ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ (ΜΒΑ)
ΣΤΗΝ ΔΙΟΙΚΗΣΗ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ
Καθηγητής Δημ. Παπαδόπουλος
Λέκτορας Αχιλ. Ζαπράνης

ΜΟΝΤΕΛΟ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ GARCH(1,1)
ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΗΝ ΠΡΟΒΛΕΨΗ ΑΠΟΔΟΣΕΩΝ ΚΑΙ ΣΤΗΝ ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

Διπλωματική εργασία
του Βαρσαμίδη Κων/νου

Θεσσαλονίκη, Σεπτέμβριος 2001

Περιεχόμενα

Η εργασία αυτή σηματοδοτεί και το τέλος δύο κοπιαστικών ετών μεταπτυχιακών σπουδών στην Διοίκηση Επιχειρήσεων. Τόσο σ'αυτά τα δύο χρόνια, όσο και στις προηγούμενες σπουδές μου οι γονείς μου με υποστήριξαν συνεχώς και με πολλούς τρόπους και για να βρεθώ σήμερα στην θέση να γράψω αυτήν την διπλωματική εργασία χρειάστηκε να επιστρατεύσω όσα αυτοί μου έμαθαν. Ο πατέρας μου, Ανέστης, με το παράδειγμά του μου δίδαξε την επιμονή και την υπομονή και πώς να είμαι αποτελεσματικός στην δουλειά μου. Και στην μητέρα μου Στέλλα χρωστάω την σύνεση αλλά και την τόλμη να παίρνω αποφάσεις. Θα προσπαθώ και εγώ, το 'ευχαριστώ' προς τους γονείς μου να το δείχνω με έργα που να τους κάνουν περήφανους.

Πρέπει επίσης να αναφέρω ότι σε όλο το διάστημα που διήρκησε το μεταπτυχιακό πρόγραμμα και ειδικότερα τους τελευταίους καλοκαιρινούς μήνες δεν θα μπορούσα να ανταπεξέλθω στις υποχρεώσεις που έχει ένα απαιτητικό πρόγραμμα όπως το ΜΒΑ του Πανεπιστημίου Μακεδονίας, αν δεν είχα την κατανόηση της συζύγου μου Μάρθας, το χαμόγελο του γιού μου Ανέστη, και την αγκαλιά της κόρης μου Στέλλας. Σε αυτούς αφιερώνεται η εργασία αυτή.

Η συνεργασία με σχεδόν όλους τους καθηγητές και λέκτορες που έλαβαν μέρος στο πρόγραμμα ήταν επίσης ακόμη μια πηγή βοήθειας και έμπνευσης. Η 'σαφής, περιεκτική και σύντομη' ανάλυση του καθηγητή κ. Παπαδόπουλου σε όλα τα επίπεδα των εννοιών της χρηματοοικονομικής διοίκησης και το μεράκι με το οποίο ο λέκτορας κ. Ζαπράνης παρουσίασε την χρηματοοικονομική μηχανική ήταν ορισμένοι από τους λόγους που επέλεξα αυτήν την διπλωματική εργασία. Τους ευχαριστώ θερμά και τους δύο.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω και όσους συμφοιτητές μου ξόδεψαν μαζί μου αρκετό από τον πολύτιμο χρόνο τους είτε για να δουλέψουμε πάνω στις τακτικές εργασίες του προγράμματος ΜΒΑ είτε ακόμη σημαντικότερο για να μοιραστούμε εμπειρίες από τους εργασιακούς χώρους και ανταλλάξουμε απόψεις σχετικά με θέματα Διοίκησης Επιχειρήσεων στην Ελλάδα.

Στην σύζυγό μου Μάρθα και στα δύο μου παιδιά, τον Ανέστη και την Στέλλα

1. Περίληψη

Η κατά το δυνατόν ορθότερη εκτίμηση της μεταβλητότητας θεωρείται ένας από τους ακρογωνιαίους λίθους στο χώρο της χρηματοοικονομικής οικονομετρίας (financial econometrics) και κατ'επέκταση της χρηματοοικονομικής μηχανικής (financial engineering) και της υπολογιστικής χρηματοοικονομικής (computational finance). Από την θεμελίωση της θεωρίας χαρτοφυλακίου από τον Markowitz το 1952 έως και πρόσφατα κατά την διατύπωση της εξίσωσης αναλυτικής αποτίμησης δικαιωμάτων προαίρεσης από τους Black&Scholes, η μεταβλητότητα θεωρήθηκε σταθερή στο πέρασμα του χρόνου.

Δεδομένου όμως του σημαντικού σφάλματος που εισάγει αυτή η υπόθεση (είναι προφανής η αναντιστοιχία ανάμεσα στην συχνά σημαντική αυξομείωση της μεταβλητότητας και στην υπόθεση μιας σταθερής χρονικά τιμής) και την ολοένα και μεγαλύτερη απαίτηση ακρίβειας στην πρόβλεψη αποτίμησης, δημιουργήθηκε μια πλειάδα μοντέλων τα οποία εμπνέονται σε σημαντικό βαθμό από τεχνικές πρόβλεψης χρονοσειρών με δυναμικά εξελλισόμενη μεταβλητότητα. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελούν τα παρακλάδια της αναλυτικής λύσης της αποτίμησης δικαιωμάτων προαίρεσης με στοχαστική μεταβλητότητα. Το μειονέκτημα όμως αυτής της προσέγγισης είναι ο αυξημένος βαθμός πολυπλοκότητας που αποτελεί τροχοπέδη τόσο στην κατανόηση των βαθύτερων υποθέσεων πίσω από αυτά τα μοντέλα –άρα και των επιπλοκών τους- όσο και στην υλοποίησή τους. Ως αποτέλεσμα βιώνουμε σήμερα την αντίφαση, το κύριο εργαλείο αποτίμησης κατά την διαπραγμάτευση δικαιωμάτων, αφενός να είναι η εξίσωση Black&Scoles, αφετέρου οι εκτιμήσεις μεταβλητότητας που εισάγονται στο μοντέλο να διαφέρουν από μέρα σε μέρα, πολλές φορές και μέσα στην ίδια ημέρα (intraday), καθώς και να υπάρχουν σημαντικότατες διαφοροποιήσεις από διαπραγματευτή σε διαπραγματευτή. Χαρακτηριστικά, σε πολλές αναπτυγμένες αγορές του εξωτερικού έχει επικρατήσει, σε συγκεκριμένους τύπους διαπραγμάτευσης, η προσφορά αγοράς-πώλησης (bid-ask) να διατυπώνεται σε μονάδες μεταβλητότητας και όχι σε χρηματικό αντίτιμο (π.χ. USD, EUR, κτλ)

Το μοντέλο γενικευμένης αυτοπαλινδρόμησης υπό συνθήκες ετεροσκέδασης (GARCH) που διετύπωσε ο Bollerslev to 1986, αποτελεί γενίκευση των απλούστερων μοντέλων ARCH και EWMA, και λόγω της ευκολίας στην υλοποίησή του βρίσκει μεγάλη αποδοχή και αξιοποίηση στην σύγχρονη βιβλιογραφία χρηματοοικονομικής μηχανικής.

Στην παρούσα εργασία, παρουσιάζουμε την εφαρμογή της μεθόδου GARCH και μιας παραλλαγής της που ονομάζεται στόχευση μεταβλητότητας, σε ένα μεγάλο (1325 τιμές) πλήθος δεδομένων από τον δείκτη S&P500. Στην συνέχεια διερευνούμε την επίδραση που έχει η υποδιαίρεση του ενιαίου συνόλου τιμών σε δύο ή σε τρείς υποπεριόδους. Προχωρούμε σε μια μικρή τροποποίηση της μεθόδου που αφορά στην προσμέτρηση της μέσης τιμής της μεταβλητής που εξετάζεται (που στην περίπτωσή μας είναι η ημερήσια ποσοστιαία απόδοση), διότι το μοντέλο GARCH υποθέτει ότι η μέση τιμή της εξεταζόμενης μεταβλητής είναι μηδέν. Η υπόθεση αυτή, αν και είναι αποδεκτή όταν μελετάμε ημερήσιες αποδόσεις που έχουν όντως πολύ μικρά μεγέθη, μπορεί να παρακαμφθεί με την μικρή τροποποίηση που παρουσιάζουμε. Εάν για παράδειγμα εξετάζουμε μηνιαίες αποδόσεις τότε η προσμέτρηση της μέσης τιμής των μηνιαίων αποδόσεων είναι απαραίτητη.

Η σκέψη πίσω από το μοντέλο μη-σταθερής χρονικά μεταβλητότητας είναι ότι υπάρχει μια μακροχρόνια μεταβλητότητα που αντιστοιχεί στο σύνολο των διαθέσιμων δεδομένων, αλλά πέρα από αυτήν την μακροχρόνια μεταβλητότητα υπάρχει και μια αυξομείωση της μεταβλητότητας αυτής από ημέρα σε ημέρα, με τον ίδιο τρόπο που ενστικτωδώς οι διαπραγματευτές αποτυπώνουν την μεταβλητότητα στο κλείσιμο των συμβολαίων δικαιωμάτων προαίρεσης. Επιπλέον η μαθηματική διατύπωση του μοντέλου είναι μια εξίσωση τριών πρωτοβάθμιων όρων που η μόνη ίσως δυσκολία του έγκειται στην χρήση κωδίκων (προγραμμάτων Η/Υ) μεγιστοποίησης για τον υπολογισμό των παραμέτρων. Στην εργασία αυτή έγινε ευρεία χρήση του Solver από το EXCEL με άριστα αποτελέσματα τόσο στα αριθμητικά δεδομένα όσο και στην φιλικότητα χρήσης του.

Τόσο η ιδέα της αυξομειούμενης μεταβλητότητας, όσο και η ευκολία μοντελοποίησης της ιδέας αυτής με την μέθοδο GARCH, μας οδήγησε στο να συνδυάσουμε το μοντέλο GARCH με δύο άλλα διαφορετικά μεταξύ τους μοντέλα.
Στην μία περίπτωση, υιοθετήσαμε την ιδέα της μη-σταθερής μεταβλητότητας στο μοντέλο γραμμικής παλινδρόμησης για την πρόβλεψη της ημερήσιας απόδοσης της επόμενης ημέρας. Το πρόβλημα της πρόβλεψης της ημερήσιας απόδοσης μελετάται

και με πολλούς άλλους περισσότερο εκλεπτυσμένους υπολογισμούς. Στην εργασία αυτή παρουσιάζουμε την συνεισφορά που έχει η υιοθέτηση της μεθόδου GARCH σε ένα απλό μοντέλο όπως αυτό της γραμμικής παλινδρόμησης και συγκρίνουμε τα αποτελέσματα από τους δύο αυτούς τρόπους πρόβλεψης της ημερήσιας απόδοσης με τις πραγματοποιηθείσες αποδόσεις.

Στην δεύτερη περίπτωση θα εξετάσουμε το κατά πόσο βελτιώνονται ή όχι τα αποτελέσματα της τεχνικής προσομοίωσης Monte Carlo, αν εισάγουμε στην τεχνική αυτή, την ιδέα της δυναμικής μεταβλητότητας , όπως την υπολογίζει η μέθοδος GARCH. Τόσο τα αποτελέσματα της κλασσικής Monte Carlo, όσο και τα αποτελέσματα της τροποποιημένης Monte Carlo/Garch μεθόδου, θα συγκριθούν με τα πραγματικά αποτελέσματα. Για να μην έχουμε σφάλματα από εκτίμηση τιμών για μια μόνο ημέρα, προχωρήσαμε στην εκτίμηση τιμών για 10 ημέρες, οι οποίες βρίκονται σε βάθος χρόνου 160, 170, 180,...240, 250 ημέρες από την ημέρα πρόβλεψης.
Τα αποτελέσματα είναι ικανοποιητικά και αποδεικνύουν ότι η μέθοδος GARCH μπορεί να οδηγήσει σε ακριβέστερες εκτιμήσεις. Αυτές οι εκτιμήσεις μπορεί σε πρακτικό επίπεδο να λειτουργήσουν ως οικονομικότερες αποτιμήσεις των δικαιωμάτων προαίρεσης.

2. Εισαγωγή

Η υπόθεση, ότι η μεταβλητότητα των τιμών μετοχών ή/και δεικτών είναι σταθερή, είναι μια συνηθισμένη και εν πολλοίς αναγκαία υπόθεση για να γίνει δυνατή η παραπέρα διαμόρφωση άλλων μοντέλων, στην προσπάθειά μας να αναλύσουμε τα ιστορικά δεδομένα και να προβλέψουμε μελλοντικές τιμές. Δεν μπορούμε όμως να παραγνωρίσουμε το γεγονός ότι για ορισμένες χρονικές περιόδους η μεταβλητότητα, υπολογισμένη με τον κλασσικό τύπο της στατιστικής, είναι υψηλότερη σε σχέση με άλλες χρονικές περιόδους όπου η μεταβλητότητα είναι σαφώς χαμηλότερη.

Σκοπός της εργασίας είναι

I. η εκτίμηση της διακύμανσης μιας σειράς τιμών εισόδου (που στην περίπτωσή μας είναι οι ημερήσιες ποσοστιαίες μεταβολές του δείκτη SP500 από 4 Ιανουαρίου 1993 έως 31 Μαρτίου 1998, συνολικά 1325 τιμές)

- Iα. με την κλασσική μεθοδολογία της στατιστικής
- Iβ. με την μέθοδο GARCH(1,1)
  - Iβ1. με εκτίμηση των παραμέτρων α, β και ω
  - Iβ2. με καθορισμό της διακύμανσης V (variance targeting) και εκτίμηση μόνο των α και β
  - Iβ3. με διερεύνηση κατά πόσον η κατάτμηση της σειράς των τιμών εισόδου σε επιμέρους σειρές έχει επίδραση στην εκτίμηση της διακύμανσης
  - Iβ4. λαμβάνοντας υπόψη ότι ο μέσος όρος των ημερήσιων αποδόσεων δεν ισούται με μηδέν

II. η πρόβλεψη των αποδόσεων συνδυάζοντας την μεθοδολογία GARCH(1,1) με ένα μοντέλο αυπαλινδρόμησης AR(1) και σύγκριση των τιμών πρόβλεψης με

- IIα.. με τις πραγματικές τιμές απόδοσης
- IIβ. με τις τιμές πρόβλεψης που προκύπτουν από την εφαρμογή του απλού μοντέλου γραμμικής παλινδρόμησης

III. η πρόβλεψη τιμών του SP500 εφαρμόζοντας ένα μοντέλο Monte Carlo όπου η μεταβλητότητα δεν θεωρείται σταθερή αλλά υπολογίζεται σύμφωνα με την μέθοδο GARCH(1,1) και σύγκριση των τιμών πρόβλεψης

IIIα. με τις πραγματικές τιμές του SP500

IIIβ. με τις τιμές πρόβλεψης που προκύπτουν από την εφαρμογή του τυπικού μοντέλου Monte Carlo δηλαδή θεωρώντας την διακύμανση σταθερά.

Στο κεφάλαιο 3 ασχολούμαστε με την θεωρητική παρουσίαση της μεταβλητότητας. Δίνουμε κάποιες εξηγήσεις για τα αίτια που την προκαλούν και στην συνέχεια δίνουμε τις μαθηματικές σχέσεις με τις οποίες την υπολογίζουμε. Δίνουμε επίσης τα κριτήρια με τα οποία αξιολογούμε την ορθότητα ή μη ενός υπολογισμού της μεταβλητότητας

Στο κεφάλαιο 4 εφαρμόζουμε το μοντέλο GARCH(1,1) για να υπολογίσει τα τρέχοντα επίπεδα μεταβλητότητας. Υπολογίζουμε παράλληλα και την χρονική διάρθρωση της μεταβλητότητας. Παρατηρούμε επίσης τις μεταβολές που έχουν πάνω στην καμπύλη διακύμανσης, διάφορες μεταβολές άλλων μεγεθών

Στο κεφάλαιο 5 χειριζόμαστε το πρόβλημα πρόβλεψης αποδόσεων. Ο συνήθης τρόπος είναι να εργαστούμε, και εν πρώτοις αυτό κάνουμε, με ένα μοντέλο γραμμικής παλινδρόμησης το οποίο προϋποθέτει σταθερή διακύμανση. Στην συνέχεια όμως υιοθετούμε ένα μοντέλο αυτοπαλινδρόμησης AR(1) στο οποίο η διακύμανση υπολογίζεται σύμφωνα με την μεθοδολογία GARCH(1,1) και συγκρίνουμε τα αποτελέσματα του μοντέλου αυτού με τα αποτελέσματα του μοντέλου γραμμικής παλινδρόμησης.

Στο κεφάλαιο 6 παρουσιάζουμε τα παράγωγα. Αρχικά δίνουμε τις εισαγωγικές έννοιες για τα call και put options, τις χρήσεις των options και τους παράγοντες που επηρεάζουν τις τιμές τους. Για την αποτίμηση των option παρουσιάζουμε τρείς μεθόδους . Οι δύο πρώτες μέθοδοι που παρουσάζονται συνοπτικά είναι τα διωνυμικά δένδρα και η αναλυτική εξίσωση Black-Scholes. Η τρίτη μέθοδος που είναι σε μερικές περιπτώσεις αναντικατάστατη, είναι η προσομοίωση Monte Carlo. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η διακύμανση παραμένει σταθερά, οπότε έχουμε την κλασσική μέθοδο Monte Carlo. Μπορούμε όμως και να θεωρήσουμε ότι η διακύμανση δεν είναι σταθερή αλλά μεταβάλλεται σύμφωνα με την μέθοδο GARCH(1,1) και να πάρουμε ορισμένα ενδιαφέροντα αποτελέσματα. Τα αποτελέσματα αυτά συγκρίνονται με τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την ‘κλασική’ προσομοίωση Monte Carlo.

Τέλος στο κεφάλαιο 7 ανακεφαλαιώνουμε την εργασία και δίνουμε τα συμπεράσματα σημειώνοντας επιπλέον ορισμένες ιδέες για περαιτέρω έρευνα.

3. Μεταβλητότητα και τρόποι υπολογισμού της

Το κεφάλαιο αυτό παρουσιάζει τρόπους με τους οποίους μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ιστορικά δεδομένα για να υπολογίσουμε εκτιμήσεις των σημερινών επιπέδων μεταβλητότητας και συσχέτισης.

Το χαρακτηριστικό των μεθόδων που θα παρουσιάσουμε είναι ότι θεωρούν ότι η μεταβλητότητα δεν είναι σταθερή κατά το πέρασμα του χρόνου. Κατά την διάρκεια ορισμένων περιόδων η μεταβλητότητα μπορεί να είναι σχετικά μικρή ενώ κατά την διάρκεια άλλων περιόδων μπορεί να είναι σχετικά υψηλή. Οι μέθοδοι αυτές επιτυγχάνουν να παρακολουθούν αυτές τις αυξομειώσεις της μεταβλητότητας με το πέρασμα του χρόνου.

Τα αίτια της διακύμανσης

Ορισμένοι αναλυτές ισχυρίζονται ότι η διακύμανση μιας μετοχής ή ενός δείκτη προέρχεται αποκλειστικά από την τυχαία εμφάνιση νέων πληροφοριών σχετικά με την απόδοση της μετοχής στο μέλλον. Αλλοι ισχυρίζονται ότι η διακύμανση προέρχεται κατά το πλείστον από τις χρηματιστηριακές πράξεις. Μελέτες έχουν δείξει ότι μάλλον φαίνεται να ισχύει το δεύτερο, ότι δηλαδή η διακύμανση προκαλείται κατά το μεγαλύτερο μέρος από τις συναλλαγές αυτές καθ'αυτές. Αυτός είναι και ο λόγος που για τον υπολογισμό της ετήσιας διακύμανσης λαμβάνουμε υπόψη τις ημέρες του έτους που γίνονται συναλλαγές στο χρηματιστήριο (στην Ελλάδα για το έτος 2000 ήταν 252 και για το 2001 θα είναι 251) και όχι τον αριθμό των 365 ημερών.

Υπολογισμός διακύμανσης από ιστορικά δεδομένα

Για να υπολογίσουμε την διακύμανση μιας μετοχής ή ενός δείκτη, συνήθως συγκεντρώνουμε τιμές της μετοχής ή δείκτη σε τακτά χρονικά διαστήματα π.χ. ανά ημέρα, ή ανά εβδομάδα, ή ανά μήνα. Αν ορίσουμε

$n+1$ το πλήθος των παρατηρήσεων

S_i η τιμή της μετοχής στο τέλος της ημέρας του διαστήματος i. $(i=0,1,...,n)$

τ η χρονική διάρκεια του διαστήματος εκφρασμένη σε έτη (όπου έτος=252 ημέρες) και θέσουμε

$$u_i = \frac{S_i - S_{i-1}}{S_{i-1}} \qquad (3.1)$$

για ι=1,2,...,n.

Η εκτιμήτρια s για την τυπική απόκλιση των u_i, δίνεται από την γνωστή σχέση

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(u_i - \overline{u})^2} \qquad (3.2)$$

όπου u είναι ο μέσος όρος των u_i.

Εάν, όπως συνήθως συμβαίνει, οι τιμές των u_i δεν είναι ανά έτος αλλά σε συχνότερες περιόδους, τότε η τυπική απόκλιση σ των τιμών της μετοχής ή του δείκτη δίνεται από τον τύπο

$$\sigma = \frac{s}{\sqrt{\tau}} \qquad (3.3)$$

Η επιλογή της κατάλληλης τιμής για το n δεν είναι εύκολη. Αν όλα τα άλλα παραμείνουν σταθερά, όσο περισσότερα δεδομένα έχουμε τόσο ακριβέστερος θα είναι ο υπολογισμός του σ. Εντούτοις το σ μεταβάλλεται με τον χρόνο, έτσι ώστε τα δεδομένα που είναι σχετικά παλαιά δεν συνεισφέρουν στην αποτύπωση της τρέχουσας τιμής, ούτε φυσικά στην πρόβλεψη μελλοντικών τιμών. Ενας συμβιβασμός που στην πράξη μπορεί να χρησιμοποιηθεί είναι να επιλέγονται οι τιμές που αντιστοιχούν στους τελευταίους 3 ή 6 μήνες. Ενας άλλος επίσης συνήθης κανόνας είναι να επιλέγεται το παρελθόν χρονικό διάστημα (για το οποίο θα υπολογίσουμε το σ) ίσο με το χρονικό διάστημα για το οποίο θέλουμε να κάνουμε κάποια πρόβλεψη. Ετσι π.χ. αν θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε την διακύμανση για να αποτιμήσουμε ένα option δυο χρόνων, θα χρησιμοποιήσουμε ιστορικά δεδομένα των προσφάτων δύο ετών.

Υπολογίζοντας τρέχουσες τιμές για την διακύμανση

Στην σχέση (3.2) αν υψώσουμε και τα δύο μέλη στο τετράγωνο και αν υποθέσουμε ότι ο μέσος όρος των u_i είναι 0 και επίσης αντί να διαιρέσουμε με (n-1) διαιρέσουμε με n τότε η (3.2) γίνεται

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i^2 \qquad (3.4)$$

Η εξίσωση (3.4) δίνει το ίδιο βάρος σε όλα τα u_i^2 Αν θέλουμε να παρακολουθήσουμε τα τρέχοντα επίπεδα διακύμανσης θα πρέπει να δώσουμε περισσότερο βάρος στα πιο πρόσφατα u_i. Ενα μοντέλο που κάνει αυτό ακριβώς είναι το εξής

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i^2 \qquad (3.5)$$

Η παράμετρος α δηλώνει το βάρος που προσδίδεται στην τιμή που βρίσκεται στην θέση i στο σύνολο των παρατηρούμενων τιμών. Ολα τα α_i είναι θετικά. Επίσης επειδή θέλουμε να δίνουμε λιγότερο βάρος σε παλαιότερες παρατηρήσεις αυτό σημαίνει ότι για $i<j$ θα είναι $\alpha_i<\alpha_j$. Το άθροισμα των βαρών θα πρέπει να ισούται με την μονάδα, δηλ.

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \qquad (3.6)$$

Μοντέλο ARCH

Μια προέκταση στην ιδέα που βρίσκεται πίσω από την εξίσωση (3.5) είναι να θεωρήσουμε ότι υπάρχει μια μακροχρόνια μέση διακύμανση στην οποία θα πρέπει να προσδώσουμε κάποιο βάρος. Αυτό μας οδηγεί στο μοντέλο

$$\sigma_n^2 = \gamma V + \sum_{i=1}^{n} a_i u_i^2 \qquad (3.7)$$

όπου V είναι η μακροχρόνια διακύμανση και γ το βάρος που προσδίδουμε στην V. Επειδή το άθροισμα όλων των βαρών θα πρέπει να ισούται με μονάδα

$$\gamma + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \qquad (3.8)$$

Αυτό το μοντέλο είναι γνωστό ως αυτοπαλινδρόμηση υπο συνθήκες ετεροσκέδασης (autoregressive conditional heteroscedasticity) ή εν συντομία ARCH(n) μοντέλο. Προτάθηκε από τον Eagle το 1982. Η εκτίμηση της μεταβλητότητας βασίζεται σε μια μακροχρόνια μέση μεταβλητότητα και σε n παρατηρήσεις. Οσο παλαιότερη είναι η παρατήρηση τόσο μικρότερο βάρος έχει. Αν ορίσουμε ω=γV, τότε η σχέση (3.8) γίνεται

$$\sigma_n^2 = \omega + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i^2 \qquad (3.9)$$

Αυτή είναι η μορφή του μοντέλου όταν χρησιμοποιείται για να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους ω και αi.

Μοντέλο EWMA

Το μοντέλο του εκθετικά σταθμισμένου κινούμενου μέσου όρου (exponentially weighted moving average model, EWMA model) είναι μια ειδική περίπτωση του μοντέλου που εκφράζεται με την σχέση (3.5). Στο EWMA τα βάρη αi μειώνονται με εκθετικό τρόπο καθώς κινούμαστε προς τα πίσω στον χρόνο. Δηλαδή α_i+1=$\lambda\alpha_i$, όπου λ είναι μια σταθερά μεταξύ 0 και 1. Οπως φαίνεται αυτός ο τρόπος υπολογισμού των βαρών οδηγεί σε μια απλή σχέση για τον υπολογισμό νέων τιμών διακύμανσης. Η σχέση αυτή είναι

$$\sigma_n^2 = \lambda\sigma_{n-1}^2 + (1-\lambda)u_{n-1}^2 \qquad (3.10)$$

Η εκτίμηση σ_n, για την διακύμανση της ημέρας n (που γίνεται στο τέλος της ημέρας n-1), υπολογίζεται από την εκτίμηση σ_{n-1} (την εκτίμηση που έγινε κατά τον ίδιο τρόπο πριν από μιά μέρα) και από την u_{n-1} που είναι η πιο πρόσφατη ποσοστιαία μεταβολή στην τιμή της μετοχής ή του δείκτη.

Για να καταλάβουμε πως τα βάρη μειώνονται εκθετικά, αντικαθιστούμε το σ_{n-1} και έχουμε

$$\sigma_n^2 = \lambda[\lambda\sigma_{n-2}^2 + (1-\lambda)u_{n-2}^2] + (1-\lambda)u_{n-1}^2$$

ή

$$\sigma_n^2 = (1-\lambda)(u_{n-1}^2 + \lambda u_{n-2}^2) + \lambda^2\sigma_{n-2}^2$$

Αντικαθιστώντας ομοίως το σ_{n-2}, έχουμε

$$\sigma_n^2 = (1-\lambda)(u_{n-1}^2 + \lambda u_{n-2}^2 + \lambda^2 u_{n-3}^2) + \lambda^3\sigma_{n-3}^2$$

Συνεχίζοντας με το τρόπο αυτό μπορούμε να δούμε ότι ισχύει

$$\sigma_n^2 = (1-\lambda)\sum_{i=1}^{m}\lambda^{i-1}u_{n-i}^2 + \lambda^m\sigma_0^2$$

Για μεγάλες τιμές του m, ο όρος $\lambda^m\sigma_0^2$ είναι αρκετά μικρός και αγνοείται και έτσι η εξίσωση (3.10) ανάγεται στην εξίσωση (3.5) αν υποθέσουμε ότι $\alpha_i=(1-\lambda)\lambda^{i-1}$. Τα βάρη των u_i μειώνονται με λόγο λ καθώς κινούμαστε προς τα πίσω στον χρόνο.

Το μοντέλο EWMA είναι εύχρηστο διότι απαιτεί μικρό όγκο δεδομένων προς αποθήκευση. Σε κάθε χρονική στιγμή χρειάζεται να γνωρίζουμε μόνο την τρέχουσα εκτίμηση της μεταβλητότητας και την πιο πρόσφατη ποσοστιαία μεταβολή της τιμής της μετοχής ή δείκτη. Το μοντέλο EWMA εφαρμόζεται στις περιπτώσεις όπου θέλουμε να παρακολουθούμε συνεχώς τις μεταβολές της διακύμανσης. Ας υποθέσουμε ότι την ημέρα n-1 γίνεται μια μεγάλη μεταβολή στην τιμή μιας μετοχής ή δείκτη, άρα το u_{i-1} είναι μεγάλο. Από την εξίσωση (3.10) αυτό το γεγονός προκαλεί αύξηση της σ_n, της εκτίμησης μας δηλαδή για την διακύμανση για την ημέρα n. Η τιμή της λ καθορίζει το πόσο η εκτίμηση της διακύμανσης για την ημέρα n εξαρτάται από την πρόσφατη ποσοστιαία μεταβολή u_i. Μια μικρή τιμή της λ σημαίνει ότι η πρόσφατη ποσοστιαία μεταβολή ui λαμβάνεται υπόψη με μεγάλο βάρος. Μια μεγάλη τιμή της λ σημαίνει ότι η ημερήσια διακύμανση λίγο εξαρτάται από την νέα πληροφορία που δίνει η u_i.

Η J.P.Morgan χρησιμοποιεί το μοντέλο EWMA με λ=0.94 για την επικαιροποίηση της εκτίμησης ημερήσιας διακύμανσης στην βάση δεδομένων RiskMetrics. Η εταιρεία βρήκε ότι για ένα εύρος διαφόρων τιμών υποκείμενων αξιών αυτή η τιμή του λ προβλέπει την μεταβλητότητα που προσεγγίζει καλύτερα την πραγματική μεταβλητότητα. Ως πραγματική μεταβλητότητα για μια συγκεκριμένη ημέρα λαμβάνεται ο μέσος όρος (με ίσα βάρη) των u_i των επομένων 25 ημερών.

Μοντέλο GARCH(1,1)

Ο Bollerslev το 1986 πρότεινε αυτό που είναι σήμερα γνωστό ως μοντέλο GARCH(1,1). Η διαφορά μεταξύ του μοντέλου GARCH(1,1) και του EWMA είναι ανάλογη με αυτή ανάμεσα στις εξισώσεις (3.5) και (3.7). Στο GARCH(1,1), η σ_n^2 υπολογίζεται από μια μακροχρόνια μέση τιμή μεταβλητότητας V, όπως επίσης και από τα σ_{n-1} και u_{n-1}. Η εξίσωση για το μοντέλο GARCH(1,1) είναι η εξής

$$\sigma_n^2 = \gamma V + \alpha u_{n-1}^2 + \beta \sigma_{n-1}^2 \qquad (3.10)$$

όπου γ είναι το βάρος που προσδίδεται στην V, α το βάρος που προσδίδεται στο u_{n-1}^2 και β το βάρος που προσδίδεται στην σ_{n-1}^2. Επειδή το άθροισμα των βαρών ισούται με την μονάδα

$$\gamma + \alpha + \beta = 1$$

Το EWMA μπορεί να θεωρηθεί ως ειδική περίπτωση του GARCH(1,1) όπου γ=0, α=1-λ, β=λ.

Η παρένθεση (1,1) σημαίνει ότι ο υπολογισμός σ_n^2 γίνεται λαμβάνοντας υπόψη την πιό πρόσφατη τιμή του u_i^2 και την πιό πρόσφατη εκτίμηση της μεταβλητότητας σ_{n-1}^2. Το γενικό μοντέλο GARCH(p,q) υπολογίζει την σ_n^2 από τις p πιό πρόσφατες τιμές του u_i^2 και τις q πιό πρόσφατες εκτιμήσεις της μεταβλητότητας. Εντούτοις το μοντέλο GARCH(1,1) είναι το πιο εφαρμοσμένο από τα μοντέλα GARCH.

Αν θέσουμε ω=γV, τότε το μοντέλο GARCH(1,1) μπορεί να γραφεί ως εξής

$$\sigma_n^2 = \omega + \alpha u_{n-1}^2 + \beta \sigma_{n-1}^2 \qquad (3.11)$$

Αυτή είναι η μορφή του μοντέλου που χρησιμοποιείται όταν προσπαθούμε να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους. Οταν εκτιμήσουμε τις παραμέτρος ω, α και β, μπορούμε να υπολογίσουμε το γ=1-α-β. Η μακροχρόνια τιμή της διακύμανσης V μπορεί να υπολογιστεί ως ο λόγος ω/γ. Για να είναι δυνατός ο υπολογισμός πραγματικών τιμών θα πρέπει α+β<1. Ειδάλλως το βάρος που θα προσδίδεται στην μακροχρόνια τιμή της διακύμανσης V θα είναι αρνητικό. Το μοντέλο GARCH(1,1) είναι παρόμοιο με το EWMA διότι προσδίδει βάρει που μειώνονται εκθετικά, εκτός αυτού όμως προσδίδει και κάποιο βάρος σε μια μακροχρόνια τιμή διακύμανση V. Με την πρόσδοση κάποιου βάρους στην V, το μοντέλο GARCH(1,1) παρουσιάζει αυτό που λέμε τάση επιστροφής στην μέση τιμή. Αν και μεταβάλλεται κατά τυχαίο τρόπο, συν τω χρόνω έχει την τάση να επιστρέφει σε ένα επίπεδο μακροχρόνιας τιμής V. Αντίθετα το μοντέλο EWMA δεν παρουσάζει αυτή την τάση. Για τον λόγο αυτό το μοντέλο GARCH(1,1) είναι από θεωρητικής άποψης ελκυστικότερο από ότι το μοντέλο EWMA.

Στην συνέχεια θα δούμε πως μπορούμε να υπολογίσουμε με τον καλύτερο τρόπο τις παραμέτρους ω, α και β για το μοντέλο GARCH(1,1). Εάν η παράμετρος ω=0 τότε το GARCH(1,1) εκφυλίζεται σε EWMA. Στις περιπτώσεις όπου η καλύτερη τιμή για το ω βγαίνει αρνητική το μοντέλο GARCH(1,1) οδηγεί σε λάθος τιμές και θα είναι λογικότερο να εφαρμόσουμε το EWMA.

Μέθοδος μέγιστης πιθανότητας.

Για τον υπολογισμό των παραμέτρων των μοντέλων θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τιμές από ιστορικά δεδομένα. Η μέθοδος που χρησιμοποιούμε είναι γνωστή ως η 'μέθοδος μέγιστης πιθανότητας'. Η μέθοδος αυτής συνίσταται στην επιλογή των τιμών των παραμέτρων που μεγιστοποιούν την πιθανότητα του να συμβούν τα αποτελέσματα.

Για να γίνει αντιληπτή θα χρησιμοποιήσουμε ένα παράδειγμα. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα τυχαίο δείγμα δέκα μετοχών μια συγκεκριμένη ημέρα και βρίσκουμε ότι η τιμή μιας από αυτές έχει πέσει την συγκεκριμένη ημέρα ενώ οι τιμές των υπολοίπων έχουν μείνει σταθερές ή έχουν αυξηθεί. Ποιά θα είναι η καλύτερη εκτίμηση που μπορούμε να κάνουμε σχετικά με το πόσες μετοχές (από όλες τις κυκλοφορούσες μετοχές) έχουν σημειώσει πτώση τιμών; Η αναμενόμενη απάντηση είναι 10%. Ας δούμε πως υπολογίζεται η απάντηση με την μέθοδο της μέγιστης πιθανότητας.

Ας υποθέσουμε ότι η αναλογία των μετοχών με πτώση τιμής είναι p. Η πιθανότητα του να παρουσάζει μια (απο το δείγμα των δέκα μετοχών) μετοχή πτώση τιμής και οι άλλες εννιά όχι είναι p(1-p)^9. Εφαρμόζοντας την μέθοδο της μέγιστης πιθανότητας η καλύτερη εκτίμηση για την p είναι αυτή που μεγιστοποιεί το p(1-p)^p αφού αυτό έχει μεγαλύτερη πιθανότητα να συμβεί από ότι το p. Διαφορίζοντας τον όρο p(1-p)^9 ως προς p, και εξισώνοντας με το μηδέν βρίσκουμε ότι για p=0.1 μεγιστοποιείται ο όρος p(1-p)^9. Ετσι η εκτίμηση για το p, με την βοήθεια της μεθόδου μεγίστης πιθανότητας, είναι 10%, όπως αναμένονταν.

Εκτίμηση σταθερής μεταβλητότητας

Ακολούθως, θεωρούμε το πρόβλημα της εκτίμησης της μεταβλητότητας από m παρατηρήσεις όταν η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι κανονική και η μεταβλητότητα σταθερή. Υποθέτουμε ότι οι παρατηρήσεις αυτές είναι οι $u_1, u_2, \ldots, u_m$ και ο μέσος όρος της κατανομής είναι μηδέν. Εστω ότι η μεταβλητότητα είναι η v. Η πυκνότητα πιθανότητας για την παρατήρηση i, δίδεται από από την κανονική κατανομή με μέσο όρο μηδέν και μεταβλητότητα v

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi v}}\exp(\frac{-u_i^2}{2v})$$

Η πυκνότητα πιθανότητας των m παρατηρήσεων να συμβούν με την σειρά αυτή που παρατηρήθηκαν είναι

$$\prod_{i=1}^{m}[\frac{1}{\sqrt{2\pi v}}\exp(\frac{-u_i^2}{2v})] \qquad (3.12)$$

Εφαρμόζοντας την μέθοδο μεγίστης πιθανότητας, η καλύτερη εκτίμηση για την v είναι αυτή που μεγιστοποιεί την (3.12)

Η μεγιστοποίηση της (3.12) είναι ισοδύναμη με την μεγιστοποίηση του λογαρίθμου της (3.12). Λογαριθμίζοντας την (3.12) και αγνοώντας σταθερούς πολλαπλασιαστικούς παράγοντες βλέπουμε ότι θα πρέπει να μεγιστοποιήσουμε τον όρο

$$\sum_{i=1}^{m}[-\ln(v)-\frac{u_i^2}{v}] \qquad (3.13)$$

ή ισοδύναμα

$$-m\ln(v)-\sum_{i=1}^{m}\frac{u_i^2}{v}$$

Διαφορίζοντας ως προς v τον παραπάνω όρο και εξισώνοντας με μηδέν βλέπουμε ότι η εκτίμηση μέγιστης πιθνότητας για την v είναι η

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}u_i^2$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η μεταβλητότητα υπόκειται σε ένα μοντέλο υπολογισμού διακύμανσης όπως αυτό του GARCH(1,1). Ας ορίσουμε $v_i=\sigma_i^2$ την εκτιμούμενη μεταβλητότητα για την ημέρα ι. Υποθέτουμε ότι η κατανομή πιθανότητας των u_i

(καθ'όσον αφορά την μεταβλητότητα) είναι κανονική. Μια ανάλυση παρόμοια με την προηγούμενη θα μας οδηγήσει στο ότι θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε τον όρο

$$\prod_{i=1}^{m}[\frac{1}{\sqrt{2\pi v_i}}\exp(\frac{-u_i^2}{2v_i})]$$

Λογαριθμίζοντας τον όρο αυτόν, βλέπουμε ότι θα πρέπει να μεγιστοποιήσουμε

$$\sum_{i=1}^{m}[-\ln(v_i)-\frac{u_i^2}{v_i}] \qquad (3.14)$$

Ο όρος αυτός είναι όμοιος με το όρο (3.13) με την διαφορά ότι το v αντικαταστήθηκε από το v_i. Θα πρέπει με επαναληπτικούς υπολογισμούς να βρούμε ποιές τιμές του παραμέτρου του μοντέλου δίνουν μέγιστη τιμή για τον όρο (3.14).

Στόχευση μεταβλητότητας (variance targeting)

Μια άλλη δυνατότητα, που προσφέρει μια δοκιμασμένη εκτίμηση των παραμέτρων στο GARCH(1,1), είναι γνωστή ως στόχευση μεταβλητότητας (variance targeting). Αυτή συνίσταται στο να θέσει εξ αρχής την μακρόχρονη μέση μεταβλητότητα V ίση με την μεταβλητότητα που προκύπτει από το δείγμα των δεδομένων που έχουμε (ή ίση με κάποια άλλη τιμή που θεωρούμε λογική). Τότε η τιμή του ω προκύπτει ίση με V(1-α-β) και απομένουν να υπολογιστούν μόνο οι δύο παράμετροι α και β. Θυμίζουμε ότι στο μοντέλο GARCH(1,1) πρέπει να υπολογιστούν τρείς παράμετροι, οι ω, α και β.

Αυτοσυσχέτιση (autocorrelation)

Η υπόθεση στην οποία βασίζεται το μοντέλο GARCH είναι ότι η διακύμανση δεν έχει σταθερή τιμή και μεταβάλλεται με το πέρασμα του χρόνου. Κατά την διάρκεια κάποιων χρονικών διαστημέτων η διακύμανση μπορεί να είναι σχετικά μεγάλη, και κατά την διάρκεια κάποιων άλλων χρονικών διαστημάτων μπορεί να είναι σχετικά μικρή. Για να το πούμε με άλλα λόγια, όταν ο όρος u_i^2 είναι μεγάλος τότε υπάρχει μια τάση και τα u_{i+1}^2, u_{i+2}^2, ... να είναι επίσης μεγάλα, ενώ όταν ο όρος u_i^2 είναι μικρός τότε υπέρχει η τάση και τα u_{i+1}^2, u_{i+2}^2, ... να είναι επίσης μικρά. Για να δούμε κατά πόσο ισχύει αυτό, κατά πόσο δηλαδή η υπόθεση πάνω στην οποία βασίζεται το μοντέλο GARCH είναι αληθινή, μπορούμε να εξετάσουμε την αυτοσυσχέτιση των u_i^2.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι τα u_i^2 παρουσιάζουν αυτοσυσχέτιση. Εάν το μοντέλο GARCH λειτουργεί σωστά, θα πρέπει να αφαιρεί την αυτοσυσχέτιση. Μπορούμε να εξετάσουμε κατά πόσο το κάνει αυτό υπολογίζοντας την αυτοσυσχέτιση των u_i^2/σ_i^2. Εάν οι όροι u_i^2/σ_i^2 παρουσιάζουν μικρή αυτοσυσχέτιση, τότε το μοντέλο για το υπολογισμό των σ_i^2 (δηλαδή των v_i) έχει επιτύχει την λειτουργία του εξηγώντας ακριβώς μεγάλο μέρος από την αυτοσυσχέτιση των u_i2.

4. Εφαρμογή του GARCH(1,1) στον δείκτη S&P500

Ως εργαλείο επαναληπτικού υπολογισμού, έγινε ευρεία χρήση του Solver του EXCEL. Για την εξαγωγή συμπερασμάτων αποφασίστηκε να τεθούν οι παρακάτω παράμετροι ώστε η εφαρμογή Solver να τρέχει ομοιόμορφα

Max time	100 sec
Iterations	100
Precision	0.000001
Tolerance	5%
Convergence	0.001
Assume Non-negative values	
Use automatic scaling	
Estimates	Tangent
Derivatives	Forward
Search	Newton

Αρχικές τιμές : α=0.1, β=0.5, και όπου χρειάζεται αρχική τιμή για ω, ω=0.001

Για να επιβεβαιώσουμε ότι τα αποτελέσματα που πήραμε είναι ανεξάρτητα από τις αρχικές τιμές, τρέξαμε το solver και με το παρακάτω σετ αρχικών τιμών

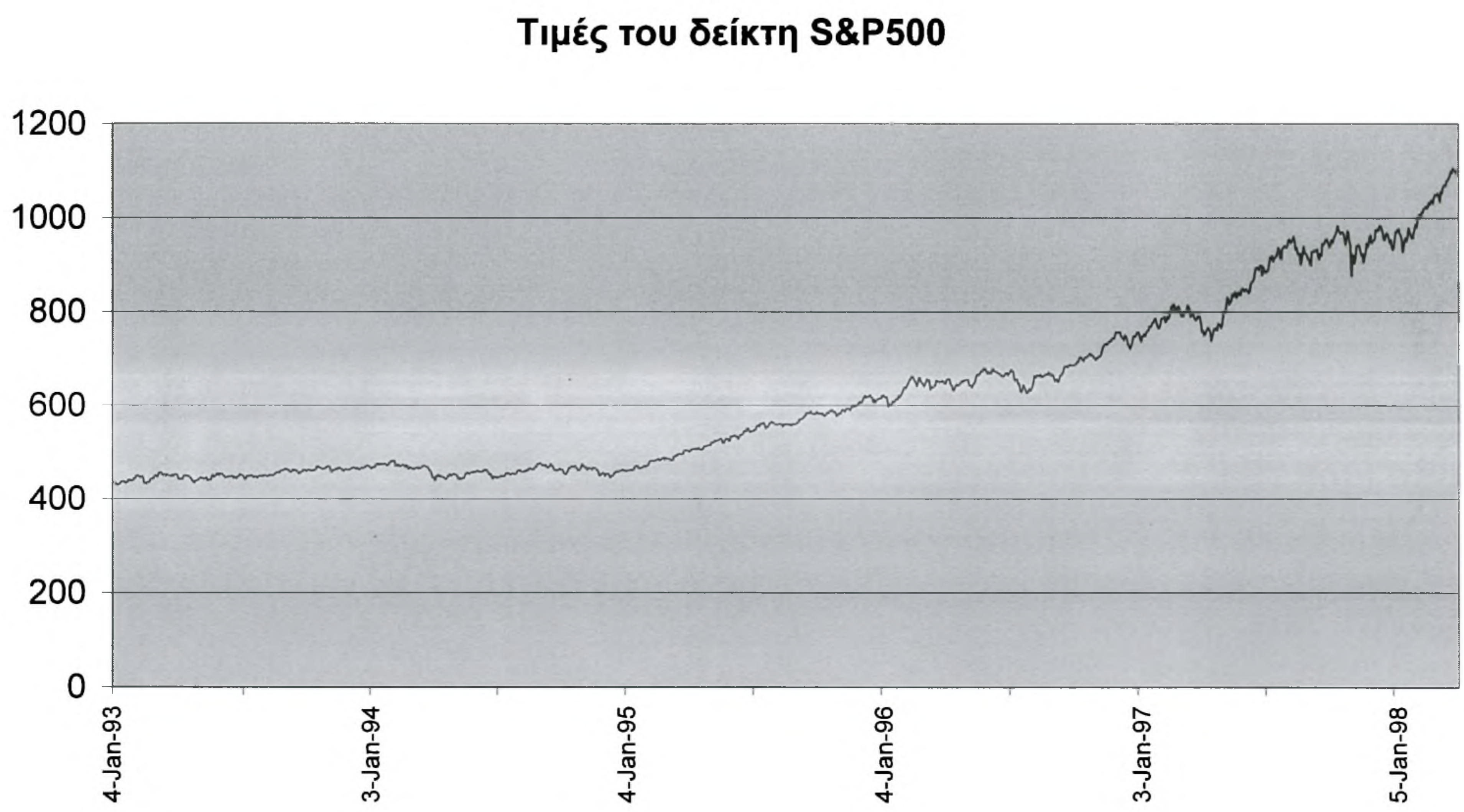
α=0.001

β=0.98

ω=0.0001

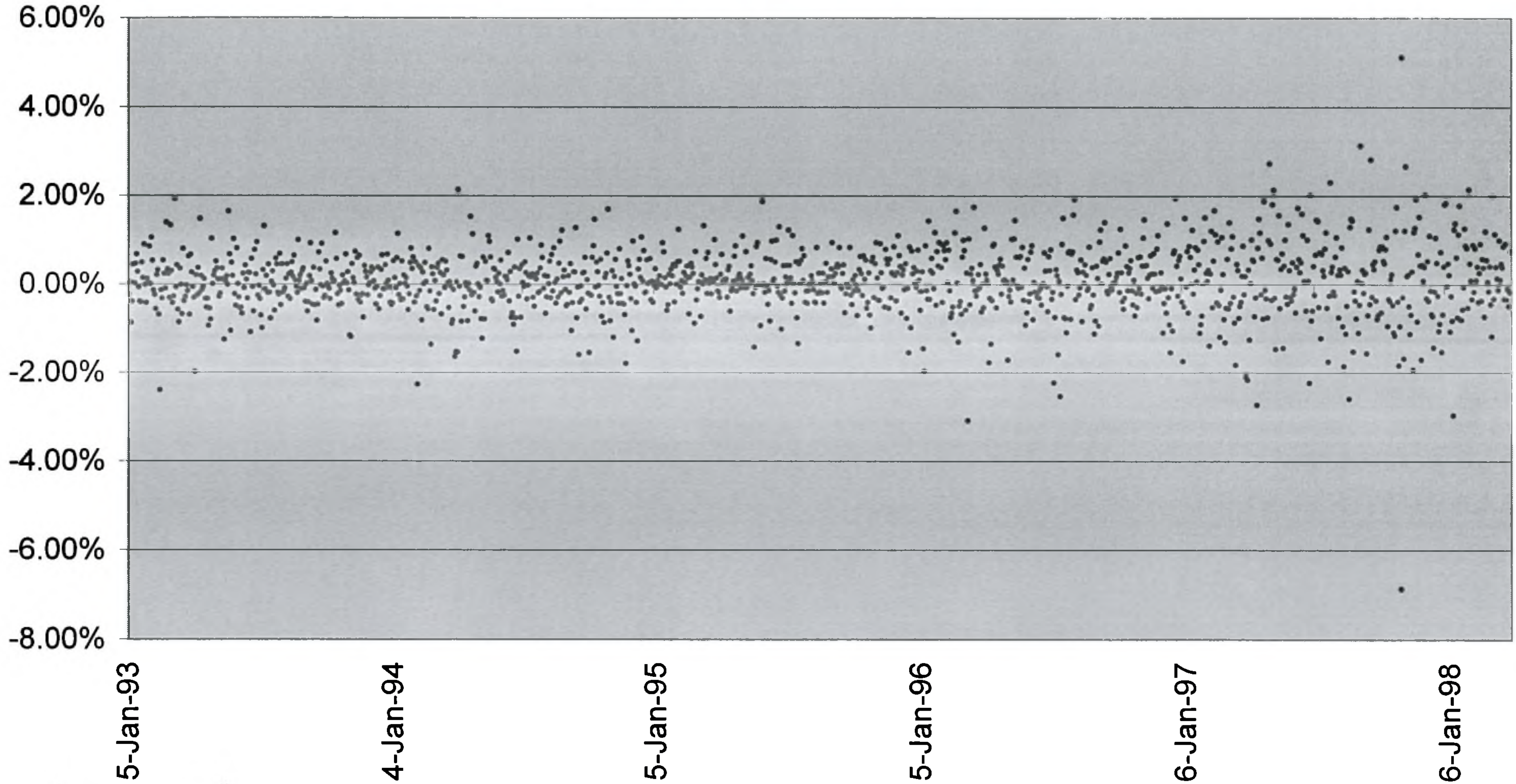
Τα αποτελέσματα σε όλες τις περιπτώσεις ήταν τα ίδια, ανεξάρτητα από ποιό από τα δύο σετ αρχικών τιμών είχαν τεθεί.

Ως σύνολο τιμών πρός εξέταση επιλέχθηκαν οι 1325 τιμές του δείκτη S&P500 από 4-1-1993 έως 31-3-1998 (βλ. διαγρ. 4.0 , και σχετικό πίνακα) . Με βάση τις τιμές αυτές υπολογίστηκαν οι ημερήσιες αποδόσεις (βλ. διαγρ. 4.1)



Διάγραμμα 4.0

Ημερήσιες αποδόσεις του S&P500



Διάγραμμα 4.1

Ια. Διακύμανση της ημερήσιας απόδοσης του SP500 με βάση 1325 ιστορικές τιμές (από 4 Ιανουαρίου 1993 έως 31 Μαρτίου 1998), όπως προκύπτει από τον τύπο

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(u_i - \bar{u})^2}$$

s=0.00751683

$$Ετήσια\ διακύμανση = s * \sqrt{252} = 11.93\%$$

Στους πίνακες που ακολουθούν με LT V εννοείται η μακροχρόνια διακύμανση (long-term Volatility) και ML το άθροισμα των παραγόντων μέγιστης πιθανότητας (maximun likelihood)

Ιβ1. Η εφαρμογή της 'καθαρής' μεθόδου GARCH(1,1) επί των 1325 ιστορικών τιμών μας έδωσε τα παρακάτω αποτελέσματα

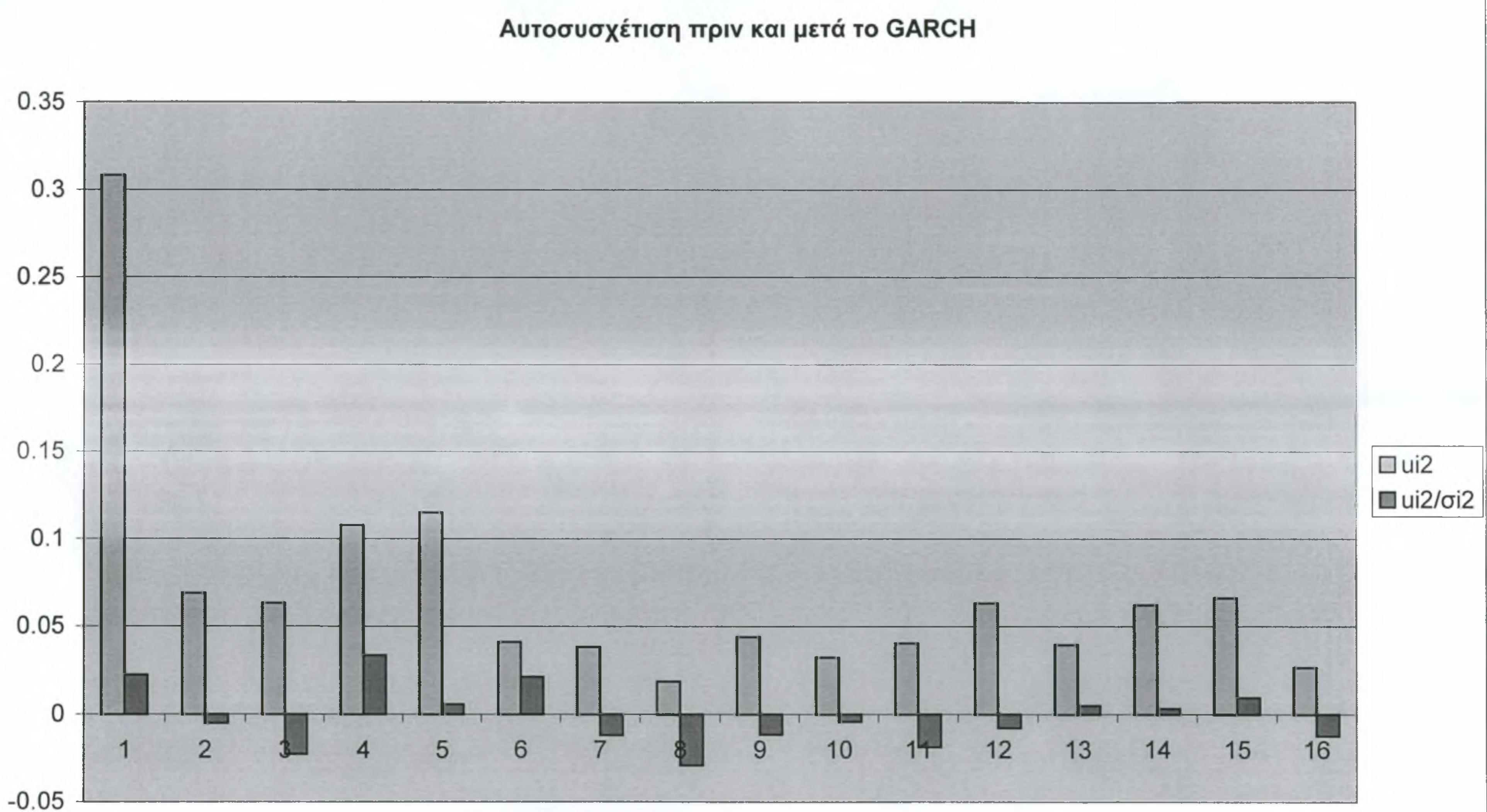
GARCH(1,1)	απλό					
	LT V	α	β	ω	ML	εξάρτηση από αρχ. τιμές
1-1325	12.70%	0.06213	0.924	8.9E-07	11818.52	οχι

Στο διάγραμμα 4.2 παρουσιάζεται η καμπύλη της διακύμανσης και στο διάγραμμα 4.3 η αυτοσυσχέτιση των όρων u_i^2 και u_i^2/σ_i^2.

Παρατηρήσεις σχετικά με την μορφή της καμπύλης διακύμανσης (Διάγρ. 4.2).

1. Η αρχική φάση (στη συγκεκριμένη περίπτωση περίπου οι 20 πρώτες τιμές) είναι μεταβατική. Ανάλογα με την αρχική τιμή και την μακρόχρονη τιμή της αστάθειας, μπορεί να έχει αρνητική ή θετική κλίση
2. Μετά την αρχική φάση, παρατηρούμε ότι η μεταβλητότητα δεν πέφτει ποτέ κάτω από μια ορισμένη τιμή – τιμή βάσης (στο παράδειγμά μας, κάτω από 0.00002)
3. Υπάρχουν μερικά πολύ αιχμηρά μέγιστα (στο παράδειγμά μας διακρίνουμε 7 κορυφές)
4. Μετά από κάθε αιχμηρό μέγιστο ακολουθεί μια περίοδος απομείωσης της μεταβλητότητας που συνήθως αλλά όχι πάντα επαναφέρει την τιμή της αστάθειας κοντά στην τιμή βάσης

Διάγραμμα 4.2



Διάγραμμα 4.3

5. Η κλίση της ανόδου της μεταβλητότητας είναι μεγαλύτερη από την κλίση της επαναφοράς της
6. Εκτός από τα πολύ αιχμηρά μέγιστα, υπάρχουν και μερικά (στο παράδειγμά μας περίπου 6) λιγότερο αιχμηρά και μικρότερης τιμής μέγιστα που επίσης η κλίση ανόδου τους είναι μεγαλύτερη από την κλίση καθόδου τους

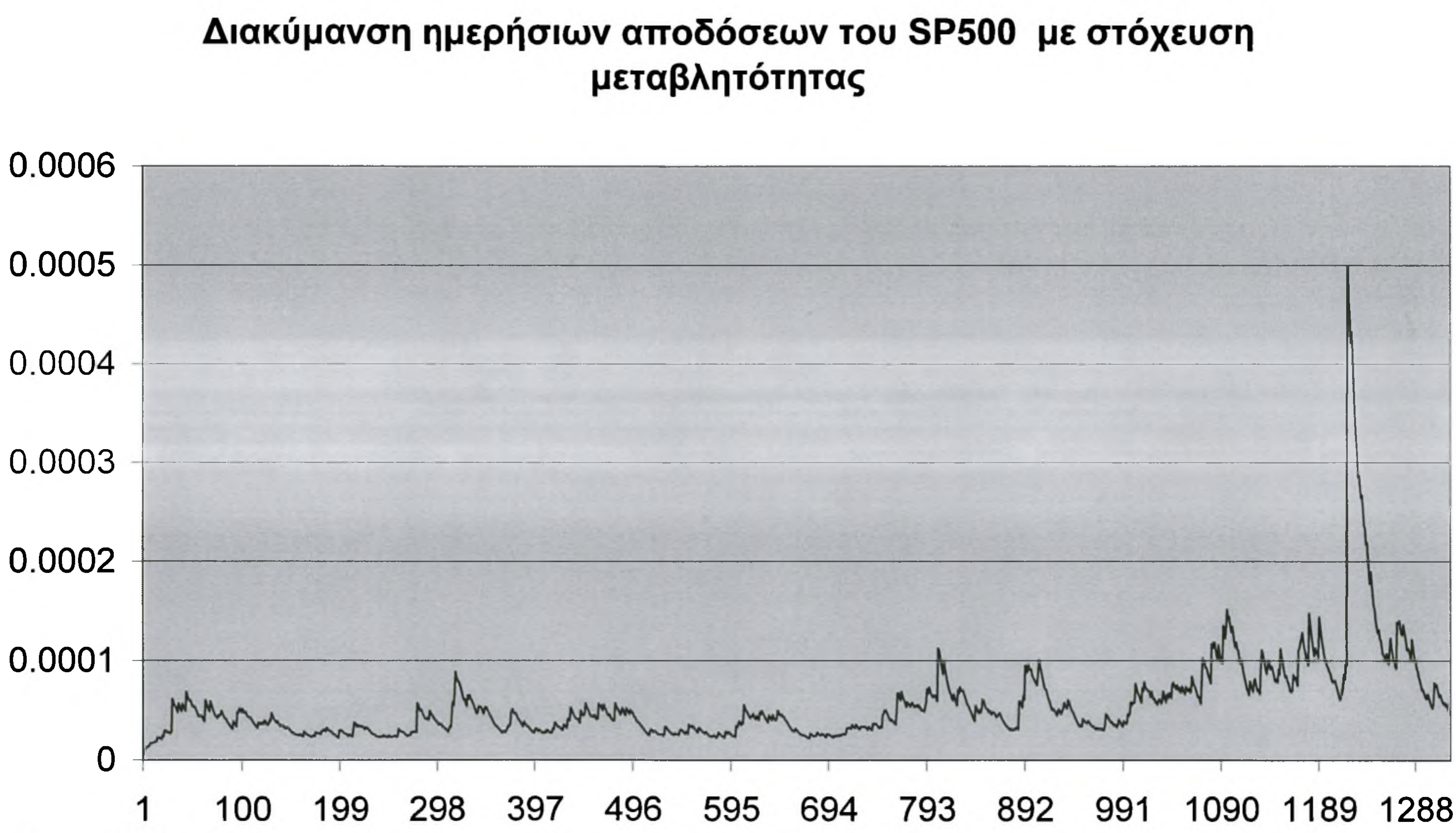
Iβ2.Εάν θέσουμε την μακροχρόνια διακύμανση V ίση με αυτήν που προκύπτει από την Ια, δηλαδή εάν έχουμε στόχευση μεταβλητότητας (variance targeting) τότε έχουμε τα παρακάτω αποτελέσματα

GARCH(1,1)	+ Variance Targeting			
	Hist. V	α	β	ML
1-1325	11.93%	0.059652	0.92406	11818.23

Στο διάγραμμα 4.4 δίνεται η καμπύλη της διακύμανσης με variance targeting και συγκρίνεται με αυτή του 'απλού' GARCH(1,1). Ομοίως στο διάγραμμα 4.5 δίνονται για σύγκριση οι αυτοσυσχετίσεις με variance targeting και με 'απλό' GARCH.

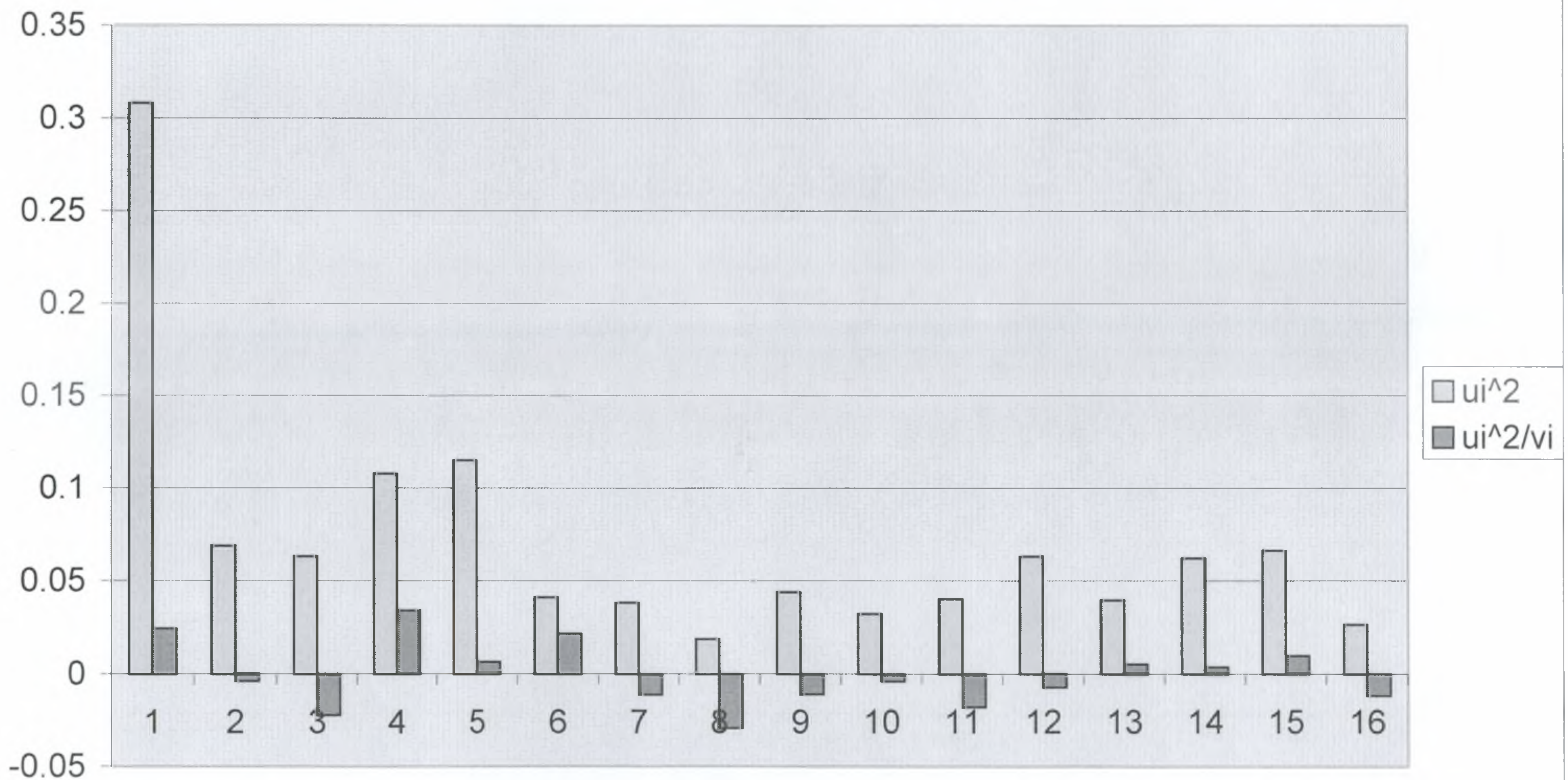
Iβ3. Διερευνούμε το πόσο επηρεάζει τον υπολογισμό της μακροχρόνιας διακύμανσης η κατάτμηση των τιμών εισόδου σε δύο και κατόπιν σε τρείς περίοδους

Επειδή στην συνέχεια έχουμε σκοπό να συνδυάσουμε τα αποτελέσματα των δύο υποπεριόδων και να τα συγκρίνουμε με αυτά της ενιαίας περιόδου, επιλέγουμε τις υποπεριόδους με τέτοιο τρόπο ώστε να αλληλοεπικαλύπτονται ορισμένες τιμές. Το πλήθος των αλληλοεπικαλυπτόμενων τιμών διαλέγουμε εμείς όταν μελετούμε δύο υποπεριόδους να είναι 200 και όταν δε μελετάμε τρείς υποπεριόδους να είναι 100. Οπότε οι δύο υποπερίοδοι είναι: η πρώτη μεν από τιμή 1 έως τιμή 762 και η δεύτερη υποπερίοδος να είναι από 562 έως 1325. Οι αλληλοεπικαλυπτόμενες τιμές από 562 έως και 762 υπολογίζονται και στις δύο υποπεριόδους αλλά θα έχουν διαφορετικές τιμές. Για να υπάρχει μια σταδιακή μετάβαση από την μία υποπερίοδο στην άλλη χρησιμοποιούμε απλή γραμμική παρεμβολή μεταξύ των τιμών της διακύμανσης και τελικά έχουμε πάλι ένα σύνολο 1325 τιμών διακύμανσης για το οποίο μπορούμε να υπολογίσουμε την μέγιστη πιθανότητα και να αξιολογήσουμε την ορθότητά της



Διάγραμμα 4.4

Αυτοσυσχέτιση πριν και μετά το GARCH με στόχευση μεταβλητότητας



Διάγραμμα 4.5

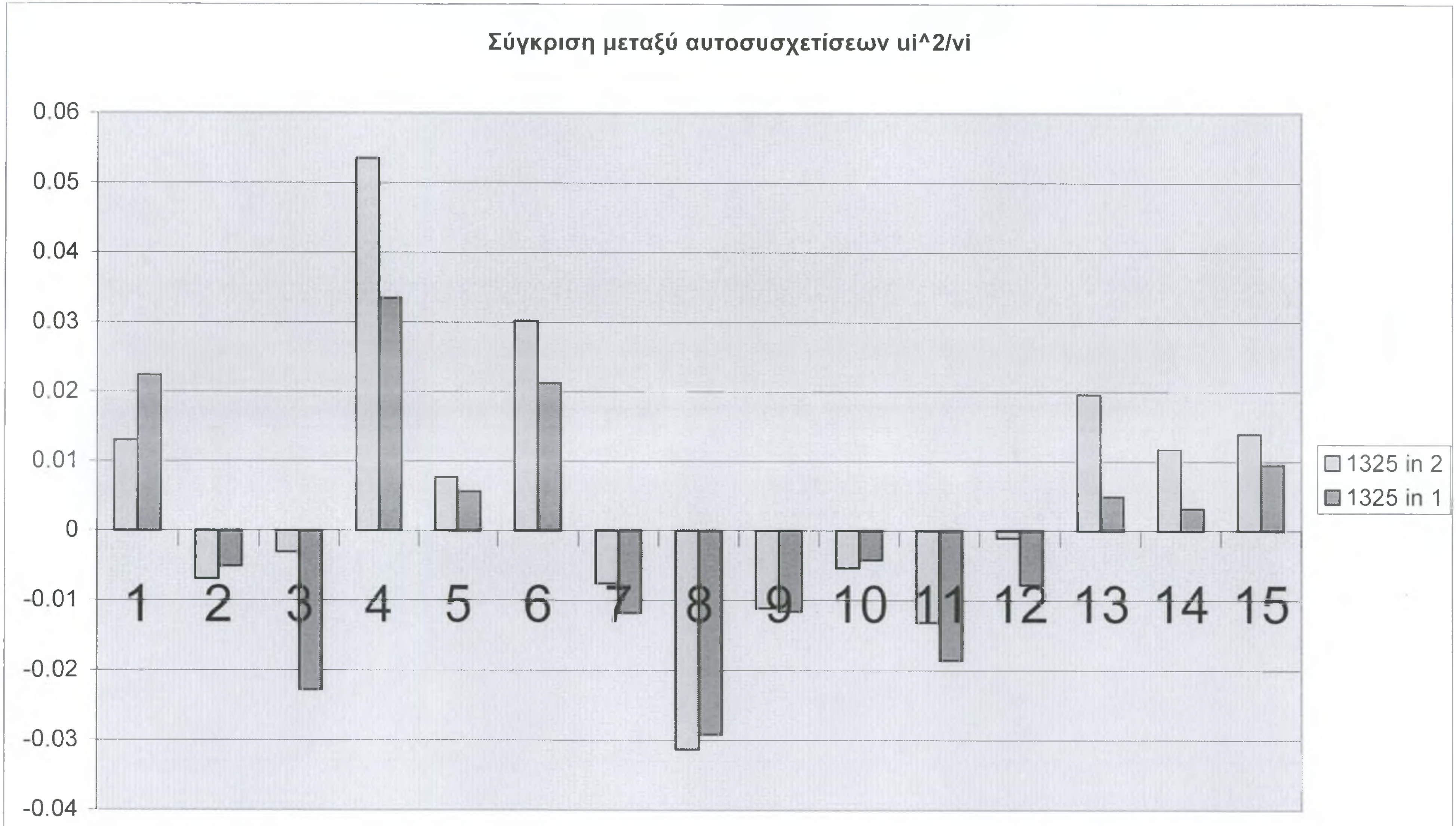
GARCH(1,1)	απλό						
	LT V	α	β	ω	ML	αυτισυσχέτιση	εξάρτηση από αρχ. τιμές
1-762	8.84%	0	0	3.102E-05	7131.92	καμία βελτίωση διότι α=β=0	οχι
562-1325	17.41%	0.09686	0.89169	1.38E-06	6585.28	σημαντική βελτίωση	ναι, αλλά αυτή η λύση έχει το μέγιστο ML
1-1325 in 2	Δεν υπάρχει	Δεν υπάρχει	Δεν υπάρχει	Δεν υπάρχει	11834.18	πρακτικά ίδια αποτελέσματα με την 1325 in 1	Δεν έχει εφαρμογή

Σημαντικό είναι ότι το μοντέλο GARCH(1,1) μας δίνει ως πιθανότερη λύση την σταθερή μακροχρόνια διακύμανση για την χρονική περίοδο που αφορά τις τιμές από 1 έως και 762. Δοκιμάσαμε με πολλούς πιθανούς συνδυασμούς αρχικών τιμών για να εξασφαλίσουμε ότι άλλη λύση δεν 'κρύβεται' σε κάποιον συνδυασμό ω, α και β που δεν 'έτυχε' να εντοπίσει το solver. Εντούτοις όλες μας οι προσπάθειες κατέληξαν στο ότι η πιθανότερη λύση είναι αυτή που παρουσιάζεται στον παραπάνω πίνακα. Σημειώνουμε βέβαια ότι ακριβώς επειδή α=β=0, δηλαδή επειδή έχει εκφυλιστεί η λύση σε σταθερή μακρόχρονη διακύμανση, η αυτοσυσχέτιση δεν παρουσιάζει καμμιά βελτίωση.

Περισσότερο παραστατικά μπορούμε να δούμε τα αποτελέσματα στα διαγράμματα 4.6 και 4.7 όπου αντίστοιχα συγκρίνουμε την διακύμανση και αυτοσυσχέτιση μεταξύ της ενιαίας εξέτασης και της εξέτασης σε δύο υποπεριόδους.
Παρατηρούμε επίσης ότι το άθροισμα που προσδιορίζει την πιθανότητα υπαρξης τέτοιας λύσης είναι με κατάτμηση σε δύο υποπεριόδους 11834.18 ενώ όταν εξετάζεται ενιαία το σύνολο των τιμών τότε το άθροισμα είναι 11818.23. Δηλαδή σαν λύση, είναι πιθανότερη αυτή που προκύπτει από την κατάτμηση σε δύο υποπεριόδους παρά η ενιαία εξέταση.

Στην συνέχεια προχωρούμε στην υποδιαίρεση σε τρείς υποπεριόδους με αλληλοεπικάλυψη 100 τιμών. Οπως και προηγουμένως τις αλληλοεπικαλυπτόμενες τιμές κατόπιν τις επεξεργαζόμαστε με γραμμική παρεμβολή, έχοντας σαν τελικό αποτέλεσμα πάλι το ίδιο πλήθος αποτελεσμάτων με αυτό που παίρνουμε από την ενιαία εξέταση. Βλέπουμε τα αποτελέσματα στο παρακάτω πίνακα

Διάγραμμα 4.6



Διάγραμμα 4.7

GARCH(1,1)	απλό						
	LT V	α	β	ω	ML	αυτισυσχέτιση	εξάρτηση από αρχ. τιμές
1-500	9.27%	0.005946	0	3.39E-05	4626.84	αμελητέα βελτίωση διότι β=0	οχι
400-900	10.58%	0.051758	0.91570	1.444E-06	4579.33	σημαντική βελτίωση	ναι, αλλά αυτή η λύση έχει το μέγιστο ML
800-1325	15.74%	0.104548	0.84190	5.267E-06	4382.03	σημαντική βελτίωση	ναι, αλλά αυτή η λύση έχει το μέγιστο ML
1-1325 in 3	Δεν υπάρχει	Δεν υπάρχει	Δεν υπάρχει	Δεν υπάρχει	11840.72	μικρή ή καθόλου βελτίωση σε σχέση με την 1325 in 1	Δεν έχει εφαρμογή

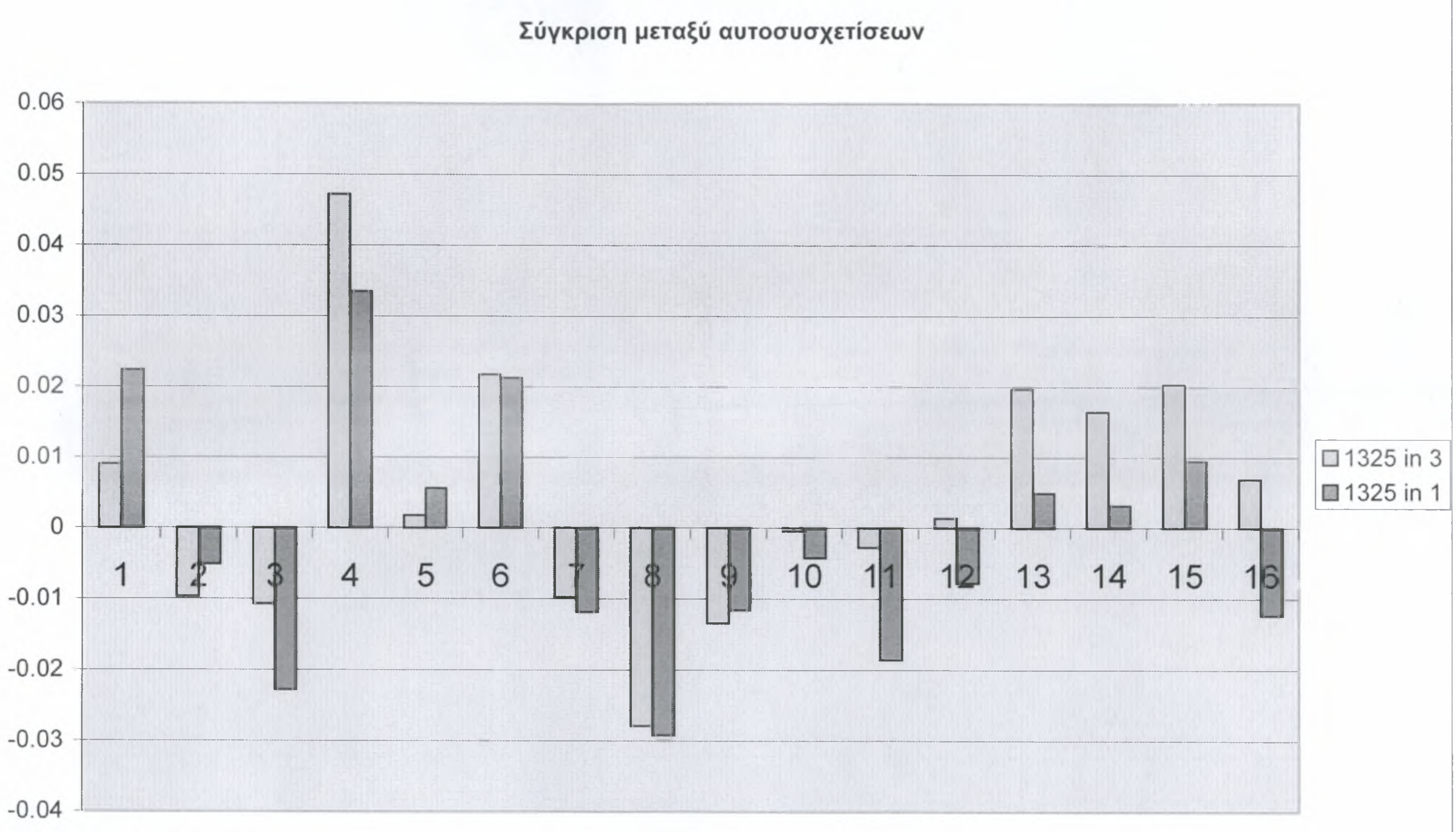
Παρατηρούμε ότι για την περίοδο 1-500 που αποτελεί μέρος της περιόδου 1-762, (για την οποία παρπάνω είχαμε βρεί ότι η πιθανότερη λύση είναι η σταθερή μακροχρόνια διακύμανση), η λύση που δίνεται από το μοντέλο είναι πολύ κοντά σε αυτή της σταθερής διακύμανσης. Οπως φαίνεται και στον παραπάνω πίνακα το β=0 και το α=6% περίπου ενώ το υπόλοιπο 94% είναι σταθερή διακύμανση.

Στα διαγράμματα 4.8 και 4.9 αντίστοιχα βλέπουμε την διακύμανση και την αυτοσυσχέτιση συγκρίνοντας την περίπτωση της εξέτασης των τριών υποπεριόδων με την περίπτωση της ενιαίας εξέτασης όλης της χρονικής περιόδου.
Και εδώ παρατηρούμε ότι το άθροισμα που δίνει την πιθανότητα ύπαρξης αυτής της λύσης (δηλαδή με εξέταση τριών υποπεριόδων) είναι 11840.72 που είναι μεγαλύτερο, άρα και η λύση είναι πιθανότερη, από την περίπτωση της εξέτασης δύο υποπεριόδων (άθροισμα 11834.18) και από την περίπτωση της ενιαίας εξέτασης (άθροισμα 11818.23)

Στην συνέχεια εξετάζουμε την επίδραση της υποδιαίρεσης του όλου χρονικού διαστήματος σε υποπεριόδους όταν χρησιμοποιούμε το μοντέλο GARCH(1,1) με στόχευση μεταβλητότητας (variance targeting). Στον παρακάτω πίνακα βλέπουμε τα αποτελέσματα

GARCH(1,1)	+ Variance Targeting				
	Hist. V	α	β	ML	Παρατηρήσεις
1-762	8.81%	0.030564	0.87304	7133.38	Μια άλλη λύση με ML=7131 δίνει α=β=0
562-1325	13.66%	0.086385	0.89309	6584.11	
1-1325 in 2	11.93%	Δεν υπάρχει	Δεν υπάρχει	11832.43	
1-500	9.26%	0.005917	0	4626.84	
400-900	9.88%	0.047271	0.91285	4578.67	
800-1325	15.48%	0.101558	0.84336	4382.00	
1-1325 in 3	11.93%	Δεν υπάρχει	Δεν υπάρχει	11842.19	

Διάγραμμα 4.8



Διάγραμμα 4.9

Και στην περίπτωση της στόχευσης μεταβλητότητας όπως και στην προηγούμενη περίπτωση του 'καθαρού' GARCH(1,1) , για το διάστημα 1-762 υπάρχει πολύ πιθανή λύση για σταθερή (α=β=0) διακύμανση. Αλλά επειδή ακριβώς εμείς θέτουμε αυτή την διακύμανση να είναι ίση με 8.81% (και δεν αφήνεται το solver να την υπολογίσει μόνο του στο 8.84%) , για το λόγο αυτό προκύπτει το μεν α=3% και το β=87% αφήνοντας ένα γ=10% για την σταθερή μεταβλητότητα. Ουτως η άλλως η λύση α=β=0 έχει τον παράγοντα μέγιστης πιθανότητας ML=7131, ενώ η λύση με α<>0, β<>0 έχει ML=7134.

Κατά τα άλλα παρατηρούμε και εδώ να υπάρχει αυξητική κλιμάκωση του παράγοντα μέγιστης πιθανότητας από την ενιαία εξέταση (ML= 11818.23) στην εξέταση με δύο υποπεριόδους (ML= 11832.43) και τέλος στην εξέταση με τρείς υποπεριόδους (ML=11842.19)

Μια γενική παρατήρηση είναι ότι, όσον αφορά την εκτέλεση υπολογισμών με το solver του excel, το μοντέλο variance targeting απαιτεί περισσότερη προσπάθεια στην εισαγωγή 'ορθών' ή 'κατάλληλων' αρχικών τιμών για τα α και β, διότι αρκετές φορές το solver δίνει το μήνυμα ότι συναντώνται οι περιορισμοί μη-αρνητικότητας , παρά το ότι έχει ενεργοποιηθεί η επιλογή Assume non-negative.

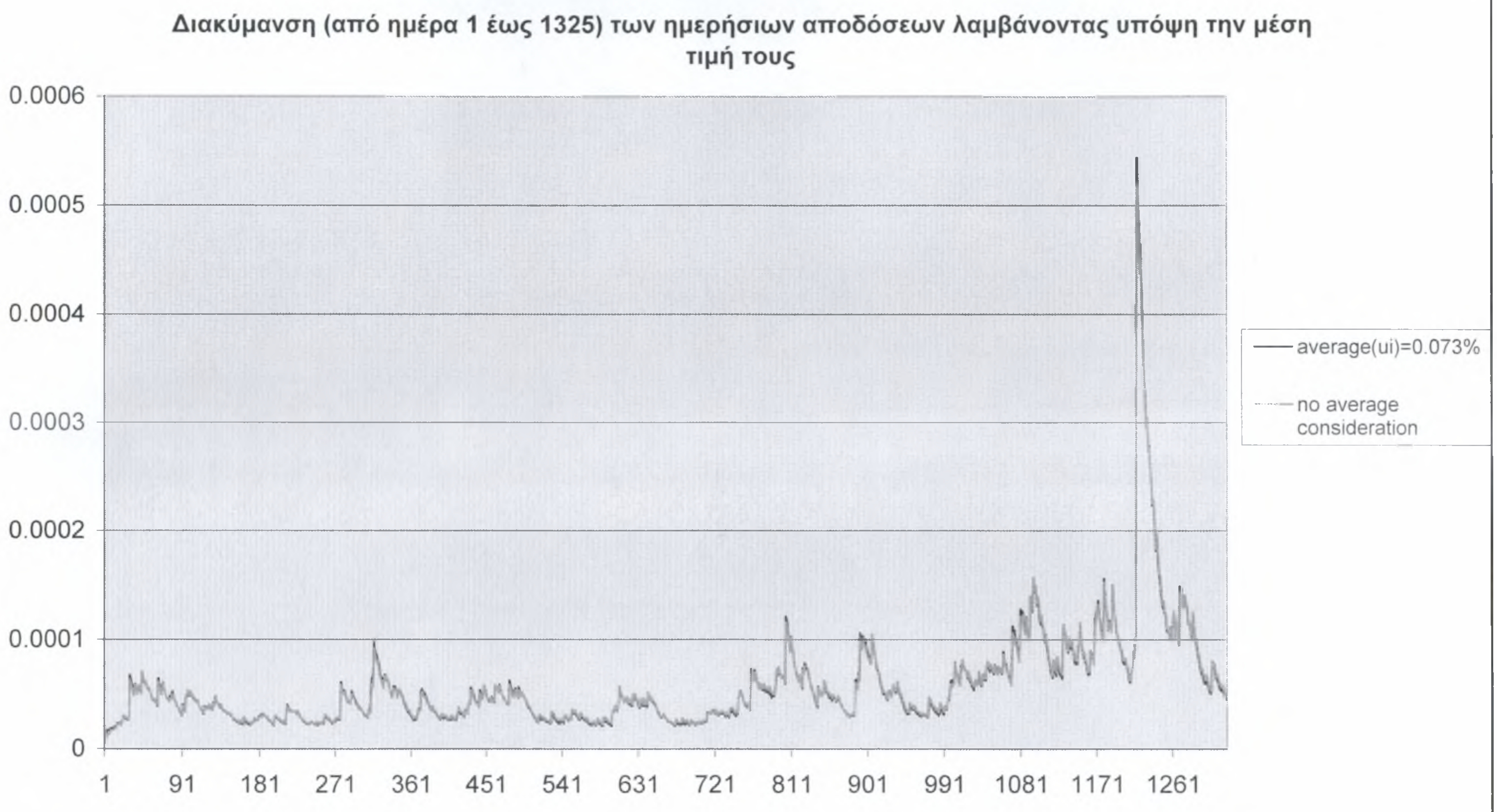
Για να μπορέσουμε να αξιολογήσουμε τα αποτελέσματα της τμηματικής (κατά 2 ή 3 τμήματα) εξέτασης της σειράς των τιμών συγκριτικά με την αυτούσια σειρά τιμών , παρουσιάζουμε συνοπτικά τα αποτελέσματα. Υπενθυμίζουμε ότι και το άθροισμα των παραγόντων $-\ln(v_i)-u_i^2/v_i$ είναι ο παράγοντας που δείχνει το πόσο πιθανή είναι η συγκεκριμένη λύση. Τα αποτελέσματα φαίνονται παρακάτω

Εκτίμηση τριών παραμέτρων α, β και ω	Παράγων μεγιστοποίησης $\Sigma(-\ln(v_i)-u_i^2/v_I)$
1325 τιμές σε ενιαία σειρά	11818.52
1325 τιμές σε δύο τμήματα (1-762, 562-1325)	11834.18
1325 τιμές σε τρία τμήματα (1-500, 400-900, 800-1325)	11840.72

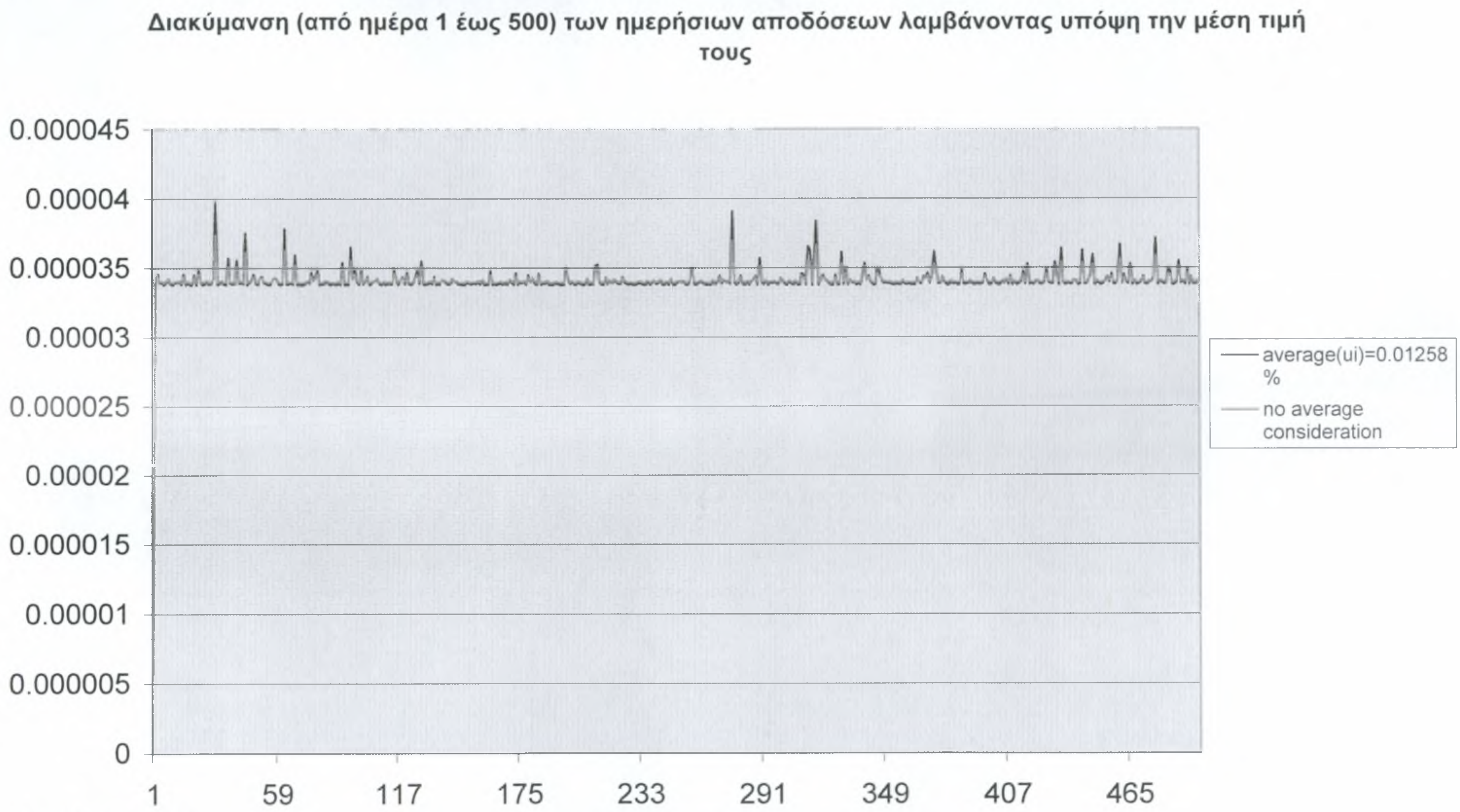
Εκτίμηση δύο παραμέτρων α, β (variance targeting) Η παράμετρος ω υπολογίζεται ω=γV, όπου γ=1-α-β	Παράγων μεγιστοποίηση $\Sigma(-\ln(v_i)-u_i^2/v_I)$
1325 τιμές σε ενιαία σειρά	11818.23
1325 τιμές σε δύο τμήματα (1-762, 562-1325)	11832.43
1325 τιμές σε τρία τμήματα (1-500, 400-900, 800-1325)	11842.19

Επί των ανωτέρω αποτελεσμάτων παρατηρούμε ότι υπάρχει μια μικρή και οριακή αύξηση του παράγοντα μεγιστοποίησης όταν εφαρμόζουμε την εκτίμηση των τριών παραμέτρων (α, β και ω) έναντι της εκτίμησης των δύο παραμέτρων (α και β, δηλ. variance targeting). Η βελτίωση του παράγοντα μεγιστοποίησης, καθώς οι εξεταζόμενες περιοδοι αυξάνονται από μία σε δύο και κατόπιν σε τρείς, μπορεί να εξηγηθεί αν παρατηρήσουμε τις διαφορετικές τιμές των παραμέτρων α, β και ω για τις 3 περιπτώσεις. Βλέπουμε δηλαδή ότι π.χ. στην περίπτωση των τριών τμηματικών σειρών τιμών η μέθοδος GARCH(1,1) δίνει α=β=0 δηλαδή σταθερή μεταβλητότητα V=ω διότι γ=1-α-β=1. Ενώ για άλλο τμήμα τα α, β και ω παίρνουν διαφορετικές τιμές. Στην περίπτωση της ενιαίας εξέτασης της σειράς τιμών τα α, β και ω που υπολογίζονται μέσω της διαδικασίας μεγιστοποίησης εφαρμόζονται σε όλο το σύνολο των τιμών. Είναι δυνατόν όμως για ορισμένα τμήματα του συνόλου τιμών, οι παράμετροι α, β και ω να μην είναι οι 'κατάλληλες', με αποτέλεσμα να αποδίδουν λανθασμένο υπολογισμό διακύμανσης. Το φαινόμενο αυτό μειώνεται σε ορισμένο βαθμό αν τμηματοποίησουμε το σύνολο των δεδομένων, όπως κάναμε παραπάνω σε 2 ή 3 ή και περισσότερες αν χρειάζεται χρονικές περιόδους. Αυτές οι χρονικές περίοδοι δεν είναι απαραίτητο να είναι ομοιόμορφες. Χρήσιμο, αν και όχι απαραίτητο, ωστόσο είναι να είναι επικαλυπτόμενες για να μπορεί να γίνει σύγκριση των αποτελεσμάτων της μιας περιόδου με τα αντίστοιχα της επόμενης περιόδου. Για την εξαγωγή των τιμών κατά την διάρκεια της επικάλυψης μπορεί να χρησιμοποιηθεί γραμμική παρεμβολή.

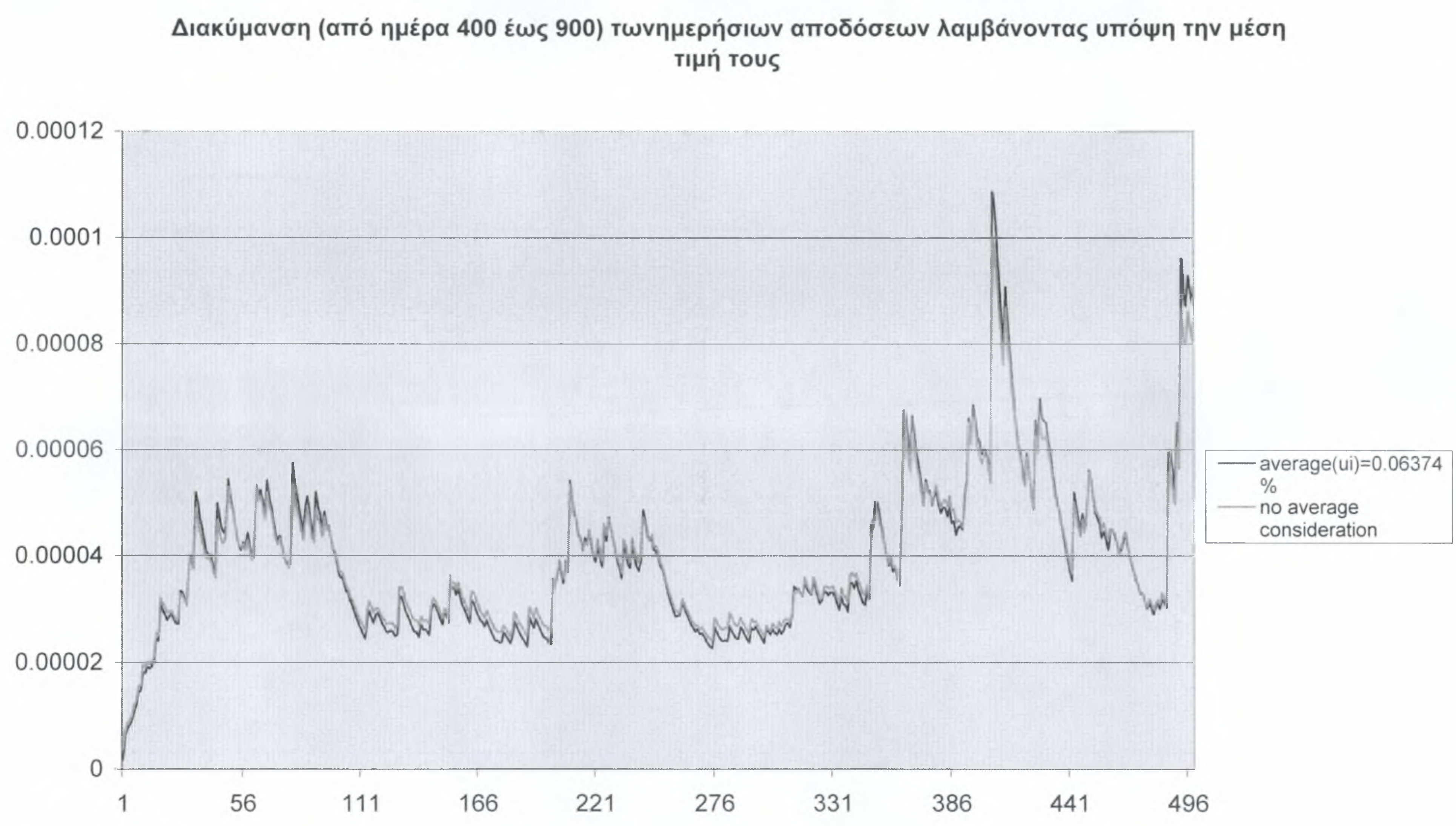
Ιβ4. Οπως είδαμε στο κεφάλαιο 3, για να εξάγουμε την εξίσωση (3.4) από την εξίσωση (3.2) κάναμε την υπόθεση ότι η μέση τιμή των αποδόσεων u_i είναι μηδέν. Εάν μελετάμε ημερήσιες αποδόσεις, τότε αυτή η υπόθεση είναι πράγματι κοντά στην πραγματικότητα. Εντούτοις εάν μελετάμε αποδόσεις ανά εβδομάδα ή μήνα τότε η μέση τιμή των αποδόσεων διαφέρει σημαντικά από το μηδέν και είναι απαραίτητο να την λάβουμε υπόψη μας. Αυτό είναι σχετικά εύκολο. Η μεταβλητή u_i θα αντικατασταθεί από την u_i-(Σu_i)/N όπου N είναι το πλήθος των u_i. Με αυτόν τον μετασχηματισμό, αν και εμείς μελετάμε μόνο ημερήσιες αποδόσεις, εκτελέσαμε τους υπολογισμούς τόσο για το ενιαίο σύνολο τιμών από 1-1325, όσο και ξεχωριστά για τις τρείς υποπεριόδους 1-500, 400-900 και 800-1325. Τα αποτελέσματα φαίνοντα στον παρακάτω πίνακα και ακόμη παραστατικότερα στα διαγράμματα 4.10, 4.11 , 4.12 και 4.13



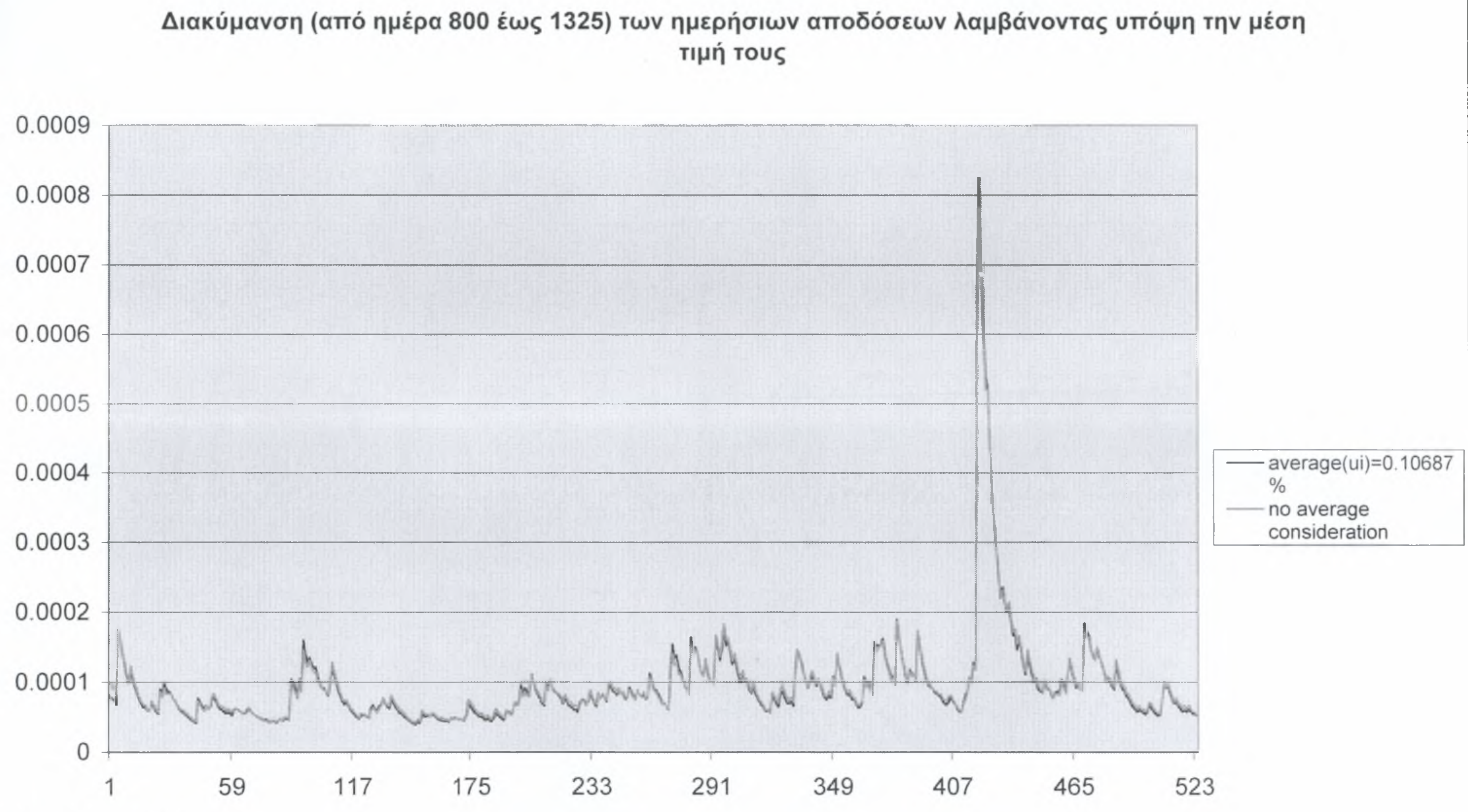
Διάγραμμα 4.10



Διάγραμμα 4.11



Διάγραμμα 4.12



Διάγραμμα 4.13

GARCH(1,1)	+ ui-average(ui)					
	LT V	α	β	ω	ML	Average(ui)
1-1325 απλό	12.70%	0.06213	0.924	8.9E-07	11818.52	
+ ui-average(ui)	12.75%	0.06539	0.92109	8.72E-07	11839.95	0.0007298
1-500 απλό	9.27%	0.005946	0	3.39E-05	4626.84	
+ ui-average(ui)	9.27%	0.010196	0	3.37E-05	4627.05	0.0001258
400-900 απλό	10.58%	0.051758	0.91570	1.444E-06	4579.33	
+ ui-average(ui)	10.76%	0.058252	0.91201	1.367E-06	4560.05	0.0006374
800-1325 απλό	15.74%	0.104548	0.84190	5.267E-06	4382.03	
+ ui-average(ui)	15.74%	0.110788	0.83526	5.302E-06	4391.29	0.0010687

Παρατηρούμε ότι οι μακροχρόνιες διακυμάνσεις που υπολογίστηκαν λαμβάνοντας υπόψη την πραγματική μέση τιμή των u_i, είναι είτε οι ίδιες είτε οριακά μεγαλύτερες από αυτές που υπολογίστηκαν θεωρώντας ότι η μέση τιμή των u_i είναι μηδέν. Θα περιμέναμε το αντίθετο, δηλαδή να είναι οριακά μικρότερες, αφού αφαιρείται η ποσότητα που αντιστοιχεί στην μέση τιμή των u_i. Η μόνη εξήγηση που μπορούμε να δώσουμε είναι ότι το παράδοξο αυτό φαινόμενο οφείλεται σε υπολογιστικές ατέλειες του solver.

Παρατηρούμε επίσης ότι η μέγιστη πιθανότητα που υπολογίζεται με την πραγματική μέση τιμή των u_i, είναι οριακά μεγαλύτερη ή οριακά μικρότερη από αυτήν που υπολογίστηκε θεωρώντας ότι η μέση τιμή των u_i είναι μηδέν.

Εφαρμόζοντας το GARCH(1,1) για να προβλέψουμε μελλοντική διακύμανση.

Αν αντικαταστήσουμε το γ με το ίσο του 1-α-β στην σχέση (3.10), τότε η εκτιμούμενη μεταβλητότητα για την ημέρα n είναι

$$\sigma_n^2 = (1-\alpha-\beta)V + \alpha u_{n-1}^2 + \beta\sigma_{n-1}^2$$

ή ισοδύναμα

$$\sigma_n^2 - V = \alpha(u_{n-1}^2 - V) + \beta(\sigma_{n-1}^2 - V)$$

Την ημέρα n+k που βρίσκεται στο μελλοντικό χρονικό διάστημα θα έχουμε

$$\sigma_{n+k}^2 - V = \alpha(u_{n+k-1}^2 - V) + \beta(\sigma_{n+k-1}^2 - V)$$

Η προσδοκώμενη τιμή για την u_{n+k-1}^2 είναι σ_{n+k-1}^2. Ετσι έχουμε

$$E[\sigma_{n+k}^2 - V] = (\alpha + \beta)E[\sigma_{n+k-1}^2 - V]$$

όπου το E δηλώνει προσδοκώμενη τιμή. Επαναλαμβάνοντας την παραπάνω ανάλυση θα έχουμε

$$E[\sigma_{n+k}^2 - V] = (\alpha + \beta)^k (\sigma_n^2 - V)$$

ή ισοδύναμα

$$E[\sigma_{n+k}^2] = V + (\alpha + \beta)^k (\sigma_n^2 - V) \qquad (3.15)$$

Στο μοντέλο EWMA ισχύει ότι α+β=1, οπότε η εξίσωση (3.15) δείχνει ότι η προσδοκώμενη τιμή ισούται με την τρέχουσα μεταβλητότητα. Εάν α+β<1, ο τελευταίος όρος της (3.15) γίνεται προοδευτικά μικρότερος καθώς το k αυξάνεται. Αυτό σημαίνει ότι η μεταβλητότητα, σύμφωνα με το μοντέλο GARCH όπου α+β<1, δείχνει τάση να προσεγγίζει το μέσο επίπεδο μεταβλητότητας V. Οσο η ημέρα, για την οποία θέλουμε να έχουμε πρόβλεψη της μεταβλητότητας, απέχει περισσότερο από την τρέχουσα ημέρα, τόσο η προσδοκώμενη τιμή της μεταβλητότητας προσεγγίζει περισσότερο στο μέσο επίπεδο μεταβλητότητας V.

Χρονική διάρθρωση διακύμανσης (Volatility term structure)

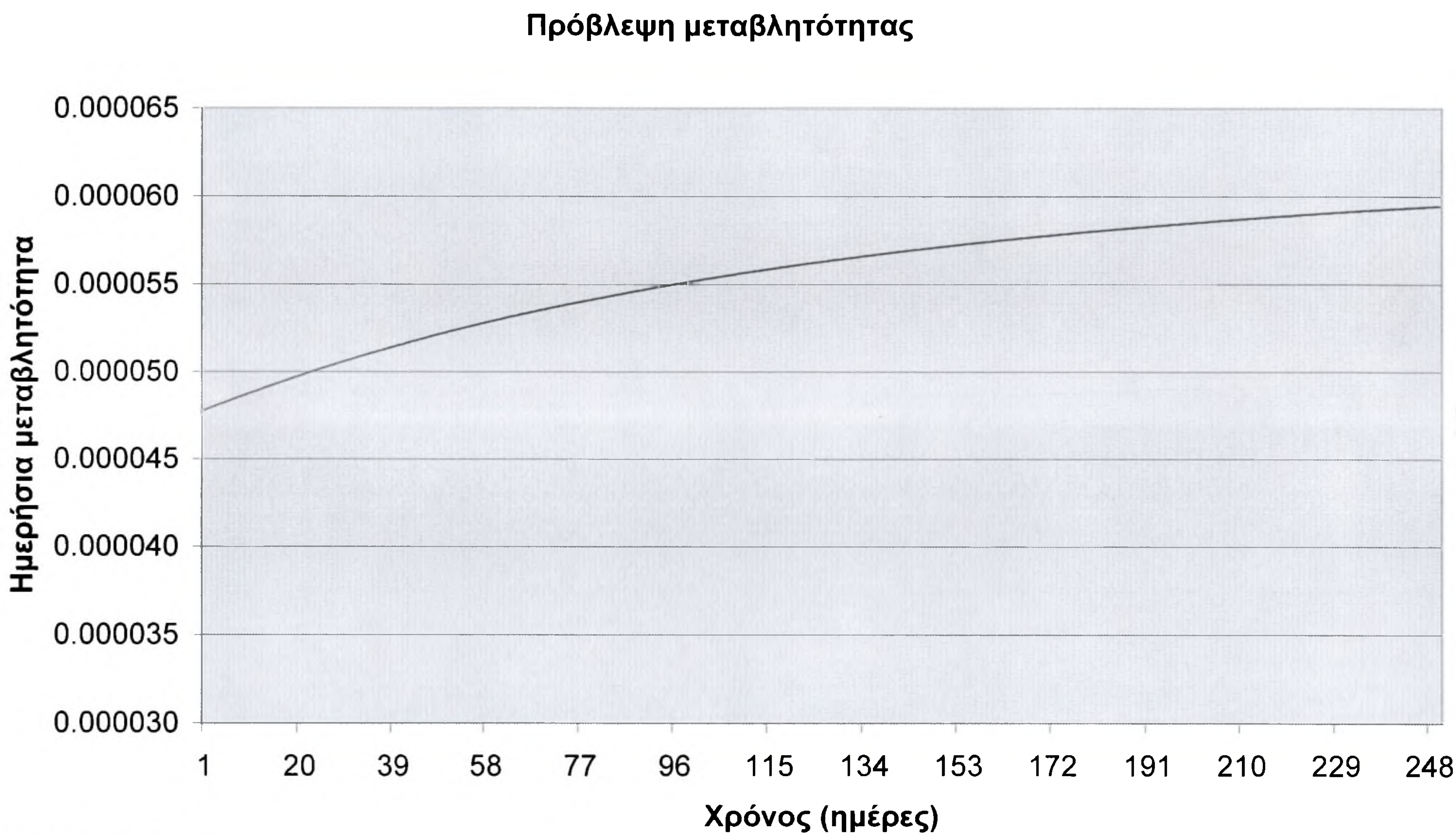
Ας θεωρήσουμε ένα δικαίωμα προαίρεσης που αρχίζει την ημέρα n και λήγει την ημέρα n+N. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση (3.15) για να υπολογίσουμε την προσδοκώμενη μεταβλητότητα κατά την διάρκεια της ζωής του δικαιώματος προαίρεσης ως

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} E[\sigma_{n+k}^{2}] \qquad (3.16)$$

Οσο μεγαλύτερη είναι η διάρκεια του δικαιώματος προαίρεσης τόσο η προσδοκώμενη μεταβλητότητα θα είναι πλησιέστερα στην V.

Εφαρμόζοντας την (3.16) μπορούμε να προβλέψουμε την μεταβλητότητα για οποιοδήποτε χρονικό διάστημα π.χ. για ένα έτος (δηλαδή περίπου 250 ημέρες χρηματιστηριακών συναλλαγών)., οπότε παίρνουμε τα αποτελέσματα που βλέπουμε στο διάγρ. 4.14.

Παρατηρούμε ότι η καμπύλη έχει ανοδική κλίση και τάση για να προσεγγίσει την τιμή της μακροχρόνιας μεταβλητότητας που στο παράδειγμά μας είναι 0.000064. Η ανοδική κλίση της καμπύλης εξηγείται από το γεγονός ότι η τιμή της μεταβλητότητας για την ημέρα 1325 έτυχε να είναι 0.000048 δηλαδή μικρότερη από την μακροχρόνια μεταβλητότητα, οπότε η τάση του μοντέλου να προσεγγίζει μακροπρόθεσμα την μακροχρόνια μεταβλητότητα είναι η αιτία που δίνει στο διάγραμμα την ανοδική κλίση. Εάν η μεταβλητότητα της τελευταίας ημέρας (1325) του υπο εξέταση χρονικού διαστήματος ήταν μεγαλύτερη από την μακροχρόνια μεταβλητότητα τότε η κλίση της καμπύλη θα ήταν καθοδική.



Διάγραμμα 4.14

5. Πρόβλεψη αποδόσεων

Η ιδιότητα των τιμών των μετοχών να έχουν κατανομή lognormal μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να δώσει την απόδοση της μετοχής μεταξύ του χρόνου 0 και T, εκφρασμένη ως ετήσιο επιτόκιο με συνεχή ανατοκισμό. Εστω ότι το επιτόκιο αυτό το ονομάζουμε η. Τότε θα ισχύει

$$S_T = S_0 e^{\eta \mathrm{T}}$$

οπότε

$$\eta = \frac{1}{\mathrm{T}} \ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right) \qquad (5.1)$$

Τότε, επειδή όπως θα δούμε παρακάτω ο όρος $\ln(S_T/S_0)$ ακολουθεί την κανονική κατανομή, και η απόδοση η θα ακολουθεί την ίδια κατανομή με μέση τιμή $\mu-\sigma^2/2$ και τυπική απόκλιση $\sigma/\sqrt{T}$ (βλ. εξίσωση 6.10)

Μοντέλο πρόβλεψης αποδόσεων με γραμμική παλινδρόμηση

IIα. Με βάση τις τιμές των αποδόσεων που προκύπτουν για το κυλιόμενο χρονικό διάστημα 400 ημερών, εφαρμόζουμε το μοντέλο γραμμικής παλινδρόμησης και εξάγουμε προβλεπόμενες τιμές για 10 ημέρες , δηλαδή , από τον διάστημα 560-959 για την ημέρα 960, από το διάστημα 570-969 για την ημέρα 970, από το διάστημα 580-979 για την ημέρα 980 , ..., και τέλος από το διάστημα 650-1049 για την ημέρα 1050.
Το κλασσικό μοντέλο της γραμμικής παλινδρόμησης για την περίπτωσή μας , όπου έχουμε τις 400 τιμές των ui, είναι το εξής

$U_t=a+bt$

όπου U_t είναι η πρόβλεψη του μοντέλου για την μεταβλητή u την χρονική στιγμή t, και τα a και b είναι υπολογισμένα έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται το άθροισμα των τετραγώνων μεταξύ των πραγματικών και των προβλεπομένων τιμών $\Sigma(u_t-U_t)^2$.

Οπως βλέπουμε και από τον παρακάτω πίνακα το μοντέλο της γραμμικής παλιδρόμησης δίνει πολύ μικρό συντελεστή συσχέτισης, με μικρότερη τιμή ρ^2 0.000007 και μέγιστη τιμή 0.001964521, πράγμα που σημαίνει ότι δεν εξηγεί παρά ελάχιστο μέρος των παρατηρούμενων τιμών.

Στην συνέχεια με τις ήδη γνωστές τιμές των a και b, υπλογίζουμε τις προβλεπόμενες τιμές των αποδόσεων για 10 ημέρες και συγκεκριμένα για τις ημέρες 960, 970, 980, ..., 1040, 1050.

Δεδομένα από διάστημα	Πρόβλεψη για ημέρα	a	b	ρ^2	Πρόβλεψη από γραμμική παλινδρόμηση
560-959	960	0.002136949	-1.6322E-06	0.000859495	0.000570034
570-969	970	0.002429132	-2.04398E-06	0.001342711	0.000446472
580-979	980	0.001616543	-8.618E-07	0.000235136	0.00077198
590-989	990	0.000720905	3.26635E-07	3.34984E-05	0.001044274
600-999	1000	0.001372078	-6.79226E-07	0.000139809	0.000692852
610-1009	1010	0.000537225	4.44131E-07	6.03352E-05	0.000985798
620-1019	1020	0.000763931	1.56305E-07	7.25494E-06	0.000923362
630-1029	1030	0.000589168	3.41046E-07	3.42549E-05	0.000940445
640-1039	1040	-0.000632765	1.78386E-06	0.00091777	0.001222448
650-1049	1050	-0.00130832	2.6349E-06	0.001964521	0.001458324

Μοντέλο πρόβλεψης αποδόσεων με αυτοπαλινδρόμηση AR(1) και GARCH(1,1)

ΙΙβ. Εστω ότι ένα μοντέλο για την περιγραφή της συμπεριφοράς του ημερήσιου ποσοστού απόδοσης μιάς μετοχής ή ενός δείκτη είναι το παρακάτω αυτοπαλινδρομούμενο μοντέλο πρώτης τάξης , AR(1)

$$U_n = k_0 + k_1 u_{n-1} + \varepsilon_n$$

Τότε η διαφορά μεταξύ της πραγματικής u_n και της υπολογισμένης τιμής U_n θα είναι ίση με

$$\varepsilon_n = u_n - U_n$$

όπου το ε_n δεν ακολουθεί κατ'ανάγκη κάποια κατανομή. Τα δε k_0 και k_1 υπολογίζονται από το solver στην ίδια υπολογιστική διαδικασία με την οποία υπολογίζονται τα ω, α και β με την μόνη διαφορά ότι όπου υπήρχε u_i , τώρα έχει αντικατασταθεί με ε_i. Δηλαδή για το ε_i θεωρούμε ότι η μεταβλητότητά του ακολουθεί μια διακύμανση που την παρακολουθούμε με το GARCH μοντέλο.

Εκτελώντας τους υπολογισμούς με το solver (λαμβάνοντας υπόψη μας μόνο τις τιμές για εκάστοτε διάστημα των 400 ημερών) έχουμε

Δεδομένα από διάστημα	Πρόβλεψη για ημέρα	k_0	k_1	α	β	ω	Πρόβλεψη τιμής
560-959	960	0.00094891	0.07920388	0.05996594	0.84369685	4.048E-06	0.00115634
570-969	970	0.00076996	0.07881170	0.05345501	0.90961181	1.6900E-06	0.00070255
580-979	980	0.00174266	0.09699481	0.06582445	0.87110473	2.9075E-06	0.00195139
590-989	990	0	0.09618061	0.06543740	0.76923795	7.2206E-06	-0.0001221
600-999	1000	1.3764E-09	0.09770359	0.06706916	0.88684558	2.0440E-06	-0.0015036
610-1009	1010	1.3764E-09	0.09775740	0.06707968	0.88560440	2.2994E-06	0.00012546
620-1019	1020	1.3764E-09	0.09786877	0.06714886	0.91067001	1.1164E-06	1.2899E-06
630-1029	1030	0.00095534	0.14800599	0.09264461	0.78044197	5.9702E-06	-0.0001011
640-1039	1040	0.00094232	0.14650828	0.09358835	0.89266914	1.1365E-06	0.00017597
650-1049	1050	0.00092543	0.14590079	0.09080256	0.90078243	9.9718E-07	0.00125314

Στο παρακάτω πίνακα συγκρίνουμε τις προβλέψεις από τα μοντέλα αφενός μεν της γραμμικής παλινδρόμησης, αφετέρου δε της αυτοπαλινδρόμησης με GARCH(1,1), με τις πραγματικές τιμές. Η σύγκριση γίνεται με κριτήριο τον συντελεστή συσχέτισης και το άθροισμα των τετραγώνων των αποκλίσεων.

	Πραγματική τιμή	Πρόβλεψη από γραμμική παλινδρόμηση	Σφάλμα της γραμμικής παλινδρόμησης	Πρόβλεψη από μοντέλο AR(1) και GARCH(1,1)	Σφάλμα μοντέλου AR(1) και GARCH(1,1)
960	0.00366264	0.00057003	-0.00309	0.00115634	-0.00251
970	0.006234841	0.00044647	-0.00579	0.00070255	-0.00553
980	0.006496793	0.00077198	-0.00572	0.00195139	-0.00455
990	0.002675497	0.00104427	-0.00163	-0.0001221	-0.00280
1000	-0.000946074	0.00069285	0.00164	-0.0015036	-0.00056
1010	-0.003884829	0.00098579	0.00487	0.00012546	0.00401
1020	0.012310569	0.00092336	-0.01139	1.2899E-06	-0.01231
1030	0	0.00094044	0.00094	-0.0001011	-0.00010
1040	0.005296462	0.00122244	-0.00407	0.00017597	-0.00512
1050	-0.00790543	0.00145832	0.00936	0.00125314	0.00916
Συντ/τής συσχέτισης ρ=		-0.455520572		0.084859784	
Αθροισμα τετραγώνων αποκλίσεων $\Sigma\ \Delta u^2$ =		0.000339743		0.000343396	

Οπως μας δείχνουν οι συντελεστές συσχέτισης των γραμμικών μοντέλων, υπάρχει σχεδόν μηδενική εξήγηση της συμπεριφοράς των ημερησίων αποδόσεων από ένα τέτοιο γραμμικό μοντέλο. Για τον λόγο αυτό η προσπάθεια πρόβλεψης ημερήσιων αποδόσεων με βάση μοντέλο γραμμικής παλινδρόμησης που παρουσιάζουμε στην εργασία αυτή για δέκα διαφορετικές ημέρες, μας δίνει τον αρνητικό συντελεστή συχέτισης (μόλις –0.45).

Από την αλλη μεριά, η εφαρμογή του μοντέλου αυτοπαλινδρόμησης σε συνδυασμό με την μέθοδο GARCH μας δίνει τουλάχιστον ικανοποιητικά αποτελέσματα. Λέμε τουλάχιστον διότι ο συντελεστής συσχέτισης (0.085) δεν μπορεί μεν να θεωρηθεί ικανοποιητικός σε απόλυτες τιμές, συγκρινόμενος όμως με τον αρνητικό συντελεστή συσχέτισης που δίνει το μοντέλο γραμμικής παλινδρόμησης, δείχνει ότι ο συνδυασμός AR(1) και GARCH παράγει προβλέψεις που βρίσκονται πλησιέστερα στην πραγματικότητα.

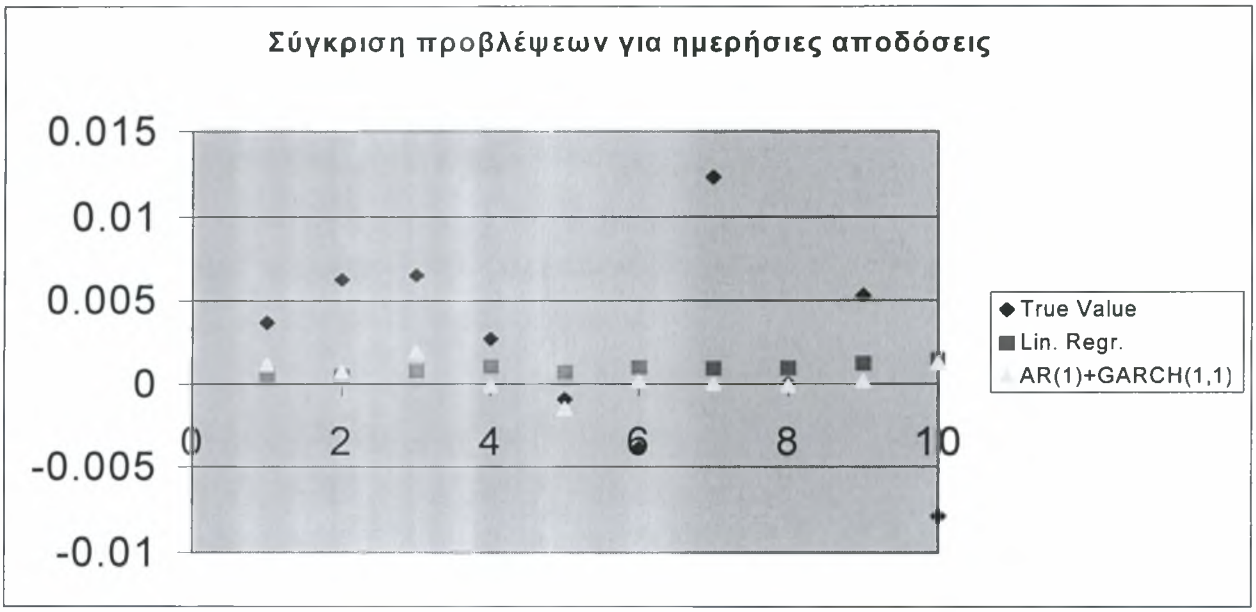
Το δείγμα των δέκα τιμών είναι μικρό για να υποθέσουμε ότι ο συνδυασμός AR(1) και GARCH είναι λειτουργεί ικανοποιητικά σε όλες τις περιπτώσεις. Εξάλλου η δσκολία του εγχειρήματος πρόβλεψης ημερήσιων αποδόσεων γίνονται αντιληπτές από το ότι οι πρακτικές συνέπειες ενός μοντέλου που προβλέπει ικανοποιητικά τις ημερήσιες προβλέψεις θα είχε από εντυπωσιακά έως ανατρεπτικά αποτελέσματα στην λειτουργία των αγορών, πέραν του ότι ένα τέτοιο μοντέλο θα έκανε πλούσιο αυτόν που θα το εφάρμοζε.

Με τις σκέψεις αυτές προχωρούμε στις συγκρίσεις μεταξύ των προβλέψεων από τα δύο μοντέλα (αφενός μεν της γραμμικής παλινδρόμησης και αφετέρου δε της αυτοπαλινδρόμησης με GARCH) και των πραγματικών τιμών.

Από τις δέκα συγκρίσεις παρατηρούμε ότι σε 7 περιπτώσεις η πρόβλεψη από το μοντέλο AR(1) και GARCH βρίσκεται πλησιέστερα στην πραγματική τιμή από ότι η πρόβλεψη από το μοντέλο γραμμικής παλινδρόμησης ενώ μόνο σε 3 περιπτώσεις συμβαίνει το αντίθετο

Από τις ως άνω παρατηρήσεις, συμπεραίνουμε ότι παρά την δυσκολία πρόβλεψης ημερήσιων αποδόσεων, το μοντέλο αυτοπαλινδρόμησης AR(1) σε συνδυασμό με την μέθοδο GARCH δίνει ρεαλιστικότερα αποτελέσματα από τό μοντέλο γραμμικής παλινδρόμησης.

Παραστατικότερα βλέπουμε τα αποτελέσματα στο παρακάτω διάγραμμα.



6. Αποτίμηση δικαιωμάτων προαίρεσης (options)

Το κεφάλαιο αυτό εξετάζει τους παράγοντες που επιδρούν στην αποτίμηση των δικαιωμάτων προαίρεσης και επικεντρώνει την προσοχή στον παράγοντα διακύμανση. Παρουσιάζονται οι διάφοροι τρόποι αποτίμησης και αναλύεται λεπτομερέστερα ένας από αυτούς, από τους συχνότερα χρησιμοποιημένος, η προσομοίωση Monte Carlo.

Δικαιώματα προαίρεσης – Βασικές έννοιες

Τα δικαιώματα προαίρεσης, ανήκουν σε μια μεγάλη κατηγορία χρηματοοικονομικών εργαλείων που ονομάζονται παράγωγα. Τα παράγωγα ονομάζονται έτσι ακριβώς επειδή έχουν παραχθεί δηλαδή εξαρτώνται από την αξία άλλων υποκείμενων μεταβλητών. Τα τελευταία χρόνια τα παράγωγα παρουσιάζουν ολοένα και αυξανόμενο ενδιαφέρον στις διεθνείς χρηματαγορές. Τεράστια ποσά διακινούνται καθώς γίνονται αγοραπωλησίες σε συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης και δικαιώματα προαίρεσης στα διεθνή χρηματιστήρια και όχι μόνο εκεί.
Πολύ συχνά οι υποκείμενες μεταβλητές των παραγώγων είναι οι ίδιες οι τιμές των υπο συναλλαγή στοιχείων. Είναι δυνατόν ωστόσο, τα παράγωγα να εξαρτώνται από σχεδόν κάθε είδους μεταβλητή, από την τιμή των χοίρων μέχρι το ύψος του χιονιού σε ένα συγκεκριμένο χειμερινό κέντρο διακοπών.
Τα δικαιώματα προαίρεσης (options) σε μετοχές εισήχθησαν για πρώτη φορά σε χρηματιστήριο το 1973. Από τότε υπάρχει μια διαρκώς αυξανόμενη ανάπτυξή τους σε όλες τις χρηματιστηριακές αγορές. Επιπλέον μεγάλος όγκος συναλλαγών πραγματοποιείται και εκτός χρηματιστηρίων, από τράπεζες ή από άλλους χρηματοοικονομικούς οργανισμούς. Οι υποκείμενες αξίες μπορεί να είναι μετοχές, δείκτες μετοχών, συναλλαγματικές ισοτιμίες , τιμές αγαθών, και τιμές συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης.
Υπάρχουν δύο βασικοί τύποι δικαιωμάτων προαίρεσης (options). To call option δίνει το δικαίωμα (αλλά όχι την υποχρέωση) στον φέροντα να αγοράσει το υποκείμενο στοιχείο σε μια συγκεκριμένη ημέρα προς μια συγκεκριμένη τιμή. To put option δίνει το δικαίωμα (αλλά όχι την υποχρέωση) στο φέροντα να πουλήσει το υποκείμενο στοιχείο σε μια συγκεκριμένη ημέρα προς μια συγκεκριμένη τιμή. Η τιμή αυτή

ονομάζεται τιμή εξάσκησης (exercise price or strike price). Η ημερομηνία που αναγράφεται στο συμβόλαιο του option ονομάζεται ημερομηνία λήξης ή ληκτότητα. Τα options Αμερικανικού τύπου μπορούν να εκτελεστούν οποτεδήποτε μέχρι την ημερομηνία λήξης. Τα options Ευρωπαϊκού τύπου μπορούν να εκτελεστούν μόνο την ίδια την ημέρα λήξης. Τα περισσότερα options είναι Αμερικανικού τύπου και ένα συμβόλαιο option αναφέρεται συνήθως σε συμφωνία να αγορασθούν ή να πωληθούν 100 μετοχές. Τα options Ευρωπαϊκού τύπου είναι συνήθως ευκολότερο να αναλυθούν από ότι τα Αμερικανικού τύπου και ορισμένες ιδιότητες των options Αμερικανικού τύπου εξάγονται με την βοήθεια των αντίστοιχων options Ευρωπαϊκού τύπου.
Θα πρέπει να τονιστεί ότι ένα option δίνει στον κάτοχο το δικαίωμα να κάνει κάτι. Ο κάτοχος δεν είναι υποχρεωμένος να εξασκήσει αυτό το δικαίωμα. Αυτό το χαρακτηριστικό διαφοροποιεί τα options από τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης (futures), όπου ο κάτοχος είναι υποχρεωμένος να αγοράσει ή να πουλήσει το υποκείμενο στοιχείο.
Υπάρχουν δύο πλευρές σε κάθε συμβόλαιο option. Η μια πλευρά είναι αυτή του αγοραστή που λέγεται και long position. Η άλλη θέση είναι η θέση αυτού που πούλησε το option που λέγεται και short position. Ο πωλητής ενός option παραλαμβάνει μετρητά εξ αρχής αλλά έχει και δυνητικές υποχρεώσεις αργότερα. Το κέρδος του πωλητή είναι η ζημία του αγοραστή του option, και φυσικά ισχύει και το αντίστροφο.

Υπάρχουν τέσσερις βασικές θέσεις αναφορικά με τα options

- αγορά ενός call option
- αγορά ενός put option
- πώληση ενός call option
- πώληση ενός put option

Τα παράγωγα αποτελούν ελκυστικά χρηματοοικονομικά εργαλεία για επενδυτές που έχουν τουλάχιστον έναν από τους παρακάτω σκοπούς

- να αντισταθμίσουν τον κίνδυνο του χαρτοφυλακίου τους
- να κερδοσκοπήσουν αναλαμβάνοντας κίνδυνο
- να κερδοσκοπήσουν από ασφαλή θέση

Εξηγούμε παρακάτω τον τρόπο με τον οποίο μπορεί να επιτευγχθεί κάθε ένας από τους παραπάνω σκοπούς.

Αντιστάθμιση κινδύνου.

Ας θεωρήσουμε έναν επενδυτή που κατέχει τον Αύγουστο 500 μετοχές IBM. Η τρέχουσα τιμή της μετοχής έστω ότι είναι $102. Ο επενδυτής ανησυχεί διότι η τιμή της μετοχής μπορεί να πέσει κατακόρυφα τους επόμενους δύο μήνες και αναζητά τρόπο να προστατευθεί. Θα μπορούσε να αγοράσει put options Οκτωβρίου ώστε να πουλήσει τις 500 μετοχές του με τιμή εξάσκησης τα $100. Επειδή κάθε συμβόλαιο option αφορά 100 μετοχές θα έπρεπε να αγοράσει 5 συμβόλαια. Εάν η quoted τιμή του συγκεκριμένου option συμβολαίου ήταν $4, τότε κάθε συμβόλαιο θα κόστιζε 4X100=$400 και το συνολικό κόστος της αντιστάθμισης θα ήταν 5X400=$2000. Η ενέργειάτου αυτή θα κόστιζε μεν $2000 αλλά έχει την εγγύηση ότι μπορεί να πουλήσει τις μετοχές του για τουλάχιστον $100 ανά μετοχή. Εάν η τιμή της μετοχής IBM πέσει κάτω από τα $100 τότε μπορεί ο επενδυτής να ασκήσει το δικαίωμα και να εισπράξει τα $50.000 από την πώληση των μετοχών. Εάν λάβουμε υπόψη και το κόστος ανιστάθμισης τότε τα έσοδά του θα είναι $48.000. Αν βέβαια η τιμή της μετοχής IBM δεν πέσει κάτω από τα $100 τότε δεν ασκεί το δικαίωμα και το option λήγει χωρίς καμιά άλλη διαδικασία. Φυσικά στην περίπτωση αυτή διατηρείται η αξία των μετοχών του πάνω από τα $50.000 (ή $48.000 αν λάβουμε υπόψη και το κόστος των options).

Με το τρόπο αυτό τα options προσφέρουν ασφάλιση. Δίνουν την δυνατότητα στους επενδυτές να προστατευθούν από ανεπιθύμητες κινήσεις των τιμών των μετοχών, ταυτόχρονα με την δυνατότητα να επωφεληθούν από τις επιθυμητές κινήσεις των ιδίων μετοχών. Για τον λόγο αυτό καταβάλεται εξ αρχής η πληρωμή του option.

Κερδοσκοπία με ανάληψη ρίσκου.

Σε αντίθεση με αυτούς που χρησιμοποιούν τα options για να αντισταθμίσουν τον κίνδυνο από ανεπιθύμητες μεταβολές των τιμών, οι κερδοσκόποι επιθυμούν οι ίδιοι να λάβουν θέση για το προς τα που θα κινηθεί η αγορά. Στοιχηματίζουν δηλαδή είτε ότι η αγορά θα κινηθεί ανοδικά, είτε ότι θα πέσει.

Ας θεωρήσουμε έναν κερδοσκόπο που τον Σεπτέμβριο θέλει να αγοράσει μετοχές Exxon. Δηλαδή ο κερδοσκόπος θέλει να είναι σε θέση να κερδίσει χρήματα αν η τιμή της μετοχής ανεβεί. Υποθέτουμε ότι η τρέχουσα τιμή της μετοχής είναι $78 και ότι η τιμή ενός call Δεκεμβρίου με τιμή εξάσκησης $80 είναι $3. Ο παρακάτω πίνακας δίνει δύο εναλλακτικές λύσεις αν ο κερδοσκόπος θέλει να επενδύσει $7.800.

	Τιμή μετοχής για τον Δεκέμβριο	
Στρατηγική	$70	$90
Αγορά μετοχών	($800)	$1.200
Αγορά call option	($7.800)	$18.200

Σύγκριση κερδών (ζημιών) μεταξύ δύο εναλλακτικών στρατηγικών από τοποθέτηση $7.800 με σκοπό την κερδοσκοπία στην μετοχή Exxon.

Η πρώτη στρατηγική αφορά την αγορά 100 μετοχών. Η δεύτερη στρατηγική αφορά την αγορά 2600 call options (δηλ. 26 συμβολαίων call option) της Exxon.
Ας υποθέσουμε ότι η διαίσθηση του κερδοσκόπου είναι σωστή και ότι η τιμή της Exxon ανεβαίνει στα $90 τον Δεκέμβριο. Από την πρώτη στρατηγική θα έχει καθαρά κέρδη 100Χ(90-78)=$1.200.
Εντούτοις η δεύτερη στρατηγική είναι προτιμότερη. Ενα call option με τιμή εξάσκησης $80 δίνει μια πρόσοδο $10, διότι το option επιτρέπει κάτι που αξίζει $90 να μπορεί να αγοραστεί $80. Η συνολική πρόσοδος από όλα τα options θα είναι 2.600Χ10=$26.000. Αφαιρώντας το εξ αρχής κόστος των options έχουμε 26000-7800=$18.200. Για τον λόγο αυτόν, η στρατηγική αγοράς options είναι πάνω από 15 φορές καλύτερη από την στρατηγική αγοράς μετοχών.
Τα options επαυξάνουν επίσης και τις δυνητικές απώλειες. Ας υποθέσουμε ότι η τιμή της μετοχής πέφτει στα $70 τον Δεκέμβριο. Τότε η πρώτη στρατηγική θα οδηγούσε σε απώλειες 100(78-70)=$800. Από την άλλη μεριά επειδή το option λήγει ανεκτέλεστο, η ζημία από τα options ανέρχεται σε $7.800 που είναι το κόστος που εξ αρχής πληρώθηκε για τα options.
Οπως είναι φανερό τα options δίνουν την δυνατότητα μόχλευσης. Για μια συγκεκριμένη επένδυση η χρήση των options μεγενθύνει τα οικονομικά αποτελέσματα.. Τα καλά αποτελέσματα γίνονται ακόμα καλύτερα και τα άσχημα αποτελέσματα γίνονται ακόμη χειρότερα. Ειδικά για θέσεις long όμως, ανεξάρτητα από το πόσο άσχημα θα πάνε τα πράγματα, η μέγιστη ζημιά μπορεί να ανέλθει στο ποσό που εξ αρχής πληρώθηκε.

Κερδοσκοπία από ασφαλή θέση (arbitrage)
Αυτού του είδους η κερδοσκοπία αφορά την εξασφάλιση κέρδους εισέρχοντας ταυτόχρονα σε συναλλαγές σε δύο ή περισσότερες αγορές.

Ας θεωρήσουμε ότι μια μετοχή διαπραγματεύεται σε δύο χρηματιστήρια, σε αυτό της Νέας Υόρκης και σε αυτό του Λονδίνου. Ας υποθέσουμε ότι ή τιμή της μετοχής στην Νέα Υόρκη είναι $172 και στο Λονδίνο &100 , με την συναλλαγματική ισοτιμία να είναι $1,75 ανά αγγλική λίρα. Ενας κερδοσκόπος θα μπορούσε να αγοράσει ταυτόχρονα 100 μετοχές στην Νέα Υόρκη και να τις πουλήσει στο Λονδίνο και να αποκομίσει ένα ασφαλές κέρδος 100 X [($1.75X100) - $172] = $300 αν δεν λάβουμε υπόψη κόστη μετατροπών. Εντούτοις τα κόστη μετατροπών για μεγάλους χρηματοοικονομικούς οργανισμούς είναι σχετικά μικρά τόσο στην αγορά μετοχών όσο και στην αγορά χρήματος.

Βέβαια κατάστάσεις όπως αυτή που περιγράφεται παραπάνω δεν μπορεί να διατηρηθούν για πολύ χρόνο. Καθώς οι κερδοσκόποι θα αγοράζουν μετοχές στηνΝέα Υόρκη οι δυνάμεις ζήτησης και προσφοράς θα προκαλέσουν άνοδο της τιμής της μετοχής σε δολλάρια. Κατά παρόμοιο τρόπο καθώς θα πωλούν μετοχές στο Λονδίνο, η τιμή της μετοχής εκφρασμένη σε αγγλικές λίρες θα πέσει. Πολύ γρήγορα οι δύο τιμές θα εξισωθούν στα επίπεδα που υποδεικνύει η συναλλαγματική ισοτιμία. Στην πραγματικότητα είναι η ύπαρξη αυτών των κερδοσκόπων που κάνει μικρή την πιθανότητα διαφορών μεταξύ των τιμών μετοχών σε δολλάρια και σε αγγλικές λίρες. Γενικεύοντας μπορούμε να πούμε ότι ακριβώς η ύπαρξη κερδοσκόπων στην πράξη σημαίνει ελάχιστες ευκαιρίες για ασφαλή κερδοσκοπία.

Υποκείμενες μεταβλητές.

Options επί μετοχών (stock options). Είναι συνήθως Αμερικάνικου τύπου και τα συμβόλαια αφορούν πακέτα των 100 μετοχών.

Options επί συναλλαγματικών ισοτιμιών. Μπορούν να είναι Αμερικάνικου ή Ευρωπαϊκού τύπου επι ισοτιμιών δολλαρίου πρός γιέν, είτε δολλαρίου προς μάρκο κ.α.

Options επί δεικτών (index options). Υπάρχουν πολλά και διάφορα index options στις ΗΠΑ. Τα δύο περισσότερο γνωστά είναι αυτά που έχουν ως υποκείμενη μεταβλητή τον δείκτη SP100 και τον δείκτη SP500 και διαπραγματεύονται χρηματιστήριο δικαιώματων προαίρεσης του Σικάγο. Το option επί του SP500 είναι Ευρωπαϊκού τύπου ενώ το option επί του SP100 είναι Αμερικάνικου τύπου. Ενα συμβόλαιο αφορά την αγορά ή πώληση ποσού ίσου με 100 φορές τον δείκτη σε μια συγκεκριμένη τιμή εξάσκησης. Η τακτοποίηση της λήξης του option γίνεται μάλλον με μετρητά παρά με διακίνηση χαρτοφυλακίου. Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα ένα συμβόλαιο call option στον SP100 με τιμή εξάσκησης τα $980. Εάν εκτελεστεί όταν ο δείκτης βρίσκεται στα 992, τότε ο πωλητής του option θα πρέπει να πληρώσει στον κάτοχο του option (992-980)X100=$1.200. Η πληρωμή μετρητών υπολογίζεται με βάση την τιμή του δείκτη στο τέλος της ημέρας στην οποία εδόθη η εντολή εκτέλεσης. Οπως είναι φυσικό, οι συναλλασόμενοι περιμένουν συνήθως μέχρι το τέλος της ημέρας πριν να δώσουν σχετικές εντολές.

Ορολογία

Για κάθε μιά δεδομένη υποκείμενη μεταβλητή ανά πάσα στιγμή, είναι δυνατόν να υπάρχουν αρκετά διαφορετικά συμβόλαια option που να διαπραγματεύονται. Ας θεωρήσουμε μια μετοχή για την οποία υπάρχουν τέσσερις ημερομηνίες λήξης και πέντε τιμές εξάσκησης. Εάν διαπραγματεύονται call και put options με όλους τους συνδυασμούς ημερομηνιών λήξης και τιμών εξάσκησης τότε υπάρχουν συνολικά 40 διαφορετικά συμβόλαια. Ολα τα options του ιδίου τύπου (δηλ. call ή put) ονομάζονται κλάση ή τάξη . Για παράδειγμα, call option της IBM αποτελούν μία κλάση, ενώ put option της IBM αποτελούν μια άλλη κλάση. Μια σειρά options αποτελείται από όλα τα options της ίδιας κλάσης που λήγουν την ίδια ημερομηνία λήξης και έχουν την ίδια τιμή εξάσκησης. Με άλλα λόγια η σειρά option αναφέρεται σε ένα συγκεκριμένο συμβόλαιο που διαπραγματεύεται

Παράγοντες που επιδρούν στις τιμές των options

Υπάρχουν έξι παράγοντες που επηρεάζουν τις τιμές των options επί μετοχών

- η τρέχουσα τιμή της υποκείμενης μεταβλητής, δηλαδή της μετοχής
- η τιμή εξάσκησης
- ο χρόνος μέχρι την ημερομηνία λήξης, δηλαδή η διάρκεια του option
- η διακύμανση της τιμής της μετοχής
- το επιτόκιο άνευ κινδύνου
- τα μερίσματα που αναμένονται κατά την διάρκεια του option

Στην συνέχεια θα παρουσιάσουμε με ποιόν τρόπο επιδρούν ο κάθε ένας από τους παραπάνω έξι παράγοντες στην τιμή του option.

Παράγοντας	European Call	European Put	American Call	American Put
Τιμή μετοχής	+	-	+	-
Τιμής εξάσκησης	-	+	-	+
Διάρκεια ζωής	?	?	+	+
Διακύμανση	+	+	+	+
Επιτόκιο άνευ κινδύνου	+	-	+	-
Μερίσματα	-	+	-	+

Τιμή μετοχής και τιμή εξάσκησης

Εάν ένα option εκτελεστεί σε κάποια στιγμή στο μέλλον, τότε η πρόσοδος που αποδίδει ένα call option θα είναι το ποσό με το οποίο η τιμή μετοχής υπερβαίνει την τιμή εξάσκησης. Για τον λόγο αυτό τα call option γίνονται ακριβότερα όταν ανεβαίνει η τιμή της μετοχής και φθηνότερα ότν ανεβαίνει η τιμή εξάσκησης. Για ένα put option η πρόσοδος που θα αποδοθεί κατά την εκτέλεση θα είναι το ποσό με το οποίο η τιμή εξάσκησης υπερβαίνει την τιμή της μετοχής. Οπως δηλαδή γίνεται αντιληπτό τα put options συμπεριφέρονται με τον αντίθετο τρόπο από τα call option. Τα put options γίνονται φθηνότερα όταν ανεβαίνει η τιμή της μετοχής και ακριβότερα όταν ανεβαίνει η τιμή εξάσκησης.

Διάρκεια ζωής του option

Ας δούμε τη επίδραση της ημερομηνίας λήξης. Τόσο τα put όσο και call American options γίνονται ακριβότερα καθώς ο χρόνος έως την λήξη αυξάνει. Για να το καταλάβουμε αυτό ας θεωρήσουμε δύο option που διαφέρουν μόνο στην ημερομηνία λήξης. Ο κάτοχος του option με την μεγαλύτερη διάρκεια ζωής έχει όλες τις δυνατότητες να εξασκήσει το option που έχει και ο κάτοχος του option με την μικρότερη διάρκεια ζωής και κάτι παραπάνω. Για το λόγο αυτό το American option με την μεγαλύτερη διάρκεια αξίζει πάντοτε τουλάχιστον όσο και το American option με την μικρότερη διάρκεια ζωής.

Αντίθετα, τα Ευρωπαϊκά put και call options δεν γίνονται απαραιτήτως ακριβότερα εάν αυξηθεί η διάκρεια ζωής τους. Αυτό συμβαίνει διότι ο κάτοχος του option με την μεγαλύτερη διάρκεια ζωής δεν έχει όλες τις δυνατότητες εξάσκησης που έχει και ο κάτοχος του option με τη νμιρότερη διάρκεια ζωής. Ο κάτοχος του European option μπορεί να εξασκήσει το δικαίωμά του μόνο κατά την ημερομηνία λήξης του συμβολαίου. Ας θεωρήσουμε δύο European call options σε μια μετοχή, το ένα με ημερομηνία λήξης σε έναν μήνα και το άλλο με ημερομηνία λήξης σε δύο μήνες. Ας υποθέσουμε επίσης ότι η μετοχή αναμένεται να δώσει ένα μεγάλο μέρισμα σε ενάμισι μήνα. Το μέρισμα αυτό θα προκαλέσει πτώση της τιμής της μετοχής. Αυτό είναι δυνατόν να κάνει το option με την μιρκότερη διάρκεια ζωής να είναι ακριβότερο από το option με την μεγαλύτερη διάρκεια ζωής.

Διακύμανση

Η διακύμανση της τιμής της μετοχής, σ, ορίζεται έτσι ώστε σ Δt, να είναι η τυπική απόκλιση των αποδόσεων της μετοχής στο μικρό χρονικό διάστημα Δt. Αποτελεί ένα μέτρο του πόσο αβέβαιοι είμαστε για μελλοντικές αυξομειώσεις της τιμής της μετοχής. Καθώς η διακύμανση αυξάνεται, αυξάνεται και η πιθανότητα να πάει η τιμή της μετοχής πολύ υψηλά ή πολύ χαμηλά. Για το κάτοχο της μετοχής αυτά τα δύο ενδεχόμενα αλληλοαναιρούνται. Εντούτοις αυτό δεν συμβαίνει με τον κάτοχο του call ή του put option. Ο κάτοχος του call ωφελείται από ανόδους της τιμής της μετοχής χωρίς να αναλαμβάνει τον κίνδυνο από μια πιθανή πτώση της τιμής της μετοχής διότι το περισσότερο που έχει να χάσει είναι το ποσό που πλήρωσε για να αγοράσει το call option. Με παρόμοιο τρόπο ο κάτοχος ενός put option ωφελείται όταν η τιμή της μετοχής πέφτει χωρίς να διακινδυνεύει τίποτα σε περίπτωση που η τιμή της μετοχής ανέβει. Για τους λόγους αυτούς η τιμή τόσο των call όσο και των put options ανεβαίνει εάν η διακύμανση αυξάνεται.

Επιτόκιο άνευ κινδύνου

Το επιτόκιο άνευ κινδύνου επηρεάζει την τιμή του option με ένα λιγότερο προφανή τρόπο. Καθώς τα επικόκια σε μια οικονομία ανεβαίνουν, οι αναμενόμενοι ρυθμοί αύξησης των τιμών των μετοχών τείνουν να ανέβουν και αυτοί. Εντούτοις η παρούσα αξία κάθε μελλοντικής χρηματοροής που θα εισπράξει ο κάτοχος ενός option θα μειώνεται. Αυτά τα δύο φαινόμενα τείνουν στο να μειώσουν την τιμή ενός put option. Δηλαδή η τιμή των put options μειώνεται καθώς τα επιτόκια αυξάνονται. Στην περίπτωση των call option το πρώτο φαινόμενο τείνει να αυξήσει την τιμή του option ενώ το δεύτερο φαινόμενο τείνει να μειώσει την τιμή του option. Μπορεί να αποδειχτεί ότι το πρώτο φαινόμενο πάντα υπερισχύει του δεύτερου, δηλαδή η τιμή ενός call option πάντα αυξάνεται καθώς τα επιτόκια αυξάνονται.

Θα πρέπει να τονιστεί ότι τα παραπάνω ισχύουν εάν θεωρήσουμε όλα τα άλλα δεδομένα σταθερά. Στη νπράξη όταν τα επιτόκια αυξάνονται (ή πέφτουν) τότε οι τιμές των μετοχών τείνουν να πέσουν (ή να αυξηθούν αντίστοιχα). Η τελική επίδραση της μεταβολής του επιτοκίου στην μεταβολή της τιμής της μετοχής μπορεί να είναι διαφορετική από αυτή που είπαμε παραπάνω.

Μερίσματα

Τα μερίσματα επιδρούν με τρόπο τέτοιο ώστε να μειώνεται η τιμή της μετοχής κατά την ημέρα αποκοπής του μερίσματος. Αυτό είναι αρνητικό για για την τιμή των call options και θετικό για την τιμή των put options.

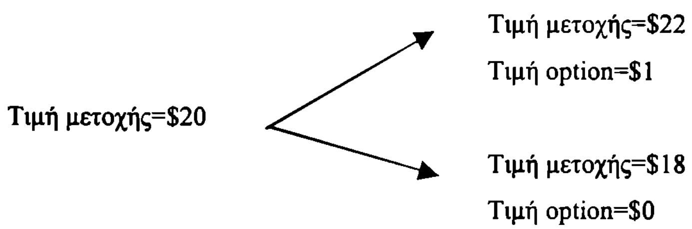
Μέθοδοι αποτίμησης δικαιωμάτων προαίρεσης (options)

Διωνυμικά δένδρα (binomial trees)

Μια χρήσιμη και πολύ διαδεδομένη τεχνική για την αποτίμηση ενός option σε μετοχή είναι η ανάπτυξη ενός διωνυμικού δένδρου. Το διωνυμικό δένδρο είναι ένα διάγραμμα που αναπαριστά τια διάφορες δυνατές διαδρομές που μπορεί να ακολουθήσουν οι τιμές ενός option κατά την διάρκεια της ζωής του. Η γενική προσέγγιση που παρουσιάζουμε εδώ έχει δημοσιευτεί από τους Cox, Ross and Rubinstein 1979

Διωνυμικό μοντέλο ενός **βήματος**

Ας θεωρήσουμε μια απλή κατάσταση : Η τιμή μιας μετοχής είναι σήμερα $20 και είναι γνωστό ότι στο τέλος του μήνα η τιμή της θα είναι είτε $22 είτε $18. Μας ενδιαφέρει να αποτιμήσουμε ένα Ευρωπαϊκό call option με τιμή εξάσκησης τα $21 και λήξη σε τρείς μήνες από σήμερα. Αυτό το option θα έχει μία από τις δύο τιμές στο τέλος των τριών μηνών. Εαν μεν η τιμή της μετοχής γίνει $22, η τιμή του option θα είναι $1, εάν δε η τιμή της μετοχής γίνει $18 τότε η τιμή του option θα είναι μηδέν. Η κατάσταση αυτή παρουσιάζεται στο παρακάτω διάγραμμα



Οπως θα φανεί, αρκεί ένας απλός συλλογισμός για να αποτιμήσουμε το option σε αυτό το παράδειγμα. Η μόνη υπόθεση που είναι αναγκαία είναι ότι δεν υπάρχουν δυνατότητες για κερδοσκοπία από ασφαλή θέση (arbitrage). Διαμορφώνουμε ένα χαρτοφυλάκιο από την μετοχή και το option με τέτοιο τρόπο ώστε να μην υπάρχει αβεβαιότητα για την αξία του χαρτοφυλακίου στο τέλος των τριων μηνών. Κατόπιν ισχυριζόμαστε ότι επειδή το χαρτοφυλάκιο δεν παρουσιάζει ρίσκο, η απόδοσή του θα ισούται με το επιτόκιο άνευ κινδύνου. Ετσι μας δίνεται η δυνατότητα να υπολογίσουμε το κόστος της διαμόρφωσης ενός τέτοιου χαρτοφυλακίου και από εκεί να υπολογίσουμε την τιμή του option. Επειδή υπάρχουν δύο τίτλοι στο χαρτοφυλάκιο (η μετοχή και το option επί της μετοχής) και είναι δυνατά μόνο δύο ενδεχόμενα, είναι πάντοτε δυνατό να διαμορφώσουμε ένα χαρτοφυλάκιο δίχως οικονομικό ρίσκο.

Ας θεωρήσουμε ένα χαρτοφυλάκιο που απαρτίζεται από Δ αγορασμένες μετοχές και μια πώληση (short position) ενός call option. Θα πρέπει να υπολογίσουμε για ποιά αξία των Δ μετοχών, το χαρτοφυλάκιο θα παρουσιάζει μηδενικό κίνδυνο. Εάν η μετοχή ανεβεί από τα \$20 στα \$22 τότε η αξία των μετοχών θα είναι 22Δ και η αξία του option θα είναι 1, οπότε η αξία του χαρτοφυλακίου θα είναι 22Δ-1. Εάν η τιμή της μετοχής πέσει από τα \$20 στα \$18 τότε η αξία των μετοχών θα είναι 18Δ, η αξία του option θα είναι 0, οπότε η συνολική αξία του χαρτοφυλακίου θα είναι 18Δ. Οπως προείπαμε το χαρτοφυλάκιο δεν θα πρέπει να παρουσιάζει κίνδυνο, οπότε η τιμή του Δ θα πρέπει να είναι τέτοια ώστε η τελική αξία του χαρτοφυλακίου και στα δύο ενδεχόμενα να είναι η ίδια. Δηλαδή θα πρέπει να είναι

$$22\Delta-1=18\Delta$$

ή αλλοιώς

$$\Delta=0.25$$

Αρα ένα χαρτοφυλάκιο με μηδενικό κίνδυνο θα πρέπει να έχει

αγορά (long position) :	0.25 μετοχές
πώληση (short position)	1 option

Εάν η τιμή της μετοχής ανέβει στα \$22, τότε η αξία του χαρτοφυλακίου θα είναι

$$22X0.25 - 1= 4.5$$

Εάν η τιμή της μετοχής πέσει στα \$18 τότε η αξία του χαρτοφυλακίου θα είναι

$$18X0.25 = 4.5$$

Ανεξάρτητα από το αν η τιμή της μετοχής ανέβει ή πέσει η αξία του χαρτοφυλακίου παραμένει σταθερή πάντα στα $4.5 στο τέλος της ζωής του option.

Τέτοια χαρτοφυλάκια που δεν παρουσιάζουν κίνδυνο θα πρέπει, με την προϋπόθεση απουσίας δυνατότητας κερδοσκοπίας από ασφαλή θέση (arbitrage), να δίνουν την ίδια απόδοση με τα επιτόκια άνευ κινδύνου. Ας υποθέσουμε ότι το επιτόκιο άνευ κινδύνου είναι 12% ετησίως. Τότε θα πρέπει η αξία του χαρτοφυλακίου σήμερα να είναι

$$4.5e^{-0.12 \times 0.25} = 4.367$$

Η τιμή της μετοχής σήμερα όπως είπαμε είναι $20. Ας υποθέσουμε ότι η τιμή του option δηλωνεται με το f. Η αξία του χαρτοφυλακίου σήμερα θα είναι

$$20 \times 0.25 - f = 5 - f$$

Δηλαδή θα πρέπει να ισχύει $5-f = 4.367$, οπότε $f = 0.633$

Από την ανάλυση αυτή φαίνεται ότι εάν δεν υπάρχουν δυνατότητες arbitrage, η τρέχουσα τιμή του option θα είναι 0.633. Εάν η τιμή του option ήταν περισσότερο από 0.633 τότε το χαρτοφυλάκιο θα άξιζε λιγότερο από 4.367 και θα απέδιδε περισσότερο από το επιτόκιο άνευ κινδύνου.

Γενικεύοντας μπορούμε να πούμε ότι έαν είναι

T η διάρκεια ζωής ενός option πάνω στην μετοχή

S_0 η σημερινή τιμή μιας μετοχής

S_0u η τιμή της μετοχής εάν αυτή ανέβει ($u>1$)

S_0d η τιμή της μετοχής εάν αυτή πέσει ($d<1$)

f η τρέχουσα τιμή

f_u η πρόσοδος από το option στην περίπτωση που η τιμή της μετοχής γίνει S_0u

f_d η πρόσοδος από το option στην περίπτωση που η τιμή της μετοχής γίνει S_0d

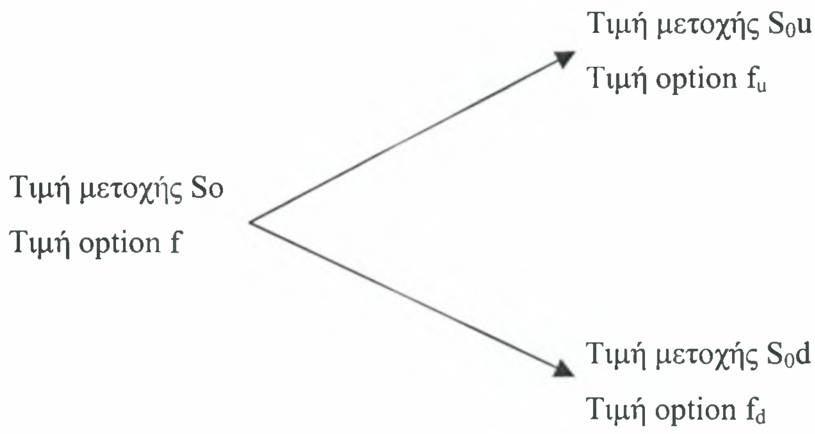
Δ το πλήθος των μετοχών σε ένα χαρτοφυλάκιο με 1 option και μηδενικό κίνδυνο

Στην περίπτωση που η τιμή της μετοχής ανέβει τότε η αξία του χαρτοφυλακίου θα είναι

$$S_0u\Delta - f_u$$

ενώ στην περίπτωση που η τιμή της μετοχής πέσει, η αξία του χαρτοφυλακίου θα είναι

$$S_0d\Delta - f_d$$



Για να έχει το χαρτοφυλάκιο μηδενικό κίνδυνο θα πρέπει οι πρόσοδοι στις δύο περιπτώσεις να είναι ίσες δηλαδή θα πρέπει να είναι

$$S_0 d\Delta - f_d = S_0 u\Delta - f_u$$

ή αλλοιώς

$$\Delta = \frac{f_u - f_d}{S_0 u - S_0 d} \qquad (6.1)$$

Εάν δηλαδή ισχύει η (6.1) τότε το χαρτοφυλάκιο θα έχει μηδενικό κίνδυνο και απόδοση ίση με το επιτόκιο άνευ κινδύνου. Η (6.1) δείχνει ότι το Δ ισούται με τον λόγο της μεταβολής της τιμής του option προς την μεταβολή της τιμής της μετοχής. Εάν με r συμβολίσουμε το επιτόκιο άνευ κινδύνου τότε η παρούσα αξία του χαρτοφυλακίου θα είναι

$$(S_0 u\Delta - f_u)e^{-rT}$$

Το κόστος για την διαμόρφωση του χαρτοφυλακίου είναι

$$S_0\Delta - f$$

Συμπεραίνεουμε ότι θα πρέπει να είναι

$$S_0\Delta - f = (S_0 u\Delta - f_u)e^{-rT}$$

ή αλλοιώς

$$f = S_0\Delta - (S_0 u\Delta - f_u)e^{-rT}$$

Εάν στην παραπάνω σχέση αντικαταστήσουμε το Δ από την (6.1) θα έχουμε

$$f = e^{-rT}[pf_u + (1-p)f_d] \qquad (6.2)$$

όπου

$$p = \frac{e^{-rT} - d}{u - d} \qquad (6.3)$$

Οι εξισώσεις (6.2) και (6.3) δίνουν την δυνατότητα να αποτιμηθεί ένα option χρησιμοποιώντας ένα διωνυμικό μοντέλο ενός βήματος

Αποτίμηση σε περιβάλλον ουδέτερο απέναντι στον κίνδυνο (risk-neutral valuation)

Αν και δεν χρειάζεται να κάνουμε υποθέσεις για τις πιθανότητες που έχει η ανοδική ή η καθοδική κίνηση, είναι φυσικό να να ερμηνεύουμε την μεταβλητή p στη εξίσωση (6.2) ως την πιθανότητα για ανοδική κίνηση της τιμής της μετοχής. Τότε η μεταβλητή 1-p θα είναι η πιθανότητα καθοδικής κίνησης και η έκφραση

$$pf_u + (1-p)f_d$$

θα είναι η αναμενόμενη πρόσοδος από το option. Με αυτήν την ερμηνεία για το p, η εξίσωση (6.2) δηλώνει ότι η αξία του option σήμερα ισούται με την παρούσα αξία της αναμενόμενης τιμής του στο μέλλον. Στον υπολογισμό της παρούσας αξίας θα λάβουμε υπόψη το επιτόκιο άνευ κινδύνου.

Διερευνούμε τώρα την αναμενόμενη απόδοση από μια μετοχή όταν η πιθανότητα για ανοδική κίνηση της τιμής είναι p. Η αναμενόμενη τιμή της μετοχής στον χρόνο T, θα είναι $E(S_T)$ και θα ισούται με

$$E(S_T) = pS_0u + (1-p)S_0d$$

ή αλλοιώς

$$E(S_T) = pS_0(u-d) + S_0d$$

Αντικαθιστώντας το p όπως το δίνει η εξίσωση (6.3) , η παραπάνω σχέση καταλήγει σε

$$E(S_T)=S_0e^{rT} \qquad (6.4)$$

με την οποία φαίνεται ότι ότι η τιμή της μετοχής αυξάνεται κατά μέσο όρο, σύμφωνα με το επιτόκιο άνευ κινδύνου. Το να θέτουμε δηλαδή την πιθανότητα ανοδικής κίνησης p, είναι σαν υποθέτουμε ότι η απόδοση της μετοχής ισούται με το επιτκόκιο άνευ κινδύνου.

Σε έναν κόσμο όπου υπάρχει ουδέτερη στάση απέναντι στον κίνδυνο, όλα τα άτομα είναι αδιάφορα στο οικονομικό ρίσκο. Δεν ζητούν αντάλλαγμα για το ρίσκο που αναλαμβάνουν και η αναμανεόμενη απόδοση όλων των χρεογράφων ισούται με το επιτόκιο άνευ κινδύνου. Αυτό το συμπέρασμα είναι ένα παράδειγμα της γενικότερης αρχής της αποτίμησης options που είναι γνωστή ως αποτίμηση σε περιβάλλον ουδέτερο απέναντι στον κίνδυνο. Η αρχή αυτή λέει ότι μπορούμε να υποθέσουμε ότι το οικονομικό περιβάλλον είναι ουδέτερο απέναντι στον κίνδυνο όταν πρόκειται να αποτιμήσουμε options. Τα αποτελέσματα που παίρνουμε από μια τέτοια αποτίμηση είναι σωστά όχι μόνο για περιβάλλον που είναι ουδέτερο απέναντι στο κίνδυνο αλλά και στον πραγματικό κόσμο επίσης.

Αλληλεξάρτηση μεταξύ σ, u και d.

Στην πράξη όταν καταστρώνουμε ένα διωνυμικό μοντέλο για να αναπαραστήσουμε τις κινήσεις της τιμής της μετοχής, επιλέγουμε τις παραμέτρους u και d ώστε να προκύπτουν από την διακύμανση της τιμής της μετοχής. Για να δείξουμε πως ακριβώς γίνεται αυτό, ας υποθέσουμε ότι η αναμενόμενη απόδοση (σε πραγματικό περιβάλλον) της μετοχής είναι μ και η διακύμανση της είναι σ. Εστω ότι το χρονικό βήμα είναι Δt. Η τιμή της μετοχής είτε ανεβαίνει κατά τον παράγοντα u είτε πέφτει κατά τον λόγο d. Η πιθανότητα (σε πραγματικό περιβάλλον) να κινηθεί προς τα πάνω έστω ότι είναι q.

Η αναμενόμενη τιμή της μετοχής στο τέλος του Δt θα είναι $S_0e^{\mu\Delta t}$. Στο διωνυμικό μοντέλο η τιμή της μετοχής αναμένεται να είναι $qS_0u+(1-q)S_0d$. Θα πρέπει αυτές οι δύο τιμές να συμπίπτουν και να έχουμε

$$S_0e^{\mu\Delta t} = qS_0u+(1-q)S_0d$$

ή αλλοιώς

$$q = \frac{e^{\mu\Delta t} - d}{u - d} \qquad (6.5)$$

Οπως δώσαμε τον ορισμό της διακύμανσης, εάν σ είναι η διακύμασνη της μετοχής τότε $\sigma\sqrt{\Delta t}$ θα είναι η τυπική απόκλιση των αποδόσεων της μετοχής για την μικρή χρονική περίοδο Δt. Αρα η μεταβλητότητα των αποδόσεων θα είναι $\sigma^2\Delta t$. Από το διωνυμικό μοντέλο βλέπουμε ότι η μεταβλητότητα των αποδόσεων της μετοχής είναι

$$qu^2+(1-q)d^2-[qu+(1-q)d]^2$$

Θα πρέπει δηλαδή να ισχύει η εξίσωση

$$qu^2+(1-q)d^2-[qu+(1-q)d]^2 = \sigma^2\Delta t \qquad (6.6)$$

Εισάγοντας την (6.5) στην (6.6) έχουμε

$$e^{\mu\Delta T}(u+d) - ud - e^{2\mu\Delta t} = \sigma^2\Delta t$$

Εάν αγνοήσουμε τους όρους της τάξης Δt^2 και τις μεγαλύτερες δυνάμεις, τότε μια

λύση στην παραπάνω εξίσωση δίνεται από τις

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \qquad (6.7)$$
$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \qquad (6.8)$$

Αυτές είναι οι τιμές για τις παραμέτρους u και d που προτείνονται από τους Cox, Ross, και Rubinstein (1979).

Οταν εφαρμόζονται στην πράξη διωνυμικά μοντέλα τότε η διάρκεια ζωής του option υποδιαιρείται σε 30 ή και περισσότερα βήματα Δt. Σε κάθε βήμα υπάρχει και μια διωνυμική κίνηση της τιμής της μετοχής. Με 30 χρονικά βήματα υπάρχουν 31 τελικές τιμές και 2^{30} (περίπου 1δις) πιθανές διαδρομές της τιμής της μετοχής.

Μοντέλο Black-Scholes

Το 1973 οι Black, Scoles και Merton δημοσίευσαν άρθρα που αποτέλεσαν την βάση για την αναλυτική αποτίμηση των options, και το μοντέλο αυτό ονομάστηκε μοντέλο

των Black-Scholes. Μπορούμε να πούμε ότι με τον τρόπο αυτό ετέθησαν τα θεμέλια για την ανάπτυξη και επιτυχία αυτού που σήμερα καλούμε 'χρηματοοικονομική μηχανική' (financial engineering) κατά τις δεκαετίες του 1980 και 1990.
Το μοντέλο εφαρμόζεται σε Ευρωπαϊκού τύπου call και put options επί μετοχών που δεν δίνουν μέρισμα . Η διακύμανση μπορεί είτε να υπολογιστεί από τα ιστορικά δεδομένα είτε και να εξαχθεί κατά τεκμαρτό τρόπο από τις τιμές των options. Με περαιτέρω επεκτάσεις του μοντέλου είναι δυνατόν να εφαρμοστεί και σε options επί μετοχών που πληρώνουν μέρισμα ή και ακόμα και σε Αμερικανικού τύπου call option επί μετοχών που πληρώνουν μέρισμα.

Ιδιότητα lognormal των τιμών μετοχών

Ορίζουμε ότι μια μεταβλητή έχει κατανομή lognormal εάν ο φυσικός λογάριθμός της έχει κανονική κατανομή. Εάν η τιμή μιας μετοχής, S, ακολουθεί την γεωμετρική κίνηση κατά Brown, δηλαδή αν ισχύει

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz$$

$$d\ln S = (\mu - \frac{\sigma^2}{2})dt + \sigma dz \qquad (6.9)$$

και

Η μεταβολή της lnS ανάμεσα στο χρόνο 0 και στο χρόνο T, ανήκει στην κανονική κατανομή, δηλαδή

$$\ln S_T - \ln S_0 \sim \phi[(\mu - \frac{\sigma^2}{2})\mathrm{T}, \sigma\sqrt{\mathrm{T}}]$$

Από αυτή την σχέση προκύπτει ότι

$$\ln\frac{S_T}{S_0} \sim \phi[(\mu - \frac{\sigma^2}{2})\mathrm{T}, \sigma\sqrt{\mathrm{T}}] \qquad (6.10)$$

και

$$\ln S_T \sim \phi[\ln S_o + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})\mathrm{T}, \sigma\sqrt{\mathrm{T}}] \qquad (6.11)$$

όπου S_T η τιμή της μετοχής στον χρόνο T

S_0 η τιμή της μετοχής στον χρόνο 0

φ(m,s) δηλώνει κανονική κατανομή με μέση τιμή m και τυπική αποκλιση s.

Η εξίσωση (6.11) δείχνει ότι η $\ln S_T$ ακολουθεί κανονική κατανομή, οπότε η S_T ακολουθεί κατανομή lognormal. Οι τιμές που μπορεί να πάρει μια μεταβλητή που έχει κατανομή lognormal βρίσκονται από το 0 έως το άπειρο. Αντίθετα από την κανονική κατανομή, η κατανομή lognormal δεν είναι συμμετρική οπότε η μεση τιμή, η μεσαία τιμή και η συχνότερη τιμή είναι διαφορετικές μεταξύ τους.

Μαθηματική σχέση για τη αποτίμηση options

Η διαφορική εξίσωση Black-Scholes-Merton είναι μια εξίσωση που πρέπει να ικανοποιείται από την τιμή f κάθε παραγώγου με υποκείμενο στοιχείο μετοχή που δεν πληρώνει μέρισμα.. Οι υποθέσεις στις οποίες στηρίζεται είναι οι κάτωθι

$$\frac{\Delta S}{S} \sim \phi(\mu \Delta t, \sigma \sqrt{\Delta t}) \qquad (6.12)$$

1. Η τιμή της μετοχής ακολουθεί την γεωμετρική κίνηση κατά Brown
2. Η πώληση μη κατεχόμενων τίτλων (short selling) επιτρέπεται άνευ όρων.
3. Δεν υφίστανται κόστη συναλλαγών ή φόροι και όλοι οι τίτλοι είναι πλήρως διαιρετοί
4. Δεν υπάρχουν μερίσματα κατά την διάρκεια ζωής του option
5. Δεν υπάρχουν δυνατότητες κερδοσκοπίας από ασφαλή θέση (arbitrage)
6. Η διαπραγμάτευση των τίτλων δεν διακόπτεται
7. Το επιτόκιο άνευ κινδύνου, r,είναι σταθερό και το ίδιο για όλες τις ληκτότητες

Οι εξισώσεις Black-Scholes για την αποτίμηση call ή put option Ευρωπαϊκού τύπου επί μετοχών που δεν πληρώνουν μέρισμα είναι οι παρακάτω *τιμή call option* $c = S_0 N(d_1) - Xe^{-rT} N(d_2)$ (6.13)

τιμή put option $p = Xe^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1)$ (6.14)

όπου

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S_0}{X}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})\mathrm{T}}{\sigma\sqrt{\mathrm{T}}} \quad (6.15)$$

$$d_2 = \frac{\ln(\frac{S_0}{X}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})\mathrm{T}}{\sigma\sqrt{\mathrm{T}}} = d_1 - \sigma\sqrt{\mathrm{T}} \quad (6.16)$$

N(x) είναι η αθροιστική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για μεταβλητή που ανήκει στην κανονική κατανομή με μέση τιμή μηδέν και τυπική απόκλιση 1 (δηλαδή είναι η πιθανότητα να έχει η μεταβλητή αυτή τιμή μιρκότερη ή ίση με x)
S_0 είναι η τιμή της μετοχής στον χρόνο 0
S_T είναι η τιμή της μετοχής στον χρόνο T
X είναι η τιμή εξάσκησης του option
r είναι το επιτόκιο άνευ κινδύνου (υπολογισμένο για συνεχή ανατοκισμό)
σ είναι η διακύμανση της τιμής της μετοχής
T είναι ο χρόνος μέχρι την λήξη του option

Υπενθυμίζουμε ότι οι σχέσεις (6.13) και (6.14) εφαρμόζονται μόνο σε Ευρωπαϊκού τύπου option . Δεν υπάρχει ακριβής αναλυτική σχέση για option Αμερικανικού τύπου για τα οποία όμως υπάρχουν αριθμητικές μέθοδοι και προσεγγιστικοί υπολογισμοί.

Τεκμαιρόμενη διακύμανση (implied volatility)

Η μόνη παράμετρος που δεν είναι άμεσα παρατηρήσιμη στις σχέσεις (6.13) και (6.14) είναι η διακύμανση. Στο σημείο αυτό σκόπιμο είναι να αναφέρουμε μια διαφορετική προσέγγιση που είναι γνωστή ως τεκμαιρόμενη διακύμανση. Πρόκειται για την διακύμανση που «υπονοείται» ή τεκμαίρεται βάσει της τιμής που έχει ένα συγκεκριμένο option κατά την διαπραγμάτευσή του στην αγορά των option. Δεν είναι δυνατόν να λύσουμε τις σχέσεις (6.13) και (6.14) ως προς σ, οπότε εάν γνωρίζουμε τα S_0, X, r και T για να υπολογίσουμε την τεκμαιρόμενη διακύμανση εκτελούμε επαναληπτικούς υπολογισμούς έως ότου φθάσουμε σε ένα ικανοποιητικό βαθμό ακρίβειας.

Οι τεκμαιρόμενες διακυμάνσεις μπορούν να αξιοποιηθούν για την καταγραφή της στάσης της αγοράς σχετικά με την διακύμανση μιας συγκεκριμένης μετοχής. Οι οικονομικοί αναλυτές συχνά υπολογίζουν την τεκμαιρόμενη διακύμανση από option μετοχών που παρουσιάζουν υψηλό όγκο συναλλαγών για να αποτιμήσουν option επί των ιδίων μετοχών αλλά με χαμηλότερο όγκο συναλλαγών.

Μοντέλα στοχαστικής διακύμανσης

Μια υπόθεση στον μοντέλο Black-Scholes που σαφώς δεν ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα είναι ότι η διακύμανση είναι σταθερή. Είναι ενδιαφέρον να συγκρίνουμε τις τιμές που δίνει το μοντέλο Black-Scholes με τις τιμές που δίνουν

μοντέλα που θεωρούν την διακύμανση ως στοχαστικό μέγεθος

Οι Hull and White πρότειναν το ακόλουθο μοντέλο για στοχαστική διακύμανση σε περιβάλλον ουδέτερο απέναντι στον κίνδυνο

$$\frac{dS}{S} = rDt + \sqrt{V}\,dz_s$$

$$dV = a(b-V)dt + \xi V^{\alpha} dz_V$$

όπου a, b, ξ και α είναι σταθερές, και dz_s, dz_v είναι παράγοντες της διαδικασίας Wiener. Η μεταβλητή V είναι η μεταβλητότητα του εν λόγω υποκείμενου στοιχείου δηλαδή το τετράγωνο της τυπικής του απόκλισης. Η μεταβλητότητα έχει την τάση να επανέρχεται στα επίπεδα του b με ρυθμό α. Οι Hull and White συγκρίνουν την τιμή που δίνει αυτό το μοντέλο με την τιμή που δίνει το μοντέλο Black-Scholes όπου η μεταβλητότητα τίθεται ίση με την αναμενόμενη μέση μεταβλητότητα κατά την διάρκεια της ζωής του option.

Οι Hull and White δείχνουν ότι όταν η διακύμανση είναι στοχαστικό μέγεθος και δεν είναι συσχετισμένη με την τιμή του υποκείμενου στοιχείου, τότε η τιμή του Ευρωπαϊκού τύπου option ισούται με την τιμή που δίνει το μοντέλο Black-Scholes ολοκληρωμένη στην συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της μέσης τιμής της μεταβλητότητας κατά την διάρκεια ζωής του option.

Τεκμηρίωσαν ότι το μοντέλο Black-Scholes υπερτιμά τα options που βρίσκονται κοντά στην χρηματική τους αξία και υποτιμά τα options που βρίσκονται μακριά από αυτή (είτε προς τα πανω είτε προς τα κάτω).

Στην περίπτωση που η τιμή του υποκείμενου στοιχείου είναι συσχετισμένη με την διακύμανσή της δεν υπάρχει ξεκάθαρό αποτέλεσμα. Τότε οι τιμές είναι δυνατόν να προκύψουν από μοντέλα προσομοιωσης Monte Carlo. O Duan (1996) δείχνει ότι είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί το μοντέλο GARCH(1,1) ως βάση για ένα μοντέλο αποτίμησης option που θα παρουσιάζει εσωτερική συνέπεια. Για options με διάρκεια ζωής μικρότερη του ενός έτους η επίδραση της ύπαρξης ή μη της στοχαστικής διακύμανσης είναι μικρή σε απόλυτες τιμές, αν και μπορεί σε ποσοστιαίες τιμές να είναι αρκετά μεγάλη για συμβόλαια option που είναι πολύ κάτω από την χρηματική τους αξία. Η επίδραση της ύπαρξης στοχαστικής διακύμανσης γίνεται μεγαλύτερη καθώς η διάρκεια ζωής του option μεγαλώνει

Προσομοίωση Monte Carlo

Η μέθοδος Monte Carlo μας δίνει προσεγγιστικές λύσεις σε μια ποικιλία μαθηματικών προβληματων με την εκτέλεση στατιστικών πειραμάτων δειγματοληψίας σε έναν Η/Υ. Η μέθοδος μπορεί να εφαρμοστεί τόσο σε προβλήματα που δεν υφίσταται η έννοια της καμπύλης κατανομής πυκνότητας πιθανότητας όσο και σε προβλήματα όπου μια τέτοια ένοια υφίσταται

Ιστορία της μεθόδου Monte Carlo

Η μέθοδος ονομάστηκε έτσι από την πόλη του Μονακό όπου βρίσκεται το γνωστό καζίνο με τις ρουλλέτες που αποτελούν μια απλή γεννήτρια τυχαίων αριθμών. Το όνομα και η συστηματική ανάπτυξη της μεθόδου Monte Carlo χρονολογούνται από το 1944. Ωστόσο υπάρχουν μερικά αποσπασματικά και μη ανεπτυγμένα δείγματα εφαρμογής της μεθόδου και παλαιότερα. Για παράδειγμα , το δεύτερο μισό του δέκατου ένατου αιώνα, ορισμένοι εκτελούσαν πειράματα, όπου έριχναν με τυχαίο τρόπο μια βελόνα πάνω σε ένα επίπεδο στο οποίο είχαν χαραχτεί δύο ευθείες γραμμές. Από το πλήθος των παρατηρήσεων που η βελόνα ακουμπούσε μια από τις δύο γραμμές μπορούσαν να υπολογίσουν τον αριθμό π=3.14...Επίσης το 1931 ο Kolmogorov απέδειξε την σχέση ανάμεσα στην στοχαστική διαδικασία Markov και σε ορισμένες διαφορικές εξισώσεις. Το 1908 ο Student (W.S. Gosset) χρησιμοποίησε πειραματική δειγματοληψία για να προχωρήσει την έρευνά του σχετικά με την κατανομή του συντελεστή συσχέτισης.
Η ανάπτυξη όμως της μεθόδου Monte Carlo έγινε κατά τον Β' παγκόσμιο πόλεμο ως εργαλείο έρευνας για την κατασκευή της ατομικής βόμβας. Η εργασία αφορούσε την προσομοίωση προβλημάτων στοχαστικής φύσης σχετικά με την τυχαία διάχυση νετρονίων σε σχάσιμο υλικό. Εντούτοις η συστηματική ανάπτυξη της ιδέας της μεθόδου έπρεπε να περιμένει τους Harris και Kahn με την εργασία τους το 1948. Το ίδιο έτος οι Fermi, Metropolis και Ulam χρησιμοποίησαν εκτιμήσεις από την μέθοδο Monte Carlo για να εξάγουν ιδιοτιμές για την εξίσωση Schrodinger

Μοντελοποίηση χρονοσειρών από χρηματοοικονομικά μεγέθη
Επιχειρούμε να μοντελοποιήσουμε την πραγματικότητα, ώστε να μπορούμε να την προβλέψουμε. Η μοντελοποίηση αυτή με την βοήθεια της στατιστικής είναι πρωταρχικής σημασίας για την λήψη αποφάσεων διότι ουσιαστικά όλα τα στοιχεία πάνω στα οποία βασίζεται μια απόφαση είναι μοντέλα. Με την έννοια αυτή η ανάπτυξη και χρήση μοντέλων έχει εφαρμογή στο marketing, στην χρηματοοικονομική διοίκηση καθώς και στην μελέτη οργανωσιακής συμπεριφοράς. Ιδιαίτερα αξιοσημείωτη είναι η χρήση μοντέλων στην οικονομετρία, διότι αυτή ασχολείται με γεγονότα που τα βλέπουμε στην πράξη και όχι με πεποιθήσεις και γνώμες ή απόψεις.

Η ανάλυση χρονοσειρών είναι ένα τμήμα της χρηματοοικονομικής ανάλυσης. Το ζητούμενο στην ανάλυση χρονοσειρών είναι ενδιαφέρον και χρήσιμο αφού έχει εφαρμογές στην πρόβλεψη επιτοκίων, συναλλαγματικών ισοτιμιών, ή και , όπως κάνει αυτή η εργασία, πρόβλεψη διακύμανσης των αποδόσεων των μετοχών. Υπάρχουν πολλές τεχνικές παλινδρόμησης με μία μεταβλητή και με πολλές μεταβλητές, όπως επίσης και αυτοπαλινδρόμησης

Μοντελοποίηση για χρηματοοικονομικές εφαρμογές.

Τα οικονομετρικά μοντέλα είναι απαραίτητα στην ανάλυση σερών χρηματοοικονομικών μεγεθών. Η μοντελοποίηση είναι, με απλά λόγια, η δημιουργία αναπαραστάσεων της πραγματικότητας. Είναι σημαντικό να κατανοήσουμε ότι, παρά την σπουδαιότητα όποιου μοντέλου, το μοντέλο είναι μια αναπαράσταση της πραγματικότητας και όχι η ίδια η πραγματικότητα. Δηλαδή το μοντέλο θα πρέπει να προσαρμόζεται στηνπραγματικότητα. Πάντως πρέπει να παραδεχόμαστε ότι τα μοντέλα ως αναπαριστάσεις της πραγματικότητας δεν μπορεί να είναι ακριβή. Τα οικονομετρικά μοντέλα προϋποθέτουν ότι λαμβάνεται μια απόφαση και κατόπιν εκτελείται μια ενέργεια μετά από σκέψη. Αυτό είναι δυνατόν να έχει σημαντικές συνέπειες στο οικονομικό περιβάλλον. Ενα βασικό στοιχείο στον χρηματοοικονομικό σχεδιασμό και στην πρόβλεψη σχετικών μεγεθών είναι είναι ικανότητα να αναπτύσει κανείς μοντέλα που να δείχνουν την αλληλοσυσχέτιση των χρηματοοικονομικών μεγεθών. Τέτοια μοντέλα που δείχνουν την συσχέτιση ή την αιτιολόγηση μεταξύ μεταβλητών μπορούν να βελτιώσουν την λήψη αποφάσεων. Για παράδειγμα κάποιος μπορεί να ενδιαφερθεί περισσότερο για τις επιπτώσεις που θα έχει στην εγχώρια χρηματιστηριακή αγορά μια πτώση σε μια άλλη αγορά του εξωτερικού, αν είναι δυνατόν να αποδειχτεί μια σχέση αίτιου-αιτιατού ανάμεσα στην αγορά του εξωτερικού και την εγχώρια χρηματιστηριακή αγορά. Ωστόσο, η ανάπτυξη μοντέλων υποκρύπτει και κινδύνους. Ενα μοντέλο που ως τώρα ήταν αποδοτικό μπορεί να χάσει την αξία του λόγω αλλαγής των συνθηκών, και έτσι να αναπαριστά την πραγματικότητα με λανθασμένο (όχι απλώς ανακριβή) τρόπο, χειροτερεύοντας τις αποφάσεις που καλείται κάποιος να πάρει

Μοντέλα μιάς μεταβλητής και πολλών μεταβλητών.

Η εφαρμογή της παλινδρόμησης είναι πολύ διαδεδομένη στην εξέταση χρονοσειρών από χρηματοοικονομικά μεγέθη. Ενα παράδειγμα είναι η χρήση των forward συναλλαγματικών ισοτιμιών ως βέλτιστοι εκτιμητές των μελλοντικών spot ισοτιμιών.

Ενα άλλο παράδειγμα, είναι οι αποδόσεις των μετοχών και η διακύμανσή τους. Τέτοιου είδους μοντέλο όπως είδαμε στα προηγούμενα κεφάλαια είναι και το μοντέλο GARCH.

Μια εφαρμογή του μοντέλου αυτού είναι η ανάλυση των αποδόσεων των μετοχών και η διακύμανσή τους. Παραδοσιακά υπάρχει η πεποίθηση ότι η μεταβλητότητα της απόδοσης ενός χαρτοφυλακίου είναι το κυριότερο μέτρο κινδύνου για έναν επενδυτή. Εντούτοις αν χρησιμοποιήσουμε μεγάλο πλήθος χρονοσειρών μπορούμε να αποδείξουμε ότι υπάρχει μάλλον μικρή σχέση ανάμεσα στις μέσες αποδόσεις και στην διακύμανση των αποδόσεων αυτών. Ετσι τα κλασσικά μοντέλα αποτίμησης κεφαλαιουχικών στοιχείων (CAPM, Capital Asset Pricing Model) με δύο παραμέτρους δεν είναι κατάλληλα. Αυτό δεν σημαίνει ότι πρέπει να απορριφθούν. Συνεχίζουν να έχουν την διδακτική τους αξία και μπορούν να χρησιμοποιηθούν σαν θεωρητικά γενικότερα πλαίσια.Για αυτόν όμως που λαμβάνει επαγγελματικές αποφάσεις, για τις οποίες η αναποτελεσματικότητα του μοντέλου μεταφράζεται σε μέτριες (αν όχι κακές) οικονομικές αποδόσεις, το CAPM θα έπρεπε να αντικατασταθεί από ένα καλύτερο μοντέλο, δηλαδή από ένα που να λαμβάνει υπόψη του την εξάρτηση των βήτα από τον χρόνο. Τέτοιο μοντέλο είναι το GARCH

Προχωρούμε τώρα στην προσομοίωση Monte Carlo. Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε αποτελέσματα από μια αποτίμηση που γίνεται με ουδετερότητα απέναντι στο κίνδυνο.Η προσδοκώμενη απόδοση σε περιβάλλον ουδέτερο απέναντι στον κίνδυνο υπολογίζεται με μια διαδικασία δειγματοληψίας. Κατόπιν αφαιρείται το επιτόκιο που αντιπροσωπεύει την απόδοση χωρίς κίνδυνο.

Θεωρούμε ένα παράγωγο προϊόν που εξαρτάται από μία μόνο υποκείμενη μεταβλητή, την S που αποδίδει μιά πρόσοδο στον χρόνο T. Υποθέτοντας ότι τα επιτόκια παραμένουν σταθερά, μπορούμε να αποτιμήσουμε το παράγωγο με τον ακόλουθο τρόπο:

1. Παίρνουμε ένα δείγμα μιας τυχαίας διαδρομής του S σε περιβάλλον ουδέτερο στον κίνδυνο
2. Υπολογίζουμε την απόδοση από το παράγωγο.
3. Επαναλαμβάνουμε τα βήματα 1 και 2 για να έχουμε πολλά δείγματα αποδόσεων

4. Υπολογίζουμε τον μέσο όρο των δειγματοληπτικών αποδόσεων για να έχουμε μια εκτίμηση της απόδοσης σε περιβάλλον ουδέτερο απέναντι στον κίνδυνο.
5. Αφαιρούμε από την εκτίμηση της απόδοσης το επιτόκιο άνευ κινδύνου και παίρνουμε μια αποτίμηση του παραγώγου

Ας υποθέσουμε ότι το μοντέλο που ακολουθεί η υποκείμενη μεταβλητή σε περιβάλλον ουδέτερο απέναντι στον κίνδυνο είναι το ακόλουθο

$$dS = \hat{\mu} S dt + \sigma S dz \qquad (6.17)$$

όπου dz υπολογίζεται σύμφωνα με την διαδικασία Weiner, μ είναι η αναμενόμενη απόδοση σε περιβάλλον ουδέτερο απέναντι στον κίνδυνο και σ είναι η τυπική απόκλιση. Σημειώνουμε ότι η τυπική απόκλιση είναι η ίδια ανάμεσα στον πραγματικό περιβάλλον και σε περιβάλλον ουδέτερο απέναντι στον κίνδυνο. Για να προσομοιώσουμε την διαδρομή που θα ακολουθήσει η S, διαιρούμε την διάρκεια ζωής του παραγώγου σε N μεσοδιαστήματα και η προσεγγιστική εξίσωση που δίνει τις τιμές είναι η παρακάτω

$$S(t + \Delta t) - S(t) = \hat{\mu} S(t)\Delta t + \sigma S(t)\varepsilon\sqrt{\Delta t} \qquad (6.18)$$

όπου S(t) δηλώνει την αξία του S την χρονική στιγμή t, ε είναι μια τυχαία τιμή από κανονική κατανομή με μέσο όρο μηδέν και τυπική απόκλιση ίση με μονάδα. Ετσι μπορούμε από την αρχική αξία του παραγώγου S, να υπολογίσουμε την αξία του στην χρονική στιγμή t+Δt, ακολούθως στην χρονική στιγμή t+2Δt και ούτω καθεξής. Αντί για την (6.2) μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση

$$S(t + \Delta t) = S(t)\exp\left[(\hat{\mu} - \frac{\sigma^2}{2})\Delta t + \sigma\varepsilon\sqrt{\Delta t}\right] \qquad (6.19)$$

Η εξίσωση (6.19) χρησιμοποιείται για να συνθέσει την διαδρομή της S με τρόπο παρόμοιο με αυτόν της εξίσωσης (6.18). Ενώ όμως η (6.18) είναι ακριβής μόνο όταν το Δt τείνει στο μηδέν, η (6.19) είναι ακριβής για κάθε τιμή του Δt.

Το πλεονέκτημα της προσομοίωσης Monte Carlo είναι ότι μπορεί να εφαρμοστεί για αποδόσεις που εξαρτώνται τόσο από την διαδρομή που ακολουθεί η S, όσο και για αποδόσεις που εξαρτώνται μόνο από την τελική αξία της S. Επίσης είναι δυνατόν να ληφθούν υπόψη πρόσοδοι (π.χ. από μερίσματα) και κατά την διάρκεια της ζωής του παραγώγου. Οποιαδήποτε στοχαστική διαδικασία μπορεί να απεικονιστεί. Το μειονέκτημα της προσομοίωσης Monte Carlo είναι ότι απαιτεί υπολογιστικό χρόνο και ως εκ τούτου δεν μπορεί να εξυπηρετήσει καταστάσεις όπου αναμένονται πρόωρες εξασκήσεις των δικαιωμάτων.

Monte Carlo με μεταβλητότητα σύμφωνα με την μέθοδο GARCH

Η υιοθέτηση της μεθόδου GARCH στην προσομοίωση Monte Carlo επιτυγχάνεται αν αντικαταστήσουμε την τυπική απόκλιση σ της σχέσης (6.19) με το ίσο της σύμφωνα με την μέθοδο GARCH δηλαδή

$$\sigma^2{}_{(t+\Delta t)} = \omega + \alpha z^2{}_{(t)} + \beta\sigma^2{}_{(t)} \qquad (6.20)$$

όπου z^2 είναι η ημερήσια απόδοση και δίνεται από την σχέση

$$z^2{}_{(t)} = [\sigma_{(t)}\varepsilon\sqrt{\Delta t}]^2 \qquad (6.21)$$

Το μοντέλο που τελικά έχουμε είναι το παρακάτω

$$S(t+\Delta t) = S(t)\exp[(\mu - \frac{\omega + \alpha[\sigma_{(t-\Delta t)}\varepsilon\sqrt{\Delta t}]^2 + \beta\sigma^2{}_{(t-\Delta t)}}{2} + \sigma_{(t)}\varepsilon\sqrt{\Delta t}] \qquad 6.22$$

Το Δt στην περίπτωση που μελετάμε (ημερήσιες αποδόσεις) είναι 1.
Υπενθυμίζουμε ότι το ε είναι ένας τυχαίος αριθμός με μέση τιμή το μηδέν και τυπική απόκλιση την μονάδα.

Η καλύτερη εκτίμηση για την τιμή του δείκτη που είναι η E[S(t)] οδηγεί στην οικονομικότερη αποτίμηση του δικαιώματος call ή put. Η αναμενόμενη πρόσοδος από ένα δικαίωμα call είναι η διαφορά ανάμεσα στην αναμενόμενη τιμή του δείκτη E[S(t)] κατά την στιγμή (χρόνος t) εξάσκησης του δικαιώματος μείον την τιμή εξάσκησης (strike) X του συγκεκριμένου δικαιώματος, εφόσον βέβαια η πρόσοδος αυτή είναι μεγαλύτερη από το μηδέν. Επειδή η πρόσοδος αυτή θα πραγματοποιηθεί σε βάθος χρόνου t, αν θεωρήσουμε ότι το επιτόκιο άνευ κινδύνου είναι r, τότε η αξία ενός call δικαιώματος σήμερα θα είναι

$$c = e^{-rt}\max(E[S(t)] - X, 0)$$

ενώ η αξία ενός put δικαιώματος θα είναι

$$p = e^{-rt}\max(X - E[S(t)], 0)$$

Υπολογιστική διαδικασία

Η περίοδος βάσης από την οποία αντλήθηκαν οι τιμές για τις παραμέτρους του Monte Carlo επιλέχθηκε να είναι η περίοδος από την ημέρα 600 έως την ημέρα 800, δηλαδή από 17 Μαΐου 1995 έως την 1 Μαρτίου 1996. Η δε περίοδος πρόβλεψης θα είναι το διάστημα από την ημέρα 801 έως 1000. Δηλαδή σκοπεύουμε να έχουμε πρόβλεψη της τιμής του δείκτη S&P500 για 200 ημέρες μετά την τελευταία ημέρα της περιθόδου βάσης δηλαδή την ημέρα 1000. Επειδή όμως ο υπολογισμός για μία μόνο ημέρα (την ημέρα 1000) δεν θα μας έδινε σαφή εικόνα για την αποτελεσματικότητα της προτεινόμενης μεθόδου προτιμήσαμε να διαλέξουμε 10 ημέρες κοντά στην ημέρα 1000 και συγκεκριμένα τις ημέρες 960, 970, 980, ..., 1040 και 1050. Διευκρινίζουμε ότι ο σκοπός μας παραμένει να κάνουμε πρόβλεψη για την τιμή του SP500 μετά από 200 ημέρες αλλά επειδή έχουμε μόνο μια πραγματική τιμή για την ημέρα αυτή και θέλουμε να έχουμε περισσότερα αποτελέσματα για να αξιολογήσουμε την προτεινόμενη μέθοδο, για αυτό επιλέξαμε τις 5 ημέρες πριν την ημέρα 1001 και 5 ημέρες μετά την ημέρα 1001.

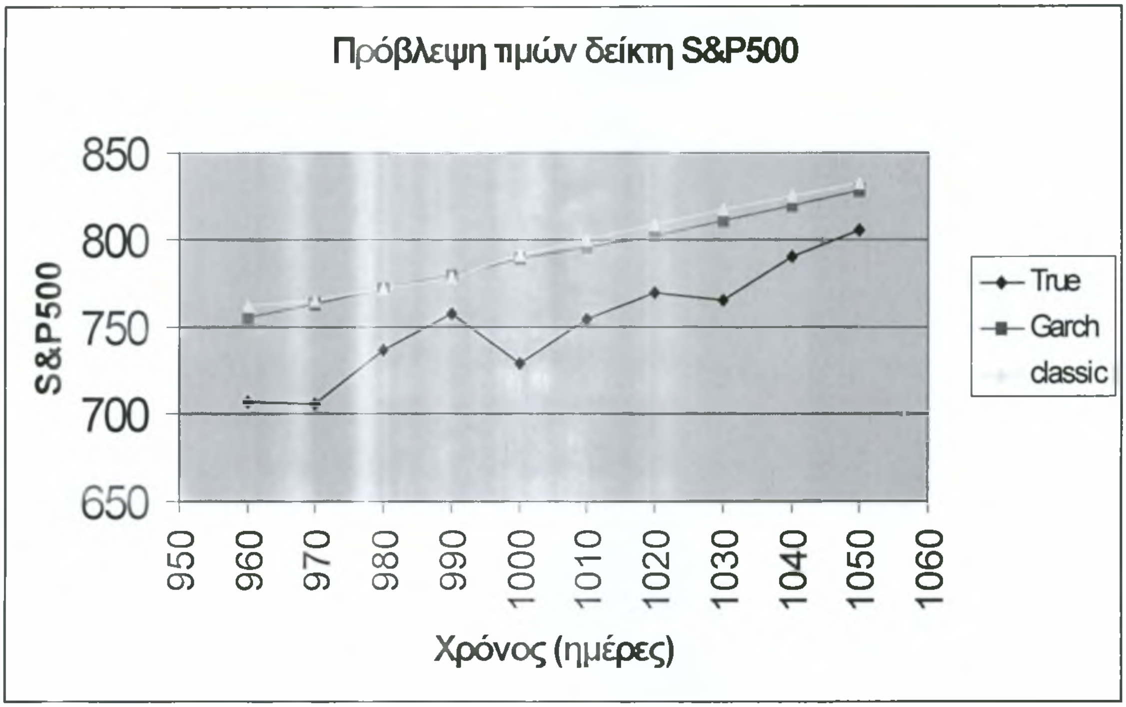
Για την περίπτωση εφαρμογής του κλασσικού μοντέλου Monte Carlo, από την χρονική περίοδο βάσης θα υπολογιστούν η μέση τιμή των ημερησίων αποδόσεων και η μεταβλητότητά τους και θα θεωρηθεί ότι αυτές οι παράμετροι παραμένουν σταθερές και για την περίοδο πρόβλεψης. Για την περίπτωση εφαρμογής του Monte Carlo με την διακύμανση να προκύπτει από GARCH, θα υπολογιστεί η μέση τιμή των ημερησίων αποδόσεων και οι παράμετροι ω,α ,β οι οποίες θα θεωρηθούν σταθερές για την περίοδο πρόβλεψης..

Η μέση τιμή των ημερήσιων αποδόσεων για το διάστημα 600-800 είναι μ=0.001023. Η δε μεταβλητότητα των ημερήσιων αποδόσεων για το ίδιο χρονικό διάστημα είναι σ^2= 3.65986E-05.

Από την εφαρμογή της μεθόδου GARCH παίρνουμε τις τιμές των παραμέτρων ω=1.7564E-06 , α= 0.084294 και β= 0.865172 , άρα η μακροχρόνια μεταβλητότητα είναι V= 3.4756E-05.

Πρόβλεψη για ημέρα	Πραγματική τιμή	Πρόβλεψη κλασσικού Monte Carlo	Πρόβλεψη από Monte Carlo με GARCH
960	706.99	754.563	761.390
970	705.27	763.034	764.729
980	735.88	771.287	771.323
990	757.02	778.808	777.373
1000	728.64	788.358	791.454
1010	753.85	795.014	799.239
1020	768.86	802.004	807.951
1030	765.02	810.604	817.268
1040	789.59	819.604	825.319
1050	805.68	827.745	832.421
Συντ/της συσχέτισης ρ		0.9143	0.9347
Αθροισμα τετραγώνων αποκλίσεων		20420.9	17153.2

Παραστατικότερα φαίνονται τα αποτελέσματα στο παρακάτω διάγραμμα.



Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι οι προβλέψεις και με τα δύο μοντέλα αποδίδουν με καλή προσέγγιση την συμπεριφορά του δείκτη. Εντούτοις το μοντέλο που υιοθετεί την μέθοδο GARCH δίνει ελαφρώς καλύτερα αποτελέσματα, όπως φαίνεται τόσο από τον συντελεστή συσχέτισης όσο και από το άθροισμα των τετραγώνων των αποκλίσεων. Χρησιμοποιώντας αυτά τα δύο κριτήρια βλέπουμε ότι το μεν κλασσικό Monte Carlo έχει συντελεστή συσχέτισης 0.9143 που δείχνει ικανοποιητική εξήγηση της κίνησης του δείκτη και αθροισμα τετραγώνων αποκλίσεων 20421. Το δε τροποποιημένο Monte Calro με GARCH δίνει αντίστοιχα συντελεστή συσχέτισης 0.9347 και άθροισμα τετραγώνων αποκλίσεων 17153. Τα αποτελέσματα αυτά, αν και δεν αποτελούν ριζοσπαστική βελτίωση στην δυνατότητα πρόβλεψης, δείχνουν ότι η αξιοποίηση της μεθόδου GARCH μπορεί να δώσει , χωρίς ιδιαίτερη υπολογιστική δυσκολία, ακριβέστερες εκτιμήσεις .

7. Συμπεράσματα

Στην εργασία αυτή παρουσιάσαμε την εφαρμογή μεθόδων που θεωρούν ότι η μεταβλητότητα δεν είναι σταθερή κατά την διάρκεια μιας χρονικής περιόδου υπο εξέταση αλλά μεταβάλλεται με τον χρόνο. Το μοντέλο GARCH(1,1) δείχνει πολυ ικανοποιητικά αποτελέσματα στο να παρακολουθεί τόσο την αυξομείωση της μεταβλητότητας από ημέρα σε ημέρα όσο και τα μακροχρόνια επίπεδα μεταβλητότητας.

Εντούτοις σε ορισμένες περιπτώσεις είναι σκόπιμο να διαιρούμε τα υπο εξέταση χρονικά διαστήματα σε επιμέρους διαστήματα και να εφαρμόζουμε την μέθοδο χωριστά για κάθε διάστημα για να διαπιστώσουμε αν υπάρχουν μεγάλες διαφορές στην μακροχρόνια διακύμανση ή όχι. Στην περίπτωσή μας η ενιαία εξέταση έδωσε ετήσια μακροχρόνια διακύμανση 11.93% ενώ η υποδιαίρεση σε δύο περιόδους έδωσε ετήσιες διακυμάνσεις 8.84% και 17.41% για την πρώτη και δεύτερη υποπερίοδο. Περαιτέρω υποδιαίρεση σε τρία χρονικά διαστήματα έδωσε ετήσιες διακυμάνσεις 9.27%, 10.58% και 15.74% για την πρώτη, δεύτερη και τρίτη υποπερίοδο αντίστοιχα..

Ακόμη σημαντικότερο είναι ότι η υποδιαίρεση του ενιαίου υπο εξέταση χρονικού διαστήματος σε επιμέρους διαστήματα αυξάνει την δείκτη πιθανότητας να συμβαίνει αυτό. Αρα είναι σωστότερη η προσέγγιση με πολαπλά χρονικά διαστήματα όπου αυτό είναι δυνατόν.

Ενας τρόπος για να υποδιαιρέσουμε την συνολική χρονική περίοδο υπό εξέταση είναι απλώς να την διαιρέσουμε σε δύο, τρία (όπως κάναμε εμείς στην εργασία) ή και περισσότερα τμήματα. Στην περίπτωση αυτή, αν οι υποπερίοδοι έχουν αλληλοεπικαλυπτόμενα τμήματα, τότε μπορεί να εφαρμοστεί γραμμική παρεμβολή για τις τιμές εξόδου του αλληλοεπικαλυπτόμενου τμήματος, ώστε να υπάρχει ομαλή μετάβαση από την μία υποπερίοδο στην επόμενη.

Η γνώση του μακρο-οικονομικού περιβάλλοντος όπου βρίσκεται η υπο εξέταση μεταβλητή (τιμή εξόδου) να μπορεί να μας κατατοπίσει για το ποιές είναι οι υποπερίοδοι αυτοί (π.χ. νέα 'εποχή' στις τιμές πετρελαίο, αναβάθμιση πιστοληπτικής ικανότητας μιας χώρας κ.α.)

Στην εργασία μας εξετάζουμε την μεταβλητότητα μιας μεταβλητής εισόδου. Η μεταβλητή εισόδου είναι η ημερήσια απόδοση ($ui=(S_i-S_{i-1})/S_{i-1}$) του δείκτη SP500. Ο μέσος όρος των ημερήσιων αποδόσεων είναι πολύ κοντά στο μηδέν (περίπου τάξης

0.00073) ενώ η τυπική απόκλιση των ημερήσιων αποδόσεων u_i είναι είναι περίπου 10 φορές μεγαλύτερη. Για τον λόγο αυτό δεν εισάγεται μεγάλο σφάλμα αν δεν λάβουμε υπόψη την πραγματική μέση τιμή και αντι αυτού θεωρήσουμε ότι η μέση τιμή των u_i είναι μηδέν. Αν όμως αντί για ημερήσιες αποδόσεις χρησιμοποιηθούν μηνιαίες ή ετήσιες αποδόσεις τότε αφενός μεν η μέση τιμή των αποδόσεων γίνεται μεγαλύτερη αφετέρου η διακύμανση των αποδόσεων αυτών γίνεται μικρότερη. Ως εκ τούτου είναι απαραίτητο, αν μελετάμε αποδόσεις στην βάση χρονικών διαστημάτων μεγαλυτέρων της ημέρας, στο μοντέλο GARCH να λαμβάνεται υπόψη η μέση τιμή των αποδόσεων αυτών.

Η εφαρμογή της μεθόδου GARCH στην πρόβλεψη των μελλοντικών αποδόσεων έδωσε ικανοποιητικά αποτελέσματα. Ο απλούστερος ίσως τρόπος να προβλέψουμε ημερήσιες αποδόσεις είναι να χρησιμοποιήσουμε το μοντέλο γραμμικής παλινδρόμησης. Ομολογουμένως το μοντέλο αυτό δεν εξηγεί ικανοποιητικά την πραγματικότητα. Αντιθέτως αν προσπαθήσουμε να προβλέψουμε ημερήσιες αποδόσεις με ένα μοντέλο αυτοπαλινδρόμησης σε συνδυασμό με την μέθοδο GARCH τότε οι παίρνουμε προβλέψεις καλύτερες από αυτές της γραμμικής παλινδρόμησης.

Ακόμη μια προσπάθεια εφαρμογής της μεθόδου GARCH έγινε μέσω του μονέλου Monte Carlo. Μελετήθηκαν οι προβλεπόμενες τιμές του δείκτη SP500 για 10 διαφορετικές ημέρες με την χρήση δύο μοντέλων, αφενός μεν με το κλασσικό μοντέλο Monte Carlo, αφετέρου δε με τροποποιημένο το μοντέλο Monte Carlo υιοθετώντας ταυτόχρονα την μέθοδο GARCH.

Τα αποτελέσματα και στην περίπτωση αυτήν ήταν ικανοποιητικά. Οι τιμές πρόβλεψης ήταν πολύ κοντά στις αληθινές τιμές και επιπλέον ο συντελεστής συσχέτισης των αποτελεσμάτων με τις πραγματικές τιμές, ήταν πολύ κοντά στην μονάδα και ως εκ τούτου μπορούμε να ισχυριστούμε ότι και τα δύο μοντέλα, εξηγούν ικανοποιητικά την πραγματικότητα. Ωστόσο η υιοθέτηση της μεθόδου GARCH βοηθά σημαντικά στην βελτίωση της ικανότητας αυτής που ήδη έχει το μοντέλο Monte Carlo. Με τον τρόπο αυτό επιτυγχάνεται και ο τελικός σκοπός που είναι η οικονομικότερη αποτίμηση των δικαιωμάτων προαίρεσης .

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να αναφέρουμε ότι η εργασία αυτή δίνει την αφορμή για περαιτέρω έρευνα στην αξιοποίηση της μεθόδου GARCH και σε άλλες υπάρχουσες τεχνικές και μεθόδους. Με άλλα λόγια εάν σε κάποιο μοντέλο η μεταβλητότητα θεωρείται σταθερή , τότε η εισαγωγή της μεθόδου GARCH μπορεί να βελτιώσει κατά μικρό μέγεθος αλλά με συστηματικό τρόπο το εν λόγω μοντέλο.

1-150

1	4-Jan-93	435.38		51	16-Mar-93	451.37		101	26-May-93	453.44
2	5-Jan-93	434.34		52	17-Mar-93	448.31		102	27-May-93	452.41
3	6-Jan-93	434.52		53	18-Mar-93	451.89		103	28-May-93	450.19
4	7-Jan-93	430.73		54	19-Mar-93	450.18		104	1-Jun-93	453.83
5	8-Jan-93	429.05		55	22-Mar-93	448.88		105	2-Jun-93	453.85
6	11-Jan-93	430.95		56	23-Mar-93	448.76		106	3-Jun-93	452.49
7	12-Jan-93	431.04		57	24-Mar-93	448.07		107	4-Jun-93	450.06
8	13-Jan-93	433.03		58	25-Mar-93	450.88		108	7-Jun-93	447.69
9	14-Jan-93	435.94		59	26-Mar-93	447.78		109	8-Jun-93	444.71
10	15-Jan-93	437.15		60	29-Mar-93	450.77		110	9-Jun-93	445.78
11	18-Jan-93	436.84		61	30-Mar-93	451.97		111	10-Jun-93	445.38
12	19-Jan-93	435.13		62	31-Mar-93	451.67		112	11-Jun-93	447.26
13	20-Jan-93	433.37		63	1-Apr-93	450.3		113	14-Jun-93	447.71
14	21-Jan-93	435.49		64	2-Apr-93	441.39		114	15-Jun-93	446.27
15	22-Jan-93	436.11		65	5-Apr-93	442.29		115	16-Jun-93	447.43
16	25-Jan-93	440.01		66	6-Apr-93	441.16		116	17-Jun-93	448.54
17	26-Jan-93	439.95		67	7-Apr-93	442.78		117	18-Jun-93	443.68
18	27-Jan-93	438.11		68	8-Apr-93	441.84		118	21-Jun-93	446.22
19	28-Jan-93	438.66		69	12-Apr-93	448.37		119	22-Jun-93	445.93
20	29-Jan-93	438.78		70	13-Apr-93	449.22		120	23-Jun-93	443.19
21	1-Feb-93	442.52		71	14-Apr-93	448.66		121	24-Jun-93	446.62
22	2-Feb-93	442.55		72	15-Apr-93	448.4		122	25-Jun-93	447.6
23	3-Feb-93	447.2		73	16-Apr-93	448.94		123	28-Jun-93	451.85
24	4-Feb-93	449.56		74	19-Apr-93	447.46		124	29-Jun-93	450.69
25	5-Feb-93	448.93		75	20-Apr-93	445.1		125	30-Jun-93	450.53
26	8-Feb-93	447.85		76	21-Apr-93	443.63		126	1-Jul-93	449.02
27	9-Feb-93	445.33		77	22-Apr-93	439.46		127	2-Jul-93	445.84
28	10-Feb-93	446.23		78	23-Apr-93	437.03		128	6-Jul-93	441.43
29	11-Feb-93	447.66		79	26-Apr-93	433.54		129	7-Jul-93	442.83
30	12-Feb-93	444.58		80	27-Apr-93	438.01		130	8-Jul-93	448.64
31	16-Feb-93	433.91		81	28-Apr-93	438.02		131	9-Jul-93	448.13
32	17-Feb-93	433.3		82	29-Apr-93	438.89		132	12-Jul-93	448.98
33	18-Feb-93	431.9		83	30-Apr-93	440.19		133	13-Jul-93	448.09
34	19-Feb-93	434.22		84	3-May-93	442.46		134	14-Jul-93	450.08
35	22-Feb-93	435.24		85	4-May-93	444.05		135	15-Jul-93	449.22
36	23-Feb-93	434.8		86	5-May-93	444.52		136	16-Jul-93	445.75
37	24-Feb-93	440.87		87	6-May-93	443.26		137	19-Jul-93	446.02
38	25-Feb-93	442.34		88	7-May-93	442.31		138	20-Jul-93	447.31
39	26-Feb-93	443.38		89	10-May-93	442.8		139	21-Jul-93	447.18
40	1-Mar-93	442.01		90	11-May-93	444.36		140	22-Jul-93	444.51
41	2-Mar-93	447.9		91	12-May-93	444.8		141	23-Jul-93	447.1
42	3-Mar-93	449.26		92	13-May-93	439.23		142	26-Jul-93	449.1
43	4-Mar-93	447.34		93	14-May-93	439.56		143	27-Jul-93	448.24
44	5-Mar-93	446.11		94	17-May-93	440.37		144	28-Jul-93	447.18
45	8-Mar-93	454.71		95	18-May-93	440.32		145	29-Jul-93	450.24
46	9-Mar-93	454.4		96	19-May-93	447.57		146	30-Jul-93	448.13
47	10-Mar-93	456.33		97	20-May-93	450.59		147	2-Aug-93	450.14
48	11-Mar-93	453.72		98	21-May-93	445.84		148	3-Aug-93	449.27
49	12-Mar-93	449.83		99	24-May-93	448		149	4-Aug-93	448.54
50	15-Mar-93	451.43		100	25-May-93	448.85		150	5-Aug-93	448.13

151-300

151	6-Aug-93	448.68		201	18-Oct-93	468.45		251	29-Dec-93	470.58
152	9-Aug-93	450.71		202	19-Oct-93	466.21		252	30-Dec-93	468.64
153	10-Aug-93	449.45		203	20-Oct-93	466.07		253	31-Dec-93	466.45
154	11-Aug-93	450.46		204	21-Oct-93	465.36		254	3-Jan-94	464.44
155	12-Aug-93	448.96		205	22-Oct-93	463.28		255	4-Jan-94	466.88
156	13-Aug-93	450.14		206	25-Oct-93	464.2		256	5-Jan-94	467.55
157	16-Aug-93	452.38		207	26-Oct-93	464.3		257	6-Jan-94	467.13
158	17-Aug-93	453.13		208	27-Oct-93	464.61		258	7-Jan-94	469.9
159	18-Aug-93	456.04		209	28-Oct-93	467.73		259	10-Jan-94	475.27
160	19-Aug-93	456.43		210	29-Oct-93	467.83		260	11-Jan-94	474.13
161	20-Aug-93	456.16		211	1-Nov-93	469.1		261	12-Jan-94	474.17
162	23-Aug-93	455.23		212	2-Nov-93	468.44		262	13-Jan-94	472.47
163	24-Aug-93	459.77		213	3-Nov-93	463.02		263	14-Jan-94	474.91
164	25-Aug-93	460.13		214	4-Nov-93	457.49		264	17-Jan-94	473.3
165	26-Aug-93	461.04		215	5-Nov-93	459.57		265	18-Jan-94	474.25
166	27-Aug-93	460.53		216	8-Nov-93	460.21		266	19-Jan-94	474.3
167	30-Aug-93	461.91		217	9-Nov-93	460.33		267	20-Jan-94	474.98
168	31-Aug-93	463.56		218	10-Nov-93	463.71		268	21-Jan-94	474.72
169	1-Sep-93	463.14		219	11-Nov-93	462.64		269	24-Jan-94	471.97
170	2-Sep-93	461.3		220	12-Nov-93	465.39		270	25-Jan-94	470.92
171	3-Sep-93	461.34		221	15-Nov-93	463.75		271	26-Jan-94	473.2
172	7-Sep-93	458.52		222	16-Nov-93	466.74		272	27-Jan-94	477.05
173	8-Sep-93	456.65		223	17-Nov-93	464.81		273	28-Jan-94	478.7
174	9-Sep-93	457.48		224	18-Nov-93	463.64		274	31-Jan-94	481.61
175	10-Sep-93	461.72		225	19-Nov-93	462.6		275	1-Feb-94	479.61
176	13-Sep-93	462.05		226	22-Nov-93	459.13		276	2-Feb-94	482.02
177	14-Sep-93	459.9		227	23-Nov-93	461.03		277	3-Feb-94	480.71
178	15-Sep-93	461.59		228	24-Nov-93	462.35		278	4-Feb-94	469.81
179	16-Sep-93	459.42		229	26-Nov-93	463.06		279	7-Feb-94	471.76
180	17-Sep-93	458.83		230	29-Nov-93	461.9		280	8-Feb-94	471.05
181	20-Sep-93	455.05		231	30-Nov-93	461.79		281	9-Feb-94	472.77
182	21-Sep-93	452.95		232	1-Dec-93	461.89		282	10-Feb-94	468.93
183	22-Sep-93	456.2		233	2-Dec-93	463.11		283	11-Feb-94	470.19
184	23-Sep-93	457.74		234	3-Dec-93	464.89		284	14-Feb-94	470.23
185	24-Sep-93	457.63		235	6-Dec-93	466.43		285	15-Feb-94	472.52
186	27-Sep-93	461.8		236	7-Dec-93	466.76		286	16-Feb-94	472.79
187	28-Sep-93	461.55		237	8-Dec-93	466.29		287	17-Feb-94	470.34
188	29-Sep-93	460.11		238	9-Dec-93	464.18		288	18-Feb-94	467.69
189	30-Sep-93	458.92		239	10-Dec-93	463.93		289	22-Feb-94	471.46
190	1-Oct-93	461.28		240	13-Dec-93	465.69		290	23-Feb-94	470.69
191	4-Oct-93	461.33		241	14-Dec-93	463.06		291	24-Feb-94	464.28
192	5-Oct-93	461.2		242	15-Dec-93	461.84		292	25-Feb-94	466.07
193	6-Oct-93	460.72		243	16-Dec-93	463.34		293	28-Feb-94	467.14
194	7-Oct-93	459.18		244	17-Dec-93	466.37		294	1-Mar-94	464.44
195	8-Oct-93	460.31		245	20-Dec-93	465.85		295	2-Mar-94	464.81
196	11-Oct-93	460.88		246	21-Dec-93	465.3		296	3-Mar-94	463.01
197	12-Oct-93	461.12		247	22-Dec-93	467.31		297	4-Mar-94	464.74
198	13-Oct-93	461.49		248	23-Dec-93	467.38		298	7-Mar-94	466.91
199	14-Oct-93	466.83		249	27-Dec-93	470.54		299	8-Mar-94	465.88
200	15-Oct-93	469.5		250	28-Dec-93	470.94		300	9-Mar-94	467.06

301-450

301	10-Mar-94	463.9		351	23-May-94	453.2		401	3-Aug-94	461.45
302	11-Mar-94	466.45		352	24-May-94	454.81		402	4-Aug-94	458.4
303	14-Mar-94	467.39		353	25-May-94	456.34		403	5-Aug-94	457.09
304	15-Mar-94	467.01		354	26-May-94	457.05		404	8-Aug-94	457.89
305	16-Mar-94	469.42		355	27-May-94	457.33		405	9-Aug-94	457.93
306	17-Mar-94	470.9		356	31-May-94	456.52		406	10-Aug-94	460.3
307	18-Mar-94	471.06		357	1-Jun-94	457.63		407	11-Aug-94	458.88
308	21-Mar-94	468.54		358	2-Jun-94	457.65		408	12-Aug-94	461.94
309	22-Mar-94	468.8		359	3-Jun-94	460.13		409	15-Aug-94	461.23
310	23-Mar-94	468.54		360	6-Jun-94	458.87		410	16-Aug-94	465.01
311	24-Mar-94	464.35		361	7-Jun-94	458.21		411	17-Aug-94	465.17
312	25-Mar-94	460.58		362	8-Jun-94	457.06		412	18-Aug-94	463.17
313	28-Mar-94	460		363	9-Jun-94	457.86		413	19-Aug-94	463.68
314	29-Mar-94	452.47		364	10-Jun-94	458.67		414	22-Aug-94	462.31
315	30-Mar-94	445.55		365	13-Jun-94	459.1		415	23-Aug-94	464.51
316	31-Mar-94	445.76		366	14-Jun-94	462.37		416	24-Aug-94	469.03
317	4-Apr-94	438.91		367	15-Jun-94	460.61		417	25-Aug-94	468.08
318	5-Apr-94	448.29		368	16-Jun-94	461.93		418	26-Aug-94	473.8
319	6-Apr-94	448.05		369	17-Jun-94	458.45		419	29-Aug-94	474.59
320	7-Apr-94	450.89		370	20-Jun-94	455.48		420	30-Aug-94	476.09
321	8-Apr-94	447.1		371	21-Jun-94	451.34		421	31-Aug-94	475.5
322	11-Apr-94	449.87		372	22-Jun-94	453.09		422	1-Sep-94	473.17
323	12-Apr-94	447.57		373	23-Jun-94	449.63		423	2-Sep-94	470.99
324	13-Apr-94	446.26		374	24-Jun-94	442.8		424	6-Sep-94	471.86
325	14-Apr-94	446.38		375	27-Jun-94	447.31		425	7-Sep-94	470.96
326	15-Apr-94	446.18		376	28-Jun-94	446.07		426	8-Sep-94	473.14
327	18-Apr-94	442.46		377	29-Jun-94	447.63		427	9-Sep-94	468.18
328	19-Apr-94	442.54		378	30-Jun-94	444.27		428	12-Sep-94	466.21
329	20-Apr-94	441.96		379	1-Jul-94	446.2		429	13-Sep-94	467.52
330	21-Apr-94	448.73		380	5-Jul-94	446.37		430	14-Sep-94	468.8
331	22-Apr-94	447.63		381	6-Jul-94	446.13		431	15-Sep-94	474.81
332	25-Apr-94	452.71		382	7-Jul-94	448.38		432	16-Sep-94	471.19
333	26-Apr-94	451.86		383	8-Jul-94	449.55		433	19-Sep-94	470.85
334	28-Apr-94	449.1		384	11-Jul-94	448.06		434	20-Sep-94	463.36
335	29-Apr-94	450.91		385	12-Jul-94	447.95		435	21-Sep-94	461.46
336	2-May-94	453.02		386	13-Jul-94	448.73		436	22-Sep-94	461.27
337	3-May-94	453.03		387	14-Jul-94	453.41		437	23-Sep-94	459.67
338	4-May-94	451.72		388	15-Jul-94	454.16		438	26-Sep-94	460.82
339	5-May-94	451.37		389	18-Jul-94	455.22		439	27-Sep-94	462.05
340	6-May-94	447.82		390	19-Jul-94	453.86		440	28-Sep-94	464.84
341	9-May-94	442.32		391	20-Jul-94	451.6		441	29-Sep-94	462.23
342	10-May-94	445.01		392	21-Jul-94	452.61		442	30-Sep-94	462.71
343	11-May-94	441.49		393	22-Jul-94	453.11		443	3-Oct-94	461.74
344	12-May-94	443.75		394	25-Jul-94	454.25		444	4-Oct-94	454.59
345	13-May-94	444.13		395	26-Jul-94	453.36		445	5-Oct-94	453.52
346	16-May-94	444.49		396	27-Jul-94	452.57		446	6-Oct-94	452.36
347	17-May-94	449.37		397	28-Jul-94	454.23		447	7-Oct-94	455.1
348	18-May-94	453.7		398	29-Jul-94	458.26		448	10-Oct-94	459.04
349	19-May-94	456.48		399	1-Aug-94	461.01		449	11-Oct-94	465.79
350	20-May-94	454.92		400	2-Aug-94	460.56		450	12-Oct-94	465.47

451-600

451	13-Oct-94	467.79		501	23-Dec-94	459.83		551	8-Mar-95	483.14
452	14-Oct-94	469.1		502	27-Dec-94	462.47		552	9-Mar-95	483.16
453	17-Oct-94	468.96		503	28-Dec-94	460.86		553	10-Mar-95	489.57
454	18-Oct-94	467.66		504	29-Dec-94	461.17		554	13-Mar-95	490.05
455	19-Oct-94	470.28		505	30-Dec-94	459.27		555	14-Mar-95	492.89
456	20-Oct-94	466.85		506	3-Jan-95	459.11		556	15-Mar-95	491.88
457	21-Oct-94	464.89		507	4-Jan-95	460.71		557	16-Mar-95	495.41
458	24-Oct-94	460.83		508	5-Jan-95	460.34		558	17-Mar-95	495.52
459	25-Oct-94	461.52		509	6-Jan-95	460.68		559	20-Mar-95	496.15
460	26-Oct-94	462.61		510	9-Jan-95	460.83		560	21-Mar-95	495.07
461	27-Oct-94	465.85		511	10-Jan-95	461.68		561	22-Mar-95	495.67
462	28-Oct-94	473.77		512	11-Jan-95	461.67		562	23-Mar-95	495.95
463	31-Oct-94	472.35		513	12-Jan-95	461.64		563	24-Mar-95	500.97
464	1-Nov-94	468.42		514	13-Jan-95	465.97		564	27-Mar-95	503.2
465	2-Nov-94	466.51		515	16-Jan-95	469.38		565	28-Mar-95	503.9
466	3-Nov-94	467.91		516	17-Jan-95	470.05		566	29-Mar-95	503.12
467	4-Nov-94	462.28		517	18-Jan-95	469.72		567	30-Mar-95	502.22
468	7-Nov-94	463.06		518	19-Jan-95	466.95		568	31-Mar-95	500.71
469	8-Nov-94	465.65		519	20-Jan-95	464.78		569	3-Apr-95	501.85
470	9-Nov-94	465.4		520	23-Jan-95	465.82		570	4-Apr-95	505.24
471	10-Nov-94	464.37		521	24-Jan-95	465.86		571	5-Apr-95	505.57
472	11-Nov-94	462.35		522	25-Jan-95	467.44		572	6-Apr-95	506.08
473	14-Nov-94	466.04		523	26-Jan-95	468.32		573	7-Apr-95	506.42
474	15-Nov-94	465.03		524	27-Jan-95	470.39		574	10-Apr-95	507.01
475	16-Nov-94	465.6		525	30-Jan-95	468.51		575	11-Apr-95	505.53
476	17-Nov-94	463.57		526	31-Jan-95	470.42		576	12-Apr-95	507.17
477	18-Nov-94	461.47		527	1-Feb-95	470.4		577	13-Apr-95	509.23
478	21-Nov-94	458.29		528	2-Feb-95	472.79		578	17-Apr-95	506.13
479	22-Nov-94	450.08		529	3-Feb-95	478.65		579	18-Apr-95	505.37
480	23-Nov-94	449.93		530	6-Feb-95	481.14		580	19-Apr-95	504.92
481	25-Nov-94	452.29		531	7-Feb-95	480.81		581	20-Apr-95	505.29
482	28-Nov-94	454.16		532	8-Feb-95	481.19		582	21-Apr-95	508.49
483	29-Nov-94	455.17		533	9-Feb-95	480.19		583	24-Apr-95	512.89
484	30-Nov-94	453.69		534	10-Feb-95	481.46		584	25-Apr-95	512.1
485	1-Dec-94	448.92		535	13-Feb-95	481.65		585	26-Apr-95	512.66
486	2-Dec-94	453.3		536	14-Feb-95	482.55		586	27-Apr-95	513.55
487	5-Dec-94	453.33		537	15-Feb-95	484.54		587	28-Apr-95	514.71
488	6-Dec-94	453.11		538	16-Feb-95	485.22		588	1-May-95	514.26
489	7-Dec-94	451.23		539	17-Feb-95	481.97		589	2-May-95	514.86
490	8-Dec-94	445.45		540	21-Feb-95	482.74		590	3-May-95	520.48
491	9-Dec-94	446.97		541	22-Feb-95	485.02		591	4-May-95	520.54
492	12-Dec-94	449.47		542	23-Feb-95	486.91		592	5-May-95	520.12
493	13-Dec-94	450.15		543	24-Feb-95	488.11		593	8-May-95	523.96
494	14-Dec-94	454.97		544	27-Feb-95	483.81		594	9-May-95	523.56
495	15-Dec-94	455.34		545	28-Feb-95	487.39		595	10-May-95	524.36
496	16-Dec-94	458.8		546	1-Mar-95	485.65		596	11-May-95	524.37
497	19-Dec-94	457.91		547	2-Mar-95	485.13		597	12-May-95	525.55
498	20-Dec-94	457.1		548	3-Mar-95	485.42		598	15-May-95	527.74
499	21-Dec-94	459.61		549	6-Mar-95	485.65		599	16-May-95	528.19
500	22-Dec-94	459.67		550	7-Mar-95	482.12		600	17-May-95	527.07

601-750

601	18-May-95	519.58		651	31-Jul-95	562.06		701	10-Oct-95	577.52
602	19-May-95	519.19		652	1-Aug-95	559.64		702	11-Oct-95	579.46
603	22-May-95	523.65		653	2-Aug-95	558.8		703	12-Oct-95	583.1
604	23-May-95	528.59		654	3-Aug-95	558.75		704	13-Oct-95	584.5
605	24-May-95	528.61		655	4-Aug-95	558.94		705	16-Oct-95	583.03
606	25-May-95	528.59		656	7-Aug-95	560.03		706	17-Oct-95	586.78
607	26-May-95	523.65		657	8-Aug-95	560.39		707	18-Oct-95	587.44
608	30-May-95	523.58		658	9-Aug-95	559.71		708	19-Oct-95	590.65
609	31-May-95	533.4		659	10-Aug-95	557.45		709	20-Oct-95	587.46
610	1-Jun-95	533.49		660	11-Aug-95	555.11		710	23-Oct-95	585.06
611	2-Jun-95	532.51		661	14-Aug-95	559.73		711	24-Oct-95	586.54
612	5-Jun-95	535.6		662	15-Aug-95	558.57		712	25-Oct-95	582.47
613	6-Jun-95	535.55		663	16-Aug-95	559.97		713	26-Oct-95	576.72
614	7-Jun-95	533.13		664	17-Aug-95	559.04		714	27-Oct-95	579.7
615	8-Jun-95	532.35		665	18-Aug-95	559.21		715	30-Oct-95	583.25
616	9-Jun-95	527.94		666	21-Aug-95	558.11		716	31-Oct-95	581.5
617	12-Jun-95	530.88		667	22-Aug-95	559.51		717	1-Nov-95	584.22
618	13-Jun-95	536.05		668	23-Aug-95	557.14		718	2-Nov-95	589.72
619	14-Jun-95	536.47		669	24-Aug-95	557.46		719	3-Nov-95	590.57
620	15-Jun-95	537.12		670	25-Aug-95	560.1		720	6-Nov-95	588.46
621	16-Jun-95	539.83		671	28-Aug-95	559.05		721	7-Nov-95	586.32
622	19-Jun-95	545.22		672	29-Aug-95	560		722	8-Nov-95	591.71
623	20-Jun-95	544.98		673	30-Aug-95	560.92		723	9-Nov-95	593.26
624	21-Jun-95	543.98		674	31-Aug-95	561.88		724	10-Nov-95	592.72
625	22-Jun-95	551.07		675	1-Sep-95	563.84		725	13-Nov-95	592.3
626	23-Jun-95	549.71		676	5-Sep-95	569.16		726	14-Nov-95	589.29
627	26-Jun-95	544.13		677	6-Sep-95	570.17		727	15-Nov-95	593.96
628	27-Jun-95	542.43		678	7-Sep-95	570.29		728	16-Nov-95	597.34
629	28-Jun-95	544.73		679	8-Sep-95	571.68		729	17-Nov-95	600.07
630	29-Jun-95	543.87		680	11-Sep-95	573.91		730	20-Nov-95	596.85
631	30-Jun-95	544.75		681	12-Sep-95	576.51		731	21-Nov-95	600.24
632	3-Jul-95	547.09		682	13-Sep-95	578.77		732	22-Nov-95	598.4
633	5-Jul-95	547.26		683	14-Sep-95	583.61		733	24-Nov-95	599.97
634	6-Jul-95	553.99		684	15-Sep-95	583.35		734	27-Nov-95	601.32
635	7-Jul-95	556.37		685	18-Sep-95	582.77		735	28-Nov-95	606.45
636	10-Jul-95	557.19		686	19-Sep-95	584.2		736	29-Nov-95	607.64
637	11-Jul-95	554.78		687	20-Sep-95	586.77		737	30-Nov-95	605.37
638	12-Jul-95	560.89		688	21-Sep-95	583		738	1-Dec-95	606.98
639	13-Jul-95	561		689	22-Sep-95	581.73		739	4-Dec-95	613.68
640	14-Jul-95	559.89		690	25-Sep-95	581.81		740	5-Dec-95	617.68
641	17-Jul-95	562.72		691	26-Sep-95	581.41		741	6-Dec-95	620.18
642	18-Jul-95	558.46		692	27-Sep-95	581.04		742	7-Dec-95	616.17
643	19-Jul-95	550.98		693	28-Sep-95	585.87		743	8-Dec-95	617.48
644	20-Jul-95	553.54		694	29-Sep-95	584.41		744	11-Dec-95	619.52
645	21-Jul-95	553.62		695	2-Oct-95	581.72		745	12-Dec-95	618.78
646	24-Jul-95	556.63		696	3-Oct-95	582.34		746	13-Dec-95	621.69
647	25-Jul-95	561.1		697	4-Oct-95	581.47		747	14-Dec-95	616.92
648	26-Jul-95	561.61		698	5-Oct-95	582.63		748	15-Dec-95	616.34
649	27-Jul-95	565.22		699	6-Oct-95	582.49		749	18-Dec-95	606.81
650	28-Jul-95	562.93		700	9-Oct-95	578.37		750	19-Dec-95	611.93

751-900

751	20-Dec-95	605.94		801	4-Mar-96	650.81		851	14-May-96	665.6
752	21-Dec-95	610.49		802	5-Mar-96	655.79		852	15-May-96	665.42
753	22-Dec-95	611.96		803	6-Mar-96	652		853	16-May-96	664.85
754	26-Dec-95	614.3		804	7-Mar-96	653.65		854	17-May-96	668.91
755	27-Dec-95	614.53		805	8-Mar-96	633.5		855	20-May-96	673.15
756	28-Dec-95	614.12		806	11-Mar-96	640.02		856	21-May-96	672.76
757	29-Dec-95	615.93		807	12-Mar-96	637.09		857	22-May-96	678.42
758	2-Jan-96	620.73		808	13-Mar-96	638.55		858	23-May-96	676
759	3-Jan-96	621.32		809	14-Mar-96	640.87		859	24-May-96	678.51
760	4-Jan-96	617.7		810	15-Mar-96	641.43		860	28-May-96	672.23
761	5-Jan-96	616.71		811	18-Mar-96	652.65		861	29-May-96	667.93
762	8-Jan-96	618.46		812	19-Mar-96	651.69		862	30-May-96	671.7
763	9-Jan-96	609.45		813	20-Mar-96	649.98		863	31-May-96	669.12
764	10-Jan-96	597.48		814	21-Mar-96	649.19		864	3-Jun-96	667.68
765	11-Jan-96	602.69		815	22-Mar-96	650.62		865	4-Jun-96	672.56
766	12-Jan-96	601.81		816	25-Mar-96	650.04		866	5-Jun-96	678.44
767	15-Jan-96	599.82		817	26-Mar-96	652.97		867	6-Jun-96	673.03
768	16-Jan-96	608.44		818	27-Mar-96	648.91		868	7-Jun-96	673.31
769	17-Jan-96	606.38		819	28-Mar-96	648.94		869	10-Jun-96	672.16
770	18-Jan-96	608.24		820	29-Mar-96	645.5		870	11-Jun-96	670.97
771	19-Jan-96	611.83		821	1-Apr-96	653.73		871	12-Jun-96	669.04
772	22-Jan-96	613.4		822	2-Apr-96	655.26		872	13-Jun-96	667.92
773	23-Jan-96	612.79		823	3-Apr-96	655.88		873	14-Jun-96	665.85
774	24-Jan-96	619.96		824	4-Apr-96	655.86		874	17-Jun-96	665.16
775	25-Jan-96	617.03		825	8-Apr-96	644.24		875	18-Jun-96	662.06
776	26-Jan-96	621.62		826	9-Apr-96	642.19		876	19-Jun-96	661.96
777	29-Jan-96	624.22		827	10-Apr-96	633.5		877	20-Jun-96	662.1
778	30-Jan-96	630.15		828	11-Apr-96	631.18		878	21-Jun-96	666.84
779	31-Jan-96	636.02		829	12-Apr-96	636.71		879	24-Jun-96	668.85
780	1-Feb-96	638.46		830	15-Apr-96	642.49		880	25-Jun-96	668.48
781	2-Feb-96	635.84		831	16-Apr-96	645		881	26-Jun-96	664.39
782	5-Feb-96	641.43		832	17-Apr-96	641.61		882	27-Jun-96	668.55
783	6-Feb-96	646.33		833	18-Apr-96	643.61		883	28-Jun-96	670.63
784	7-Feb-96	649.93		834	19-Apr-96	645.07		884	1-Jul-96	675.88
785	8-Feb-96	656.07		835	22-Apr-96	647.89		885	2-Jul-96	673.61
786	9-Feb-96	656.37		836	23-Apr-96	651.58		886	3-Jul-96	672.4
787	12-Feb-96	661.45		837	24-Apr-96	650.17		887	5-Jul-96	657.44
788	13-Feb-96	660.51		838	25-Apr-96	652.87		888	8-Jul-96	652.54
789	14-Feb-96	655.58		839	26-Apr-96	653.46		889	9-Jul-96	654.75
790	15-Feb-96	651.32		840	29-Apr-96	654.16		890	10-Jul-96	656.06
791	16-Feb-96	647.98		841	30-Apr-96	654.17		891	11-Jul-96	645.67
792	20-Feb-96	640.65		842	1-May-96	654.58		892	12-Jul-96	646.19
793	21-Feb-96	648.1		843	2-May-96	643.38		893	15-Jul-96	629.8
794	22-Feb-96	658.86		844	3-May-96	641.63		894	16-Jul-96	628.37
795	23-Feb-96	659.08		845	6-May-96	640.81		895	17-Jul-96	634.07
796	26-Feb-96	650.46		846	7-May-96	638.26		896	18-Jul-96	643.56
797	27-Feb-96	647.24		847	8-May-96	644.78		897	19-Jul-96	638.73
798	28-Feb-96	644.75		848	9-May-96	645.44		898	22-Jul-96	633.77
799	29-Feb-96	640.43		849	10-May-96	652.09		899	23-Jul-96	626.87
800	1-Mar-96	644.37		850	13-May-96	661.51		900	24-Jul-96	626.65

901-1050

901	25-Jul-96	631.17		951	4-Oct-96	701.46		1001	16-Dec-96	720.98
902	26-Jul-96	635.9		952	7-Oct-96	703.34		1002	17-Dec-96	726.04
903	29-Jul-96	630.91		953	8-Oct-96	700.64		1003	18-Dec-96	731.54
904	30-Jul-96	635.26		954	9-Oct-96	696.74		1004	19-Dec-96	745.76
905	31-Jul-96	639.95		955	10-Oct-96	694.61		1005	20-Dec-96	748.87
906	1-Aug-96	650.02		956	11-Oct-96	700.66		1006	23-Dec-96	746.92
907	2-Aug-96	662.49		957	14-Oct-96	703.54		1007	24-Dec-96	751.03
908	5-Aug-96	660.23		958	15-Oct-96	702.57		1008	26-Dec-96	755.82
909	6-Aug-96	662.38		959	16-Oct-96	704.41		1009	27-Dec-96	756.79
910	7-Aug-96	664.16		960	17-Oct-96	706.99		1010	30-Dec-96	753.85
911	8-Aug-96	662.59		961	18-Oct-96	710.82		1011	31-Dec-96	740.74
912	9-Aug-96	662.1		962	21-Oct-96	709.85		1012	2-Jan-97	737.01
913	12-Aug-96	665.77		963	22-Oct-96	706.57		1013	3-Jan-97	748.03
914	13-Aug-96	660.2		964	23-Oct-96	707.27		1014	6-Jan-97	747.65
915	14-Aug-96	662.05		965	24-Oct-96	702.29		1015	7-Jan-97	753.23
916	15-Aug-96	662.28		966	25-Oct-96	700.92		1016	8-Jan-97	748.41
917	16-Aug-96	665.21		967	28-Oct-96	697.26		1017	9-Jan-97	754.85
918	19-Aug-96	666.58		968	29-Oct-96	701.5		1018	10-Jan-97	759.5
919	20-Aug-96	665.69		969	30-Oct-96	700.9		1019	13-Jan-97	759.51
920	21-Aug-96	665.07		970	31-Oct-96	705.27		1020	14-Jan-97	768.86
921	22-Aug-96	670.68		971	1-Nov-96	703.77		1021	15-Jan-97	767.2
922	23-Aug-96	667.03		972	4-Nov-96	706.73		1022	16-Jan-97	769.75
923	26-Aug-96	663.88		973	5-Nov-96	714.14		1023	17-Jan-97	776.17
924	27-Aug-96	666.4		974	6-Nov-96	724.59		1024	20-Jan-97	776.7
925	28-Aug-96	664.81		975	7-Nov-96	727.65		1025	21-Jan-97	782.72
926	29-Aug-96	657.4		976	8-Nov-96	730.82		1026	22-Jan-97	786.23
927	30-Aug-96	651.99		977	11-Nov-96	731.87		1027	23-Jan-97	777.56
928	3-Sep-96	654.72		978	12-Nov-96	729.56		1028	24-Jan-97	770.52
929	4-Sep-96	655.61		979	13-Nov-96	731.13		1029	27-Jan-97	765.02
930	5-Sep-96	649.44		980	14-Nov-96	735.88		1030	28-Jan-97	765.02
931	6-Sep-96	655.68		981	15-Nov-96	737.62		1031	29-Jan-97	772.5
932	9-Sep-96	663.76		982	18-Nov-96	737.02		1032	30-Jan-97	784.17
933	10-Sep-96	663.81		983	19-Nov-96	742.16		1033	31-Jan-97	786.16
934	11-Sep-96	667.28		984	20-Nov-96	743.95		1034	3-Feb-97	786.73
935	12-Sep-96	671.13		985	21-Nov-96	742.75		1035	4-Feb-97	789.26
936	13-Sep-96	680.54		986	22-Nov-96	748.73		1036	5-Feb-97	778.28
937	16-Sep-96	683.98		987	25-Nov-96	757.03		1037	6-Feb-97	780.15
938	17-Sep-96	682.94		988	26-Nov-96	755.96		1038	7-Feb-97	789.56
939	18-Sep-96	681.47		989	27-Nov-96	755		1039	10-Feb-97	785.43
940	19-Sep-96	683		990	29-Nov-96	757.02		1040	11-Feb-97	789.59
941	20-Sep-96	687.02		991	2-Dec-96	756.56		1041	12-Feb-97	802.77
942	23-Sep-96	686.48		992	3-Dec-96	748.28		1042	13-Feb-97	811.82
943	24-Sep-96	685.61		993	4-Dec-96	745.1		1043	14-Feb-97	808.48
944	25-Sep-96	685.83		994	5-Dec-96	744.38		1044	18-Feb-97	816.29
945	26-Sep-96	685.86		995	6-Dec-96	739.6		1045	19-Feb-97	812.47
946	27-Sep-96	686.19		996	9-Dec-96	749.76		1046	20-Feb-97	802.8
947	30-Sep-96	687.31		997	10-Dec-96	747.54		1047	21-Feb-97	801.77
948	1-Oct-96	689.08		998	11-Dec-96	740.73		1048	24-Feb-97	810.28
949	2-Oct-96	694.01		999	12-Dec-96	729.33		1049	25-Feb-97	812.1
950	3-Oct-96	692.78		1000	13-Dec-96	728.64		1050	26-Feb-97	805.68

1051-1200

1051	27-Feb-97	795.07		1101	9-May-97	824.78		1151	22-Jul-97	933.98
1052	28-Feb-97	790.82		1102	12-May-97	837.66		1152	23-Jul-97	936.56
1053	3-Mar-97	795.31		1103	13-May-97	833.13		1153	24-Jul-97	940.3
1054	4-Mar-97	790.95		1104	14-May-97	836.04		1154	25-Jul-97	938.79
1055	5-Mar-97	801.99		1105	15-May-97	841.88		1155	28-Jul-97	936.45
1056	6-Mar-97	798.56		1106	16-May-97	829.75		1156	29-Jul-97	942.29
1057	7-Mar-97	804.97		1107	19-May-97	833.27		1157	30-Jul-97	952.29
1058	10-Mar-97	813.65		1108	20-May-97	841.66		1158	31-Jul-97	954.29
1059	11-Mar-97	811.34		1109	21-May-97	839.35		1159	1-Aug-97	947.14
1060	12-Mar-97	804.26		1110	22-May-97	835.66		1160	4-Aug-97	950.3
1061	13-Mar-97	789.56		1111	23-May-97	847.03		1161	5-Aug-97	952.37
1062	14-Mar-97	793.17		1112	27-May-97	849.71		1162	6-Aug-97	960.32
1063	17-Mar-97	795.71		1113	28-May-97	847.21		1163	7-Aug-97	951.19
1064	18-Mar-97	789.66		1114	29-May-97	844.08		1164	8-Aug-97	933.54
1065	19-Mar-97	785.77		1115	30-May-97	848.28		1165	11-Aug-97	937
1066	20-Mar-97	782.65		1116	2-Jun-97	846.36		1166	12-Aug-97	926.53
1067	21-Mar-97	784.1		1117	3-Jun-97	845.48		1167	13-Aug-97	922.02
1068	24-Mar-97	790.89		1118	4-Jun-97	840.11		1168	14-Aug-97	924.77
1069	25-Mar-97	789.07		1119	5-Jun-97	843.43		1169	15-Aug-97	900.81
1070	26-Mar-97	790.5		1120	6-Jun-97	858.01		1170	18-Aug-97	912.49
1071	27-Mar-97	773.88		1121	9-Jun-97	862.91		1171	19-Aug-97	926.01
1072	31-Mar-97	757.12		1122	10-Jun-97	865.27		1172	20-Aug-97	939.35
1073	1-Apr-97	759.64		1123	11-Jun-97	869.57		1173	21-Aug-97	925.05
1074	2-Apr-97	750.11		1124	12-Jun-97	883.46		1174	22-Aug-97	923.55
1075	3-Apr-97	750.32		1125	13-Jun-97	893.27		1175	25-Aug-97	920.16
1076	4-Apr-97	757.9		1126	16-Jun-97	893.9		1176	26-Aug-97	913.02
1077	7-Apr-97	762.13		1127	17-Jun-97	894.42		1177	27-Aug-97	913.7
1078	8-Apr-97	766.12		1128	18-Jun-97	889.06		1178	28-Aug-97	903.67
1079	9-Apr-97	760.6		1129	19-Jun-97	897.99		1179	29-Aug-97	899.47
1080	10-Apr-97	758.34		1130	20-Jun-97	898.7		1180	2-Sep-97	927.58
1081	11-Apr-97	737.65		1131	23-Jun-97	878.62		1181	3-Sep-97	927.86
1082	14-Apr-97	743.73		1132	24-Jun-97	896.34		1182	4-Sep-97	930.87
1083	15-Apr-97	754.72		1133	25-Jun-97	888.99		1183	5-Sep-97	929.05
1084	16-Apr-97	763.53		1134	26-Jun-97	883.68		1184	8-Sep-97	931.2
1085	17-Apr-97	761.77		1135	27-Jun-97	887.3		1185	9-Sep-97	933.62
1086	18-Apr-97	766.34		1136	30-Jun-97	885.14		1186	10-Sep-97	919.03
1087	21-Apr-97	760.37		1137	1-Jul-97	891.03		1187	11-Sep-97	912.59
1088	22-Apr-97	774.61		1138	2-Jul-97	904.03		1188	12-Sep-97	923.91
1089	23-Apr-97	773.64		1139	3-Jul-97	916.92		1189	15-Sep-97	919.77
1090	24-Apr-97	771.18		1140	7-Jul-97	912.2		1190	16-Sep-97	945.64
1091	25-Apr-97	765.37		1141	8-Jul-97	918.75		1191	17-Sep-97	943
1092	28-Apr-97	772.96		1142	9-Jul-97	907.54		1192	18-Sep-97	947.29
1093	29-Apr-97	794.05		1143	10-Jul-97	913.78		1193	19-Sep-97	950.51
1094	30-Apr-97	801.34		1144	11-Jul-97	916.68		1194	22-Sep-97	955.443
1095	1-May-97	798.53		1145	14-Jul-97	918.38		1195	23-Sep-97	951.93
1096	2-May-97	812.97		1146	15-Jul-97	925.76		1196	24-Sep-97	944.48
1097	5-May-97	830.29		1147	16-Jul-97	936.59		1197	25-Sep-97	937.91
1098	6-May-97	827.76		1148	17-Jul-97	931.61		1198	26-Sep-97	945.22
1099	7-May-97	815.62		1149	18-Jul-97	915.3		1199	29-Sep-97	953.34
1100	8-May-97	820.26		1150	21-Jul-97	912.94		1200	30-Sep-97	947.28

1200-1325

1201	1-Oct-97	955.41		1251	11-Dec-97	954.94		1301	25-Feb-98	1042.9
1202	2-Oct-97	960.46		1252	12-Dec-97	953.39		1302	26-Feb-98	1048.67
1203	3-Oct-97	965.03		1253	15-Dec-97	963.39		1303	27-Feb-98	1049.34
1204	6-Oct-97	972.69		1254	16-Dec-97	968.04		1304	2-Mar-98	1047.7
1205	7-Oct-97	983.12		1255	17-Dec-97	965.54		1305	3-Mar-98	1052.02
1206	8-Oct-97	973.84		1256	18-Dec-97	955.3		1306	4-Mar-98	1047.33
1207	9-Oct-97	970.62		1257	19-Dec-97	946.78		1307	5-Mar-98	1035.05
1208	10-Oct-97	966.98		1258	22-Dec-97	953.7		1308	6-Mar-98	1055.69
1209	13-Oct-97	968.1		1259	23-Dec-97	939.13		1309	9-Mar-98	1052.31
1210	14-Oct-97	970.28		1260	24-Dec-97	932.7		1310	10-Mar-98	1064.25
1211	15-Oct-97	965.72		1261	26-Dec-97	936.46		1311	11-Mar-98	1068.47
1212	16-Oct-97	955.23		1262	29-Dec-97	953.35		1312	12-Mar-98	1069.92
1213	17-Oct-97	944.16		1263	30-Dec-97	970.84		1313	13-Mar-98	1068.59
1214	20-Oct-97	955.61		1264	31-Dec-97	970.43		1314	16-Mar-98	1079.27
1215	21-Oct-97	972.28		1265	2-Jan-98	975.04		1315	17-Mar-98	1080.45
1216	22-Oct-97	968.49		1266	5-Jan-98	977.07		1316	18-Mar-98	1085.52
1217	23-Oct-97	950.69		1267	6-Jan-98	966.58		1317	19-Mar-98	1089.74
1218	24-Oct-97	941.64		1268	7-Jan-98	964		1318	20-Mar-98	1099.16
1219	27-Oct-97	876.99		1269	8-Jan-98	956.05		1319	23-Mar-98	1095.55
1220	28-Oct-97	921.85		1270	9-Jan-98	927.69		1320	24-Mar-98	1105.65
1221	29-Oct-97	919.16		1271	12-Jan-98	939.21		1321	25-Mar-98	1101.93
1222	30-Oct-97	903.68		1272	13-Jan-98	952.12		1322	26-Mar-98	1100.8
1223	31-Oct-97	914.62		1273	14-Jan-98	957.94		1323	27-Mar-98	1095.44
1224	3-Nov-97	938.99		1274	15-Jan-98	950.73		1324	30-Mar-98	1093.55
1225	4-Nov-97	940.76		1275	16-Jan-98	961.51		1325	31-Mar-98	1101.75
1226	5-Nov-97	942.76		1276	20-Jan-98	978.6				
1227	6-Nov-97	938.03		1277	21-Jan-98	970.81				
1228	7-Nov-97	927.51		1278	22-Jan-98	963.04				
1229	10-Nov-97	921.13		1279	23-Jan-98	957.59				
1230	11-Nov-97	923.78		1280	26-Jan-98	956.95				
1231	12-Nov-97	905.96		1281	27-Jan-98	969.02				
1232	13-Nov-97	916.66		1282	28-Jan-98	977.46				
1233	14-Nov-97	928.35		1283	29-Jan-98	985.49				
1234	17-Nov-97	946.2		1284	30-Jan-98	980.28				
1235	18-Nov-97	938.23		1285	2-Feb-98	1001.27				
1236	19-Nov-97	944.59		1286	3-Feb-98	1005.99				
1237	20-Nov-97	958.98		1287	4-Feb-98	1006.9				
1238	21-Nov-97	963.09		1288	5-Feb-98	1003.54				
1239	24-Nov-97	946.67		1289	6-Feb-98	1012.46				
1240	25-Nov-97	950.82		1290	9-Feb-98	1010.74				
1241	26-Nov-97	951.64		1291	10-Feb-98	1019.01				
1242	28-Nov-97	955.4		1292	11-Feb-98	1020.01				
1243	1-Dec-97	974.78		1293	12-Feb-98	1024.14				
1244	2-Dec-97	971.68		1294	13-Feb-98	1020.09				
1245	3-Dec-97	976.77		1295	17-Feb-98	1022.76				
1246	4-Dec-97	973.1		1296	18-Feb-98	1032.08				
1247	5-Dec-97	983.79		1297	19-Feb-98	1028.28				
1248	8-Dec-97	982.37		1298	20-Feb-98	1034.21				
1249	9-Dec-97	975.78		1299	23-Feb-98	1038.14				
1250	10-Dec-97	968.79		1300	24-Feb-98	1030.56				

Πίνακες και Διαγράμματα

Πίνακας με τιμές του δείκτη S&P 500

Διαγράμματα

Βιβλιογραφία.

1. Cox, J., S. Ross, and M. Rubinstein. "Option Pricing : A Simplified Approach," Journal of Financial Economics, 7 (October 1979), 229-64.
2. F. Black and M. Scholes, "The pricing of options and Corporate Liabilities," Journal of Political Economy, 81 (May-June 1973), 637-59
3. R. C. Merton, "Theory of Rational Option Pricing," Bell Journal of Economics and Management Science, 4 (Spring 1973), 141-83
4. Bollerslev, T. 'Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity.' Journal of econometrics, 31 (1986), 307-27.
5. Cumby, R., S. Figlewski, and J. Hasbrook. 'Forecasting Volatilities and Correlations with EGARCH Models,' Journal of Derivatives, 1, 2 (winter 1993), 51-63
6. Engle, R.F. 'Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of UK inflation,' Econometrica, 50 (1982), 987-1008
7. Engle R.F. and J. Mezrich. 'Grappling with GARCH,' RISK (September 1995), 112-17
8. Engle R.F. and V. Ng. 'Measuring and testing the Impact of News on Volatility,' Journal of Finance, 48 (1993), 1, 749-78
9. Liung, G. M., and G. E. P. Box. 'On a Measure of Lack of Fit in Time Series Models,' Biometrica, 65 (1978), 297-303
10. Noh, J., R. F. Engle, and a. Kane. 'Forecasting Volatility and Option Prices of the S&P 500 Index,' Journal of Derivatives, 2 (1994), 17-30
11. Boyle, P. P. 'Options: A Monte Carlo Approach,' Journal of Financial Economics,' 4, (1977), 323-38
12. Broadie, M., P. Glasserman, and G. Jain. 'Enhanced Monte Carlo Estimates for American Option Prices.' Journal of Derivatives, 5, 1 (Fall 1997), 25-44
13. Duan, J., C, 'The GARCH Option Pricing Model', Mathmatical Finance, vol. 5, (1995), 13-32
14. Ritchen, P., and R. Trevor, 'Pricing Options Under Generalized GARCH and Stochastic Volatility Processes,' Journal of Finance, 54, 1 (February1999), 377-402
15. Xu, X., and S. J. Taylor. 'The Term Structure of Volatility Implied by Foreign Exchange Options,' Journal of Financial and Quantitative Analysis, 29 (1994) 57-74
16. J. C. Hull and A. White, 'The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities,' Journal of Finance, 42 (June 1987), 281-300
17. J. –C. Duan, 'The GARCH Option Pricing Model,' Mathematical Finance, vol. 5 (1995), 13-32.
18. J. C. Hull, 'Options, Futures and Other Derivatives', Prentice-Hall International Inc, 4th ed., 2000