. 45 – 54.
- Paparrizos K., (1993), “An exterior point simplex algorithm for (general) linear programming problems”, Annals of Operations Research, vol 47, pp. 497 – 508.
- Samaras N., Sifaleras A., Triantafyllidis C., (2009), “A primal-dual Exterior point algorithm for linear programming problems”, Yugoslav Journal of Operations Research, vol 19, pp. 123 – 132.
- Sanjeev A., (2005), “The Ellipsoid Algorithm for Linear Programming”, Princeton University, available at <http://www.cs.princeton.edu/courses/archive/fall05/cos521/ellipsoid.pdf>, viewed 8 February 2013
- Spielman D., Shang – Hua Teng, (2004), “Smoothed Analysis: Why the Simplex Algorithm usually takes polynomial time”, Journal of the ACM, vol. 51 (3), pp. 385 – 463.
- Stanford University, available at <http://www.stanford.edu/group/SOL/dantzig.html> viewed 9 January 2013
- Todd M., (2002), “The many facets of linear programming”, Mathematical Programming (3) (invited survey from the International Symposium on Mathematical Programming).
- Wikipedia, available at [http://en.wikipedia.org/wiki/Least\\_squares](http://en.wikipedia.org/wiki/Least_squares), viewed 10 February 2013