ΤΜΗΜΑ
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗΣ
ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: ΕΠΙΧΕΙΡΗΜΑΤΙΚΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΪΑ ΜΕ ΤΙΤΛΟ:

«ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ, ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΚΑΙ ΧΡΗΣΗ ΛΟΓΙΣΜΙΚΩΝ ΣΤΗΡΙΞΗΣ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ»

ΥΠΕΥΘΥΝΟΣ ΦΟΙΤΗΤΗΣ:

ΦΟΥΛΙΔΗΣ ΑΝΑΣΤΑΣΙΟΣ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ:

ΠΑΠΑΡΡΙΖΟΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ

ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ, 2008.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Όταν φτάνεις επιτέλους στο τέλος ενός μεγάλου στόχου και κοιτάς πίσω, μόνο τότε συνειδητοποιείς την συνολική σου πορεία και τους ανθρώπους που την επηρέασαν. Σε αυτούς θέλω να αναφερθώ σε αυτές τις λίγες σειρές και να τους ευχαριστήσω θερμά για την σημαντική βοήθεια που μου προσέφεραν.

Αρχικά θέλω να ευχαριστήσω τον Καθηγητή κ. Κωνσταντίνο Παπαρρίζο του τμήματος Εφαρμοσμένης Πληροφορικής του Πανεπιστημίου Μακεδονίας, για την πρόταση που μου έκανε να ασχοληθώ στη διπλωματική μου εργασία με ένα τόσο ενδιαφέρον θέμα, όπως είναι αυτό του Γραμμικού Προγραμματισμού, αλλά και για τη στήριξή του σε όλο αυτό το διάστημα.

Στη συνέχεια θέλω να αναφερθώ σε όλα τα μέλη Δ.Ε.Π. του τμήματος Εφαρμοσμένης Πληροφορικής για τις μαθησιακές εμπειρίες που πρόσφεραν σε μένα και τους συναδέλφους συμφοιτητές, τόσο κατά τα δύο έτη του μεταπτυχιακού προγράμματος, όσο και κατά τη διάρκεια του προπτυχιακού.

Τέλος ευχαριστώ περισσότερο από όλους την οικογένεια μου για την συμπαράσταση τους, την κατανόηση τους και την υπομονή τους σε όλη τη διάρκεια των σπουδών μου στο τμήμα Εφαρμοσμένης Πληροφορικής και ιδιαίτερα στις δύσκολες στιγμές. Είμαι ιδιαίτερα ευγνώμων για όσα μου έχουν προσφέρει όλα αυτά τα χρόνια και σίγουρα σε αυτούς χρωστάω τα πάντα. Θα ήθελα να τους ευχαριστήσω για όλες τις θυσίες που έχουν κάνει ώστε να μου δώσουν την δυνατότητα να ασχοληθώ απερίσπαστος με κάτι τόσο συναρπαστικό όσο η αναζήτηση της γνώσης.

Στους γονείς μου,
Γιάννη και Ανθή.

Στην αδερφή μου,
Αγάπη.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η συγκεκριμένη διπλωματική εργασία πραγματοποιείται στα πλαίσια του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών του τμήματος Εφαρμοσμένης Πληροφορικής του Πανεπιστημίου Μακεδονίας. Στις σελίδες που ακολουθούν ο αναγνώστης μπορεί να διαβάσει για το αντικείμενο του Γραμμικού Προγραμματισμού, το είδος των προβλημάτων που αυτός πραγματεύεται, αλλά και τρόπους επίλυσής τους μέσω σύγχρονων Πληροφοριακών Συστημάτων. Είναι ιδιαίτερα σημαντικό να ειπωθεί ότι τέτοιας μορφής πληροφοριακά συστήματα αποτελούν σε πολλές περιπτώσεις το πλέον σύγχρονο τρόπο λήψης διοικητικών, και όχι μόνο, αποφάσεων από πολλές εταιρίες και οργανισμούς στην αγορά εργασίας. Αυτό γίνεται με στόχο τη μέγιστη δυνατή μείωση του κόστους ή τη μέγιστη δυνατή αύξηση του κέρδους, κάτω από συγκεκριμένους περιορισμούς.

Υπάρχει πραγματικά τεράστια ποσότητα πληροφοριών που μπορεί κανείς να βρει γύρω από το Γραμμικό Προγραμματισμό και τις εφαρμογές του, είτε μέσω των αναρίθμητων βιβλίων που έχουν γραφτεί και άρθρων, είτε μέσω του διαδικτύου. Στις 125 περίπου σελίδες της εργασίας αυτής έγινε μια προσπάθεια να δοθεί έμφαση στα σημαντικότερα σημεία της επιστήμης του Γραμμικού Προγραμματισμού, η γνώση των οποίων αποτελεί ένα ικανοποιητικό υπόβαθρο για όποιον επιθυμεί να ασχοληθεί με το αντικείμενο αυτό. Αυτός ακριβώς είναι και ο σκοπός της συγκεκριμένης διπλωματικής εργασίας, η παρουσίαση και ανάλυση, δηλαδή, των βασικών όρων και της μεθοδολογίας επίλυσης γραμμικών προβλημάτων.

Ο σκοπός, λοιπόν, της εργασίας επιτυγχάνεται μέσω της επίτευξης επιμέρους στόχων από κάθε κεφάλαιο. Αρχικά κρίθηκε αναγκαίο να παρουσιαστούν στον αναγνώστη ζητήματα τα οποία έχουν να κάνουν με το τι είναι ακριβώς ο Γραμμικός Προγραμματισμός, αλλά και το που μπορεί να βρει εφαρμογή, μοντελοποιώντας προβλήματα, τα οποία χρίζουν επίλυσης. Πολύ σημαντικό ρόλο προς αυτήν την κατεύθυνση παίζει η κατανόηση χρήσιμων ορισμών γύρω από έννοιες που αφορούν τα γραμμικά προβλήματα και διευκολύνουν τόσο την ίδια τη μοντελοποίησή τους, όσο και τους μετασχηματισμούς τους.

Προς την εξυπηρέτηση του σκοπού της εργασίας λειτουργεί και η αναφορά στην γραφική επίλυση γραμμικών προβλημάτων, μέσω της παρουσίασης των διαφόρων περιπτώσεων και υποπεριπτώσεων, που μπορούν να παρουσιαστούν όσον αφορά την εύρεση λύσης.

Όλα τα παραπάνω βρίσκουν εφαρμογή στα κεφάλαια Γ', Δ' και Ε', όπου η εργασία προχωρά στην επίλυση γραμμικών προβλημάτων και στον υπολογισμό βέλτιστων λύσεων. Κάτι τέτοιο μπορεί να πραγματοποιηθεί με δύο τρόπους. Ο ένας, ο παραδοσιακός θα μπορούσαμε να πούμε, είναι η επίλυση μέσω αλγορίθμων, όπως είναι ο πρωτεύων και δυϊκός Simplex, ο οποίος όμως είναι και χρονοβόρος και απαιτεί συγκεκριμένες μαθηματικές γνώσεις (π.χ. θεωρία μητρών). Ο δεύτερος τρόπος είναι η επίλυση μέσω σύγχρονων πληροφοριακών συστημάτων και είναι ο πλέον εύκολος, γιατί απαιτεί από το χρήστη μόνο βασικές γνώσεις πάνω σε Η/Υ.

Θα ήταν υπερβολικό να πούμε ότι καλύφθηκαν όλες οι πτυχές της επιστήμης του Γραμμικού Προγραμματισμού. Άλλωστε, όπως προαναφέρθηκε, το υλικό που μπορεί να βρει κανείς γύρω από αυτό το θέμα είναι πραγματικά τεράστιο. Σε κάθε περίπτωση πάντως, αυτή η εργασία μπορεί να αποτελέσει μια καλή πρώτη γνωριμία με το Γραμμικό Προγραμματισμό.

<u>ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ</u>

Κεφάλαιο Α':

« Γενικά χαρακτηριστικά του Γραμμικού Προγραμματισμού & Μετασχηματισμοί γραμμικών προβλημάτων»

Κεφάλαιο Β':

«Γραφική Επίλυση Προβλημάτων – Υπολογισμός Δυϊκού προβλήματος»

Κεφάλαιο Γ':
«Πρωτεύων και Δυϊκός Αλγόριθμος Simplex»

Κεφάλαιο Δ':
«Πληροφοριακά Συστήματα Γραμμικού Προγραμματισμού: LINDO®»

Κεφάλαιο Ε':
«Πληροφοριακά Συστήματα Γραμμικού Προγραμματισμού: ο Solver του Excel»

<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ Α’</u>

« Γενικά χαρακτηριστικά του γραμμικού προγραμματισμού – Μετασχηματισμοί Γραμμικών προβλημάτων »

1.1 Εισαγωγή.

Σε αυτό το πρώτο κεφάλαιο της εργασίας πραγματοποιείται μια εισαγωγή στο γραμμικό προγραμματισμό. Αρχικά αναλύεται ο στόχος του γραμμικού προγραμματισμού, αλλά και οι τομείς στους οποίους βρίσκει εφαρμογή. Έπειτα, παρουσιάζεται η γενική μορφή του γραμμικού προβλήματος και δίνονται διάφοροι ορισμοί εννοιών ιδιαίτερα χρήσιμοι για την κατανόηση της υπόλοιπης εργασίας. Όλα αυτά βρίσκουν εφαρμογή στην παράγραφο 1.5, η οποία ασχολείται με τη μοντελοποίηση των γραμμικών προβλημάτων, των οποίων οι μορφές και οι μετασχηματισμοί παρουσιάζονται στο τέλος αυτού του κεφαλαίου.

1.2 Η φύση του γραμμικού προγραμματισμού.

Ο κυρίαρχος στόχος του γραμμικού προγραμματισμού είναι το να συντελέσει τα μέγιστα στη λήψη δύσκολων οικονομικών και διοικητικών αποφάσεων μέσα σε μία εταιρία ή έναν οργανισμό γενικότερα, αλλά και να βελτιώσει τον τρόπο με τον οποίο παίρνονται αυτές οι αποφάσεις. Για να φτάσουμε στην επίτευξη αυτού του στόχου είμαστε υποχρεωμένοι να αντιμετωπίζουμε αυτού του είδους τα προβλήματα αποκλειστικά και μόνο με μαθηματικό τρόπο. Οι αποφάσεις, στις οποίες καταλήγουμε αντιμετωπίζοντας τα προβλήματα του γραμμικού προγραμματισμού, ονομάζονται βέλτιστες λύσεις.

Τα οικονομικά και διοικητικά προβλήματα που προαναφέρθηκαν είναι συνήθως μεγάλα σε μέγεθος και για αυτόν ακριβώς το λόγο χρίζουν επιστημονικής αντιμετώπισης. Είναι αναγκαία, επομένως, η ανάπτυξη μεθόδων επίλυσης τόσο μεγάλων σε μέγεθος προβλημάτων. Αυτές οι μέθοδοι επίλυσης ονομάζονται αλγόριθμοι και με τη βοήθεια πάντα των ηλεκτρονικών υπολογιστών μας οδηγούν ευκολότερα στις βέλτιστες λύσεις, τις οποίες και αναζητούμε.

Στην πράξη, όμως, η κατάσταση δεν είναι τόσο απλή όσο φαίνεται. Υπάρχουν περιπτώσεις που η λύση ενός γραμμικού προβλήματος πραγματοποιείται με τόσο μεγάλη καθυστέρηση, που τα δεδομένα του προβλήματος είναι διαφορετικά μετά την εξαγωγή της βέλτιστης λύσης, από ότι ήταν όταν εισήλθαν στο σύστημα για να επεξεργαστούν. Επομένως, τίθεται το ερώτημα ποια είναι τώρα η βέλτιστη λύση; Εδώ παρεμβαίνει η ανάλυση ευαισθησίας (sensitivity analysis). Ένας άλλος τομέας ο οποίος πραγματεύεται τη συμπεριφορά της βέλτιστης λύσης ενός γραμμικού προβλήματος, όταν τα δεδομένα μεταβάλλονται, είναι η παραμετρική ανάλυση (parametric analysis).

Η χρησιμότητα του γραμμικού προγραμματισμού και το πώς βοηθάει στην επίλυση δύσκολων και πολύπλοκων προβλημάτων θα φανεί με το παράδειγμα το οποίο θα περιγραφεί στην επόμενη ενότητα.

1.3 Η γενική μορφή του γραμμικού προβλήματος.

Το γενικό πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

Να βρεθούν οι τιμές των μεταβλητών x_1, x_2, ..., x_r που μεγιστοποιούν ή ελαχιστοποιούν την συνάρτηση:

$$\mathbf{z = f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + ...+ c_rx_r}$$

Οι μεταβλητές πρέπει να ικανοποιούν τους περιορισμούς

$$\begin{gathered}
\mathbf{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1r}x_r \{\leq, =, \geq\}b_1} \\
\mathbf{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2r}x_r \{\leq, =, \geq\}b_2} \\
\mathbf{a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + ... + a_{3r}x_r \{\leq, =, \geq\}b_3} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\mathbf{a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + ... + a_{mr}x_r \{\leq, =, \geq\}b_m} \\
\textbf{και } \mathbf{x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, ..., r.}
\end{gathered}$$

όπου τα a_{ij}, b_i, c_j είναι γνωστές σταθερές.

Η συνάρτηση $f(x) = \sum_{j=1}^{r} c_j x_j$ ονομάζεται αντικειμενική συνάρτηση (objective function). Αυτή η συνάρτηση είναι γραμμική ως προς τις μεταβλητές x_j, j=1,2,…,r.

Επίσης, κάθε περιορισμός είναι μια γραμμική συνάρτηση ως προς τις μεταβλητές x_j, j=1,2,…,r. Οι συντελεστές c_j, j=1,2…r αναφέρονται και ως **συντελεστές κόστους** και αντιπροσωπεύουν μοναδιαίο κόστος. Ο τελευταίος περιορισμός αναφέρεται και ως **συνθήκη της μη αρνητικότητας**.

- **Το γραμμικό πρόβλημα** μπορεί να είναι είτε **αδύνατο**, είτε **εφικτό**.
- **Το εφικτό γραμμικό πρόβλημα** μπορεί να είναι είτε **βέλτιστο,** είτε **απεριόριστο.**
- **Λύση** ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού θα ονομάζεται κάθε σύνολο xj, j=1,2,…,r. το οποίο ικανοποιεί τους περιορισμούς του προβλήματος .
- **Εφικτή ή δυνατή λύση** είναι κάθε λύση που ικανοποιεί όλους τους περιορισμούς του προβλήματος.
- **Το σύνολο των εφικτών σημείων** ονομάζεται εφικτή περιοχή (feasible region). Αν η εφικτή περιοχή είναι κενό σύνολο, τότε το γραμμικό πρόβλημα είναι αδύνατο ή μη εφικτό (infeasible). Σε κάθε άλλη περίπτωση είναι εφικτό (feasible).
- **Βέλτιστη λύση** είναι κάθε εφικτή λύση η οποία βελτιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση.
- **Ένα εφικτό σημείο x** ενός γραμμικού προβλήματος **ελαχιστοποίησης** είναι **βέλτιστο,** όταν για κάθε άλλο **εφικτό σημείο y** ισχύει: $\mathbf{c^T x \leq c^T y}$**.**
- **Ένα εφικτό σημείο x** ενός γραμμικού προβλήματος **μεγιστοποίησης** είναι **βέλτιστο,** όταν για κάθε άλλο **εφικτό σημείο y** ισχύει: $\mathbf{c^T x \geq c^T y}$**.**
- Ένα γραμμικό πρόβλημα που έχει βέλτιστα σημεία ονομάζεται **βέλτιστο** (optimal problem).
- Η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης σε ένα βέλτιστο σημείο ονομάζεται **βέλτιστη τιμή** (optimal value).
- Ένα εφικτό πρόβλημα που δεν είναι βέλτιστο είναι **απεριόριστο** (unbounded).

Συνήθως σε ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού υπάρχουν άπειρες λύσεις και επιδιώκουμε την εύρεση της βέλτιστης δυνατής λύσης.

Αν όλοι οι περιορισμοί είναι εξισώσεις ή ανισώσεις της ίδιας φοράς, ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού μπορεί να διατυπωθεί με την χρήση πινάκων ως εξής:

$$\mathbf{z = \max f(x) = \max c^T x}$$
$$\mathbf{Ax \{\leq, =, \geq\} b}$$
$$\mathbf{x \geq 0}$$

όπου $\mathbf{x = [x_1\ x_2 \ldots x_r]^T \in M_{rx1}}$, $\mathbf{c = [c_1\ c_2 \ldots c_r]^T \in M_{rx1}}$, $\mathbf{0 = [0\ 0 \ldots 0]^T \in M_{rx1}}$, $\mathbf{b = [b_1\ b_2 \ldots b_r]^T \in M_{rx1}}$

και $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mr} \end{pmatrix} \in \mathbf{M_{mxr}}$

1.4 Προϋποθέσεις εφαρμογής του γραμμικού προγραμματισμού

Έχοντας εξετάσει κάποιες περιπτώσεις όπου είναι δυνατό να εφαρμοστεί ο γραμμικός προγραμματισμός και τη γενική διατύπωση ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού είναι σημαντικό να εξετάσουμε τις απαιτούμενες προϋποθέσεις για την εφαρμογή του σ' ένα οποιοδήποτε πρόβλημα βελτιστοποιήσεως. Αυτές είναι που περιορίζουν γενικά το φάσμα των δυνατοτήτων εφαρμογής του γραμμικού προγραμματισμού. Οι προϋποθέσεις που πρέπει να ισχύουν για να διατυπωθεί ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού είναι οι εξής: α) Γραμμικότητα β) Διαιρετότητα και γ) Βεβαιότητα.

- **Γραμμικότητα**

Όλες οι συναρτήσεις του προβλήματος, αντικειμενική συνάρτηση και περιορισμοί πρέπει να είναι γραμμικές ως προς τις άγνωστες μεταβλητές. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να ισχύουν οι ιδιότητες της αναλογικότητας και της προσθετικότητας, δηλαδή εάν *y* είναι μια συνάρτηση r μεταβλητών και είναι σταθερές, πρέπει να ισχύει:

$$\mathbf{y(a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_rx_r) = a_1y(x_1) + a_2y(x_2) + \ldots + a_ry(x_r)}$$

Σε πολλές περιπτώσεις στις οποίες δεν ισχύει απόλυτα η προϋπόθεση της γραμμικότητας μπορεί να γίνει μια αρκετά καλή προσέγγιση με γραμμικές συναρτήσεις.

- **Διαιρετότητα**

Το μοντέλο του γραμμικού προγραμματισμού υποθέτει ότι κάθε δραστηριότητα (δηλ μεταβλητή) είναι συνεχής και επομένως άπειρα διαιρετή. Αυτό συνεπάγεται ότι όλα τα επίπεδα δραστηριοτήτων και όλες οι χρήσεις πόρων επιτρέπεται να πάρουν κλασματικές τιμές ή ακέραιες τιμές. Όταν η υπόθεση της διαιρετότητας δεν ισχύει υπάρχουν δύο ενδεχόμενα :

α) Να αγνοηθεί η υπόθεση αυτή, να λυθεί το πρόβλημα με μεθόδους γραμμικού προγραμματισμού, και οι τιμές των μεταβλητών να στρογγυλευθούν στην κοντινότερη ακέραια τιμή. Η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται κυρίως όταν οι τιμές των μεταβλητών είναι μεγάλες.

β) Όταν οι τιμές των μεταβλητών είναι μικρές (π.χ. 0 ή 1) όπως σε πολλά προβλήματα επενδύσεων τότε πρέπει να χρησιμοποιηθούν τεχνικές του ακέραιου προγραμματισμού.

- **Βεβαιότητα**

Το μοντέλο του γραμμικού προγραμματισμού προϋποθέτει ότι όλοι οι παράμετροι του προβλήματος είναι γνωστές με απόλυτη βεβαιότητα. Στην περίπτωση που μερικοί ή όλοι οι συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης ή των περιορισμών είναι τυχαίες μεταβλητές το πρόβλημα γίνεται πρόβλημα στοχαστικού προγραμματισμού.

1.5 Παραδείγματα προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού.

Τα προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού ασχολούνται με καταστάσεις όπου ένας αριθμός πλουτοπαραγωγικών πηγών, όπως άνθρωποι, υλικά, μηχανές και ακίνητα τα οποία είναι διαθέσιμα πρέπει να συνδυαστούν για να παραχθούν ένα ή περισσότερα προϊόντα. Στην διαδικασία παραγωγής οι πηγές αυτές υπόκεινται σε περιορισμούς όπως στην συνολική ποσότητα των διαθέσιμων πηγών, τον αριθμό κάθε προϊόντος που παράγεται, τον αριθμό κάθε προϊόντος που διατίθεται. Σκοπός του γραμμικού προγραμματισμού είναι από όλες τις δυνατές κατανομές των πηγών να υπολογίσουμε εκείνη ή εκείνες οι οποίες μεγιστοποιούν ή ελαχιστοποιούν μια αριθμητική ποσότητα όπως το κέρδος ή το κόστος.

Α) Το πρόβλημα της δίαιτας

Ένα από τα κλασικά προβλήματα εφαρμογής του γραμμικού προγραμματισμού είναι το πρόβλημα της δίαιτας. Το πρόβλημα θεωρείται ότι παρέχει ένα ελάχιστο κόστος μιας επαρκούς δίαιτας για ένα άτομο να μπορεί να συντηρήσει τον εαυτό του. Δηλαδή ποιος είναι ο φθηνότερος τρόπος σύνθεσης ποικίλων ποσοτήτων από διαθέσιμα τρόφιμα σε μια δίαιτα η οποία μπορεί να ικανοποιεί τις θρεπτικές απαιτήσεις ενός ανθρώπινου οργανισμού.

Ας υποθέσουμε ότι οι διαθέσιμες ποσότητες που έχουμε είναι γάλα, κρέας και αυγά και ότι αυτές οι τροφές περιέχουν βιταμίνες A, C, και D. Έστω ότι ο αριθμός των χιλιοστών γραμμαρίου (mg) της κάθε βιταμίνης που περιέχεται σε μονάδα κάθε τροφής και το αντίστοιχο κόστος είναι τα εξής:

Βιταμίνη	Λίτρο γάλακτος	Κιλό κρέατος	Δωδεκάδα αυγών
A	0,2	2	10
C	20	20	10
D	2	200	10
Κόστος	5	50	15

Υποθέτουμε ότι η ελάχιστη απαιτούμενη ημερήσια κατανάλωση βιταμινών A, C και D είναι αντίστοιχα 1mg, 50mg και 10mg. Για να κατασκευάσουμε το μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού ονομάζουμε Χγ, Χκ, και Χα τον αριθμό των λίτρων γάλακτος, κιλών κρέατος και δωδεκάδων αυγών αντίστοιχα. Ο σκοπός μας είναι να ελαχιστοποιήσουμε το κόστος, αφού βέβαια λάβουμε υπόψη μας τους περιορισμούς του προβλήματος. Οι περιορισμοί εδώ έχουν την μορφή κατώτατων ορίων.

Η αντικειμενική συνάρτηση για ελαχιστοποίηση είναι:

Z = 5 Χγ + 50 Χκ + 15 Χα

Οι περιορισμοί μπορούν να διατυπωθούν με μαθηματική μορφή ως εξής:

- **0,2 Χγ +2 Χκ +10 Χα (Βιταμίνη A) ≥ 1**
- **20 Χγ +20 Χκ +10 Χα (Βιταμίνη C) ≥ 50**
- **2 Χγ +200 Χκ +10 Χα (Βιταμίνη D) ≥ 10 και**
- **Χγ=>0, Χκ=>0, Χα=>0**

όπου οι τελευταίοι περιορισμοί αναφέρονται στην μη αρνητικότητα των μεταβλητών Χγ, Χκ, Χα.

Β) Το πρόβλημα των δανείων μιας τράπεζας.

Μία Τράπεζα παρέχει στους πελάτες της τεσσάρων ειδών δάνεια με το ακόλουθο ετήσιο επιτόκιο ανά κατηγορία:

- Στεγαστικά πρώτης κατοικίας 14%
- Στεγαστικά δεύτερης κατοικίας 20%
- Για επισκευή κατοικίας 20%
- Προσωπικά - Καταναλωτικά10%.

Το διαθέσιμο budget της τράπεζας είναι 500.000.000 € ενώ ακολουθεί και τις ακόλουθες πολιτικές:

- **Πολιτική α:** Το ποσό που χορηγείται για στεγαστικά δάνεια πρώτης κατοικίας πρέπει να είναι τουλάχιστον το 55% του συνολικού ποσού που δίδεται για στεγαστικά δάνεια (των δύο πρώτων κατηγοριών) και τουλάχιστον το 25% του συνόλου των δανείων (όλων των κατηγοριών) που εκδίδονται.
- **Πολιτική β:** Τα στεγαστικά δάνεια 2^{ης} κατοικίας δεν μπορεί να υπερβαίνουν το 25% του συνόλου των δανείων που εκδίδονται (σε €).
- **Πολιτική γ:** Το μέσο ετήσιο επιτόκιο, υπολογιζόμενο στο σύνολο των δανείων, δεν πρέπει να ξεπερνά το 15%.

0Μέσα στο παραπάνω πλαίσιο, η τράπεζα ενδιαφέρεται για ένα πρόγραμμα δανειοδότησης (κατανομή του συνολικού προϋπολογισμού στις επιμέρους κατηγορίες δανείων) το οποίο θα της επιφέρει τα μέγιστα έσοδα από τους τόκους των δανείων.

1Οι μεταβλητές **(μεταβλητές απόφασης)** που θα χρησιμοποιηθούν για να μοντελοποιηθεί το πρόβλημα είναι οι εξής:

- X_1: το ποσό που θα διατεθεί για στεγαστικά δάνεια 1^{ης} κατοικίας.
- X_2: το ποσό που θα διατεθεί για στεγαστικά δάνεια 2^{ης} κατοικίας.
- X_3: το ποσό που θα διατεθεί για δάνεια επισκευής κατοικίας.
- X_4: το ποσό που θα διατεθεί για προσωπικά – καταναλωτικά δάνεια.

Όλα τα ποσά εκφράζονται σε εκατομμύρια ευρώ.

Η συνάρτηση των εσόδων από τους τόκους **(αντικειμενική συνάρτηση)** είναι η εξής:

$$0f = \mathbf{0.14*x_1 + 0.2*x_2 + 0.2*x_3 + 0.1*x_4}$$

Οι περιορισμοί του προβλήματος σε μαθηματική μορφή όπως προκύπτουν από τη λεκτική περιγραφή του προβλήματος είναι:

- Το συνολικό διατιθέμενο ποσό δεν ξεπερνά τα 500 εκ. ευρώ:

  $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \leq 500$
- Από την πολιτική α:

  $X_1 \geq 0.55(X_1+X_2)$ και $X_1 => 0.25(X_1 + X_2 + X_3 + X_4)$
- Από την πολιτική β:

  $X_2 \leq 0.25(X_1 + X_2 + X_3 + X_4)$
- Από την πολιτική γ:

  $0,14X_1 + 0.2X_2 + 0.2X_3 + 0.1X_4 \leq 0.15(X_1 + X_2 + X_3 + X_4)$
- Επίσης, υπάρχουν και οι λεγόμενοι περιορισμοί μη αρνητικότητας, αφού οι μεταβλητές απόφασης εκφράζουν φυσικούς αριθμούς:

  $X_1 , X_2 , X_3 , X_4 \geq 0.$

Το πρόβλημα με απλά λόγια που θέλουμε να αντιμετωπίσουμε είναι να μεγιστοποιηθεί η συνάρτηση των εσόδων από τους τόκους των δανείων που θα πουλήσει η τράπεζα, να μεγιστοποιηθεί δηλαδή η παραπάνω αντικειμενική, όπως χαρακτηριστικά λέγεται, συνάρτηση του προβλήματος. Το πρόβλημα του παραδείγματος στην κανονική μαθηματική του μορφή γράφεται:

1**max f =** $\mathbf{0.14*x_1 + 0.2*x_2 + 0.2*x_3 + 0.1*x_4}$ **,**

2με περιορισμούς (υ.π.)

- $\mathbf{X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \leq 500}$
- $\mathbf{-0,45*X_1 + 0,55*X_2 + 0.0*X_3 + 0.0*X_4 \leq 0}$
- $\mathbf{-0.75*X_1 + 0.25*X_2 + 0.25*X_3 + 0.25*X_4 \leq 0}$
- $\mathbf{-0,25*X_1 + 0.75*X_2 - 0.25*X_3 - 0.25*X_4 \leq 0}$
- $\mathbf{-0.01*X_1 + 0.05*X_2 + 0.05*X_3 - 0.05*X_4 \leq 0}$
- $\mathbf{X_1 , X_2 , X_3 , X_4 \geq 0.}$

Γ) Το πρόβλημα μεταφοράς.

Το πρόβλημα μεταφοράς είναι ένα από τα πρώτα είδη προβλημάτων που αναλύθηκαν με την χρήση του γραμμικού προγραμματισμού. Το γενικό πρόβλημα εμφανίστηκε όταν τα διαθέσιμα αγαθά αποθηκευμένα σε διάφορες πηγές έπρεπε να διανεμηθούν σε ποικίλους προορισμούς. Το πρόβλημα είναι να βρούμε τον βέλτιστο τρόπο μεταφοράς έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται το κόστος μεταφοράς. Συγκεκριμένα, διαθέτουμε ποσότητες ενός ομοιόμορφου προϊόντος σε έναν αριθμό αποθηκών και θέλουμε να μεταφέρουμε καθορισμένες ποσότητες του προϊόντος σε έναν αριθμό από διαφορετικούς προορισμούς. Το κόστος για την μεταφορά μιας μονάδας ποσότητας από οποιαδήποτε αποθήκη σε οποιοδήποτε κατάστημα είναι γνωστό, ενώ η μεταφορά από κάθε αποθήκη σε κάθε κατάστημα είναι δυνατή. Θέλουμε να υπολογίσουμε το ελάχιστο κόστος μεταφοράς από τις αποθήκες στα καταστήματα λιανικής πώλησης.

Τρία παραρτήματα ενός εργοστασίου, τα Α, Β, Γ, που παράγουν το ίδιο προϊόν, βρίσκονται σε τρεις διαφορετικές περιοχές της χώρας, που απέχουν πολύ μεταξύ τους. Οι αγοραστές του προϊόντος βρίσκονται σε πέντε διαφορετικές πόλεις. Τα παραρτήματα παράγουν ποσότητες αντίστοιχα 150, 350 και 280 μονάδων του προϊόντος, ενώ οι αγοραστές έχουν παραγγείλει αντίστοιχα 100, 130, 160, 210, και 150 μονάδες. Το κόστος μεταφοράς του προϊόντος από τα παραρτήματα Α, Β , Γ δίνεται στον πίνακα:

Παράρτημα	Αγοραστές				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
Α	10	22	8	14	9
Β	12	16	26	20	19
Γ	18	21	15	11	17

Θέλουμε να υπολογίσουμε τις απαραίτητες ποσότητες (μεταβλητών αποφάσεως) Xij που θα πρέπει να μεταφερθούν από το παράρτημα i στον αγοραστή j ώστε να ελαχιστοποιηθεί το κόστος μεταφοράς. Άγνωστες είναι οι ποσότητες Xij , όπου i είναι τα Α, Β, Γ και j τα 1, 2, 3, 4, 5. Η αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος (κόστος μεταφοράς), της οποίας αναζητάμε το ελάχιστο, γράφεται:

$Z = 10\ X_{A1} + 22\ X_{A2} + 8\ X_{A3} + 14\ X_{A4} + 9X_{A5} + 12\ X_{B1} + 16\ X_{B2} + 26\ X_{B3} + 20\ X_{B4} +$
$+ 19\ X_{B5} + 18\ X_{Γ1} + 21\ X_{Γ2} + 15\ X_{Γ3} + 11\ X_{Γ4} + 17\ X_{Γ5}$

Είναι φανερό ότι δεν μπορούμε να φορτώσουμε περισσότερα προϊόντα από ένα παράρτημα από όσα παράγονται στο παράρτημα αυτό. Συνεπώς έχουμε τους περιορισμούς:

- $X_{A1} + X_{A2} + X_{A3} + X_{A4} + X_{A5} \leq 150$ (παραγωγή παραρτήματος A)
- $X_{B1} + X_{B2} + X_{B3} + X_{B4} + X_{B5} \leq 350$ (παραγωγή παραρτήματος B)
- $X_{Γ1} + X_{Γ2} + X_{Γ3} + X_{Γ4} + X_{Γ5} \leq 280$ (παραγωγή παραρτήματος Γ)

Επίσης, κάθε αγοραστής πρέπει να εμφανιστεί με τον επιθυμητό αριθμό μονάδων. Συνεπώς, έχουμε τους περιορισμούς:

- $X_{A1} + X_{B1} + X_{Γ1} = 100$ (ζήτηση αγοραστή 1)
- $X_{A2} + X_{B2} + X_{Γ2} = 130$ (ζήτηση αγοραστή 2)
- $X_{A3} + X_{B3} + X_{Γ3} = 160$ (ζήτηση αγοραστή 3)
- $X_{A4} + X_{B4} + X_{Γ4} = 210$ (ζήτηση αγοραστή 4)
- $X_{A5} + X_{B5} + X_{Γ5} = 150$ (ζήτηση αγοραστή 5)

Επίσης, ισχύει: $X_{ij} \geq 0$, i = A, B, Γ και j = 1, 2, 3, 4, 5.

1.6 <u>Κανονική και Τυποποιημένη Μορφή του Γραμμικού Προβλήματος.</u>

Οι μορφές των γραμμικών προβλημάτων είναι δύο, η κανονική ή ανισοτική μορφή (canonical form) και η τυποποιημένη ή ισοτική μορφή (standard form). Παρακάτω παρουσιάζονται και οι δύο μορφές, καθώς και οι τρόποι μετασχηματισμού ενός γραμμικού προβλήματος από τη μία μορφή στην άλλη.

min (max) $\mathbf{z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n}$

μ.π.: $\mathbf{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \otimes b_1}$

$\mathbf{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \otimes b_2}$

...

...

$\mathbf{a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \otimes b_3}$

$\mathbf{x_i \geq 0, i = 1, ..., n}$ και όπου $\otimes = \{ \leq, \geq \}$

Στην κανονική μορφή οι μεταβλητές είναι όλες θετικές και όλοι οι τεχνολογικοί περιορισμοί είναι ανισοτικοί. Το γραμμικό πρόβλημα στην κανονική του μορφή με τη βοήθεια των πινάκων γράφεται:

min (ή max) $\mathbf{\{z = c^T x : Ax \otimes b, x \geq 0\}}$, όπου $c, x \in \Re^n$, $b \in \Re^m$ και $A \in \Re^{mxn}$.

Στην τυποποιημένη του μορφή το γραμμικό πρόβλημα γράφεται ως εξής:

min (max) $\mathbf{z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n}$

μ.π.: $\mathbf{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1}$

$\mathbf{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2}$

...

...

$\mathbf{a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_3}$

$\mathbf{x_i \geq 0, i = 1, ..., n.}$

Σε μορφή διανυσμάτων και πινάκων το γραμμικό πρόβλημα στην τυποποιημένη του μορφή γράφεται:

min (ή max) $\mathbf{\{z = c^T x : Ax = b, x \geq 0\}}$

όπου $c, x \in \Re^n$, $b \in R^m$ και $A \in \Re^{mxn}$. Στην τυποποιημένη μορφή όλες οι μεταβλητές είναι θετικές και όλοι οι τεχνολογικοί περιορισμοί είναι ισοτικοί.

1.7 Μετασχηματισμοί γραμμικών προβλημάτων.

Για να λυθεί ένα γραμμικό πρόβλημα, πρέπει να είναι στην κατάλληλη μορφή, αναλόγως με τον αλγόριθμο που θα χρησιμοποιηθεί για την επίλυσή του. Με το μετασχηματισμό από την κανονική στην τυποποιημένη μορφή παίρνουμε ουσιαστικά ένα ισοδύναμο γραμμικό πρόβλημα.

Πιο συγκεκριμένα, δύο γραμμικά προβλήματα είναι ισοδύναμα αν υπάρχει μια ένα προς ένα αντιστοιχία μεταξύ των εφικτών σημείων αντίστοιχων αντικειμενικών τιμών. Έστω A και B τα δυο ισοδύναμα γραμμικά προβλήματα και f_A, f_B οι αντικειμενικές συναρτήσεις τους. Έστω επίσης x ένα εφικτό σημείο του προβλήματος A και y ένα εφικτό σημείο του προβλήματος B. Τότε η αντικειμενική τιμή $f_A(x)$ αντιστοιχεί στην αντικειμενική τιμή $f_B(y)$. Είναι σημαντικό να γνωρίζουμε ότι ο παραπάνω ορισμός συνεπάγεται ότι μεταξύ των δυο προβλημάτων ισχύει η παρακάτω πρόταση:

«Το πρόβλημα A είναι αδύνατο, βέλτιστο ή απεριόριστο αν και μόνο αν το πρόβλημα B είναι αδύνατο, βέλτιστο ή απεριόριστο αντίστοιχα».

Είναι επίσης αρκετά σημαντικό να γνωρίζουμε ότι ένα γραμμικό πρόβλημα ελαχιστοποίησης μετατρέπεται εύκολα στο αντίστοιχο πρόβλημα μεγιστοποίησης και αντίστροφα σύμφωνα με την παρακάτω σχέση:

$$\max \{ c^T x : x \in S \} = - \min \{ - c^T x : x \in S \}$$

Επειδή δεν γίνεται καμιά αλλαγή στους περιορισμούς τα δυο προβλήματα είναι ισοδύναμα και κάθε βέλτιστη λύση του ενός είναι και βέλτιστη λύση του άλλου.

Τέλος η ύπαρξη σταθερών όρων στην αντικειμενική συνάρτηση μεταβάλλει μόνο την αντικειμενική τιμή και ως εκ τούτου οι σταθεροί όροι μπορούν κάλλιστα να παραλειφθούν.

1.7.1 Μετασχηματισμός από την κανονική στην τυποποιημένη μορφή.

Για να μετασχηματιστεί ένα γραμμικό πρόβλημα από την ανισοτική μορφή στην τυποποιημένη πρέπει οι ανισοτικοί τεχνολογικοί περιορισμοί να μετατραπούν σε ισοτικούς. Η μετατροπή αυτή γίνεται με εισαγωγή νέων μεταβλητών.

Μια ανισότητα της μορφής:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n \le b$$

μετατρέπεται σε ισότητα με πρόσθεση μιας νέας μεταβλητής x_{n+1} στο αριστερό της μέλος. Τότε η προηγούμενη ανισότητα είναι ισοδύναμη με το σύστημα των δύο περιορισμών:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n + x_{n+1} = b \text{ και } x_{n+1} \ge 0.$$

Πράγματι, από την προηγούμενη ισότητα προκύπτει ότι
$x_{n+1} = b - (a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n) \geq 0$.
Η νέα μη αρνητική μεταβλητή x_{n+1} ονομάζεται *ελλειμματική*.

Ένας ανισοτικός περιορισμός της μορφής

$$\mathbf{a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n \geq b}$$

μετατρέπεται σε ισοτικό με αφαίρεση μιας μεταβλητής x_{n+1} από το αριστερό της μέλος. Τότε η προηγούμενη ανισότητα μετασχηματίζεται στο ισοδύναμο σύστημα:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n - x_{n+1} = b \text{ και } x_{n+1} \geq 0$$

Η μεταβλητή x_{n+1} ονομάζεται τώρα *πλεονασματική* και είναι πάλι μη αρνητική, γιατί τώρα είναι:

$$x_{n+1} = a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n - b \geq 0.$$

Οι ελλειμματικές και οι πλεονασματικές μεταβλητές ονομάζονται μαζί *χαλαρές μεταβλητές*. Η ελλειμματική μεταβλητή συμβολίζει το ποσό που λείπει από το αριστερό μέλος της ανισότητας για να γίνει ίσο με το δεξιό. Παρόμοια, η πλεονασματική μεταβλητή είναι το ποσό που πλεονάζει στο αριστερό μέλος της ανισότητας σε σύγκριση με το δεξιό μέρος.

Ένας ανισοτικός περιορισμός είναι ενεργός στο σημείο x αν το σημείο επαληθεύει τον περιορισμό σαν ισότητα. Διαφορετικά, θα λέμε ότι ο περιορισμός είναι μη ενεργός. Η τιμή της χαλαρής μεταβλητής x_j αποκαλύπτει αν ο αντίστοιχος περιορισμός μη αρνητικότητας είναι ενεργός ή όχι. Αν είναι $x_j = 0$, ο περιορισμός είναι ενεργός, διαφορετικά είναι μη ενεργός. Ειδικότερα, αν είναι $x_j \geq 0$, ο περιορισμός ικανοποιείται, ενώ αν είναι $x_j < 0$, δεν ικανοποιείται.

<u>Παράδειγμα 1.1</u>

Έστω ότι έχουμε το παρακάτω γραμμικό πρόβλημα μεγιστοποίησης στην κανονική του μορφή και θέλουμε να το μετασχηματίσουμε στην τυποποιημένη, στην οποία η αντικειμενική συνάρτηση ελαχιστοποιείται.

$$\begin{aligned} &\mathbf{max\ z = 2x_1 + x_2 - 4x_3 - 15} \\ &\mathbf{\mu.\pi.} \quad \mathbf{-3x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 5} \\ &\qquad \mathbf{2x_1 - 3x_2 + 2x_3 \leq 9} \\ &\qquad \mathbf{x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 5} \\ &\qquad \mathbf{x_1\ ,\ x_2\ ,\ x_3 \geq 0.} \end{aligned}$$

Αρχικά, διαγράφουμε το σταθερό όρο από την αντικειμενική συνάρτηση και με βάση τα όσα ειπώθηκαν παραπάνω και ελαχιστοποιούμε την αντίθετή της. Άρα, έχουμε:

$$\min -2x_1 - x_2 + 4x_3$$

Ο πρώτος ανισοτικός περιορισμός μετατρέπεται σε ισοτικό με την αφαίρεση από το αριστερό μέρος της πλεονασματικής μεταβλητής x_4:

$$-3x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 5$$

Οι άλλοι δύο περιορισμοί του προβλήματος μετατρέπονται σε ισοτικούς με πρόσθεση των δύο ελλειμματικών μεταβλητών x_5, x_6 αντίστοιχα στο αριστερό τους μέρος.

$$2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_5 = 9, \text{ με } x_5 \geq 0$$

$$x_1 - x_2 + 3x_3 + x_6 = 5, \text{ με } x_6 \geq 0.$$

Το γραμμικό πρόβλημα στην τυποποιημένη του μορφή είναι:

$$\begin{aligned} &\mathbf{min} \quad \mathbf{-2x_1 - x_2 + 4x_3} \\ &\mathbf{\mu.\pi.} \quad \mathbf{-3x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 5} \\ &\qquad \mathbf{2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_5 = 9} \\ &\qquad \mathbf{x_1 - x_2 + 3x_3 + x_6 = 5} \\ &\qquad x_j \geq 0, (j=1, 2, ..., 6) \end{aligned}$$

Παράδειγμα 1.2

Έστω ότι έχουμε το παρακάτω γραμμικό πρόβλημα μεγιστοποίησης:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{max}\ \mathbf{z} = \mathbf{-4x_1 + 7x_2 + 2x_3} \\
&\mathbf{μ.π.} \quad \mathbf{-3x_1 + 3x_2 - 2x_3 \geq 0} \\
&\qquad\quad \mathbf{-2x_1 + x_2 + 4x_3 \geq -3} \\
&\qquad\quad \mathbf{2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 6} \qquad \mathbf{x_j \geq 0\ (\ j = 1, 2, 3\ )}
\end{aligned}$$

και το σημείο $\mathbf{x^T = (x_1, x_2, x_3) = (2, 2, 0)}$. Να βρεθούν οι ενεργοί περιορισμοί, οι περιορισμοί που ικανοποιούνται και οι περιορισμοί που δεν ικανοποιούνται. Να μετασχηματιστεί το πρόβλημα στην τυποποιημένη του μορφή με αντικειμενική συνάρτηση ελαχιστοποίησης.

Ένας ανισοτικός περιορισμός είναι ενεργός στο σημείο x αν το σημείο επαληθεύει τον περιορισμό σαν ισότητα. Διαφορετικά, θα λέμε ότι ο περιορισμός είναι μη ενεργός. Αντικαθιστώντας επομένως τις τιμές του x που δίνονται στην εκφώνηση του παραδείγματος έχουμε:

$1^{ος}$ περιορισμός: -3*2 + 3*2 – 2*0 = 0. Άρα ο $1^{ος}$ περιορισμός είναι ενεργός.

$2^{ος}$ περιορισμός: -2*2 + 2 + 4*0 = -2 ≠ -3. Άρα ο $2^{ος}$ περιορισμός δεν είναι ενεργός.

$3^{ος}$ περιορισμός: 2*2 + 3*2 + 5*0 = 10 ≠ 6. Άρα ο $3^{ος}$ περιορισμός δεν είναι ενεργός.

Με την εισαγωγή των χαλαρών μεταβλητών x_4 x_5 x_6 οι ανισοτικοί περιορισμοί μετατρέπονται σε ισοτικούς.

$$\begin{aligned}
3x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 &= 0 \\
-2x_1 + x_2 + 4x_3 - x_5 &= -3 \\
2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_6 &= 6
\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές του x που δίνονται στην εκφώνηση έχουμε:

$\mathbf{x_4 = 0,\ x_5 = 1,\ x_6 = -4}$. Επομένως, ο $1^{ος}$ και $3^{ος}$ περιορισμός μη αρνητικότητας ικανοποιούνται, ενώ ο $2^{ος}$ δεν ικανοποιείται.

Η τυποποιημένη μορφή του γραμμικού προβλήματος είναι:

$$\min z = 4x_1 - 7x_2 - 2x_3$$

$$\begin{aligned} \text{μ.π.}\quad & -3x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ & -2x_1 + x_2 + 4x_3 - x_5 = -3 \\ & 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_6 = 6 \qquad x_j \geq 0 \;(j = 1, 2, 3, 4, 5, 6). \end{aligned}$$

1.7.2 Μετασχηματισμός από την τυποποιημένη στην κανονική μορφή.

Ένα γραμμικό πρόβλημα στην τυποποιημένη του μορφή έχει όπως προαναφέρθηκε τους τεχνολογικούς του περιορισμούς σε μορφή ισοτήτων. Η μετατροπή, επομένως, ενός τέτοιου προβλήματος στην κανονική του μορφή γίνεται με την μετατροπή των ισοτικών τεχνολογικών περιορισμών σε ανισοτικούς.

Έστω ότι έχουμε τον παρακάτω ισοτικό περιορισμό:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b.$$

Λύνουμε ως προς τη μεταβλητή $x_1 (a_1 \neq 0)$ και έχουμε:

$$x_1 = [b-(a_2x_2 + ... + a_nx_n)] / a_1$$

Επειδή είναι $x_1 \geq 0$, παίρνουμε τον ανισοτικό περιορισμό:

$$(a_2/a_1)\, x_2 + (a_3/a_1)\, x_3 + ... + (a_n/a_1)\, x_n \leq b/a_1$$

Με αυτόν τον τρόπο απαλείφουμε τη μεταβλητή x_1 από όλους τους περιορισμούς και την αντικειμενική συνάρτηση του γραμμικού προβλήματος. Αυτή η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι να απαλειφθούν όλοι οι ισοτικοί περιορισμοί του προβλήματος.

Παράδειγμα 1.3

Να μετασχηματιστεί το παρακάτω γραμμικό πρόβλημα από την τυποποιημένη στην κανονική μορφή.

$$\min z = 2x_1 + 3x_2 + x_3 \;:\; (1)$$

$$\begin{aligned} \text{μ.π.:}\; & x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 5 : (2) \\ & 2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 4 : (3) \end{aligned}$$

$$3x_1 + x_2 + x_3 \qquad = 9 : (4)$$
$$x_j \geq 0, (j = 1, 2, 3, 4)$$

Λύνουμε την (2) ως προς x_1 και έχουμε:

$$x_1 = x_2 - 2x_3 - x_4 + 5 : (5)$$

Αντικαθιστώντας την (5) στις (1), (3) και (4) και απαλείφοντας τη μεταβλητή απόφασης $x_1 \geq 0$ από τον πρώτο περιορισμό, έχουμε το γραμμικό πρόβλημα:

$$\min z = 5x_2 – 3x_3 – 2x_4 + 10$$
$$\text{μ.π.:} \quad -x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 5$$
$$4x_2 – 5x_3 – 3x_4 = -6$$
$$4x_2 – 5x_3 – 3x_4 = -6$$

Απαλείφουμε τον ένα από τους δύο ίδιους ισοτικούς περιορισμούς και λύνουμε τον ένα εναπομείναντα ως προς x_2. Έτσι έχουμε:

$$x_2 = (-6 + 5x_3 + 3x_4) / 4 \geq 0.$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω σχέση στην αντικειμενική συνάρτηση, στον πρώτο περιορισμό και απαλείφοντας τη μεταβλητή απόφασης x_2 από τον ένα ισοτικό περιορισμό που απέμεινε (προκειμένου να γίνει και αυτός ανισοτικός) παίρνουμε το γραμμικό πρόβλημα στην τυποποιημένη του μορφή.

$$\min z = (13/4)x_3 + (7/4)x_4$$
$$\text{μ.π.:} \quad (3/4)x_3 + (1/4)x_4 \leq 14/4$$
$$(-5/4)x_3 + (-3/4)x_4 \leq -6/4$$
$$x_j \geq 0, (j = 3 , 4).$$

1.7.3 Τεχνικές Κλιμάκωσης.

Μέσω των τεχνικών κλιμάκωσης μπορούμε να καταλήξουμε σε ισοδύναμο με το αρχικό γραμμικό πρόβλημα που μας έχει δοθεί. Αυτού του είδους οι υπολογισμοί ισοδύναμων γραμμικών ονομάζονται τεχνικές κλιμάκωσης και εφαρμόζονται σε γραμμικά προβλήματα τα οποία είναι δύσκολα στην επίλυσή τους λόγω λαθών στρογγυλοποίησης.

Μία από τις πιο γνωστές τεχνικές κλιμάκωσης είναι η τεχνική της εξισορρόπησης. Σύμφωνα με αυτήν την τεχνική κάθε στήλη συντελεστών ενός γραμμικού προβλήματος διαιρείται με τον μέγιστο σε απόλυτη τιμή εκ των συντελεστών της. Με αυτόν τον τρόπο σε κάθε στήλη θα εμφανιστεί τουλάχιστον ένας συντελεστής ο οποίος θα είναι ίσος με 1 ή -1. Στη συνέχεια εξετάζονται οι συντελεστές κάθε γραμμής και αν υπάρχει κάποια γραμμή όπου δεν εμφανίζεται συντελεστής ίσος με 1 ή -1, τότε διαιρούμε τους συντελεστές της συγκεκριμένης γραμμής με τον μέγιστο σε απόλυτη τιμή εκ των συντελεστών της.

Η τεχνική της εξισορρόπησης γίνεται περισσότερο κατανοητή στο παράδειγμα που ακολουθεί.

<u>Παράδειγμα 1.4</u>

Έστω το γραμμικό πρόβλημα ελαχιστοποίησης:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{min\ z = -5x_1 + 2x_2 + 6x_3 - 10x_4 - 6x_5} \\
&\mathbf{μ.π.:}\quad \mathbf{100x_1 + 5x_2 + 20x_3 + 50x_4 + 10x_5 = 300} \\
&\qquad\quad \mathbf{-10x_1 + 20x_2 - 20x_3 - 25x_4 + 10x_5 = 200} \\
&\qquad\quad \mathbf{-70x_1 + 40x_2 + 500x_3 - 100x_4 + 30x_5 = 700} \\
&\qquad\quad \mathbf{x_j = \geq 0, (j = 1,2,3,4,5).}
\end{aligned}$$

με βέλτιστη λύση **x=(0, 0, 35/43, 96/43, 740/43)** και με βέλτιστη αντικειμενική τιμή **z* = -5190/43**.

Σύμφωνα με την τεχνική της εξισορρόπησης η πρώτη στήλη συντελεστών θα διαιρεθεί με το 100, η δεύτερη με το 40, η τρίτη με το 500, η τέταρτη με το 100 και η πέμπτη με το 30. Συνεπώς, το γραμμικό πρόβλημα θα γίνει:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{min\ z = -(1/20)y_1 + 1/20y_2 + (3/250)y_3 + (-1/10)y_4 + (-1/5)y_5} \\
&\qquad\qquad \mathbf{y_1 + 1/8\ y_2 + (1/25)\ y_3 + (1/2)\ y_4 + (1/3)\ y_5 = 300} \\
&\qquad \mathbf{-(1/10)y_1 + ½\ y_2 + (-1/25)\ y_3 + (-1/4)\ y_4 + (1/3)\ y_5 = 200} \\
&\qquad \mathbf{-(7/10)y_1 + y_2 + y_3 + (-1)\ y_4 + y_5 = 700} \\
&\qquad \mathbf{και\quad y_j = \geq 0, (j = 1,2,3,4,5).}
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε τώρα τις γραμμές και βλέπουμε ότι οι συντελεστές του δεύτερου περιορισμού δεν είναι όλοι ίσοι με 1 ή -1. Επομένως, διαιρούμε όλους τους συντελεστές του με το ½ και έχουμε:

$$\mathbf{min\ z = -(1/20)y_1 + (1/20)y_2 + (3/250)y_3 + (-1/10)y_4 + (-1/5)y_5}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{y_1 + (1/8)\,y_2 + (1/25)\ \ y_3 + (1/2)y_4 + (1/3)\,y_5} &\mathbf{= 300}\\
\mathbf{-(1/5)y_1 + y_2 + (-2/25)\,y_3 + (-1/2)y_4 + (2/3)\,y_5} &\mathbf{= 200}\\
\mathbf{-(7/10)y_1 + y_2 + y_3 + (-1)\ y_4 + y_5} &\mathbf{= 700}
\end{aligned}$$

και $\mathbf{y_j = \geq 0,\ (j = 1,2,3,4,5).}$

Το νέο γραμμικό πρόβλημα έχει βέλτιστη λύση y = (0, 0, 17500/43, 9600/43, 22200/43) με βέλτιστη αντικειμενική τιμή την ίδια, z* = -5190/43.

1.7.4 Μετασχηματισμοί στους περιορισμούς στις τιμές μεταβλητών και για ελεύθερες μεταβλητές.

Υπάρχει και η περίπτωση κατά την οποία ανισοτικοί περιορισμοί να επιβάλλονται και στις τιμές των μεταβλητών απόφασης ενός γραμμικού προβλήματος. Μπορεί, δηλαδή, σε ένα γραμμικό πρόβλημα να μην ισχύουν οι περιορισμοί μη αρνητικότητας των μεταβλητών, αλλά να είναι:

$\mathbf{a \leq x \leq b}$, όπου a και b δύο γνωστοί αριθμοί.

Ο αριθμός a ονομάζεται κάτω όριο και ο αριθμός b πάνω όριο. Και σε αυτήν την περίπτωση επειδή οι περιορισμοί είναι ανισοτικοί, μπορούμε να τους μετατρέψουμε σε ισοτικούς με τη χρήση χαλαρών μεταβλητών. Επίσης, μας δίνεται η δυνατότητα να αντικαταστήσουμε τη μεταβλητή απόφασης με την αντίστοιχη χαλαρή μεταβλητή και στους περιορισμούς και στην αντικειμενική συνάρτηση. Στο παράδειγμα που ακολουθεί περιγράφεται αναλυτικά ο τρόπος με τον οποίο γίνονται όλα τα παραπάνω.

Παράδειγμα 1.5

Έστω ότι έχουμε το παρακάτω γραμμικό πρόβλημα και ότι αυτό πρέπει να τεθεί στην τυποποιημένη του μορφή.

$$\max\ z = 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - x_4$$

$$\begin{aligned}
\text{μ.π.:}\quad & 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 5 \\
& x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 \geq 4 \\
& -x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 3 \\
& x_2 \geq -1,\ x_3 \leq 1,\ -1 \leq x_4 \leq 1
\end{aligned}$$

Η νέα αντικειμενική συνάρτηση είναι:

$$-2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4$$

η οποία θα ελαχιστοποιηθεί.

Επειδή ο πρώτος τεχνολογικός περιορισμός είναι ισότητα δεν αλλάζει καθόλου. Ο δεύτερος μετατρέπεται σε ισότητα αφαιρώντας από το αριστερό μέρος την πλεονασματική χαλαρή μεταβλητή x_5. Έτσι έχουμε:

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 - x_5 = 4$$

Στον τρίτο περιορισμό προσθέτουμε την ελλειμματική μεταβλητή x_6 και τον μετατρέπουμε και αυτόν σε ισότητα.

$$-x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 + x_6 = 3$$

Τώρα θα μετασχηματίσουμε τους περιορισμούς ορίων των μεταβλητών. Η x_1 είναι ελεύθερη γι' αυτό την αφήνουμε τελευταία.

- $\mathbf{x_2 \geq -1}$

  Εισάγουμε την πλεονασματική μεταβλητή $y_2 \geq 0$ και θέτουμε:

  $x_2 - y_2 = -1 \leftrightarrow x_2 = y_2 - 1$.
- $\mathbf{x_3 \leq 1}$

  Εισάγουμε την ελλειμματική μεταβλητή $y_3 \geq 0$ και θέτουμε:

  $x_3 + y_3 = 1 \leftrightarrow x_3 = 1 - y_3$.
- $\mathbf{-1 \leq x_4 \leq 1}$

  Εδώ υπάρχει διπλός περιορισμός (άνω και κάτω όριο).

  $-1 \leq x_4 \leq 1 \leftrightarrow 0 \leq x_4 + 1 \leq 2$.

  Θέτουμε:

$y_4 = x_4 + 1 \geq 0 \leftrightarrow x_4 = y_4 - 1$ και $0 \leq y_4 \leq 2$.

Τέλος, ο ανισοτικός περιορισμός $y_4 \leq 2$ μετατρέπεται στην ισότητα $y_4 + y_5 = 2$ με τη χρήση της ελλειμματικής μεταβλητής $y_5 \geq 0$.

Έχοντας πραγματοποιήσει όλες τις παραπάνω μετατροπές στο πρόβλημα μας, αυτό παίρνει τη μορφή:

$$
\begin{aligned}
\min\ & -2x_1 - 3y_2 - 4y_3 + y_4 + 6 \\
& 2x_1 - y_2 - 3y_3 + y_4 = 2 \\
& x_1 + 3y_2 - 2y_3 - 2y_4 - x_5 = 3 \\
& -x_1 - y_2 - 3y_3 + y_4 + x_6 = 0 \\
& y_4 + y_5 = 2 \\
& y_2, y_3, y_4, y_5, x_5, x_6 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Για να γίνει απαλοιφή της ελεύθερης μεταβλητής x_1, λύνουμε το 2^{ο} ισοτικό περιορισμό ως προς x_1, αντικαθιστούμε στους υπόλοιπους περιορισμούς και στην αντικειμενική συνάρτηση και απαλείφουμε το σταθερό όρο. Έτσι, το μετασχηματισμένο στην τυποποιημένη του μορφή γραμμικό πρόβλημα γίνεται:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{\min\ z} &= \mathbf{3y_2 - 8y_3 - 3y_4 - 2x_5} \\
\mathbf{μ.π.:}\quad & \mathbf{-7y_2 + y_3 + 5y_4 + 2x_5 = -4} \\
& \mathbf{2y_2 - 5y_3 - y_4 - x_5 + x_6 = 3} \\
& \mathbf{y_4 + y_5 = 2} \\
& \mathbf{y_2, y_3, y_4, y_5, x_5, x_6 \geq 0}
\end{aligned}
$$

Το τελευταίο πρόβλημα έχει 6 ανισοτικούς περιορισμούς, όσους έχει το αρχικό, αλλά, και οποιοδήποτε άλλο ενδιάμεσο πρόβλημα που κατασκευάστηκε.

1.8 Πλεονασματικοί περιορισμοί.

Ένας περιορισμός είναι πλεονασματικός ή περιττός αν επαληθεύεται από κάθε σημείο που επαληθεύει όλους τους υπόλοιπους περιορισμούς. Σε αυτές τις περιπτώσεις μπορούμε να διαγράψουμε τέτοιου είδους περιορισμούς από το υπό μελέτη γραμμικό πρόβλημα. Ο εντοπισμός των πλεονασματικών περιορισμών δεν είναι εύκολος. Μερικές φορές το πρόβλημα αυτό είναι ισοδύναμο με το ίδιο το γραμμικό πρόβλημα.

<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ Β’</u>

« Γραφική επίλυση προβλημάτων – Υπολογισμός Δυϊκού προβλήματος»

2.1 <u>Εισαγωγή.</u>

Στο δεύτερο κεφάλαιο της εργασίας παρουσιάζεται η γραφική απεικόνιση των γραμμικών προβλημάτων. Για την καλύτερη κατανόηση του θέματος από τον αναγνώστη παρατίθενται αρχικά ορισμοί γύρω από τη γεωμετρία του γραμμικού προγραμματισμού. Στη συνέχεια δίνονται γραφικές λύσεις διαφόρων περιπτώσεων γραμμικών προβλημάτων, όπως η τυπική περίπτωση μεγιστοποίησης και ελαχιστοποίησης, των άπειρων λύσεων, του αδύνατου γραμμικού προβλήματος, αλλά και πολλών άλλων υποπεριπτώσεων. Το κεφάλαιο κλείνει με μια εκτενή αναφορά στη δυϊκή θεωρία και τους μετασχηματισμούς από το πρωτεύον πρόβλημα στο δυϊκό και αντίθετα.

2.2 <u>Διανύσματα Κίνησης.</u>

Οι περισσότεροι αλγόριθμοι, των οποίων ο σκοπός είναι η επίλυση γραμμικών προβλημάτων, κατασκευάζουν μια ακολουθία σημείων με την προσδοκία το τελευταίο σημείο να είναι το βέλτιστο ή το όριό της, σε περίπτωση που η ακολουθία έχει άπειρους όρους. Ο πλέον διαδεδομένος τρόπος λειτουργίας τους είναι ο εξής: Δοθέντος ενός σημείου $x \in R^n$, κατασκευάζουν ένα διάνυσμα (vector) $d \in R^n$ και έπειτα με τον τύπο $x + td$ υπολογίζουν το επόμενο σημείο της ακολουθίας. Το σύνολο των σημείων $\{ x + td: -\infty < t < +\infty \}$ αποτελεί μια ευθεία γραμμή. Τα σημεία του συνόλου $\{ x + td: t\geq 0)$ αποτελούν μια ημιευθεία, που αποκαλείται ακτίνα (ray). Η ακτίνα έχει την αρχή της στο σημείο x και συμβολίζεται με R(x,d). Όσο μεταβάλλεται η τιμή του t το σημείο $x + td$ κινείται πάνω στην ευθεία. Για αυτόν ακριβώς το λόγο το διάνυσμα d ονομάζεται διάνυσμα κίνησης (vector of movement).

<u>Παράδειγμα 2.1</u>

Έστω το τα διανύσματα $x^T = (2, 1)$ & $d^T = (-1, 2)$. Οι συντεταγμένες των σημείων της ευθείας $\{ x + td: -\infty < t < +\infty \}$ δίνονται από τη σχέση:

$$(\varepsilon): x + td = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-t \\ 1+2t \end{pmatrix}$$

- Η τομή της ευθείας (ε) με τον άξονα x_1 (x_2=0) είναι:

x_2 = 0 ↔ 1 + 2t = 0 ↔ **t = -1/2**

x_1 = 2 – t = 2 + ½ = **5/2**

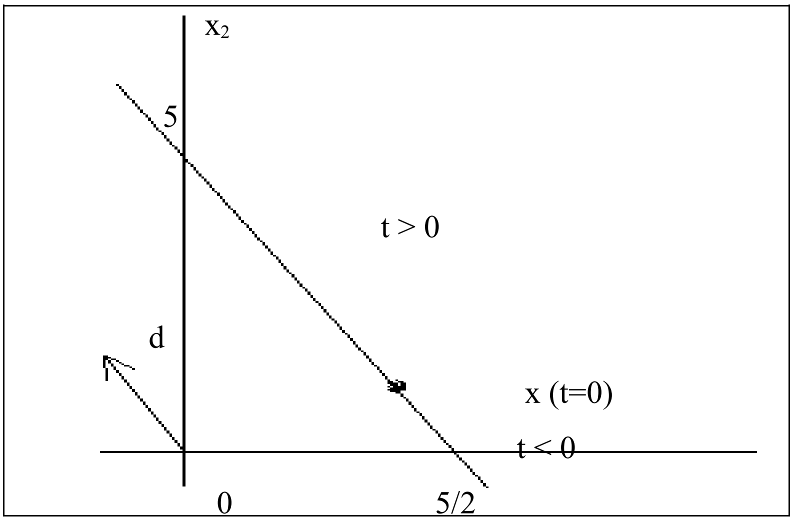
- Η τομή της ευθείας (ε) με τον άξονα x_2 (x_1=0) είναι:

x_1 = 0 ↔ 2 – t = 0 ↔ **t = 2**

x_2 = 1 +2t = 1+4 = **5**

- Η τιμή του t ισούται με 0 για x_1=2, x_1=1 επιλύοντας το παραπάνω σύστημα και από τις τιμές που προέκυψαν για το t στα σημεία τομής των αξόνων x_1 & x_2 ορίζονται τα τμήματα της ευθείας (ε) στα οποία το t είναι είτε θετικό είτε αρνητικό. Για θετικές τιμές της παραμέτρου t κινούμαστε προς την κατεύθυνση, την οποία δείχνει το διάνυσμα d όταν ζωγραφίζεται έχοντας αρχή το σημείο x.

Στο παρακάτω διάγραμμα απεικονίζονται γραφικά όλα τα παραπάνω.



2.3 <u>Ορισμοί για τη γεωμετρία ενός γραμμικού προβλήματος.</u>

- Διάνυσμα κατεύθυνση: Ένα διάνυσμα d ονομάζεται κατεύθυνση (direction) αν ικανοποιεί την παρακάτω σχέση:

$$A_i d = 0, \text{ για κάθε ισοτικό περιορισμό } i.$$

- Εφικτό διάνυσμα d: Δοθέντος ενός εφικτού σημείου x του γραμμικού προβλήματος, ένα διάνυσμα d είναι εφικτό, αν υπάρχουν θετικές τιμές της παραμέτρου t, έτσι ώστε τα σημεία x + td να είναι εφικτά.
- Εσωτερικό σημείο: Ένα σημείο x είναι εσωτερικό (interior) αν είναι εφικτό και αν ικανοποιεί όλους τους περιορισμούς σαν αυστηρή ανισότητα.
- Συνοριακό σημείο: Ένα σημείο x είναι συνοριακό αν είναι εφικτό και αν ικανοποιεί τουλάχιστον ένα περιορισμό σαν ισότητα.
- Βήμα & Μέγιστο Βήμα: Αν x ένα εφικτό σημείο του γραμμικού προβλήματος και d εφικτή κατεύθυνση στο σημείο x, τότε η παράμετρος t θα ονομάζεται βήμα (step). Μέγιστο βήμα ονομάζεται η τιμή της παραμέτρου t η οποία μέσω της σχέσης x + td μας δίνει εφικτό σημείο του γραμμικού προβλήματος.
- Ανηφορικό Διάνυσμα: Ένα διάνυσμα d ονομάζεται ανηφορικό αν ισχύει $c^T x < c^T(x + td)$ για κάθε $t>0$.
- Κατηφορικό Διάνυσμα: Ένα διάνυσμα d ονομάζεται κατηφορικό αν ισχύει $c^T x > c^T(x + td)$ για κάθε $t>0$.
- Βελτιώνον Διάνυσμα: Ένα διάνυσμα d ονομάζεται βελτιώνον αν είναι ανηφορικό και έχουμε να επιλύσουμε ένα γραμμικό πρόβλημα μεγιστοποίησης ή αν είναι κατηφορικό και έχουμε να επιλύσουμε ένα γραμμικό πρόβλημα ελαχιστοποίησης.
- Κατηφορική - Ανηφορική Κατεύθυνση: Μια κατεύθυνση d είναι κατηφορική (ανηφορική) αν ισχύει $c^T d <0$ ($c^T d>0$).

2.4 Γραφική Επίλυση γραμμικών προβλημάτων.

Προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού με δύο μόνο μεταβλητές μπορούν να λυθούν εύκολα γραφικά.

2.4.1 Τυπική Περίπτωση Μεγιστοποίησης

Έστω το πρόβλημα Γ.Π.:

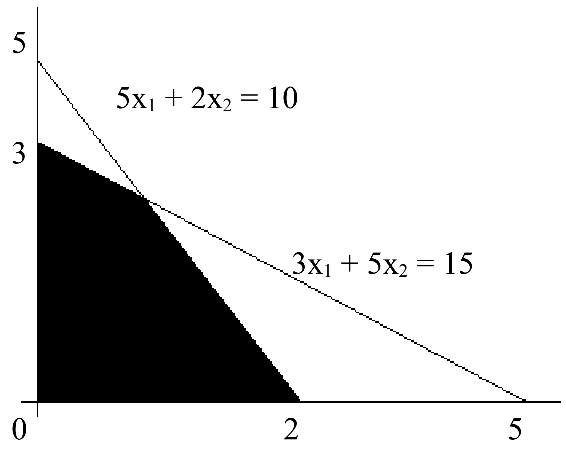
max z = $5x_1 + 3x_2$

με τους περιορισμούς:

- **$3x_1 + 5x_2 \leq 15$**
- **$5x_1 + 2x_2 \leq 10$ και**
- **$x_1, x_2 \geq 0$.**

Αρχικά, θα βρούμε τα ζεύγη τιμών των x_1, x_2 που αποτελούν δυνατές λύσεις του προβλήματος. Εισάγουμε σύστημα ορθογωνίων συντεταγμένων x_1, x_2 και παρατηρούμε ότι κάθε σημείο που βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο έχει συντεταγμένες x_1, $x_2 \geq 0$ και συνεπώς ικανοποιεί τους περιορισμούς μη αρνητικότητας των μεταβλητών. Αντίστροφα, κάθε σημείο που αποτελεί δυνατή λύση θα βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο.

Για να βρούμε το σύνολο των ζευγών του πρώτου τεταρτημόριου που ικανοποιεί τους περιορισμούς, θα πρέπει να ερμηνεύσουμε γεωμετρικά ανισότητες της μορφής $3x_1 + 5x_2 \leq 15$, $5x_1 + 2x_2 \leq 10$. Σχεδιάζοντας τις ευθείες που παριστάνουν οι αντίστοιχες ισότητες μπορούμε να βρούμε το χωρίο που περιλαμβάνουν οι παραπάνω ανισότητες.



Παρατηρούμε ότι τα σημεία που ικανοποιούν την συνθήκη μη αρνητικότητας και την πρώτη ανισότητα είναι τα σημεία που βρίσκονται κάτω από την ευθεία με εξίσωση $3x_1 + 5x_2 = 15$ και στο πρώτο τεταρτημόριο. Αντίστοιχα τα σημεία που βρίσκονται κάτω από την ευθεία με εξίσωση $5x_1 + 2x_2 = 10$ και στο πρώτο τεταρτημόριο ικανοποιούν τις συνθήκες μη αρνητικότητας και την δεύτερη ανισότητα. Συνεπώς το σύνολο των σημείων που ικανοποιούν όλους τους περιορισμούς και συνθήκες είναι το γραμμοσκιασμένο χωρίο του σχήματος. Κάθε σημείο του χωρίου αυτού και μόνο αυτά τα σημεία αποτελούν δυνατή λύση του προβλήματος. Για να επιλύσουμε το πρόβλημα θα πρέπει να βρούμε από το σύνολο των δυνατών λύσεων εκείνη που μεγιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση. Για κάθε σταθερή τιμή της z παρατηρούμε ότι η εξίσωση είναι ευθεία και μάλιστα οι ευθείες που προκύπτουν από διαφορετικές τιμές του z είναι παράλληλες. Επιθυμούμε να βρούμε την ευθεία με την μεγαλύτερη τιμή της z, που να έχει ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με το χωρίο των δυνατών λύσεων. Παρατηρούμε από το σχήμα ότι η ευθεία αυτή που τέμνει το χωρίο και έχει το μέγιστο z είναι η z_2 η οποία περνάει από το σημείο τομής των ευθειών $3x_1 + 5x_2 = 15$ και $5x_1 + 2x_2 = 10$. Λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε ότι $x_1 = 20/19$ και $x_2 = 45/19$ και αντικαθιστώντας στην αντικειμενική συνάρτηση βρίσκουμε ότι το $z = 235/19$. Αυτή είναι και μέγιστη δυνατή λύση του προβλήματος.

2.4.2 <u>Άπειρες εναλλακτικές βέλτιστες λύσεις.</u>

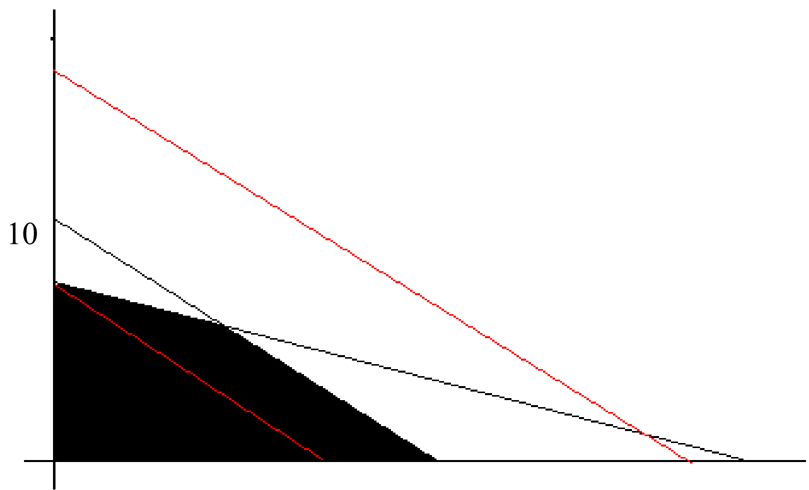
Θεωρούμε το πρόβλημα:

max $\mathbf{z = 2.5x_1 + x_2}$

τους περιορισμούς:

- $\mathbf{3x_1 + 5x_2 \leq 15}$
- $\mathbf{5x_1 + 2x_2 \leq 10}$ **και**
- $\mathbf{x_1, x_2 \geq 0.}$

Κάνοντας πάλι εδώ το χωρίο των δυνατών λύσεων και την αντικειμενική συνάρτηση για τις διάφορες τιμές έχουμε το επόμενο σχήμα:



5

$5x_1 + 2x_2 = 10$ $z = 10$

3 A

$z = 3$ $z = 5$ $3x_1 + 5x_2 = 15$

B

0 2 4 5

Παρατηρούμε ότι η z=5 είναι η μέγιστη βέλτιστη λύση. Η διαφορά είναι ότι εδώ η βέλτιστη λύση συμπίπτει με μια πλευρά του πολυγώνου του χωρίου των δυνατών λύσεων. Αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχει ένα μόνο ζεύγος τιμών των x_1, x_2 που να μεγιστοποιεί την z. Κάθε σημείο της πλευράς ΑΒ του πολυγώνου δίνει την μέγιστη τιμή. Δηλαδή η μέγιστη αυτή τιμή της z είναι μοναδική, αλλά υπάρχει άπειρος αριθμός δυνατών λύσεων. Η κορυφή Α του πολυγώνου αποτελεί και αυτή ένα ζευγάρι τιμών που δίνουν την μέγιστη λύση στο πρόβλημα. Επομένως λύνοντας το σύστημα των δύο εξισώσεων $3x_1 + 5x_2 = 15$ και $5x_1 + 2x_2 = 10$, παίρνουμε $x_1 = 20/19$ και $x_2 = 45/19$ από τα οποία προκύπτει ότι max z=5. Όταν ένα πρόβλημα Γ.Π. έχει περισσότερες από μία βέλτιστες λύσεις, τότε λέμε ότι υπάρχουν εναλλακτικές βέλτιστες λύσεις. Αυτό σημαίνει ότι τα διαθέσιμα μέσα είναι δυνατόν να συνδυαστούν κατά περισσότερους από ένα τρόπους προς μεγιστοποίηση του κέρδους.

2.4.3 Τυπική περίπτωση ελαχιστοποίησης

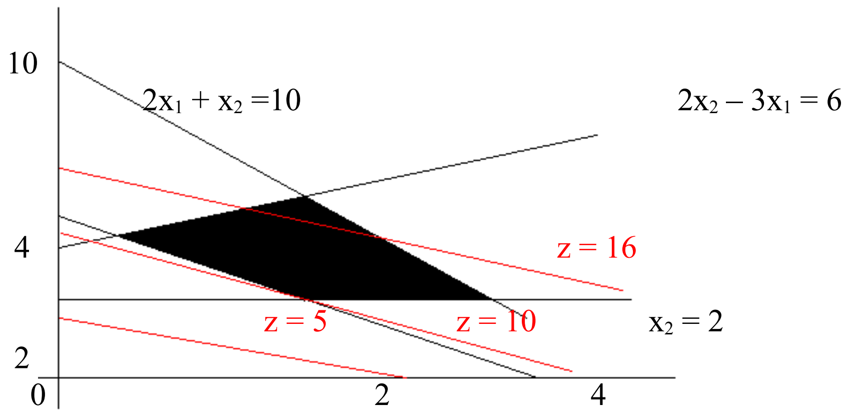
Θεωρούμε το πρόβλημα:

min $\mathbf{z = 2x_1 + 3x_2}$

με τους περιορισμούς:

- $\mathbf{2x_1 + x_2 \leq 10}$
- $\mathbf{x_1 + x_2 \geq 4}$
- $\mathbf{-3x_1 + 2x_2 \leq 6}$
- $\mathbf{x_2 \geq 2}$ **και**
- $\mathbf{x_1, x_2 \geq 0}$

Η γεωμετρική ερμηνεία του παραπάνω προβλήματος είναι αυτή που φαίνεται στο επόμενο σχήμα:



Η ελάχιστη τιμή της z είναι η ευθεία z = 10, που περνάει από το σημείο x_1=2 και x_2 = 2, δηλαδή από την τομή των δύο ευθειών $x_1 + x_2$ =4 και x_2 = 2.

2.4.4 <u>Μη πεπερασμένη λύση.</u>

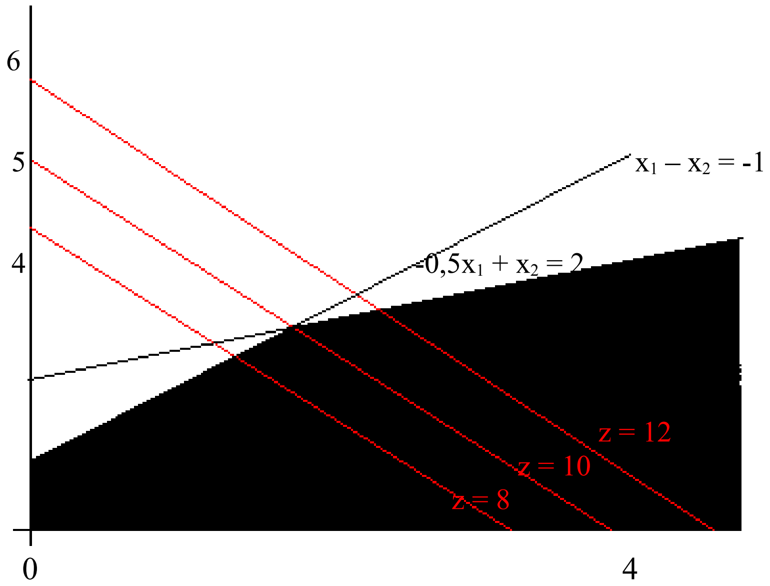
Θεωρούμε το πρόβλημα:

max z = $2x_1 + 2x_2$

με τους περιορισμούς:

- **$x_1 - x_2 \geq -1$**
- **$-0.5x_1 + x_2 \leq 2$ και**
- **$x_1, x_2 \geq 0$**

Η γεωμετρική ερμηνεία του παραπάνω προβλήματος είναι:



Στο συγκεκριμένο πρόβλημα παρατηρούμε ότι η ευθεία της αντικειμενικής συνάρτησης μπορεί να μετακινηθεί παράλληλα προς την κατεύθυνση όπου αυξάνεται το z μέχρι το άπειρο χωρίς να σταματήσει να έχει κοινά σημεία με το χωρίο των δυνατών λύσεων. Συνεπώς η z μπορεί να γίνει οσοδήποτε μεγάλη και το πρόβλημα δεν έχει πεπερασμένη μέγιστη τιμή της z. Σε μια τέτοια περίπτωση λέμε ότι το πρόβλημα δεν έχει πεπερασμένη λύση ή ότι έχει μια μη φραγμένη λύση ή ότι είναι απεριόριστο.

2.4.5 Μη πεπερασμένη λύση με πεπερασμένες βέλτιστες τιμές ορισμένων μεταβλητών.

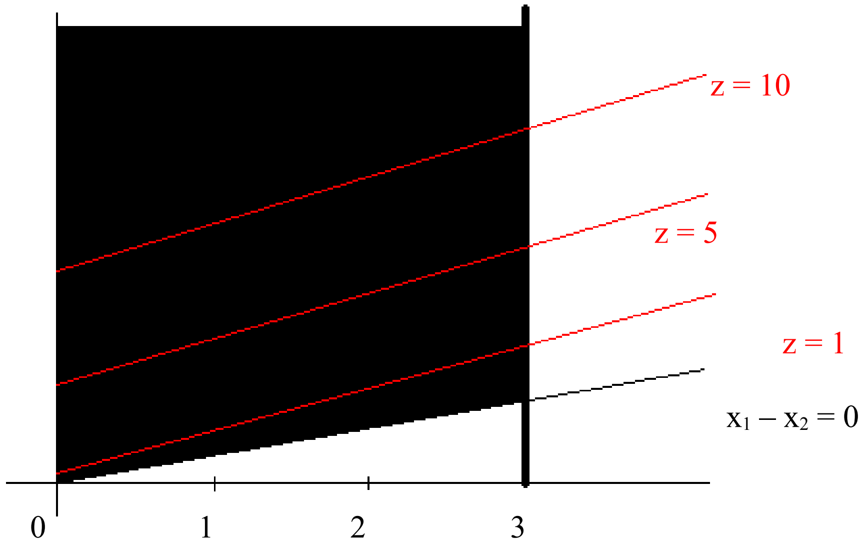
Στο προηγούμενο παράδειγμα και οι δύο μεταβλητές μπορούν να λάβουν απεριόριστα μεγάλες τιμές καθώς αυξάνεται η z. Μια μη φραγμένη λύση όμως μπορεί να έχει και μεταβλητές με πεπερασμένη τιμή. Στο ακόλουθο πρόβλημα μπορούμε να το παρατηρήσουμε:

max $z = -3x_1 + 2x_2$

μ.π.:

- $x_1 - x_2 \leq 0$
- $x_1 \leq 3$ **και**
- $x_1, x_2 \geq 0$.

Η γραφική του επίλυση είναι:



Παρατηρούμε ότι ενώ η αντικειμενική συνάρτηση μπορεί να αυξάνεται απεριόριστα η μεταβλητή x_1 είναι πεπερασμένη.

2.4.6 <u>Πεπερασμένη βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης με μη πεπερασμένες τιμές των μεταβλητών.</u>

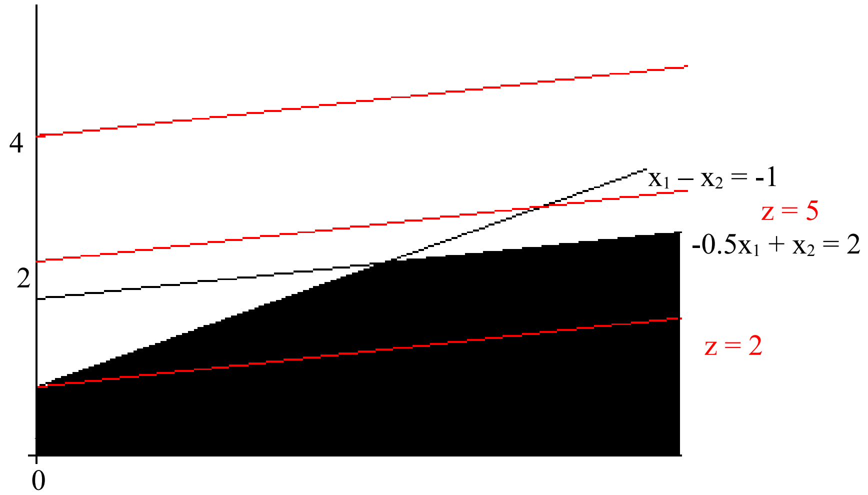
Έστω το παρακάτω γραμμικό πρόβλημα:

max $z = -x_1 + 2x_2$

- **$x_1 - x_2 \geq -1$**
- **$-0.5x_1 + x_2 \leq 2$ και**
- **$x_1, x_2 \geq 0$.**

Η γραφική λύση είναι:

z = 8



Στην συγκεκριμένη περίπτωση παρατηρούμε ότι ενώ η z έχει πεπερασμένη μέγιστη τιμή z=4 οι τιμές των μεταβλητών είναι απεριόριστα μεγάλες.

2.4.7 <u>Καμία λύση – ασυμβίβαστοι περιορισμοί.</u>

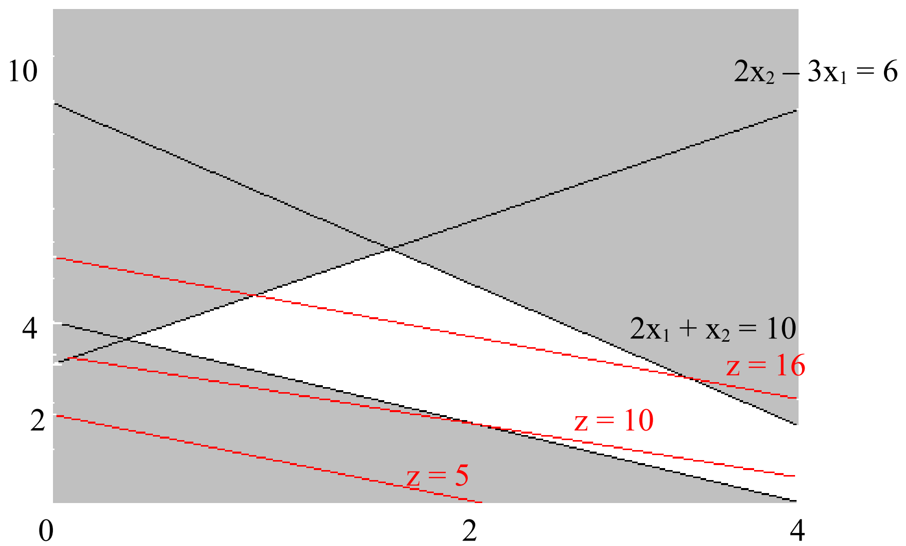
Έστω το πρόβλημα Γ.Π.:

$\mathbf{max\ z = 2x_1 + 3x_2}$

μ.π.:

- $\mathbf{2x_1 + x_2 \geq 10}$
- $\mathbf{x_1 + x_2 \leq 4}$
- $\mathbf{-3x_1 + 2x_2 \geq 6}$ και
- $\mathbf{x_1, x_2 \geq 0}$

Με γραφική επίλυση:



Παρατηρούμε ότι οι περιορισμοί σε αυτή την περίπτωση είναι ασυμβίβαστοι και έτσι δεν υπάρχει χωρίο δυνατών λύσεων. Δηλαδή δεν υπάρχει σημείο (x_1, x_2) που να ικανοποιεί όλους τους περιορισμούς.

Γενικά, η διαδικασία γραφικής επίλυσης ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού είναι πολύ σημαντική γιατί μας δίνει τη δυνατότητα να σχεδιάσουμε την περιοχή των εφικτών λύσεων και να κατανοήσουμε τον τρόπο που λειτουργούν οι διάφορες μέθοδοι επίλυσης προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού. Επίσης μας βοηθά να διερευνήσουμε την ευαισθησία της βέλτιστης λύσης του προβλήματος. Πρακτικά, βέβαια δεν έχει εφαρμογή αφού τα προβλήματα έχουν πολλές μεταβλητές και πολλούς περιορισμούς.

2.5 Υπολογισμός Δυϊκών Γραμμικών Προβλημάτων.

Η δυϊκή θεωρία ασχολείται με τον υπολογισμό καλών κάτω ορίων των γραμμικών προβλημάτων ελαχιστοποίησης. Τμήμα της δυϊκής θεωρίας είναι τα κριτήρια βελτιστότητας, τα οποία είναι απαραίτητα για το σταμάτημα των αλγορίθμων. Ένα καλό κάτω όριο z^0 της βέλτιστης αντικειμενικής τιμής z^n αποτελεί ένα καλό μέτρο ένδειξης της απόστασης του τρέχοντος εφικτού σημείου από τη βέλτιστη αντικειμενική τιμή του γραμμικού προβλήματος που εξετάζουμε.

Γενικά, για να υπολογίσουμε από το πρωτεύον γραμμικό πρόβλημα το δυϊκό του ακολουθούμε την παρακάτω διαδικασία, η οποία ωστόσο έχει ένα μειονέκτημα: απαιτεί το πρωτεύον πρόβλημα να είναι μετασχηματισμένο στην κανονική του μορφή.

Μετασχηματισμός πρωτεύοντος → δυϊκό.

Πρωτεύον: $\min \{c^T x: Ax \geq b, x \geq o\}$

Δυϊκό: $\max \{b^T w: A^T w \leq c, w \geq o\}$

Παράδειγμα 2.2

Έστω ότι έχουμε το παρακάτω γραμμικό πρόβλημα;

$\min z = 3x_1 + 2x_2 - x_3$

μ.π.: $2x_1 + x_2 - x_3 \leq 20$

$x_1 + \ x_2 + 2x_3 \geq 10$

$x_j \geq 0, (j = 1, 2, 3).$

Πολλαπλασιάζουμε τον 1ο περιορισμό με το (-1) και το πρωτεύον γραμμικό πρόβλημα γίνεται:

$\min z = 3x_1 + 2x_2 - x_3$

μ.π.: $-2x_1 - \ x_2 + x_3 \geq -20$

$x_1 + \ x_2 + 2x_3 \geq 10$

$x_j \geq 0, (j = 1, 2, 3).$

Τα δεδομένα είναι:

$$c = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \ b = \begin{bmatrix} -20 \\ 10 \end{bmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Το πρωτεύον πρόβλημα έχει τρεις μεταβλητές, άρα τόσοι θα είναι οι περιορισμοί του δυϊκού. Επίσης, οι περιορισμοί του πρωτεύοντος είναι 2, άρα τόσες θα είναι οι μεταβλητές του δυϊκού (w_1, w_2). Με βάση τον παραπάνω μετασχηματισμό έχουμε:

max: $f = -20w_1 + 10w_2$

μ.π.: $-2w_1 + w_2 \leq 3$

$-w_1 + w_2 \leq 2$

$w_1 + 2w_2 \leq 2$

$w_j \geq 0, (j = 1, 2).$

Αυτό που αξίζει να σημειωθεί είναι ότι αν το πρωτεύον πρόβλημα είναι ελαχιστοποίησης, τότε το δυϊκό θα είναι μεγιστοποίησης και το αντίστροφο.

Όπως, όμως, προαναφέρθηκε αυτός ο τρόπος υπολογισμού του δυϊκού προβλήματος έχει ένα μειονέκτημα. Απαιτείται ο μετασχηματισμός του πρωτεύοντος γραμμικού προβλήματος στην κανονική του μορφή. Για να αποφευχθεί αυτή η διαδικασία και να είναι δυνατός ο υπολογισμός του δυϊκού απευθείας, ακόμη και αν το πρωτεύουν βρίσκεται στην τυποποιημένη του μορφή, ακολουθούνται οι μετασχηματισμοί που φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

	MIN		↔	MAX	
1	Περιορισμός	=	↔	Μεταβλητή	Ελεύθερη
2	Περιορισμός	≥	↔	Μεταβλητή	≥ 0
3	Περιορισμός	≤	↔	Μεταβλητή	≤ 0
4	Μεταβλητή	Ελεύθερη	↔	Περιορισμός	=
5	Μεταβλητή	≥ 0	↔	Περιορισμός	≤
6	Μεταβλητή	≤ 0	↔	Περιορισμός	≥

Πίνακας 2.1:

«Μετασχηματισμοί περιορισμών και μεταβλητών για το σχηματισμό δυϊκών προβλημάτων».

Το παρακάτω παράδειγμα δείχνει ακριβώς τον τρόπο χρήσης του παραπάνω πίνακα μετασχηματισμών.

Παράδειγμα 2.3

Έστω ότι έχουμε το ίδιο με το παραπάνω γραμμικό πρόβλημα;

$\min z = 3x_1 + 2x_2 - x_3$

μ.π.: $-2x_1 - x_2 + x_3 \geq -20$ (1)

$x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 10$ (2)

$x_j \geq 0, (j = 1, 2, 3).$

Τα δεδομένα είναι:

$$c = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} -20 \\ 10 \end{bmatrix},\ A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Όπως και πριν, το πρωτεύον έχει 3 μεταβλητές και 2 περιορισμούς, άρα το δυϊκό θα έχει 3 περιορισμούς και 2 μεταβλητές (w_1, w_2). Αντιστοιχίζουμε αυτές τις μεταβλητές του δυϊκού προβλήματος στους 2 περιορισμούς του πρωτεύοντος.

$$w_1 \leftrightarrow -2x_1 - x_2 + x_3 \geq -20$$

$$w_2 \leftrightarrow x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 10$$

Αντιστοιχίζουμε τους 3 περιορισμούς του δυϊκού με τις 3 μεταβλητές x_1, x_2, x_3. Οι περιορισμοί του δυϊκού προβλήματος δίνονται από τον τύπο:

$$A^T * w \ \Pi \ c,$$ όπου Π είναι τα σύμβολα =, ≤ ή ≥.

Επομένως, έχουμε:

$$x_1 \leftrightarrow -2w_1 + w_2 \ \Pi \ 3$$
$$x_2 \leftrightarrow -w_1 + w_2 \ \Pi \ 2$$
$$x_3 \leftrightarrow w_1 + 2w_2 \ \Pi \ -1$$

Τώρα για να δούμε ποιο από τα τρία σύμβολα (=, ≤, ≥) αντιστοιχεί στο κάθε Π των τριών περιορισμών του δυϊκού προβλήματος εξετάζουμε τον πίνακα μετασχηματισμών 2.1, που παρατίθεται παραπάνω. Αρχικά πηγαίνουμε στη στήλη MIN μιας και το πρωτεύον πρόβλημα του παραδείγματος είναι ελαχιστοποίησης. Οι μεταβλητές x_1, x_2, x_3 είναι και οι τρεις μεγαλύτερες του 0 ($x_j \geq 0$). Παρατηρούμε ότι για μεταβλητές που είναι ≥ 0, αντιστοιχεί το σύμβολο ≤ για τους περιορισμούς του δυϊκού. Επομένως, οι περιορισμοί του δυϊκού προβλήματος θα είναι:

$$\mathbf{-2w_1 + w_2 \leq 3}$$
$$\mathbf{-w_1 + w_2 \leq 2}$$
$$\mathbf{w_1 + 2w_2 \leq 2}$$

Όμοια, και για τους περιορισμούς των μεταβλητών w_1 και w_2, επειδή οι περιορισμοί του πρωτεύοντος είναι της μορφής ≥0, από τον πίνακα μετασχηματισμών παίρνουμε ότι και οι μεταβλητές w_1, w_2 θα είναι της μορφής ≥0. Επίσης, επειδή η αντικειμενική συνάρτηση του πρωτεύοντος είναι ελαχιστοποίησης, του δυϊκού θα είναι μεγιστοποίησης και θα προέρχεται από τον τύπο: $b^T x$. Τελικά μετά από όλους αυτούς τους μετασχηματισμούς το δυϊκό πρόβλημα είναι:

max: $z = -20w_1 + 10w_2$
μ.π.: $-2w_1 + w_2 \leq 3$
$-w_1 + w_2 \leq 2$
$w_1 + 2w_2 \leq 2$
$w_j \geq 0$, (j = 1, 2).

<u>Παράδειγμα 2.4</u>

Έστω ότι έχουμε το παρακάτω γραμμικό πρόβλημα και θέλουμε να κατασκευάσουμε το δυϊκό του, χρησιμοποιώντας και πάλι τον πίνακα μετασχηματισμών.

$$
\begin{aligned}
&\max\ -2x_1 - x_2 + 4x_3 \\
&\text{μ.π.: } 5x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 10 \\
&\qquad 2x_1 \qquad\quad + x_3 \le 5 \\
&\qquad 3x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 4 \\
&\qquad x_j \ge 0,\ (j=1, 3)
\end{aligned}
$$

Το πρωτεύον πρόβλημα έχει 3 μεταβλητές και 3 περιορισμούς, άρα και το δυϊκό θα έχει μεταβλητές (w_1, w_2, w_3) και 3 περιορισμούς. Επίσης, επειδή το πρωτεύον είναι πρόβλημα μεγιστοποίησης το δυϊκό θα είναι ελαχιστοποίησης.

Τα δεδομένα του προβλήματος σε μορφή μητρών είναι:

$$
A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}
$$

Αντιστοιχίζουμε τις μεταβλητές του δυϊκού με τους περιορισμούς του πρωτεύοντος.

$$
\begin{aligned}
w_1 &\leftrightarrow 5x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 10 \\
w_2 &\leftrightarrow 2x_1 \qquad + x_3 \le 5 \\
w_3 &\leftrightarrow 3x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 4
\end{aligned}
$$

Επειδή ο 1ος περιορισμός είναι ισοτικός, η μεταβλητή w_1 είναι ελεύθερη. Ο δεύτερος περιορισμός είναι της μορφής ``≤``, άρα για τη μεταβλητή w_2 θα έχω: $w_2 \ge 0$. Ο τρίτος περιορισμός είναι της μορφής ``≥``, άρα για τη μεταβλητή w_3 θα έχω: $w_3 \le 0$.

Αντιστοιχίζουμε τους 3 περιορισμούς του δυϊκού με τις 3 μεταβλητές x_1, x_2, x_3. Οι περιορισμοί του δυϊκού προβλήματος δίνονται από τον τύπο:

$A^T * w\ \Pi\ c$, όπου Π είναι τα σύμβολα =, ≤ ή ≥.

Επομένως, έχουμε:

$$x_1 \leftrightarrow 5w_1 + 2w_2 + 3w_3 \ \Pi\ -2$$

$$x_2 \leftrightarrow 6w_1 \qquad + \ w_3 \ \Pi\ -1$$

$$x_3 \leftrightarrow 2w_1 + w_2 + 2w_3 \ \Pi\ 4$$

Από τον πίνακα μετασχηματισμών τα σύμβολα Π κατά σειρά εμφάνισης συμβολίζουν τα: ≥, = (x_2 ελεύθερη) και ≥.

Επομένως, οι περιορισμοί του δυϊκού γράφονται:

$$5w_1 + 2w_2 + 3w_3 \geq -2$$

$$6w_1 \qquad + \ w_3 = -1$$

$$2w_1 + w_2 + 2w_3 \geq 4$$

Η αντικειμενική συνάρτηση θα είναι ελαχιστοποίησης και δίνεται από τη σχέση:

$$b^T * w$$

Άρα έχουμε:

$$z = 10w_1 + 5w_2 + 4w_3$$

Τελικά, το δυϊκό πρόβλημα θα είναι:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{min}\ 10w_1 + 5w_2 + 4w_3 \\
&\mathbf{μ.π.:}\ 5w_1 + 2w_2 + 3w_3 \geq -2 \\
&\qquad 6w_1 \qquad + \ w_3 = -1 \\
&\qquad 2w_1 + w_2 + 2w_3 \geq 4
\end{aligned}$$

<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ Γ’:</u>

«Πρωτεύων και Δυϊκός Αλγόριθμος Simplex».

3.1 <u>Εισαγωγή.</u>

Μετά τα όσα αναφέρθηκαν στα δύο πρώτα κεφάλαια και τα οποία είχαν να κάνουν τόσο με τις πρώτες αναφορές πάνω σε ζητήματα γραμμικού προγραμματισμού, και ειδικότερα γραμμικών προβλημάτων, όσο και με τη γραφική επίλυσή τους, αυτό το κεφάλαιο ασχολείται με τον αλγόριθμο Simplex. Πιο συγκεκριμένα, γίνεται αναφορά στα γενικά χαρακτηριστικά των αλγορίθμων αυτού του είδους, ενώ από την αρχή παρατίθενται εκείνοι οι ορισμοί που είναι ικανοί για την κατανόηση των όσων θα ακολουθήσουν. Πριν από την περιγραφή του πρωτεύοντος και δυϊκού αλγορίθμου, αναλύονται τα βασικά χαρακτηριστικά της μεθόδου Simplex, προκειμένου να διευκολυνθεί ο αναγνώστης στη συνέχεια. Η παρουσίαση τόσο του πρωτεύοντος, όσο και του δυϊκού αλγορίθμου, ακολουθείται από χαρακτηριστικά παραδείγματα.

3.2 Γενικά χαρακτηριστικά αλγορίθμων Simplex.

Όπως αναφέρθηκε και στο δεύτερο κεφάλαιο της εργασίας, η βέλτιστη λύση ενός γραμμικού προβλήματος αντιστοιχεί σε μια από τις κορυφές του πολυγώνου της γραφικής απεικόνισής του. Πιο συγκεκριμένα, μέσω της μεθόδου simplex κινούμαστε από κορυφή σε κορυφή του πολυγώνου υπολογίζοντας κάθε φορά την αντίστοιχη αντικειμενική τιμή, έως ότου η αντικειμενική συνάρτηση να βελτιστοποιηθεί, οπότε και έχουμε τη λύση του γραμμικού προβλήματος που εξετάζουμε.

3.2.1 Χρήσιμοι ορισμοί – Παραδοχές.

Αρχικά είναι σημαντικό να επισημανθεί ότι η εφαρμογή των γραμμικών προβλημάτων στον πρωτεύοντα και δυϊκό αλγόριθμο θα γίνεται με τα προβλήματα να είναι στην τυποποιημένη τους μορφή. Δηλαδή στη μορφή:

$$\min \{ c^T x : Ax=b,\ x \geq 0 \}$$

όπου $c, x \in R^n$, $b \in R^m$ **και** $A \in R^{m \times n}$.

Επίσης, θα υποθέτουμε στο εξής ότι $1 \leq m \leq n$ και ότι ο βαθμός (rank) της μήτρας A θα ισούται με τον αριθμό των γραμμών της.

- Το σύνολο των δεικτών της μήτρας Β είναι βάση (basis) αν η αντίστοιχη μήτρα A_B είναι αντιστρέψιμη. Σε αυτή την περίπτωση η μήτρα A_B ονομάζεται βασική μήτρα ή απλά βάση και η A_N μη βασική μήτρα. (αναλυτικά στα παραδείγματα που θα ακολουθήσουν).
- Τα σύνολα δεικτών (B, N) αποτελούν μια βασική διαμέριση (basic partition).
- <u>Βασική Λύση:</u> Οι βασικές συνιστώσες x_B μπορούν να γραφούν ως συναρτήσεις των μη βασικών συνιστωσών x_N.

$$Ax=b \leftrightarrow$$

$$A_B x_B + A_N x_N = b \leftrightarrow$$

$$A_B x_B = - A_N x_N + b \leftrightarrow$$

$$x_B = - (A_B)^{-1} A_N x_N + (A_B)^{-1} b$$

και αν θέσουμε όπου $x_N = 0$, τότε έχουμε:

$\mathbf{x_B = (A_B)^{-1} b}$**,** τύπο από τον οποίο παίρνουμε τη βασική λύση.

- Ένα <u>βασικό σημείο</u> ικανοποιεί όλους τους ισοτικούς περιορισμούς και οι μη βασικές μεταβλητές του ικανοποιούν όλους τους αντίστοιχους φυσικούς περιορισμούς.
- Από τα παραπάνω γίνεται κατανοητό ότι <u>ένα βασικό σημείο x_B είναι εφικτό</u> αν είναι $x_B \geq 0$.
- Ένα βασικό σημείο ικανοποιεί τουλάχιστον n-m ανισοτικούς περιορισμούς σαν ισότητες.
- <u>Εκφυλισμένο βασικό σημείο</u> είναι αυτό που ικανοποιεί τουλάχιστον n-m+1 περιορισμούς σαν ισότητες.
- <u>Μη εκφυλισμένο βασικό σημείο</u> είναι αυτό που ικανοποιεί ακριβώς n-m ανισοτικούς περιορισμούς σαν ισότητες.

<u>Είναι σημαντικό να ειπωθεί ότι όλα τα παραπάνω ισχύουν για rank(A) = m.</u>

Σε γραμμικά προβλήματα στην κανονική τους μορφή βασικό σημείο είναι αυτό όπου υπάρχουν τουλάχιστον n ενεργοί περιορισμοί. Αν υπάρχουν ακριβώς n ενεργοί περιορισμοί είναι μη εκφυλισμένο, ενώ αν υπάρχουν τουλάχιστον n+1 είναι μη εκφυλισμένο.

<u>Παράδειγμα 3.1</u>

Έστω ότι έχουμε την περιοχή που ορίζεται από τους παρακάτω περιορισμούς:

$3x_1 + 4x_2 \leq 24$ (1)

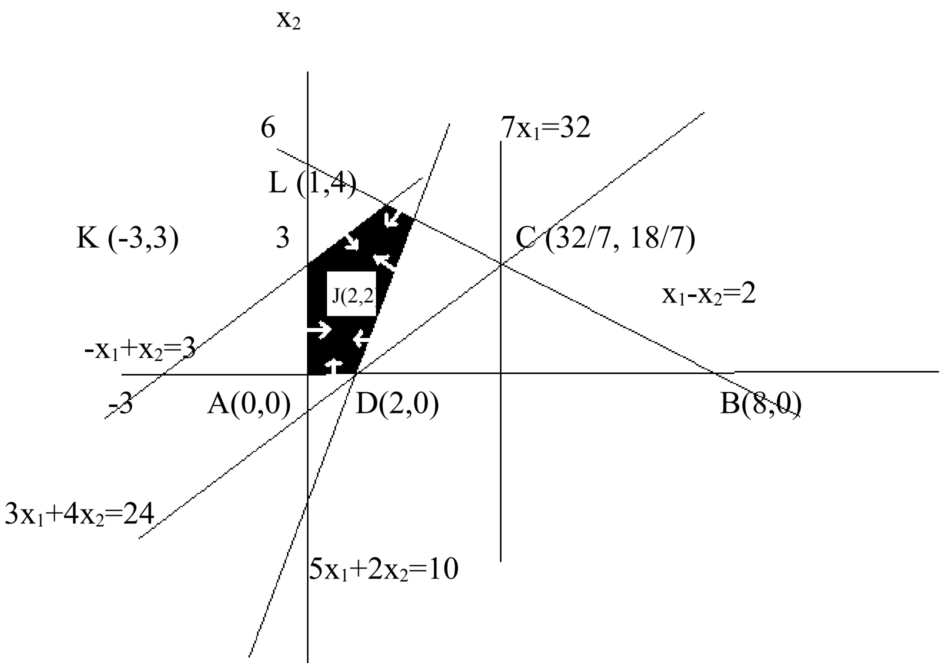
$x_1 - x_2 \leq 2$ (2)

$5x_1 - 2x_2 \leq 10$ (3)

$-x_1 + x_2 \leq 3$ (4)

$7x_1 \leq 32$ (5), $x_j \geq 0$ (j = 1, 2)

Η γραφική απεικόνιση της περιοχής που ορίζεται από τους παραπάνω περιορισμούς είναι η εξής:



Η παραπάνω γραφική απεικόνιση της περιοχής έγινε θεωρώντας τους ανισοτικούς περιορισμούς ως ισοτικούς. Επειδή όμως προαναφέρθηκε ότι θα θεωρούμε τα γραμμικά προβλήματα που θα εξετάζονται στην τυποποιημένη τους μορφή, πρέπει να μετατρέψουμε τους ανισοτικούς περιορισμούς σε ισοτικούς με την προσθήκη των χαλαρών μεταβλητών x_3, x_4, x_5, x_6 και x_7. Έτσι, έχουμε:

$3x_1 + 4x_2 + x_3 = 24$ (6)

$x_1 - x_2 + x_4 = 2$ (7)

$5x_1 - 2x_2 + x_5 = 10$ (8)

$-x_1 + x_2 + x_6 = 3$ (9)

$7x_1 + x_7 = 32$ (10)

και $x_j \geq 0$ (j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7).

Επειδή έχουμε χώρο 2 διαστάσεων (2 οι μεταβλητές απόφασης του γραμμικού προβλήματος), τα βασικά σημεία θα βρίσκονται στην τομή τουλάχιστον δύο ευθειών. Άλλωστε, σύμφωνα με τα όσα γράφτηκαν παραπάνω, ένα βασικό σημείο ικανοποιεί τουλάχιστον n-m ανισοτικούς περιορισμούς σαν ισότητες. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα οι διαστάσεις της μήτρας A είναι 5x7, δηλαδή m=5 και n=7.

Για το σημείο A(0,0) έχουμε όσον αφορά τους αρχικούς ανισοτικούς περιορισμούς:

(1): $3*0 + 4*0 = 0 \leq 24$: ***ισχύει.***

(2): $0 – 0 =0 \leq 2$: **ισχύει.**

(3): $5*0 – 2*0 = 0 \leq 10$: **ισχύει.**

(4): $-0 + 0 = 0 \leq 3$: **ισχύει.**

(5): $7*0 = 0 \leq 32$: **ισχύει.**

Το σημείο A(0,0) ικανοποιεί τουλάχιστον n-m = 7 -5 =2 ανισοτικούς περιορισμούς (για την ακρίβεια τους ικανοποιεί όλους) και επειδή οι συντεταγμένες του είναι όλες ≥ 0 το σημείο A(0,0) είναι βασικό εφικτό.

Όμοια, για το σημείο D(2,0) έχουμε:

(1): $3*2 + 4*0 = 6 \leq 24$: ***ισχύει.***

(2): $2 – 0 = 2 \leq 2$: **ισχύει.**

(3): $5*2 – 2*0 = 10 \leq 10$: **ισχύει.**

(4): $-2 + 0 = -2 \leq 3$: **ισχύει.**

(5): $7*2 = 14 \leq 32$: **ισχύει.**

Επειδή και οι συντεταγμένες του σημείου D(2,0) είναι ≥ 0 και το σημείο D είναι βασικό και εφικτό.

Από τους παραπάνω ορισμούς εκφυλισμένο βασικό σημείο είναι αυτό που ικανοποιεί τουλάχιστον n-m+1 περιορισμούς σαν ισότητες, στο παράδειγμά μας συγκεκριμένα: n-m+1 = 7 – 5 + 1 = 3. Το σημείο A(0,0) ικανοποιεί ακριβώς n-m = 7-5 = 2 ανισοτικούς περιορισμούς σαν ισότητες ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$), άρα είναι μη εκφυλισμένο. Αντίθετα, το σημείο D(2,0) είναι εκφυλισμένο γιατί ικανοποιεί n-m +1 = 7-5+1=3 ανισοτικούς περιορισμούς ως ισότητες.

Για το σημείο B(8,0) έχουμε:

(1) $3*8 + 4*0 = 24 \leq 24$: ισχύει

(2) $8 - 0 = 8 \quad \leq 2$: δεν ισχύει

(3) $5*8 - 2*0 = 40 \leq 10$: δεν ισχύει

(4) $-8 + 0 = -8 \quad \leq 3$: ισχύει.

(5) $7*8 = 56 \quad \leq 32$: δεν ισχύει.

$x_1 = 8 \geq 0$: ισχύει και $x_2 = 0 \geq 0$: ισχύει.

Το σημείο B(8,0) ικανοποιεί ακριβώς n-m = 7-5 = 2 ανισοτικούς περιορισμούς σαν ισότητες (συμπεριλαμβανομένου και του φυσικού περιορισμού x_2=0) και επομένως είναι βασικό και μη εκφυλισμένο. Δεν ικανοποιεί όμως όλους τους ανισοτικούς περιορισμούς, άρα είναι μη εφικτό (και στο σχήμα άλλωστε είναι εκτός εφικτής περιοχής). Επομένως, το σημείο B(8,0) είναι βασικό, μη εφικτό και μη εκφυλισμένο.

Για το σημείο C(32/7, 18/7) έχουμε:

(1): $3*(32/7) + 4*(18/7) = 24 \leq 24$: **ισχύει**

(2): $x_1 - x_2 = 32/7 - 18/7 = 2 \leq 2$: **ισχύει**

(3): $5x_1 - 2x_2 = 5*(32/7) - 2*(18/7) = 124/7 \approx 17{,}71 \leq 10$: **δεν ισχύει**

(4) $-x_1 + x_2 = -32/7 + 18/7 = -2 \leq 3$: **ισχύει**

(5): $7x_1 \quad = 7*32/7 = 32 \leq 32$: **ισχύει**

$x_1 = 32/7 \geq 0$: ισχύει και $x_2 = 18/7 \geq 0$: **ισχύει.**

Επειδή το σημείο C (32/7, 18/7) ικανοποιεί 3 ανισοτικούς περιορισμούς σαν ισότητες (τουλάχιστον δηλαδή n-m+1 = 7-5+1=3) είναι βασικό και εκφυλισμένο. Επίσης, το σημείο C είναι μη εφικτό, γιατί δεν ικανοποιεί όλους τους ανισοτικούς περιορισμούς του γραμμικού προβλήματος (άλλωστε βρίσκεται και εκτός εφικτής περιοχής στο σχήμα).

Με την εισαγωγή των χαλαρών μεταβλητών οι ανισοτικοί περιορισμοί μετατρέπονται σε ισοτικούς όπως φαίνεται και από τις παραπάνω σχέσεις (6), (7), (8), (9) και (10). Στο βασικό σημείο B(8, 0) οι τιμές των μεταβλητών x_j (j=1, ..., 7) είναι:

$$x_1 = 8,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = -6\ ,\ x_5 = ,-30\ x_6 = 11,\ x_7 = -24.$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι σε κάθε βασικό σημείο n-m θα είναι το πλήθος των μη βασικών μεταβλητών και οι υπόλοιπες θα είναι βασικές, συμπεραίνουμε ότι οι μη βασικές μεταβλητές του παραδείγματος μας θα είναι 2 και οι βασικές θα είναι 5. Επομένως, η μόνη βασική διαμέριση του προβλήματος μας είναι η παρακάτω:

$$B = [1, 4, 5, 6, 7] \ \& \ N = [2, 3].$$

3.2.2 Ικανή Συνθήκη Βελτιστότητας.

Έχοντας μια οποιαδήποτε βασική διαμέριση (B, N) και την αντίστροφη βασική μήτρα B^{-1} του προβλήματος min $\{c^T x : Ax = b, x \geq 0\}$ μπορούμε να υπολογίσουμε τις μεταβλητές w και s με τους τύπους:

$$\mathbf{w^T = (c_B)^T * (A_B)^{-1}} \qquad (3.1.2\ \alpha)$$

$$\mathbf{s^T} = c^T - w^T * A$$

$$= \mathbf{c^T - (c_B)^T * (A_B)^{-1} * A} \qquad (3.1.2\ \beta)$$

Είναι επίσης καλό να γνωρίζει και τους τύπους που δίνουν τις συνιστώσες των διανυσμάτων αυτών:

$$w_i = (c_B)^T ((A_B)^{-1})_{.i}$$

$$s_j = c_j - w^T a_j = c_j - (c_B)^T (A_B)^{-1} a_j$$

όπου $((A_B)^{-1})_{.i}$ είναι η i στήλη της αντίστροφης βασικής μήτρας.

Έχοντας μία βασική διαμέριση (B, N) ενός γραμμικού προβλήματος, τότε η αντίστοιχη **βασική λύση (x_B, x_N) είναι βέλτιστη, αν είναι $x_B \geq 0$ και $s_N \geq 0$.**

Παράδειγμα 3.2

Έστω ότι έχουμε το παρακάτω γραμμικό πρόβλημα:

max $-x_1 + 3x_2$

μ.π.: $x_2 - x_3 = 6$

$-x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3$

$x_1 + 4x_2 - x_4 + x_5 = 4$

$x_j \geq 0$, (j = 1, 2, 3, 4, 5).

Επίσης, δίνεται B = [1 3 5]. Να υπολογιστεί η αντίστοιχη βασική λύση και να ελεγχθεί αν είναι βέλτιστη. Ακόμη, να υπολογιστούν τα διανύσματα w και s.

Το γραμμικό πρόβλημα είναι μεγιστοποίησης και πρέπει να μετατραπεί σε πρόβλημα ελαχιστοποίησης. Άρα, η αντικειμενική συνάρτηση γίνεται:

$$
\begin{aligned}
&\min\ x_1 - 3x_2 \\
&\text{μ.π.:}\quad x_2 - x_3 = 6 \\
&\qquad -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\
&\qquad x_1 + 4x_2 - x_4 + x_5 = 4 \\
&\qquad x_j \geq 0,\ (j = 1, 2, 3, 4, 5).
\end{aligned}
$$

Τα δεδομένα του προβλήματος είναι:

$$
A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
c^T = [1 \ -3 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \quad \&
$$

$$
b = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}
$$

Επειδή είναι B = [1, 3, 5] θα είναι N = [2, 4]. Σύμφωνα λοιπόν με αυτή τη διαμέριση είναι:

$$
A_B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}
$$

Η αντίστροφη μήτρα $(A_B)^{-1}$ μετά από υπολογισμούς είναι:

$$
A_B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}
$$

Οπότε για τη βασική λύση έχω:

$$x_N = 0 \text{ και } x_B = (A_B)^{-1} * b = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ -6 \\ 13 \end{bmatrix}$$

Επίσης, έχουμε: $(c_B)^T = (c_1\ c_3\ c_5) = (1\ \ 0\ \ 0)$. Επομένως μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε το w^T από την παρακάτω σχέση:

$w^T = (c_B)^T * (A_B)^{-1} = (-1\ \ 0\ \ 0)$.

Το διάνυσμα s^T είναι:

$s^T = c^T - w^T A = (1\ \ -2\ \ -1\ \ 0\ \ 0)$. Επειδή οι μη βασικές μεταβλητές προκύπτουν από τη διαμέριση για την οποία είναι N = [2, 4] θα είναι:
$(s_N)^T = (-2\ \ 0)$.

Από τις τιμές των x_B και s_N παρατηρώ ότι δεν είναι "≥ 0", άρα η βασική λύση δεν είναι η βέλτιστη.

3.3 Μέθοδος SIMPLEX.

Η βέλτιστη λύση αντιστοιχεί σε μια κορυφή στη γεωμετρική απεικόνιση του εφικτού συνόλου. Η μέθοδος simplex ξεκινώντας από μια αρχική κορυφή μπορεί να πάει σε άλλες γειτονικές κορυφές κατά μήκος των ακμών του πολυγώνου του εφικτού συνόλου. Σε κάθε μετάβαση της μεθόδου από μία κορυφή σε μια άλλη η μέθοδος simplex κατορθώνει να βρει την ακμή που την οδηγεί σε μια κορυφή, η οποία δίνει βελτιωμένη τιμή στην αντικειμενική συνάρτηση. Συνεχίζοντας κατά αυτό τον τρόπο η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης από κορυφή σε κορυφή βελτιώνεται και τελικά φτάνουμε σε μια κορυφή όπου η αντικειμενική συνάρτηση βελτιστοποιείται. Οποιαδήποτε άλλη κορυφή δίνει χειρότερη λύση και έτσι η διαδικασία τερματίζεται.

Η μέθοδος simplex είναι μια αλγεβρική επαναληπτική διαδικασία όπου σε κάθε βήμα έχουμε μια νέα βασική εφικτή λύση προβλημάτων της μορφής:

$$\mathbf{z = \max f(x) = c^T x}$$
$$\mathbf{Ax = b}$$

$$\mathbf{x \geq 0.}$$

Στη συνέχεια πρέπει να εξετάσουμε αν η τρέχουσα βασική εφικτή λύση είναι και η βέλτιστη. Συνεπώς χρειαζόμαστε έναν έλεγχο για το αν η λύση είναι η βέλτιστη. Αν είναι τότε η διαδικασία τερματίζεται. Αν η τρέχουσα βασική λύση δεν είναι βέλτιστη τότε χρειαζόμαστε μια μέθοδο με την οποία θα μπορούμε να βρούμε μία καλύτερη βασική βέλτιστη λύση. Η διαδικασία θα περατωθεί ως ένα πεπερασμένο πλήθος βημάτων, επειδή ο αριθμός των βασικών εφικτών λύσεων είναι πεπερασμένος, και αν η λύση δεν επιστρέψει σε κάποια προηγούμενη τελικά θα φθάσουμε στην βέλτιστη.

3.3.1 Ο αλγόριθμος SIMPLEX.

Τα βασικά σημεία του αλγόριθμου simplex είναι:

1. Υπολογίζουμε μια αρχική βασική λύση x_B, επιλέγοντας τη βάση Β από τις στήλες του πίνακα Α, με κατάλληλη επιλογή μεταξύ των γραμμικώς ανεξάρτητων στηλών του πίνακα Α.
2. Εκφράζουμε τα διανύσματα του πίνακα Α που δεν ανήκουν στην βάση συναρτήσει των διανυσμάτων της βάσης και υπολογίζουμε τα αντίστοιχα y_j σύμφωνα με την σχέση: $y_j = B^{-1}A_j$, όπου A_j η j στήλη του πίνακα Α.
3. Υπολογίζουμε τις τιμές z_j για τα διανύσματα εκτός βάσης εφαρμόζοντας τη σχέση $z_j = c_B^T y_j$.
4. Υπολογίζουμε τις ποσότητες $z_j - c_j$. Αν για όλα τα j ισχύει ότι $z_j - c_j \geq 0$, τότε έχουμε βέλτιστη λύση.
5. Αν ένα ή περισσότερα $z_j - c_j < 0$, επιλέγουμε ένα διάνυσμα a_k από τα εκτός βάσης για να εισέλθει στη βάση, εφαρμόζοντας το επόμενο κριτήριο:

$$z_k - c_k \ \min_j \{z_j - c_j \mid z_j - c_j < 0\}.$$

6. Αν όλα τα $y_{ik} \leq 0$, τότε υπάρχει μια μη φραγμένη λύση. Αν ένα τουλάχιστον $y_{ik} > 0$, επιλέγουμε το διάνυσμα b_r που θα φύγει από τη βάση σύμφωνα με το κριτήριο:

$$\frac{x_{Br}}{y_{rk}} = \min_i \{\frac{x_{Bi}}{y_{ik}}, y_{ik} > 0\} = \theta$$

7. Υπολογίζουμε την νέα βάση Β η οποία προκύπτει από την προηγούμενη αντικαθιστώντας το διάνυσμα b_r με το νέο a_k. Υπολογίζουμε την νέα βασική εφικτή λύση x_B', με τις σχέσεις :

$x_{Bi}^{/} = x_{Bi} - x_{Br}\,\dfrac{y_{ij}}{y_{rj}}$, $i \neq r$

$x_{Br}^{/} = \dfrac{x_{Br}}{y_{rj}}$

και τα νέες τιμές των y_{ij}, $z_j - c_j$ και z.

8. Επιστρέφουμε στο δεύτερο βήμα και επαναλαμβάνουμε την διαδικασία.

3.4 Ο Πρωτεύων Simplex.

Έστω ότι έχουμε μια εφικτή βάση B του προβλήματος

$$\min \{c^T x : Ax = b, x \geq 0\}$$

όπου $c, x \in \Re^n$, $b \in \Re^m$ και $A \in \Re^{m x n}$, A_B^{-1} είναι η αντίστροφη βασική μήτρα. Επειδή η τρέχουσα βασική λύση είναι εφικτή ($x_B \geq 0$), ο έλεγχος βελτιστότητας γίνεται εξετάζοντας αν είναι $s_N \geq 0$. Με άλλα λόγια, αν είναι $J = \emptyset$, όπου

$$\mathbf{J = \{j : j \in N \quad \text{και} \quad s_j = c_j - w^T a_j < 0\},}$$

το τρέχον σημείο είναι βέλτιστο και ο αλγόριθμος σταματά. Οι δείκτες του συνόλου J ονομάζονται **επιλέξιμοι (elligible),** αφού ένας από αυτούς θα επιλεγεί σαν εισερχόμενος. Αν το τρέχον σημείο δεν είναι βέλτιστο, επιλέγεται η εισερχόμενη μεταβλητή x_l, έτσι ώστε $l \in J$. Ο δείκτης l μπορεί να είναι οποιοσδήποτε δείκτης του συνόλου J. Οι επιπλέον κανόνες που χρησιμοποιούν οι αλγόριθμοι για την επιλογή της εισερχόμενης μεταβλητής ονομάζονται *κανόνες περιστροφής (pivoting rules)*. Για παράδειγμα ο δείκτης l μπορεί να προσδιοριστεί από τη σχέση

$$s_l = \min\{s_j : j \in J\}$$

Ο κανόνας αυτός ονομάζεται κανόνας του Dantzig ή κανόνας του *ελαχίστου στοιχείου (least element rule)*.

Όταν η εισερχόμενη μεταβλητή έχει επιλεγεί, η εξερχόμενη μεταβλητή $x_k = x_{B(r)}$ πρέπει να επιλεγεί έτσι ώστε να είναι $x_k = 0$ στην επόμενη βάση. Επειδή κατά τη μετάβαση από την τρέχουσα στην επόμενη βάση οι μόνες μεταβλητές που αλλάζουν τιμές είναι οι τρέχουσες βασικές x_B και η εισερχόμενη x_l, ισχύει η σχέση

$$x_B = (A_B)^{-1}\, b - h_l x_l$$

όπου $h_l = (A_B)^{-1} a_l$. Αν είναι $h_l \leq 0$, δηλαδή, είναι

$$I_+ = \{i: h_{il} > 0\} = \varnothing,$$

συμπεραίνουμε ότι είναι $x_B \geq 0$ για κάθε $x_l \geq 0$. Επειδή η εισερχόμενη μεταβλητή είναι βελτιώνουσα (η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης ελαττώνεται καθώς η τιμή της x_l αυξάνει), όπως εύκολα προκύπτει από τη σχέση $z = w^T b + s_l x_l$, στην οποία είναι $s_l < 0$, το πρόβλημα είναι απεριόριστο. Φυσικά, σ' αυτή την περίπτωση ο αλγόριθμος σταματά. Διαφορετικά, η τιμή x_l περιορίζεται έτσι ώστε να είναι

$$x_{B(i)} = ((A_B)^{-1} b)_i - h_{il} x_l \geq 0, \quad i = 1,2, \ldots, m$$

Από την επίλυση των παραπάνω ανισοτήτων προκύπτει ότι

$$x_l \leq \frac{(A_B^{-1} b)_i}{h_{il}}, \qquad i \;\Xi\; I_+$$

Αν θέσουμε

$$x_l = \frac{(A_B^{-1} b)_r}{h_{rl}} = \min\{\frac{(A_B^{-1} b)_i}{h_{il}} : \quad i \;\Xi\; I_+\} \qquad \text{(A)}$$

η μεταβλητή $x_{B(r)} = x_k$ θα έχει τιμή μηδέν και επομένως μπορεί να γίνει μη βασική. Το συμπέρασμα είναι πλέον προφανές. Κάνουμε την x_l βασική και την x_k μη βασική και κατασκευάζουμε έτσι μια νέα εφικτή βάση με την οποία μπορούμε να επαναλάβουμε τη διαδικασία.

Στην παραπάνω σχέση η τιμή της x_l προσδιορίζεται υπολογίζοντας ένα ελάχιστο λόγο. Γι αυτό η διαδικασία αυτή ονομάζεται *έλεγχος ελαχίστου λόγου (minimum ratio test)*. Επίσης αναφέρουμε εδώ ότι είναι δυνατόν να υπάρχουν περισσότεροι από ένας βασικοί δείκτες που να ικανοποιούν τη σχέση (3.2.2). Σ' αυτή την περίπτωση λέμε ότι υπάρχει *δεσμός (tie)*. Οι δείκτες, αυτοί ονομάζονται *επιλέξιμοι (eligible)*, αφού ένας από αυτούς θα επιλεγεί σαν εξερχόμενος. Επιπόλαια επιλογή του εισερχόμενου και εξερχόμενου δείκτη μπορεί να οδηγήσει τον αλγόριθμο simplex *σε κύκλωση (cycling)* , δηλαδή, να μη τερματίσει ποτέ. Το φαινόμενο της κύκλωσης θα αναλυθεί περισσότερο στη επόμενη ενότητα. Ευτυχώς το φαινόμενο της κύκλωσης είναι πολύ σπάνιο στην πράξη. Γι' αυτό το λόγο στην πράξη οποιοσδήποτε από τους επιλέξιμους δείκτες μπορεί να επιλέγεται σαν εισερχόμενος ή εξερχόμενος. Την τακτική αυτή θα εφαρμόσουμε και εμείς στα παραδείγματα.

<u>ΠΡΩΤΕΥΩΝ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ SIMPLEX</u>

Βήμα 0 (Ξεκίνημα):

(α) Ξεκίνα με μια εφικτή βασική διαμέριση (B, N).

(β) Υπολόγισε τις μήτρες και τα διανύσματα c_B, c_N, $(A_B)^{-1}$, $x_B = (A_B)^{-1} b$, $w^T = (c_B)^T(A_B)^{-1}$, $(s_N)^T = (c_N)^T - w^T A_N$

Βήμα 1 (Έλεγχοι σταματήματος):

(α)(Έλεγχος βελτιστότητας). Θέσε

$$J = \{j: j \in N \text{ και } s_j < 0\}$$

Αν είναι $J = \varnothing$, STOP, το τρέχον σημείο είναι βέλτιστο. Διαφορετικά, με ένα κανόνα περιστροφής επέλεξε ένα δείκτη $l = N(t) \in J$. Η μεταβλητή x_l είναι εισερχόμενη.

(β)(Έλεγχος ελαχίστου λόγου). Θέσε

$h_l = (A_B)^{-1} a_l$ και $I_+ = \{i: 1 \le i \le m \text{ και } h_{il} > 0\}$

Αν είναι $I_+ = \varnothing$, STOP, το πρόβλημα είναι απεριόριστο. Διαφορετικά επέλεξε την εξερχόμενη μεταβλητή $x_{B(r)} = x_k$ με τον τύπο (A).

$$x_l = \frac{(A_B^{-1}b)_r}{h_{rl}} = \min\{\frac{(A_B^{-1}b)_i}{h_{il}} : \quad i \in I_+\}$$

Βήμα 2 (Περιστροφή):

Θέσε N(t) = k και B(r) = l για να υπολογίσεις τη νέα βασική διαμέριση και πήγαινε στο Βήμα 0(β).

<u>Παράδειγμα 3.3</u>

Να λυθεί με τον πρωτεύον αλγόριθμο simplex το παρακάτω γραμμικό πρόβλημα:

$\min z = -x_3 - 2x_4$

μ.π.: $x_1 + x_3 + x_4 = 5$

$-x_2 - 2x_3 - 3x_4 = -3$

$x_j \geq 0, (j = 1, 2, 3, 4)$

Το γραμμικό πρόβλημα αναλυτικά μπορεί να γραφεί ως εξής:

$\mathbf{\min z = 0x_1 + 0x_2 - x_3 - 2x_4}$

μ.π.: $\mathbf{x_1 + 0x_2 + x_3 + x_4 = 5}$

$\mathbf{0x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = -3}$

$\mathbf{x_j \geq 0, (j = 1, 2, 3, 4)}$

Τα δεδομένα του προβλήματος είναι:

$$c^T = (0 \;\; 0 \;\; -1 \; -2),\; b = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix},\; A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

<u>Επανάληψη 1η.</u>

- **Βήμα 0:** α) Οι μεταβλητές x_1 & x_2 είναι χαλαρές μεταβλητές. Επίσης, η βάση B = [1, 2] είναι μια εφικτή βάση και επομένως με αυτήν μπορεί να ξεκινήσει η εφαρμογή του αλγορίθμου. Άρα, αρχικά έχουμε:

B = [1, 2] και N = [3, 4]

β) $(c_B)^T = (0\ 0)$, $(c_N)^T = (-1\ -2)$,

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, A_N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix},$$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = (A_B)^{-1} * b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} * \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} \geq 0,$$

$$w^T = (c_B)^T * (A_B)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(s_N)^T = (c_N)^T - w^T * A_N = (c_N)^T = (-1 - 2)$$

- **Βήμα 1: Έλεγχοι Σταματήματος.**

α) Έλεγχος Βελτιστότητας: Υπάρχουν αρνητικά s_N, άρα ο αλγόριθμος δεν σταματάει. Αυθαίρετα επιλέγω ως εισερχόμενο δείκτη στη βάση B το δείκτη 3. Άρα είναι l = 3 και η μεταβλητή x_3 είναι η εισερχόμενη μεταβλητή (t =1). Είναι δηλαδή:

N(t) = N(1) = l = 3.

β) Έλεγχος Ελαχίστου Λόγου:

$h_3 = (A_B)^{-1} * a_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, επειδή είναι $h_3 \geq 0$, ο αλγόριθμος δεν σταματάει.

$$\min\{\frac{x_{B[1]}}{h_{13}}, \frac{x_{B[2]}}{h_{23}}\} = \min\{\frac{5}{1}, \frac{3}{2}\} = \frac{3}{2} = \frac{x_{B[2]}}{h_{23}}.$$

Είναι δηλαδή, r = 2 και k = B(r) = B(2) = 2. Η μεταβλητή x_2 είναι η εξερχόμενη από τη βάση B.

- **Βήμα 2: Περιστροφή.**

Θέτουμε B(r) = B(2) = l = 3 και N(t) = N(1) = k = 2.

Τα νέα σύνολα B και N είναι:

B = [1, 3] & N = [2, 4]

Επανάληψη 2η.

- **Βήμα 0: β)**

$(c_B)^T = (0\ -1)$, $(c_N)^T = (0\ -2)$

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, A_N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix},$$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = A_B^{-1} * b = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 7/2 \\ 3/2 \end{bmatrix} \geq 0.$$

$$w^T = (c_B)^T * A_B^{-1} = (0\ -1) * \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} = (0\ \ 1/2),$$

$$(s_N)^T = (c_N)^T - w^T * A_N = (0\ \ -2) - (0 \quad 1/2) * \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = (1/2 \quad -1/2)$$

- **Βήμα 1: Έλεγχοι Σταματήματος.**

α) Έλεγχος Βελτιστότητας: Υπάρχουν αρνητικά s_N, άρα ο αλγόριθμος δεν σταματάει. Επιλέγω ως εισερχόμενη μεταβλητή την x_4. Είναι δηλαδή, l = 4 και t = 2. N(t) = N(2) = l = 4.

β) Έλεγχος Ελαχίστου Λόγου:

$$h_4 = A_B^{-1} * a_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

Η μόνη θετική συνιστώσα είναι η δεύτερη. Άρα, r = 2: B(r) = B(2) = k = 3. Επομένως, εξερχόμενη μεταβλητή είναι η x_3.

- **Βήμα 2: Περιστροφή.**

Τα νέα σύνολα Β και Ν είναι:

B = [1, 4] και N = [2,3].

<u>Επανάληψη 3η.</u>

- **Βήμα 0: β)**

$$(c_B)^T = (0\ -2) \quad (c_N)^T = (0\ -1),$$

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, A_N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 \\ 0 & -1/3 \end{pmatrix},$$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} = A_B^{-1} * b = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 \\ 0 & -1/3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \geq 0,$$

$$w^T = (c_B)^T * A_B^{-1} = (0\ \ -2) * \begin{pmatrix} 1 & 1/3 \\ 0 & -1/3 \end{pmatrix} = (0\ \ 2/3),$$

$$(s_N)^T = (c_N)^T - w^T * A_N = (0\ \ -1) - (0 \qquad 2/3) * \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = (2/3 \qquad 1/3)$$

- **Βήμα 1: Έλεγχοι Σταματήματος.**

α) Έλεγχος Βελτιστότητας; Είναι $x_B \geq 0$ και $s_N \geq 0$, άρα ο αλγόριθμος σταματάει. Η τρέχουσα βάση είναι βέλτιστη. Η βασική λύση είναι:

$$\mathbf{(x_B)^T = (x_1, x_4) = (4, 1)}$$

και η βέλτιστη αντικειμενική τιμή είναι:

$$\mathbf{z = (c_B)^T * x_B = (0\ -2) * (4\ 1)^T = -2.}$$

3.5 <u>Δυϊκός Αλγόριθμος Simplex.</u>

Αν σε ένα γραμμικό πρόβλημα το δυϊκό του έχει μια εύκολα υπολογιζόμενη βασική εφικτή λύση, θα ήταν αδιανόητο να εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο simplex στο πρωτεύον πρόβλημα. Μπορούμε να λύσουμε το δυϊκό πρόβλημα και από τη λύση του με τη θεωρία δυϊκότητας να λύσουμε το πρωτεύον. Ο δυϊκός αλγόριθμος simplex λύνει το δυϊκό πρόβλημα. Στην ουσία είναι ο πρωτεύων αλγόριθμος. Θα περιγράψουμε εδώ πως θα εφαρμοστεί αυτός ο αλγόριθμος απευθείας στο πρωτεύον πρόβλημα.

Έστω ότι έχουμε το πρωτεύον γραμμικό πρόβλημα:

$$\min\{c^T x: Ax = b, \quad x \geq 0\} \qquad \text{(P)}$$

όπου $c, x \in \Re^n$, $b \in \Re^m$ και $A \in \Re^{mxn}$. Το δυϊκό του είναι:

$$\max\{b^T w: A^T w + s = c\} \qquad \text{(D)}$$

όπου $w \in \Re^m$ είναι οι δυϊκές μεταβλητές και $s \in \Re^n$ το διάνυσμα των δυϊκών χαλαρών μεταβλητών.

Έστω $A_B \in \Re^{mxm}$ μια βάση του προβλήματος (P). Τότε $w^T = (c_B)^T(A_B)^{-1}$ είναι μια λύση του (D). Ο δυϊκός αλγόριθμος κατασκευάζει μια ακολουθία από βάσεις των οποίων οι αντίστοιχες δυϊκές λύσεις είναι εφικτές, δηλαδή, είναι $s^T = c^T - w^T A \geq 0$. Θα ονομάσουμε αυτές τις βάσεις *δυϊκά εφικτές (dual feasible)*.

Εφόσον οι βάσεις είναι δυϊκά εφικτές ο έλεγχος βελτιστότητας γίνεται εξετάζοντας μόνο αν είναι $x_B = (A_B)^{-1}b \geq 0$. Αν είναι έτσι, ο αλγόριθμος σταματά. Διαφορετικά, υπάρχει τουλάχιστον μια αρνητική βασική μεταβλητή, ας πούμε η $x_{B(r)}=x_k$. Η μεταβλητή x_k είναι εξερχόμενη. ***Στο δυϊκό αλγόριθμο επιλέγεται πρώτα η εξερχόμενη μεταβλητή.***

Η επιλογή της εισερχόμενης μεταβλητής x_l, $l \in N$, γίνεται έτσι ώστε η επόμενη βάση να είναι πάλι δυϊκά εφικτή. Πρώτα υπολογίζεται το διάνυσμα

$$H_{rN} = ((A_B)^{-1})_{r.}A_N$$

όπου A_N ή μήτρα των μη βασικών στηλών και $((A_B)^{-1})_{r.}$ είναι η r γραμμή της αντίστροφης βασικής μήτρας. Αν είναι $H_{rN} \geq 0$ ο αλγόριθμος σταματά. Το συμπέρασμα σ' αυτή την περίπτωση είναι ότι το δυϊκό πρόβλημα είναι απεριόριστο (και επομένως το πρωτεύον είναι αδύνατο). Διαφορετικά, η εισερχόμενη μεταβλητή x_l, $l \in$ N, επιλέγεται με τον έλεγχο του ελαχίστου λόγου

$$\lambda = \min\{-\frac{s_j}{h_{rj}} : j \Xi\ N \text{ και } h_{rj} < 0\} = -\frac{s_l}{h_{rl}}$$

Στη συνέχεια γίνεται η ανανέωση της βασικής διαμέρισης θέτοντας B(r)= l και N(t) = k και η διαδικασία επαναλαμβάνεται.

ΔΥΪΚΟΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ SIMPLEX

Βήμα 0 (Ξεκίνημα):

(α). Ξεκίνα με μια δυϊκά εφικτή διαμέριση (B, N).

(β). Υπολόγισε τις μήτρες και τα διανύσματα c_B, c_N, $(A_B)^{-1}$, $x_B = (A_B)^{-1}b$, $w^T = (c_B)^T(A_B)^{-1}$, $(s_N)^T = (c_N)^T - w^TA_N$

Βήμα 1 (Έλεγχοι σταματήματος):

(α)(Έλεγχος βελτιστότητας): Αν είναι $x_B \geq 0$, STOP. Η x_B είναι βέλτιστη λύση του προβλήματος (P4.3.1) και η w βέλτιστη λύση του προβλήματος (D4.3.1). Διαφορετικά επέλεξε ένα δείκτη r έτσι ώστε $x_{B(r)} = x_k < 0$. Η μεταβλητή x_k είναι εξερχόμενη.

(β)(Έλεγχος ελαχίστου λόγου): Υπολόγισε το διάνυσμα $H_{rN} = ((A_B)^{-1})_r.A_N$

Αν είναι $H_{rN} \geq 0$ STOP. Το πρόβλημα (D4.3.1) είναι απεριόριστο και το πρόβλημα (P4.3.1)αδύνατο. Διαφορετικά επέλεξε με τον έλεγχο ελαχίστου λόγου την εισερχόμενη μεταβλητή $x_l = x_{N(t)}$.

Βήμα 2 (Περιστροφή):

Θέσε B(r) = l και N(t) = k για να υπολογίσεις τη νέα διαμέριση και πήγαινε στο Βήμα 0(β).

Παράδειγμα 3.4

Να λυθεί με το δυϊκό αλγόριθμο simplex το παρακάτω γραμμικό πρόβλημα:

$\min z = 2x_1 + x_2 + 4x_3$

μ.π.: $2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4 = 6$

$x_1 - 2x_2 + 6x_3 - x_5 = 5$

$x_j \geq 0, (j = 1, 2, 3, 4, 5)$

Τα αρχικά δεδομένα του προβλήματος είναι:

$$c^T = (2\ 1\ 4\ 0\ 0),\ A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 6 & 0 & -1 \end{pmatrix}, b = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix}$$

<u>Επανάληψη 1η</u>

- **<u>Βήμα 0: Ξεκίνημα.</u>**

Α) Μια βασική εφικτή δυϊκά διαμέριση είναι η εξής:

B =[4, 5] & N = [1, 2, 3]

Β) Τα δεδομένα είναι:

$$(c_B)^T = (0\ \ 0), (c_N)^T = (2\ \ 1\ \ 4), A_B = (A_B)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_N = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & 6 \end{pmatrix}, w^T = (c_B)^T * (A_B)^{-1} = (0\ \ 0),$$

$$s_N = (c_N)^T = (2\ \ 1\ \ 4)$$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = (A_B)^{-1} * b = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} * \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -5 \end{bmatrix}$$

- **<u>Βήμα 1: Έλεγχοι Σταματήματος.</u>**

Α) Έλεγχος Βελτιστότητας: Δεν είναι $x_B \geq 0$, άρα ο αλγόριθμος δεν σταματάει. Επιλέγω ως εξερχόμενη μεταβλητή την x_4. Είναι r=1: $x_{B(r)} = x_{B(1)} = -6 = x_k$. Είναι k =4.

Β) Έλεγχος Ελαχίστου Λόγου: Υπολογίζω το $H_{rN} = H_{1N}$.

$$H_{1N} = (A_B^{-1})_r * A_N = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

Δεν είναι $H_{1N} \geq 0$, άρα ο αλγόριθμος δεν σταματάει. Μέσω του ελαχίστου λόγου θα εντοπίσω την εισερχόμενη στη βάση μεταβλητή.

$$\lambda = \min\{-\frac{s_1}{H_{11}}, -\frac{s_2}{H_{12}}, -\frac{s_3}{H_{13}}\} = \min\{1, \frac{1}{4}, 2\} = \frac{1}{4} = -\frac{s_2}{H_{12}}$$

Άρα, εισερχόμενη μεταβλητή είναι η x_2.

- **<u>Βήμα 2: Περιστροφή.</u>**

Η νέα διαμέριση είναι: B = [2, 5] & N = [1, 4, 3].

<u>Επανάληψη 2η.</u>

- **Βήμα 0:**

Β) Υπολογισμός νέων δεδομένων:

$$(c_B)^T = (1\ \ 0), (c_N)^T = (2\ \ 0\ \ 4), A_B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, (A_B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ -1/2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}, w^T = (c_B)^T * (A_B)^{-1} = (1/4\ \ 0),$$

$$s_N = (c_N)^T - w^T * A_N = (3/2\ \ 1/4\ \ \ 7/2)$$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} = (A_B)^{-1} * b = \begin{bmatrix} 3/2 \\ -8 \end{bmatrix}$$

- **Βήμα 1: Έλεγχοι Σταματήματος.**

Α) Έλεγχος Βελτιστότητας: Δεν είναι $x_B \geq 0$, άρα ο αλγόριθμος δεν σταματάει. Εξερχόμενη μεταβλητή είναι σύμφωνα με τον κανόνα του Dantzig η x_5. Είναι δηλαδή r =2 και k = 5.

Β) Έλεγχος Ελαχίστου Λόγου:

$$H_{2N} = (A_B^{-1})_2 * A_N = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} * \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \left(-1\ \ 0\ \ -6\right)$$

$$\lambda = \min\{-\frac{s_1}{H_{11}}, X, -\frac{s_3}{H_{13}}\} = \min\{\frac{3}{2}, X, \frac{7}{12}\} = \frac{7}{12} = -\frac{s_3}{H_{13}}$$

Εισερχόμενη μεταβλητή είναι η x_3.

- **<u>Βήμα 2: Περιστροφή.</u>**

Η νέα διαμέριση είναι:

B = [2, 3] & N = [1, 4, 5]

<u>Επανάληψη 3η.</u>

- **Βήμα 0:**

Β)

$$(c_B)^T = (1 \quad 4), (c_N)^T = (2 \quad 0 \quad 0), A_B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}, (A_B)^{-1} = \begin{pmatrix} 3/14 & -1/14 \\ 1/14 & 1/7 \end{pmatrix}$$

$$A_N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, w^T = (c_B)^T * (A_B)^{-1} = (1/2 \quad 1/2),$$

$$s_N = (c_N)^T - w^T * A_N = (1/2 \quad 1/2 \quad 1/2)$$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = (A_B)^{-1} * b = \begin{bmatrix} 13/14 \\ 8/7 \end{bmatrix}$$

- Βήμα 1: Έλεγχοι Σταματήματος:

Α) Είναι $x_B \geq 0$, άρα ο αλγόριθμος σταματάει. Η βέλτιστη αντικειμενική τιμή του γραμμικού προβλήματος είναι:

$$z^* = (c_B)^T * x_B = (1 \quad 4) * \begin{bmatrix} 13/14 \\ 8/7 \end{bmatrix} = \frac{13}{14} + \frac{32}{7} = \frac{11}{2}$$

Στο δυϊκό simplex αξίζει να σημειώσουμε ότι ο έλεγχος βελτιστότητας γίνεται εξετάζοντας το x_B, σε αντίθεση με τον πρωτεύοντα όπου εξετάζεται το s_N στο βήμα 1α. Επίσης, στο δυϊκό πρώτα επιλέγεται η εξερχόμενη μεταβλητή και μετά η εισερχόμενη, ενώ στον πρωτεύον simplex γίνεται το αντίστροφο.

<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ Δ’:</u>

«Πληροφοριακά Συστήματα Γραμμικού Προγραμματισμού: LINDO®»

4.1 <u>Εισαγωγή</u>.

Όπως έγινε αντιληπτό στα κεφάλαια που προηγήθηκαν, η επίλυση και γενικότερα η όλη διαχείριση ενός γραμμικού προβλήματος είναι χρονοβόρα και δύσκολη και για αυτόν ακριβώς το λόγο απαιτεί την ύπαρξη ηλεκτρονικού υπολογιστή. Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιαστούν δύο από τα πλέον γνωστά προγράμματα επίλυσης γραμμικών προβλημάτων, το LINDO και ο Solver του Excel.

Η σύγχρονη τεχνολογία των πληροφοριακών συστημάτων προσφέρει αρκετές και σημαντικές εναλλακτικές λύσεις για την επίλυση προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού. Τελευταία, έχει αναπτυχθεί σημαντικός αριθμός πακέτων λογισμικού με στόχο τη διευκόλυνση του χρήστη στη μοντελοποίηση και επίλυση γραμμικών προβλημάτων.

Τα συστήματα αυτά παρουσιάζουν σημαντικές βελτιώσεις σε παραμέτρους, όπως ταχύτητα επίλυσης, μέγεθος προβλήματος, φιλικότητα επικοινωνίας με το χρήστη και ευελιξία.

Σε γενικές γραμμές υπάρχουν τρεις βασικοί τρόποι για την ανάπτυξη ενός μοντέλου γραμμικού προβλήματος. Ο πρώτος είναι τα λογιστικά φύλλα (spreadsheets). Τα λογιστικά φύλλα είναι προγράμματα γενικής χρήσης με ευρεία διάδοση και μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την επίλυση προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού με ικανοποιητικά αποτελέσματα. Ο συγκεκριμένος τρόπος αποτελεί την οικονομικότερη εναλλακτική λύση, αλλά απαιτεί μεγάλη επένδυση χρόνου από την πλευρά του χρήστη, για την ανάπτυξη του προβλήματος. Επιπρόσθετα, η επεξεργασία και διόρθωση του προβλήματος αυξάνει, δεδομένου ότι το μοντέλο βρίσκεται «κρυμμένο» μέσα στα κελιά του λογιστικού φύλλου.

Ο δεύτερος τρόπος είναι οι γλώσσες μοντελοποίησης (modeling languages), οι οποίες προσφέρουν ένα αυτόνομο φιλικό περιβάλλον εργασίας για την ανάπτυξη ενός μοντέλου γραμικού προγραμματισμού. Είναι συνήθως εξειδικευμένα προγράμματα στα οποία περιλαμβάνονται τα εξής μέρη: διαχείριση δεδομένων, αλγόριθμοι βελτιστοποίησης, παρουσίαση αποτελεσμάτων.

Τα συγκεκριμένα προγράμματα είναι η λιγότερο οικονομική λύση, αλλά ο πλέον εύκολος τρόπος για την ανάπτυξη και επίλυση ενός μοντέλου γραμμικού προγραμματισμού. Θα πρέπει επίσης να σημειωθεί ότι τα προβλήματα που αναπτύσσονται από τις γλώσσες μοντελοποίησης μπορούν να είναι μεγάλων διαστάσεων, αλλά δεν έχουν τα χαρακτηριστικά της ευελιξίας και της αυτονομίας.

Η τελευταία εναλλακτική λύση αφορά τη χρησιμοποίηση οποιασδήποτε γλώσσας προγραμματισμού για την ανάπτυξη και επίλυση ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού. Τα σημαντικότερα πλεονεκτήματα της επιλογής αυτής εστιάζονται κυρίως στην ταχύτητα επίλυσης, την ευελιξία και την αυτονομία των μοντέλων που αναπτύσσονται. Οι γλώσσες προγραμματισμού βέβαια απαιτούν σημαντικό χρόνο για την ανάπτυξη του μοντέλου, καθώς και εξειδικευμένες γνώσεις.

Σε αυτό το τέταρτο κεφάλαιο θα παρουσιαστεί το πρόγραμμα επίλυσης γραμμικών προβλημάτων LINDO®.

4.2 Γενικά για το LINDO.

Το LINDO χρησιμοποιείται σε χιλιάδες επιχειρήσεις, κολέγια, πανεπιστήμια και κρατικούς οργανισμούς σε όλο τον κόσμο. Είναι ένα πολυδύναμο εργαλείο για την επίλυση γραμμικών προβλημάτων. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να μοντελοποιηθούν και να επιλυθούν προβλήματα βελτιστοποίησης.

Είναι ιδιαίτερα εύκολο για τους αρχάριους να μάθουν να χρησιμοποιούν το LINDO. Η έκδοση των Windows παρέχει ένα διαισθητικό περιβάλλον μοντελοποίησης με pull-down μενού, μια εύχρηστη γραμμή εργαλείων, καθώς και ένα πλήρες πρότυπο επεξεργαστή. Παρέχει σαφή και χρήσιμη on-line βοήθεια για όλες τις εντολές, ώστε να γίνεται κατανοητός οτρόπος με τον οποίο θα οικοδομηθεί το προς επίλυση μοντέλο. Το εγχειρίδιο που ακολουθεί εξηγεί διεξοδικά τις εντολές του προγράμματος και τα χαρακτηριστικά τους.

Ακόμη και ένας έμπειρος χρήστης στα προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού, θα εντυπωσιαστεί από το LINDO. Έχει την ταχύτητα και την ικανότητα να επιλύει μεγάλης κλίμακας γραμμικά μοντέλα. Έχει όλα τα προηγμένα χαρακτηριστικά και τις εντολές που χρειάζεται κάποιος για την εισαγωγή στοιχείων, την επεξεργασία τους, αλλά και τη λύση και εμφάνισή τους στην οθόνη.

Το LINDO είναι συμβατό σε υπολογιστές με λειτουργικό σύστημα Windows, κάτι το οποίο το κάνει ένα ιδιαίτερα δημοφιλές πρόγραμμα επίλυσης γραμμικών προβλημάτων.

4.3 Χρήση του LINDO.

Για την επίδειξη χρήσης του LINDO®, θα χρησιμοποιηθεί ένα απλό παράδειγμα προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού.

Έστω ότι έχουμε μια εταιρία η οποία κατασκευάζει δύο ειδών Η/Υ: για οικιακούς χρήστες και για επαγγελματίες. Ας υποθέσουμε ότι μπορεί να παράγει ημερησίως το πολύ 10 οικιακούς και 12 επαγγελματικούς Η/Υ. Επίσης, η συναρμολόγηση ενός απλού υπολογιστή απαιτεί 1 ώρα εργασίας, ενώ 1 επαγγελματικού απαιτεί 2 ώρες. Η εταιρία μπορεί να διαθέσει καθημερινά για αυτό το σκοπό 2 άτομα, δηλαδή 16 εργατοώρες. Δεδομένου ότι κάθε οικιακός υπολογιστής αποφέρει καθαρό κέρδος 100,00 € και κάθε επαγγελματικός 150,00 €, να βρεθεί το μέγιστο κέρδος που μπορεί να έχει η εταιρία.

Αν τεθεί HOME το πλήθος των οικιακών υπολογιστών και PRO το πλήθος των επαγγελματικών που πρέπει να κατασκευαστούν, τότε το παραπάνω πρόβλημα μπορεί να γραφεί ως εξής:

max 100 HOME + 150 PRO

μ.π.: HOME ≤ 10

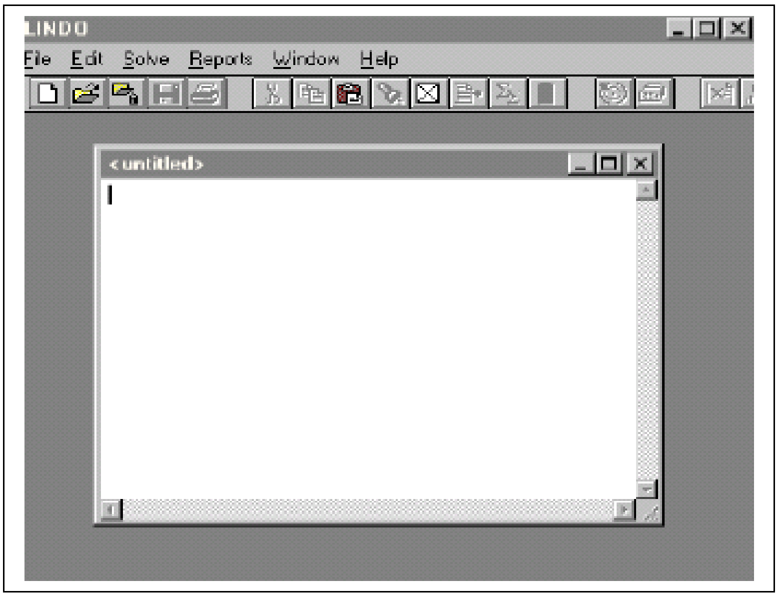
PRO ≤ 12

HOME + 2 PRO ≤ 16

HOME, PRO ≥ 0.

4.3.1 Δημιουργία ενός νέου κενού παραθύρου.

Όταν το LINDO εκκινεί εμφανίζεται η παρακάτω οθόνη.



Σχήμα 4.1: Το βασικό παράθυρο του LINDO.

Το εξωτερικό παράθυρο με το όνομα LINDO είναι το κυρίως παράθυρο της εφαρμογής. Όλα τα άλλα παράθυρα θα περιέχονται σε αυτό. Το κυρίως παράθυρο επίσης περιέχει όλες τις εντολές μενού και τη γραμμή εργαλείων των εντολών. Το μικρότερο παράθυρο που περιέχεται στο παράθυρο LINDO και έχει τίτλο <untitled> είναι ένα νέο, κενό Παράθυρο Μοντέλου. Σε αυτό ο χρήστης γράφει το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού, το οποίο και θέλει να επιλύσει. Το επόμενο βήμα είναι να καταχωρηθεί η αντικειμενική συνάρτηση.

4.3.2 <u>Καταχώρηση αντικειμενικής συνάρτησης και ορισμός μεταβλητών απόφασης.</u>

Ένα μοντέλο στο LINDO προϋποθέτει τουλάχιστον τα εξής τρία πράγματα: την αντικειμενική συνάρτηση, τις μεταβλητές απόφασης και τους περιορισμούς. Η αντικειμενική συνάρτηση ονομάζεται έτσι, με την έννοια του αντικειμενικού σκοπού. Δίνονται δύο επιλογές για τον αντικειμενικό σκοπό: MAX ή MIN, που αναφέρονται στη μεγιστοποίηση ή ελαχιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης αντίστοιχα. Σε μία τυπική εφαρμογή ο αντικειμενικός σκοπός είναι είτε η μεγιστοποίηση του κέρδους, είτε η ελαχιστοποίηση του κόστους. Έτσι, η πρώτη λέξη σε ένα μοντέλο στο LINDO πρέπει να είναι MIN ή MAX. Ο μαθηματικός τύπος που ακολουθεί είναι η αντικειμενική συνάρτηση. Για το παράδειγμά μας πρέπει να γραφτεί:

MAX 100 HOME + 150 PRO

και μετά το πλήκτρο ENTER. Το επόμενο βήμα είναι ο υπολογισμός και η εισαγωγή των περιορισμών.

4.3.3 <u>Καθορισμός των Περιορισμών.</u>

Η έναρξη των περιορισμών υποδηλώνεται από τη δεσμευμένη λέξη SUBJECT TO (ή απλά ST) στη γραμμή που ακολουθεί τον ορισμό της αντικειμενικής συνάρτησης. Στη συνέχεια ο χρήστης πρέπει να γράψει τους περιορισμούς, τον καθένα σε μία γραμμή, δηλαδή:

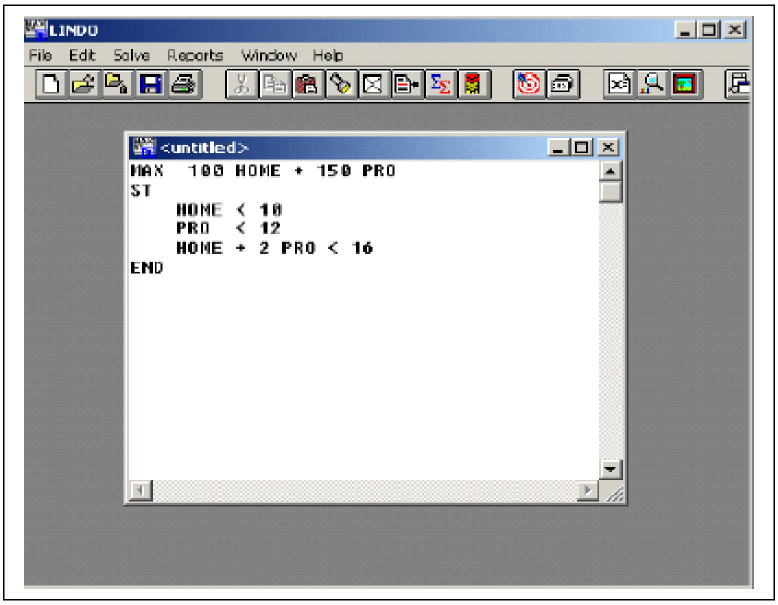
HOME < 10

PRO < 12

HOME + 2*PRO < 16

Σημειώνεται ότι το LINDO ερμηνεύει το σύμβολο < ως «μικρότερο ή ίσο» και όχι ως «αυστηρά μικρότερο». Προαιρετικά, μπορεί κανείς να βάλει τα σύμβολα <=. Για το LINDO αυτό δεν παίζει απολύτως κανένα ρόλο.

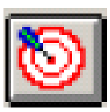
Το τέλος των περιορισμών δηλώνεται με τη δεσμευμένη λέξη END. Αφού έχουν εισαχθεί τα παραπάνω, η οθόνη πρέπει να μοιάζει με αυτή του σχήματος 4.2.



Σχήμα 4.2: Καταχώρηση προβλήματος στο LINDO.

4.3.4 **Επίλυση του προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού.**

Εφόσον έχει εισαχθεί η αντικειμενική συνάρτηση και οι περιορισμοί, για να λυθεί το μοντέλο, αρκεί να επιλεχθεί η εντολή “Solve” από το μενού Solve ή να γίνει κλικ στο κουμπί επίλυσης στη γραμμή εργαλείων (Σχήμα 4.3).

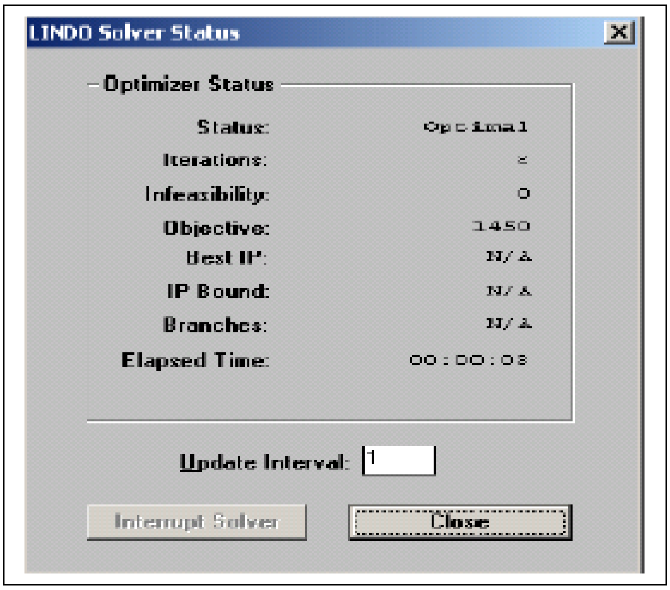


Σχήμα 4.3: Το κουμπί επίλυσης.

Το LINDO θα ξεκινήσει να μεταγλωττίζει (compile) το μοντέλο. Αυτό σημαίνει ότι θα εξετάσει αν το μοντέλο είναι σωστό από μαθηματική σκοπιά και αν είναι γραμμένες σωστά οι εντολές. Αν κάτι από τα προηγούμενα δεν ισχύει, τότε θα εμφανιστεί ένα μήνυμα σφάλματος:

An error occured during compilation on line: n

δηλαδή ότι ένα σφάλμα προέκυψε κατά τη διάρκεια της μεταγλώττισης στη γραμμή n, οπότε το LINDO θα πάει στη γραμμή στην οποία συνέβη το σφάλμα. Ο χρήστης θα πρέπει τότε να εξετάσει τη γραμμή αυτή για συντακτικά λάθη και να τη διορθώσει. Αν δεν υπάρχουν σφάλματα κατά τη διάρκεια της μεταγλώττισης, τότε το LINDO θα αρχίσει να λύνει το πρόβλημα. Όταν ξεκινά η διαδικασία επίλυσης, εμφανίζεται ένα Παράθυρο Κατάστασης (Status Window), το οποίο μοιάζει με αυτό του σχήματος 4.4.



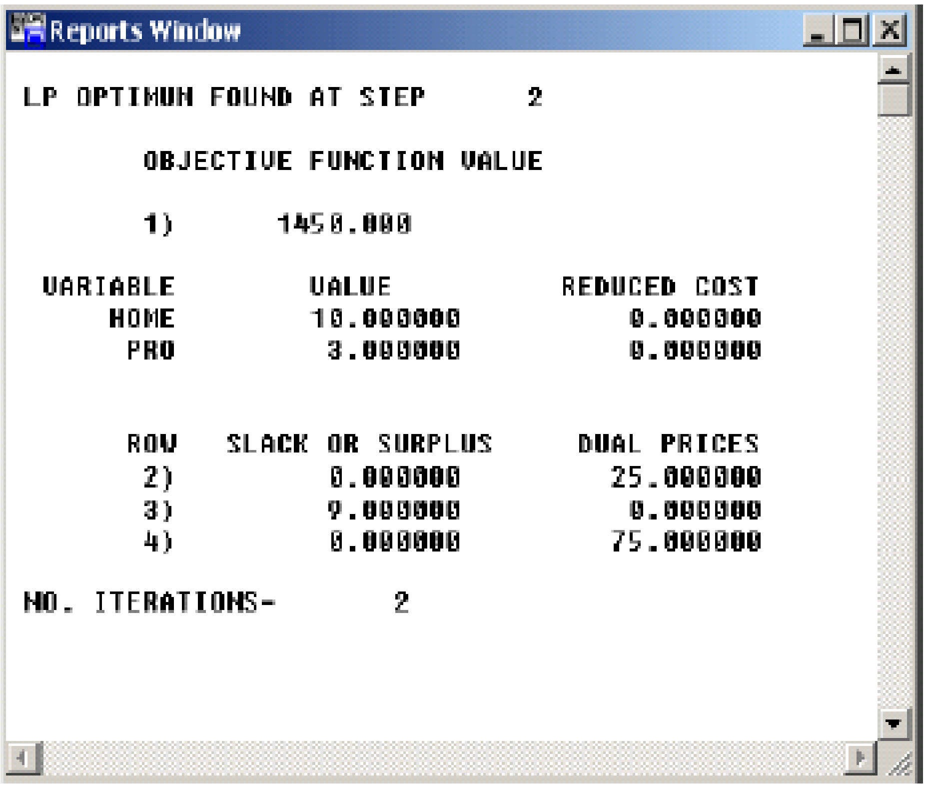
Σχήμα 4.4: Το Παράθυρο Κατάστασης της Λύσης.

Το παράθυρο κατάστασης είναι χρήσιμο για την παρακολούθηση της προόδου της επίλυσης. Μία περιγραφή των διαφόρων πεδίων που εμφανίζονται στο Παράθυρο Κατάστασης ακολουθεί σε επόμενη παράγραφο αυτού του κεφαλαίου. Όταν η επίλυση ολοκληρωθεί, θα εμφανιστεί ένα παράθυρο, το οποίο θα ρωτάει το χρήστη αν θέλει να γίνει ανάλυση ευαισθησίας.

Το επόμενο βήμα είναι η ερμηνεία των αποτελεσμάτων στο Παράθυρο Αναφορών.

4.3.5 <u>Ερμηνεία των αποτελεσμάτων στο παράθυρο αναφοράς.</u>

Μετά το πέρας της επίλυσης του προβλήματος, εμφανίζεται ένα νέο παράθυρο, το Παράθυρο Αναφορών (Reports Window) . Το Παράθυρο Αναφορών είναι αυτό στο οποίο το LINDO στέλνει όλα τα αποτελέσματα σε μορφή κειμένου. Το παράθυρο αυτό μπορεί να εμφανίσει μέχρι 64.000 χαρακτήρες. Αν η αναφορά είναι πολύ μακροσκελής, και ο χρήστης θέλει να τη μελετήσει καλύτερα, τότε μπορεί να αποθηκεύσει όλη την πληροφορία που εμφανίζεται στο Παράθυρο Αναφορών σε ένα αρχείο χρησιμοποιώντας την εντολή File → Log Output. Στη συνέχεια μπορεί να μελετήσει την αναφορά χρησιμοποιώντας έναν οποιονδήποτε επεξεργαστή κειμένου, όπως το Notepad ή το WordPad ή χρησιμοποιώντας την εντολή File → View.



<u>Σχήμα 4.5:</u> Το Παράθυρο Αναφορών του LINDO.

Αν είναι απαραίτητο, το LINDO θα διαγράψει μέρος της αναφοράς από την αρχή του Παραθύρου Αναφορών, προκειμένου να δημιουργήσει χώρο για κείμενο στο τέλος του παραθύρου.

Για το παράδειγμα που εξετάζουμε, οι πληροφορίες που παίρνουμε από το Παράθυρο Αναφορών είναι αυτές του σχήματος 4.5.

Το εν λόγω παράθυρο μας κάνει γνωστό ότι το LINDO χρειάστηκε 2 επαναλήψεις (iterations) για να λύσει το πρόβλημα και ότι η βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης (OBJECTIVE FUNCTION VALUE) είναι 1450. Επομένως, το μέγιστο κέρδος της εταιρίας, με τα δεδομένα και τους περιορισμούς που αναφέρονται στην εκφώνηση του προβλήματος, είναι 1450 χρηματικές μονάδες. Το υπόλοιπο της αναφοράς διακρίνεται σε δύο ενότητες:

I. Στην πρώτη ενότητα η αναφορά επικεντρώνεται στις μεταβλητές. Για κάθε μεταβλητή υπάρχει μία γραμμή στην οποία υπάρχουν το όνομα της μεταβλητής (VARIABLE), η τιμή της (VALUE) και το ευκαιριακό κόστος (REDUCED COST). Έτσι, η αναφορά του σχ. 4.5 λέει ότι οι μεταβλητές HOME και PRO παίρνουν τις τιμές 10 και 3 αντίστοιχα και έχουν μηδενικά ευκαιριακά κόστη.
II. Στη δεύτερη ενότητα η αναφορά επικεντρώνεται στους περιορισμούς. Για κάθε περιορισμό υπάρχει μια γραμμή στην οποία υπάρχουν το όνομα του περιορισμού (ROW), εφόσον του έχει δοθεί, ή αν δεν έχει δοθεί, ο αντίστοιχος αριθμός, η περιθώρια τιμή του (SLACK OR SURPLUS) και η σκιώδης τιμή του (DUAL PRICE). Έτσι, η αναφορά του σχ. 4.5 λέει ότι οι περιορισμοί 2 και 4 έχουν περιθώριες τιμές ίσες με 0 (άρα είναι δεσμευτικοί) και έχουν σκιώδεις τιμές 25 και 75 αντίστοιχα. Ο περιορισμός 3 έχει περιθώρια τιμή 9 και συνεπώς δεν έχει ουσιώδη τιμή.

Για το συγκεκριμένο πρόβλημα είναι ενδιαφέρον ότι πρέπει να κατασκευαστούν λιγότεροι επαγγελματικοί Η/Υ από ότι οικιακοί παρά το γεγονός οι επαγγελματικοί Η/Υ αφήνουν μεγαλύτερο κέρδος, Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι απαιτείται μεγαλύτερος χρόνος συναρμολόγησης για τους επαγγελματικούς Η/Υ.

4.4 <u>Σύνταξη Μοντέλων στο LINDO.</u>

Οι συντακτικοί κανόνες του LINDO είναι οι παρακάτω:

4.4.1 <u>Σύνταξη Αντικειμενικής Συνάρτησης.</u>

Η αντικειμενική συνάρτηση μπαίνει πάντα στην αρχή του μοντέλου και ξεκινά με τη δεσμευμένη λέξη MAX ή MIN. Το τέλος της αντικειμενικής συνάρτησης και η αρχή των περιορισμών προσδιορίζεται με κάποια από τις παρακάτω δεσμευμένες λέξεις:

SUBJECT TO

SUCH THAT

ST

S.T.

Το τέλος των περιορισμών προσδιορίζεται από τη δεσμευμένη λέξη END.

4.4.2 <u>Ονόματα Μεταβλητών.</u>

Το LINDO έχει περιορισμό στο μήκος των ονομάτων των μεταβλητών απόφασης μέχρι 8 χαρακτήρες. Ο πρώτος χαρακτήρας πρέπει να είναι κάποιο από τα γράμματα του λατινικού αλφαβήτου (A – Z, a – z) ενώ οι επόμενοι μπορούν να είναι οποιοιδήποτε χαρακτήρες, εκτός από τους:

!) + - = ‘ ’

Έτσι τα παρακάτω ονόματα μεταβλητών απόφασης είναι έγκυρα:

XYZ, myVar, A12, Ship.LA

Ενώ τα επόμενα δεν είναι:

Anastasios, 4A, A-Foulidis

γιατί το πρώτο όνομα έχει περισσότερους από 8 χαρακτήρες, το δεύτερο δεν αρχίζει με ένα από τους επιτρεπτούς χαρακτήρες και το τρίτο περιέχει το μη επιτρεπτό σύμβολο “ – “.

4.4.3.<u> Ονόματα Περιορισμών.</u>

Προαιρετικά ο χρήστης μπορεί να δώσει ονόματα στους περιορισμούς. Τα ονόματα των περιορισμών κάνουν πιο εύκολη την ερμηνεία των αποτελεσμάτων. Οι περιορισμοί για τα ονόματα των περιορισμών είναι ίδιοι με αυτούς για τα ονόματα των μεταβλητών (σε μερικά συστήματα πάντως είναι δυνατό να δοθούν και ελληνικοί χαρακτήρες). Το LINDO καταλαβαίνει το τέλος του ονόματος ενός περιορισμού από το σύμβολο “)”, δηλαδή το κλείσιμο της παρένθεσης. Μετά από αυτό ο χρήστης μπορεί να εισάγει τον περιορισμό κανονικά. Για παράδειγμα είναι δυνατό να δοθεί το όνομα TASOS σε έναν περιορισμό ως εξής:

TASOS) X > 10.

4.4.4. <u>Τελεστές που χρησιμοποιούνται.</u>

Το LINDO αναγνωρίζει μόνον 5 τελεστές: τον τελεστή της πρόσθεσης (+), της αφαίρεσης (-), το μεγαλύτερο (>), το μικρότερο (<) και το ίσον (=). Οι τελεστές της αυστηρής ανισότητας αναγνωρίζονται ως μεγαλύτερο ή ίσο και μικρότερο ή ίσο αντίστοιχα. Αυτό γίνεται διότι πολλά πληκτρολόγια δεν έχουν τα σύμβολα ≤ και ≥. Σε συστήματα, τα οποία έχουν τα σύμβολα ≤ και ≥, το LINDO δεν τα αναγνωρίζει. Προαιρετικά, ο χρήστης μπορεί να βάζει >= και <= αντί για > και < αντίστοιχα, αλλά για το LINDO αυτό είναι αδιάφορο.

4.4.5 <u>Προτεραιότητα Πράξεων.</u>

Το LINDO αγνοεί τις παρενθέσεις όταν αυτές χρησιμοποιούνται για να παρακάμψουν την προτεραιότητα των πράξεων. Όλες αυτές οι πράξεις στο LINDO γίνονται από τα αριστερά προς τα δεξιά.

4.4.6 <u>Εισαγωγή Σχολίου.</u>

Σχόλια είναι δυνατό να μπουν οπουδήποτε μέσα σε ένα μοντέλο στο LINDO. Τα σχόλια εμφανίζονται από το σύμβολο του θαυμαστικού (!) και οτιδήποτε ακολουθεί το θαυμαστικό μέχρι και το τέλος της συγκεκριμένης γραμμής αγνοείται από το LINDO. Σε κάποια συστήματα τα σχόλια είναι δυνατό να είναι γραμμένα και στα ελληνικά.

4.4.7 <u>Εισαγωγή Περιορισμού ή και Αντικειμενικής Συνάρτησης σε περισσότερες από μία γραμμές.</u>

Στο LINDO οι περιορισμοί και η αντικειμενική συνάρτηση επιτρέπεται να εισαχθούν σε περισσότερες από μία γραμμές. Οι γραμμές επιτρέπεται να σπάσουν οπουδήποτε εκτός μέσα στο όνομα της μεταβλητής ή μέσα σε ένα συντελεστή. Έτσι, η παρακάτω εισαγωγή μοντέλου είναι επιτρεπτή:

MAX

10

HOME + 150 PRO SUBJECT TO

HOME

<

10

pro < 12   HOME + 2

pro < 16 END.

Παρόλα αυτά μία τέτοια εισαγωγή μοντέλου δεν προτείνεται γιατί είναι δύσκολο να διαβαστεί από το χρήστη.

Αντίθετα, η παρακάτω εισαγωγή μοντέλου δεν είναι επιτρεπτή:

MAX 10H

OME + 1

50 PRO

SUBJECT TO

HOME < 10

PRO < 12

HOME + 2PRO < 16

END

γιατί τόσο το όνομα της μεταβλητής HOME όσο και ο αντικειμενικός συντελεστής 150 χωρίζουν πριν την ολοκλήρωση της γραμμής.

4.4.8 <u>Πεζά – Κεφαλαία.</u>

Στο LINDO δεν παίζει κανένα ρόλο αν κάτι γραφτεί με πεζά ή κεφαλαία γράμματα, διότι ό,τι πληκτρολογείται στο LINDO εσωτερικά μετατρέπεται σε κεφαλαία γράμματα. Έτσι το μοντέλο

Max x

St

X < 10

END

είναι έγκυρο και περιλαμβάνει μόνο μια μεταβλητή την X.

4.4.9 <u>Δεξιά μέλη ανισοτήτων.</u>

Στα δεξιά μέλη των περιορισμών επιτρέπονται μόνο σταθερές και όχι μεταβλητές. Έτσι, ο περιορισμός:

X > Y

θα δώσει σφάλμα. Ο παραπάνω περιορισμός πρέπει να γραφτεί ως εξής:

X – Y > 0

4.4.10 <u>Αριστερά μέλη των περιορισμών.</u>

Στα αριστερά μέλη των περιορισμών επιτρέπονται μόνον οι μεταβλητές απόφασης και οι συντελεστές τους. Έτσι, ο περιορισμός:

3X + 4Y – 10 = 0

θα δώσει σφάλμα, λόγω της ύπαρξης της σταθεράς 10 στο αριστερό μέλος του περιορισμού. Το σωστό είναι:

3X + 4Y =10.

4.5 <u>Εντολές Μενού του LINDO.</u>

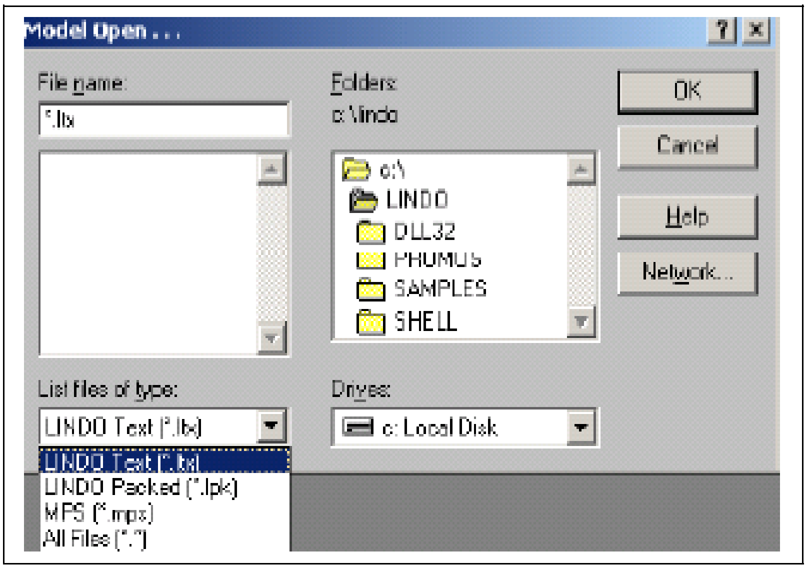
4.5.1 <u>Η εντολή New (F2).</u>

Η εντολή New δημιουργεί ένα νέο, κενό Παράθυρο Μοντέλου. Ο χρήστης είναι δυνατό να εισάγει ένα μοντέλο είτε γράφοντας στο συγκεκριμένο παράθυρο, είτε επικολλώντας (paste) κείμενο από το πρόχειρο (clipboard) των Windows.

4.5.2 <u>Η εντολή Open (F3).</u>

Η εντολή Open διαβάζει ένα αποθηκευμένο πρόβλημα από το δίσκο και το τοποθετεί στο Παράθυρο Επεξεργασίας (Edit Window). Όλα τα συνηθισμένα εργαλεία επεξεργασίας κειμένου όπως η αποκοπή (cut), η αντιγραφή (copy) και η επικόλληση (paste) είναι διαθέσιμες στο Παράθυρο Επεξεργασίας. Ο μόνος περιορισμός είναι ότι το Παράθυρο Επεξεργασίας μπορεί να επεξεργαστεί αρχεία με το πολύ 64.000 χαρακτήρες. Αν προσπαθήσουμε να ανοίξουμε ένα αρχείο με περισσότερους από 64.000 χαρακτήρες, το LINDO θα μας παραπέμψει στο να τοποθετήσουμε το αρχείο σε ένα Παράθυρο Προβολής (View Window).

Όταν εκτελεστεί η εντολή μενού Open, θα εμφανιστεί ένα παράθυρο διαλόγου με τίτλο «Model Open», όπως αυτό του σχήματος 4.6.



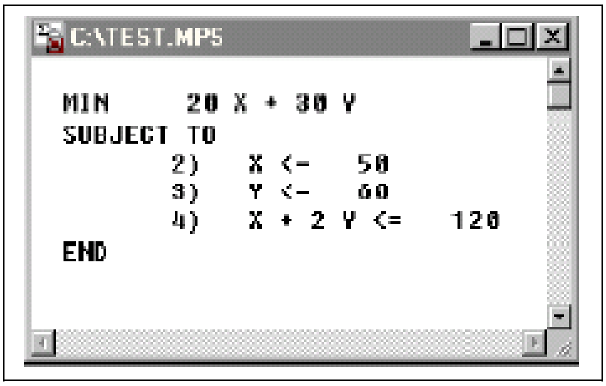
<u>Σχήμα 4.6:</u> Το παράθυρο Άνοιγμα Μοντέλου της εντολής Open.

Αυτό το παράθυρο διαλόγου έχει όλα τα συνήθη χαρακτηριστικά για την πλοήγηση στο σύστημα με σκοπό την αναζήτηση ενός αρχείου. Το μόνο μη συνηθισμένο χαρακτηριστικό του είναι το πλαίσιο καταλόγου στην κάτω αριστερή γωνία με τίτλο «List files of type», που σημαίνει προβολή αρχείων τύπου. Αυτό επιτρέπει στο χρήστη να διαλέξει ένα από τα 4 φίλτρα για την επιλογή αρχείων: LINDO® Text (*.ltx), LINDO® Packed (*.lpk), MPS (*.mps) και All Files (*.*). Τα πρώτα τρία φίλτρα αντιστοιχούν σε τρεις διαφορετικούς τύπους αρχείων, που υποστηρίζονται από το LINDO® για την αποθήκευση μοντέλων. Στια περισσότερες περιπτώσεις, συνιστάται να χρησιμοποιείται ο τύπος LINDO® Text (*.ltx). Αυτός αποθηκεύει το μοντέλο σε μορφή κειμένου, ακριβώς όπως εμφανίζεται στην οθόνη.

Αφού επιλεχθεί ένα αρχείο για ανάγνωση, το LINDO® εξετάζει το αρχείο για να δει ως τι τύπος αρχείου είχε αποθηκευθεί. Αν το μοντέλο είναι τύπου LINDO® Text, ή κάποιος άγνωστος τύπος, τότε διαβάζεται όπως είναι, χωρίς καμία τροποποίηση. Οι τύποι αρχείων MPS και LINDO® Packed μετατρέπονται στον αντίστοιχο ισοδύναμο τύπο LINDO® Text, πριν εμφανιστούν στην οθόνη. Για παράδειγμα το παρακάτω αρχείο test.mps είναι ένα αρχείο τύπου MPS:

```
NAME ROWS
N  1
L  2
L  3
L  4
COLUMNS
      X   1   20.0000000
      X   2    1.0000000
      X   4    1.0000000
      Y   1   30.0000000
      Y   3    1.0000000
      Y   4    2.0000000
RHS
      RHS  2   50.0000000
      RHS  3   60.0000000
      RHS  4  120.0000000
ENDATA
```

Το LINDO® μετατρέπει το παραπάνω μοντέλο στην πιο ευανάγνωστη μορφή του τύπου LINDO® Text, πριν την εμφανίσει στην οθόνη όπως στο σχήμα 4.7.



<u>*Σχήμα 4.7*</u>: *Το μοντέλο του αρχείου test.mps, όπως το δείχνει το LINDO® στο Παράθυρο Μοντέλου.*

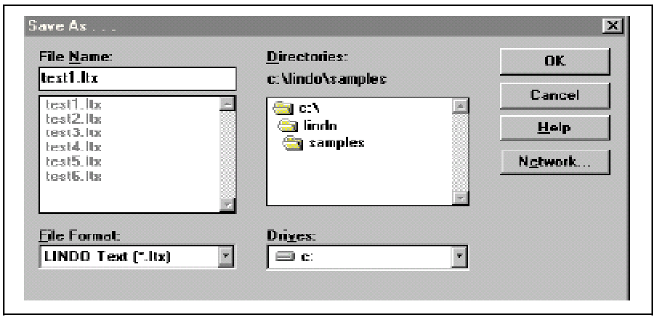
Το LINDO® θυμάται τον τύπο ενός αρχείου που έχει ανοιχτεί. Έτσι, όταν ο χρήστης προσπαθήσει να το αποθηκεύσει, το LINDO® χρησιμοποιεί το συγκεκριμένο τύπο αρχείου, εκτός κι αν του καθορίσει κάποιον άλλο.

4.5.3 <u>Η εντολή View (F4).</u>

Η εντολή View διαβάζει ένα αποθηκευμένο μοντέλο από το δίσκο και το τοποθετεί στο Παράθυρο Προβολής (View Window). Αντίθετα με την εντολή Open, η οποία χρησιμοποιεί Παράθυρα Επεξεργασίας (Edit Windows) και τα οποία περιορίζονται σε αρχεία με το πολύ 64.000 χαρακτήρες, η εντολή View μπορεί να διαβάσει αρχεία οποιουδήποτε μεγέθους (το επιτρεπόμενο μέγεθος περιορίζεται μόνο από τη μνήμη του συστήματος). Τα Παράθυρα Προβολής χρησιμοποιούνται κυρίως για να απεικονίζονται μοντέλα και να υποβάλλονται στο LINDO® προς επίλυση. Επίσης, παρά το ότι είναι δυνατό να διαβαστούν μεγάλα (με περισσότερους από 64.000 χαρακτήρες αρχεία) σε ένα Παράθυρο Προβολής, δε δίνονται όλες οι δυνατότητες επεξεργασίας κειμένου, που δίνονται σε ένα Παράθυρο Επεξεργασίας. Ο χρήστης είναι δυνατό να διαβάσει μεγάλα μοντέλα, να χρησιμοποιήσει την εντολή Go To Line για να μεταβεί σε κάποια συγκεκριμένη γραμμή, να χρησιμοποιήσει την εντολή Find/Replace για να αναζητήσει ή και να αντικαταστάσει ένα αλφαριθμητικό. Για περισσότερες επιλογές όσον αφορά την επεξεργασία κειμένου, ο χρήστης πρέπει να καταφύγει σε κάποιον επεξεργαστή κειμένου, όπως το MS Word, ή το Notepad και μετά να φορτώσει το αρχείο στο LINDO® με την εντολή View. Αν χρησιμοποιηθεί κάποιος εξωτερικός επεξεργαστής κειμένου, το αρχείο πρέπει οπωσδήποτε να αποθηκευτεί ως αρχείο κειμένου (text only), αλλιώς το LINDO® δε θα μπορεί να το διαβάσει.

4.5.4 <u>Οι εντολές Save (F5) και Save As (F6).</u>

Οι εντολές Save & Save As αποθηκεύουν τα περιεχόμενα του ενεργού παραθύρου σε ένα αρχείο στο δίσκο. Η εντολή Save αποθηκεύει το μοντέλο στο όνομα και τύπο του ήδη υπάρχοντος αρχείου, ενώ η εντολή Save As προτρέπει το χρήστη να δώσει ένα διαφορετικό όνομα αρχείου και να αλλάξει, αν το επιθυμεί, τον τύπο με τον οποίο θέλει να αποθηκεύσει το αρχείο. Όταν ο χρήστης καλέσει την εντολή Save As θα εμφανιστεί ένα συνηθισμένο παράθυρο διαλόγου Αποθήκευση Ως, όπως αυτό του σχήματος 4.8.



<u>Σχήμα 4.8</u>: Παράθυρο Διαλόγου εντολής Save As.

Αυτό το παράθυρο διαλόγου έχει όλα τα συνηθισμένα χαρακτηριστικά, που επιτρέπουν την πλοήγηση του χρήστη στο σύστημα, ώστε να αποθηκεύσει το αρχείο του εκεί όπου επιθυμεί. Το μόνο χαρακτηριστικό που είναι διαφορετικό είναι ένα πλαίσιο καταλόγου στην κάτω αριστερή γωνία του παραθύρου με τον τίτλο File Format (τύπος αρχείου), το οποίο επιτρέπει στο χρήστη να επιλέξει ως τι τύπου αρχείο θέλει να το αποθηκεύσει. Οι επιλογές είναι τρεις και περιγράφονται στον παρακάτω πίνακα.

<u>Τύπος Αρχείου</u>	**<u>Επέκταση</u>**	**<u>Περιγραφή</u>**
LINDO® Text	*.ltx	Το μοντέλο αποθηκεύεται ως αρχείο κειμένου, ακριβώς όπως φαίνεται στην οθόνη του Η/Υ.
LINDO® Packed	.lpk	Το μοντέλο αποθηκεύεται ως συμπιεσμένο αρχείο ειδικού τύπου. Το αρχείο είναι αρχείο ASCII και μπορεί να μεταφερθεί σε άλλες πλατφόρμες, αλλά τα περιεχόμενα δεν είναι δυνατό να διαβαστούν από άλλους επεξεργαστές κειμένου.

MPS	.mps	Το μοντέλο αποθηκεύεται σε τύπο MPS, που είναι ένας τύπος που βασίζεται σε βιομηχανικό πρότυπο. Αυτός ο τύπος αρχείου απαιτεί μεγαλύτερο χώρο στο δίσκο από ότι οι άλλοι δύο και είναι δύσκολος να ερμηνευτεί. Το πλεονέκτημα του είναι ότι είναι αποδεκτός και από άλλα λογισμικά βελτιστοποίησης, γεγονός που του προσδίδει μεγάλη φορητότητα.

Πίνακας 4.1: Τύποι Αρχείων του LINDO®

4.5.5 Η εντολή Close (F7).

Η εντολή Close κλείνει το ενεργό παράθυρο. Αν ο χρήστης έχει κάνει κάποιες αλλαγές στα περιεχόμενα του παραθύρου, θα του εμφανιστεί ένα παράθυρο, το οποίο θα τον ρωτά αν θέλει να αποθηκεύσει τις αλλαγές πριν κλείσει το παράθυρο. Αν δεν τις αποθηκεύσει, τότε όλες οι αλλαγές που έχουν γίνει μετά την τελευταία αποθήκευση χάνονται.

4.5.6 Η εντολή Print (F8).

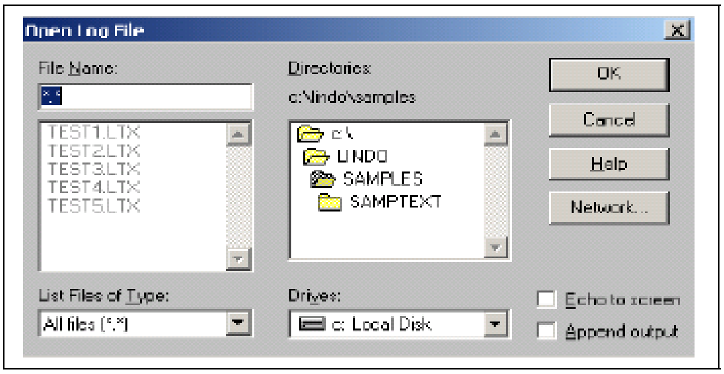
Η εντολή Print στέλνει τα περιεχόμενα του ενεργού παραθύρου για εκτύπωση και είναι διαθέσιμη για οποιοδήποτε είδος παραθύρου.

4.5.7 Η εντολή Printer Setup (F9).

Η εντολή Printer Setup εμφανίζει ένα συνηθισμένο παράθυρο διαλόγου Διαμόρφωσης Εκτυπωτή (printer setup), το οποίο επιτρέπει στο χρήστη να ελέγξει διάφορες παραμέτρους σχετικές με τον τρόπο με τον οποίο θα εκτυπωθεί το έγγραφο. Οι δυνατότητες εκτύπωσης του LINDO® είναι αρκετά περιορισμένες, συνεπώς αρκετές από τις επιλογές που εμφανίζονται σε άλλα λογισμικά δεν είναι εφαρμόσιμες.

4.5.8 Η εντολή Log Output (F10).

Η εντολή Log Output προτρέπει το χρήστη να δώσει ένα όνομα αρχείου, στο οποίο θα στέλνονται όλες οι πληροφορίες που εξάγονται στο Παράθυρο Αναφορών. Χρησιμεύει στη δημιουργία αντιγράφων της λύσης και της ανάλυσης ευαισθησίας. Αυτά τα αρχεία καταγραφής (log files) είναι δυνατό να διαβαστούν από εξωτερικούς επεξεργαστές κειμένου ή να σταλούν στον εκτυπωτή. Όταν ο χρήστης εκτελέσει την εντολή Log Output θα εμφανιστεί ένα παράθυρο διαλόγου σαν αυτό του σχήματος 4.9.



<u>Σχήμα 4.9:</u> Παράθυρο Ανοίγματος Αρχείου Καταγραφής (Open Log File)

Σε αυτό το παράθυρο διαλόγου υπάρχουν δύο ιδιαίτερα χαρακτηριστικά, δύο κουτιά επιλογής στο κάτω δεξί μέρος του παραθύρου με τίτλους Echo to screen και Append output. Η προεπιλεγμένη κατάσταση αυτών των κουτιών είναι να μην είναι επιλεγμένα.

Αν το κουτί Echo to screen δεν είναι επιλεγμένο, όλες οι αλλαγές που θα γίνονται θα στέλνονται μόνο στο αρχείο καταγραφής και όχι στο Παράθυρο Αναφορών. Αντίθετα, αν είναι επιλεγμένο, τότε θα στέλνονται τόσο στο αρχείο καταγραφής όσο και στο Παράθυρο Αναφορών. Αν η αναφορά είναι μακροσκελής, τότε η διαδικασία επιτυγχάνεται σημαντικά αν ο χρήστης επιλέξει να μη στέλνονται οι αλλαγές στην οθόνη.

Αντίστοιχα, αν το κουτί Append output δεν είναι επιλεγμένο, τότε υπάρχει αρχείο καταγραφής με το ίδιο όνομα, θα διαγραφεί και θα αποθηκευτεί σε αυτό η τελευταία αναφορά (σε αυτήν την περίπτωση το LINDO® ΠΡΟΕΙΔΟΠΟΙΕΙ ΟΤΙ ΘΑ ΧΑΘΟΎΝ ΌΛΑ ΤΑ ΠΡΟΗΓΟΎΜΕΝΑ ΔΕΔΟΜΈΝΑ). Αν το κουτί Append output είναι επιλεγμένο, τότε οι καινούριες αναφορές θα προσάπτονται στο αν υπάρχον αρχείο, το οποίο θα παραμένει ανοιχτό μέχρι ο χρήστης να αποεπιλέξει το κουτί.

4.5.9 <u>Η εντολή Exit (Shift + F6).</u>

Η εντολή Exit εγκαταλείπει το περιβάλλον του LINDO® και επιστρέφει στο περιβάλλον του λειτουργικού συστήματος. Αν υπάρχουν αρχεία στα οποία έχουν γίνει αλλαγές, οι οποίες δεν έχουν αποθηκευτεί, το LINDO® ρωτά το χρήστη, αν θέλει να τις αποθηκεύσει. Ό,τι αλλαγές έχουν γίνει μετά την τελευταία αποθήκευση θα χαθούν.

4.6 Το Μενού Edit.

4.6.1 Η εντολή Undo (Ctrl + Z).

Η εντολή Undo αναιρεί την τελευταία ενέργεια, που έκανε ο χρήστης σε ένα Παράθυρο Επεξεργασίας και δεν είναι διαθέσιμη στα Παράθυρα Προβολής.

4.6.2 Οι εντολές Cut (Ctrl + X), Copy (Ctrl + C), Paste (Ctrl +V).

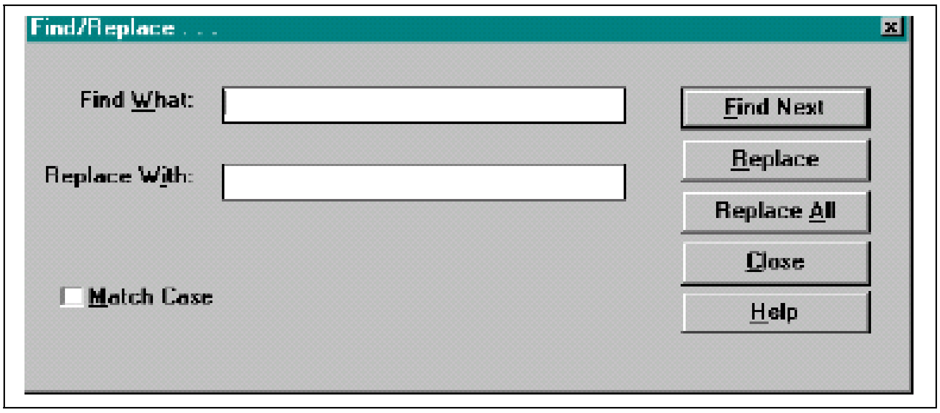
Οι παραπάνω εντολές εκτελούν τις ενέργειες αποκοπής, αντιγραφής και επικόλλησης αντίστοιχα μέρους των όσων γράφει ο χρήστης στο LINDO®.

4.6.3 Η εντολή Clear (Del).

Η εντολή χρησιμοποιείται για να διαγράψει ένα κομμάτι επιλεγμένου κειμένου από ένα παράθυρο επεξεργασίας.

4.6.4 Η εντολή Find/Replace (Ctrl + F)

Η εντολή Find/Replace χρησιμοποιείται τόσο σε παράθυρα επεξεργασίας όσο και σε παράθυρα προβολής, για να εντοπίσει ένα συγκεκριμένο αλφαριθμητικό και προαιρετικά να το αντικαταστήσει με κάποιο άλλο. Μετά την κλήση της εντολής παρουσιάζεται το παράθυρο του σχήματος 4.10.



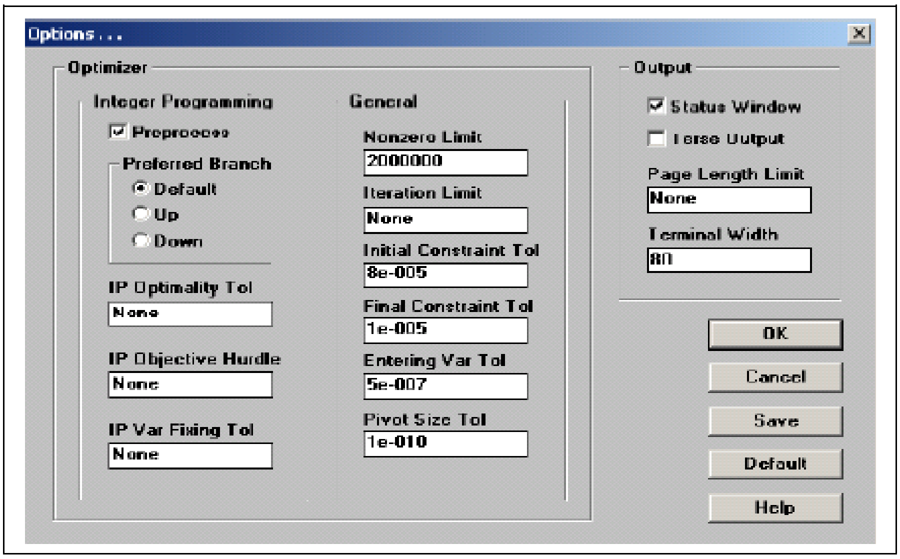
<u>Σχήμα 4.10:</u> Το Παράθυρο Διαλόγου Find/Replace.

Αν ο χρήστης θέλει απλά να εντοπίσει ένα συγκεκριμένο αλφαριθμιτικό, τότε πρέπει να το εισάγει στο πλαίσιο Find What και μετά να πατήσει το κουμπί Find Next. Το LINDO® θα αρχίσει να αναζητά το αλφαριθμιτικό από την τρέχουσα θέση του δρομέα. Αν ο χρήστης θέλει να αρχίσει την αναζήτηση από την αρχή του κειμένου, τότε, πρέπει να χρησιμοποιήσει την εντολή Go To Line για να επανατοποθετήσει το δρομέα στην αρχή, πριν να εκτελέσει την εντολή Find/Replace. Αν επιπλέον, θέλει να αντικαταστήσει το αλφαριθμιτικό με ένα άλλο, τότε πρέπει να γράψει το νέο αλφαριθμιτικό στο πλαίσιο Replace With και στη συνέχεια να πατήσει το κουμπί Replace. Την πρώτη φορά το LINDO® απλά θα μεταβεί στο πρώτο αλφαριθμιτικό που θα εντοπίσει το οποίο είναι ίδιο με το υπό αντικατάσταση αλφαριθμιτικό. Τότε ο χρήστης πρέπει να πατήσει το πλήκτρο Replace ξανά, οπότε το LINDO® θα κάνει την αντικατάσταση και θα μεταβεί στο επόμενο υπό αντικατάσταση αλφαριθμιτικό. Με αυτόν τον τρόπο ο χρήστης μπορεί να αντικαταστήσει όλα τα αλφαριθμιτικά που θέλει. Αν δεν θέλει να αντικαταστήσει κάποιο, τότε πρέπει να πατήσει το κουμπί Find Next. Η αντικατάσταση των αλφαριθμιτκών είναι δυνατό να γίνει πιο γρήγορα με το πάτημα του κουμπιού Replace All. Τότε το LINDO® θα κάνει όλες τις αντικαταστάσεις και θα ενημερώσει το χρήστη για το συνολικό αριθμό αντικαταστάσεων που έκανε.

Το LINDO® αγνοεί, όπως προαναφέρθηκε, τις διαφορές πεζών /κεφαλαίων γραμμάτων όταν κάνει τις αντικαταστάσεις. Σε περίπτωση που ο χρήστης θέλει να μην τις αγνοεί, τότε πρέπει να επιλέξει το κουτί Match Case στην κάτω αριστερή γωνία του παραθύρου, προτού ξεκινήσει τις αντικαταστάσεις.

4.6.5 <u>Η εντολή Options (Alt + O).</u>

Η εντολή Options χρησιμοποιείται για να αλλαχθούν κάποιες παράμετροι, οι οποίες έχουν προεπιλεγμένες από το σύστημα τιμές. Όταν εκτελείται η εντολή Options εμφανίζεται ένα παράθυρο διαλόγου σαν αυτό του σχήματος 4.11.



<u>Σχήμα 4.11:</u> Το παράθυρο επιλογών της εντολής Options.

Οι επιλογές του LINDO® παραμένουν ενεργές μέχρι την έξοδο από το λογισμικό. Αν ο χρήστης θέλει οι αλλαγές των τιμών των παραμέτρων που εκτελεί να αποθηκευτούν και μετά την έξοδο από το LINDO®, τότε πρέπει να πατήσει το κουμπί Save. Σε περίπτωση που θελήσει να επαναφέρει τις προεπιλεγμένες από το LINDO® τιμές, αρκεί να πατήσει το κουμπί Default.

Οι επιλογές του LINDO® διακρίνονται σε δύο κατηγορίες:

1. Επιλογές του Βελτιστοποιητή (Oprimizer Options): Είναι επιλογές που αφορούν στη λειτουργία του μηχανισμού επίλυσης των μοντέλων. Διακρίνονται με τη σειρά τους σε δύο κατηγορίες
   a. Σε αυτές που αφορούν τον ακέραιο προγραμματισμό (integer programming) και ξεφεύγουν από τους σκοπούς αυτού του εγχειριδίου και
   b. Στις γενικές, οι οποίες είναι για προχωρημένους χρήστες του LINDO®.
2. Επιλογές Εξόδου (Output Options): Είναι επιλογές που επηρεάζουν τον όγκο και τη μορφή της εξόδου από το LINDO®.

Στις γενικές επιλογές περιλαμβάνονται:

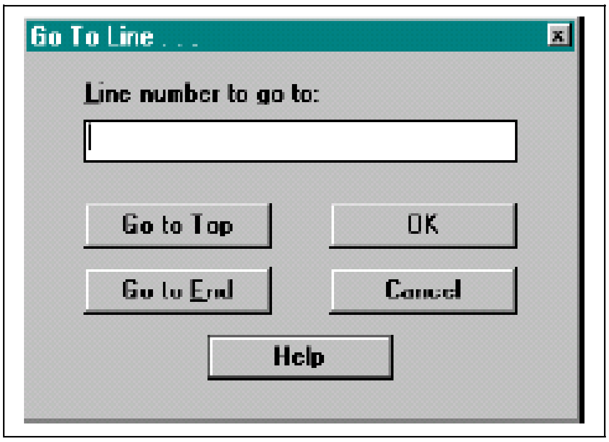
a. Παράθυρο Κατάστασης της Λύσης (Status Window): Το παράθυρο αυτό εμφανίζεται αυτόματα κάθε φορά που το LINDO® ξεκινά να λύσει ένα πρόβλημα. Το παράθυρο αυτό σταματά να εμφανίζεται, αν ο χρήστης αποεπιλέξει το κουτί ελέγχου Status Window. Αν σε κάποια στιγμή ο χρήστης θέλει να το επαναφέρει, μπορεί από την εντολή μενού Open Status Window στο μενού Window.
b. Λακωνική Έξοδος (Terse Output): Αφού το LINDO® επιλύσει ένα μοντέλο, τότε στέλνει αμέσως μία αναφορά λύσης στο Παράθυρο Αναφορών. Αυτή η ενέργεια μπορεί να αποτραπεί, αν ο χρήστης επιλέξει το κουτί ελέγχου Terse Output. Εφόσον ο χρήστης θελήσει να δει την αναφορά λύσης αρκεί να καλέσει την εντολή Solution στο μενού Report.
c. Όριο Μήκους Σελίδας (Page Length Limit): Αν ο χρήστης εισάγει ένα όριο μήκους σελίδας (σε γραμμές), τότε το LINDO® σταματά τη ροή της εξόδου του κάθε τόσες γραμμές, όσες έχει εισάγει ο χρήστης. Τότε εμφανίζει το παράθυρο του σχήματος 4.12 και περιμένει απάντηση από το χρήστη, για το πότε να συνεχίσει τη ροή. Η επιλογή αυτή είναι ιδιαίτερα χρήσιμη, όταν οι αναφορές είναι πολύ μακροσκελείς και ο χρήστης θέλει να τη μελετήσει προτού αρχίζει και χάνεται η πληροφορία λόγω του περιορισμού των 64.000 χαρακτήρων που υπάρχει στα παράθυρα του LINDO®.

<u>Σχήμα 4.12:</u> Προτροπή του LINDO® στο χρήστη, ώστε να συνεχίσει τη ροή εξόδου.

a. Μήκος Τερματισμού (Terminal Width): Είναι το μέγιστο μήκος (σε χαρακτήρες) που έχουν οι γραμμές σε ένα παράθυρο αναφοράς του LINDO® και οι γραμμές σε ένα αρχείο από το οποίο διαβάζει δεδομένα το LINDO®. Στην πρώτη περίπτωση αν μια αναφορά έχει γραμμές με μεγαλύτερο μήκος, το LINDO® προχωρά σε αναδίπλωση της γραμμής, ενώ στη δεύτερη περίπτωση αποκόπτει τους χαρακτήρες που περισσεύουν. Το μήκος τερματισμού δεν μπορεί να πάρει τιμές μικρότερες του 40 ή μεγαλύτερες του 132. Έτσι, απαιτείται μεγάλη προσοχή ειδικά για το διάβασμα δεδομένων να μην ξεπερνά το μήκος τερματισμού που έχει τεθεί, διότι οι επιπλέον χαρακτήρες θα αποκοπούν και αυτό μπορεί να επηρεάζει το μοντέλο. Για να αποφευχθεί αυτό το πρόβλημα το LINDO® επιτρέπει τη διάσπαση γραμμών.

4.6.6 <u>Η εντολή Go To Line (Ctrl + T).</u>

Η εντολή αυτή επιτρέπει στο χρήστη να μεταπηδήσει σε μία συγκεκριμένη γραμμή στο τρέχον παράθυρο, στην αρχή του παραθύρου ή στο τέλος του. Όταν καλείται η εντολή Go To Line εμφανίζεται το παράθυρο διαλόγου του σχήματος 4.13.



<u>Σχήμα 4.13:</u> Το παράθυρο διαλόγου της εντολής Go To Line.

Αν ο χρήστης θέλει να μεταβεί σε συγκεκριμένη γραμμή, τότε πρέπει να γράψει τον αριθμό της γραμμής στο πλαίσιο κειμένου Line Number To Go και να πατήσει το κουμπί OK. Το LINDO® θα μετακινήσει το δρομέα στη συγκεκριμένη γραμμή. Αν ο χρήστης θέλει να μεταβεί στην αρχή ή στο τέλος του παραθύρου, πρέπει να πατήσει τα κουμπιά Go To Top ή Go To End αντίστοιχα.

4.6.7 <u>Η εντολή Select All (Ctrl + A).</u>

Με την εντολή αυτή διαγράφονται όλα τα δεδομένα που αναγράφονται στο ενεργό παράθυρο. Τα δεδομένα επανέρχονται με την εντολή Undo.

4.6.8 <u>Η εντολή Choose New Font.</u>

Η εντολή Choose New Font επιτρέπει στο χρήστη να επιλέξει μια νέα γραμματοσειρά με την οποία θα προβάλλεται ή θα τυπώνεται το κείμενο του ενεργού παραθύρου.

4.7 <u>Το μενού Solve.</u>

4.7.1 <u>Η εντολή Solve (Ctrl + S).</u>

Η εντολή Solve επιλύει το μοντέλο. Αν το μοντέλο είναι σχετικά μικρό, το LINDO® θα λύσει το μοντέλο σε ελάχιστο χρόνο. Αλλιώς είναι δυνατό να πάρει ακόμα και ώρες. Όταν ξεκινά η διαδικασία επίλυσης εμφανίζεται ένα Παράθυρο Κατάστασης που μοιάζει με αυτό του σχήματος 4.4. Το Παράθυρο Κατάστασης είναι χρήσιμο για την παρακολούθηση της προόδου της επίλυσης. Η περιγραφή των διαφόρων πεδίων που εμφανίζονται στο Παράθυρο Κατάστασης φαίνεται στον πίνακα 4.2.

Πεδίο	**Περιγραφή**
Status (Κατάσταση)	Περιγράφει το είδος της λύσης. Δυνατοί χαρακτηρισμοί είναι: optimal (βέλτιστη), feasible (εφικτή), infeasible (ανέφικτη), un-bounded (μη-φραγμένη)
Iterations (Επαναλήψεις)	Αριθμός επαναλήψεων που έχουν γίνει
Infeasibility (Ανεφικτότητα)	Ποσότητα κατά την οποία έχουν παραβιαστεί οι περιορισμοί
Objective (Αντικειμενική)	Τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης εκείνη τη στιγμή
Best IP	Σχετίζεται αποκλειστικά με προβλήματα ακέραιου προγραμματισμού.
IP Bound	Σχετίζεται αποκλειστικά με προβλήματα ακέραιου προγραμματισμού.
Branches	Σχετίζεται αποκλειστικά με προβλήματα ακέραιου προγραμματισμού.
Elapsed Time (Παρελθών χρόνος)	Ο χρόνος που πέρασε από τη στιγμή που ξεκίνησε η λύση του προβλήματος.
Update Interval (Διάστημα Ανανέωσης)	Η συχνότητα (σε sec) με την οποία το

	Παράθυρο Κατάστασης ανανεώνεται.
Interrupt Solver (Διακοπή Επίλυσης)	Με το πάτημα αυτού του κουμπιού η επίλυση σταματά και επιστρέφεται η βέλτιστη λύση που είχε βρεθεί μέχρι τη στιγμή της διακοπής.
Close (Κλείσιμο)	Με το πάτημα αυτού του κουμπιού κλείνει το Παράθυρο Κατάστασης (η επίλυση του προβλήματος πάντως συνεχίζεται). Το Παράθυρο Κατάστασης είναι δυνατό να ξανανοιχθεί από την εντολή μενού Status Window.

Πίνακας 4.2: Επεξήγηση των πεδίων του Παραθύρου Κατάστασης (Status Window).

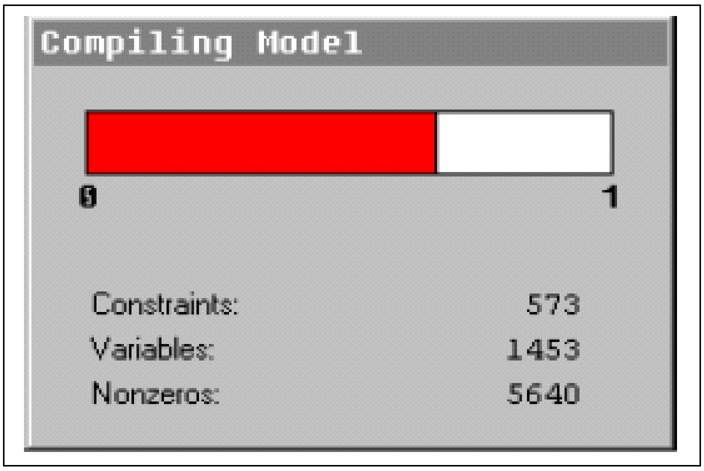
Μετά την ολοκλήρωση της διαδικασίας επίλυσης, η λύση στέλνεται στο Παράθυρο Αναφορών, στο οποίο ο χρήστης μπορεί να τη διαβάσει, να την επεξεργαστεί και να την τυπώσει. Αν το πρόβλημα είναι διατυπωμένο με σωστό τρόπο, το Παράθυρο Κατάστασης θα έχει ήδη πληροφορήσει το χρήστη ότι βρέθηκε η βέλτιστη λύση. Αν το πρόβλημα είναι εφικτό ή μη φραγμένο, τότε υπάρχει πρόβλημα στις εξισώσεις που περιγράφουν το πρόβλημα. Σε αυτήν την περίπτωση ο χρήστης μπορεί να καταφύγει στην εντολή Debug, ώστε να εντοπίσει τον ή τους περιορισμούς, οι οποίοι δημιουργούν το πρόβλημα.

Επειδή το Παράθυρο Αναφορών μπορεί να εμφανίζει κάθε φορά μέχρι 64.000 χαρακτήρες, αν η αναφορά της λύσης περιέχει περισσότερους από 64.000 χαρακτήρες, το LINDO® θα σβήσει όσους χρειάζονται από την αρχή της αναφοράς για να συμπληρώσει ό,τι χρειάζεται στο τέλος. Δηλαδή, στο Παράθυρο Αναφοράς φαίνονται οι τελευταίοι 64.000 χαρακτήρες της αναφοράς της λύσης. Αν το πρόβλημα έχει πολλές μεταβλητές απόφασης και ο χρήστης περιμένει μεγάλη αναφορά λύσης, τότε μπορεί να ζητήσει από το LINDO® να του εμφανίσει λακωνική λύση καλώντας την εντολή Options. Εναλλακτικά, μπορεί να ζητήσει από το πρόγραμμα η αναφορά της λύσης να αποθηκευτεί σε ένα αρχείο καταγραφής (log file) καλώντας την εντολή Log Output.

Τέλος, αφού το LINDO® προβάλει τη λύση, ρωτά το χρήστη αν θέλει να προβεί σε ανάλυση ευαισθησίας. Αν ο χρήστης απαντήσει θετικά, η ανάλυση ευαισθησίας θα εμφανιστεί στο Παράθυρο Αναφορών Αν απαντήσει αρνητικά, η ανάλυση ευαισθησίας δεν θα εμφανιστεί στο Παράθυρο Αναφορών, αλλά μπορεί να τη δει οποιαδήποτε στιγμή θελήσει με την εντολή Range.

4.7.2 Η εντολή Compile Model (Ctrl + E).

Η εντολή Compile Model μεταγλωττίζει, δηλαδή μεταφράζει, το μοντέλο στη μορφή που πρέπει, ώστε να μπορεί να το επιλύσει το LINDO®. Όταν καλείται η εντολή, εμφανίζεται ένα παράθυρο με μία γραμμή προόδου (progress bar), όπως αυτή του σχήματος 4.14, η οποία ενημερώνει το χρήστη για την πρόοδο της μεταγλώττισης.



Σχήμα 4.14: Το Παράθυρο Προόδου της Μεταγλώττισης.

Αν το πρόγραμμα εντοπίσει κάποιο συντακτικό σφάλμα κατά τη διάρκεια της μεταγλώττισης, ενημερώνει το χρήστη και τοποθετεί το δρομέα στη γραμμή στην οποία βρήκε το σφάλμα. Αν και το LINDO® κάνει από μόνο του τη μεταγλώττιση, όταν απαιτείται, είναι καλό ο χρήστης να καλεί την εντολή Compile Model ειδικά κατά τη διάρκεια της εισαγωγής του μοντέλου του για τους εξής λόγους:

- Γίνεται έλεγχος του μοντέλου κατά την ανάπτυξή του.
- Κατά τη μεταγλώττιση του μοντέλου δημιουργούνται οι πίνακες των μεταβλητών και των περιορισμών, τους οποίους συμβουλεύεται η εντολή Paste Symbol και

- Όταν καλείται η εντολή Compile Model διαγράφονται οι προηγούμενες αποθηκευμένες λύσεις του μοντέλου (αν υπάρχουν.

4.7.3 <u>Η εντολή Debug (Ctrl + D).</u>

Είναι δυνατό να συναντήσει κανείς ανέφικτα ή μη φραγμένα γραμμικά προβλήματα. Αυτό είναι αλήθεια κατά την εξέλιξη του σχεδιασμού ενός έργου. Ο εντοπισμός των σφαλμάτων σε ένα μεγάλο έργο μπορεί να είναι εξαιρετικά χρονοβόρος και δύσκολος. Η εντολή Debug είναι χρήσιμη στον περιορισμό των πιθανά λανθασμένων περιορισμών που καθιστούν ένα πρόβλημα ανέφικτο ή μη φραγμένο.

Τα είδη των διορθώσεων που μπορούν να γίνουν σε έναν περιορισμό είναι τα εξής:

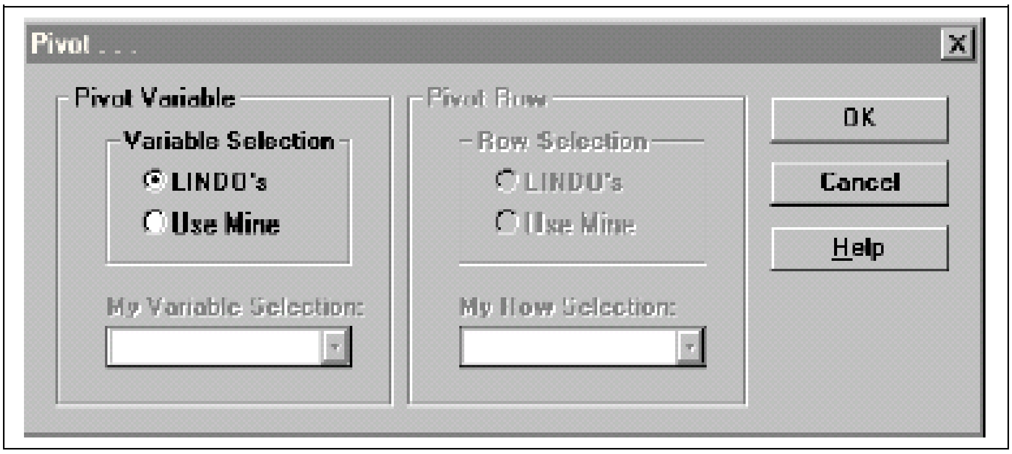
- Αλλαγή των δεξιών μελών των περιορισμών.
- Αλλαγή της φοράς της ανίσωσης.
- Αλλαγή του συντελεστή μιας από τις μεταβλητές σε κάποιον περιορισμό ή
- Αλλαγή του άνω ή κάτω φράγματος μίας μεταβλητής.

Αντίστοιχα, τα είδη των διορθώσεων που είναι δυνατό να γίνουν σε μία στήλη είναι:

- Αλλαγή της αντικειμενικής συνάρτησης.
- Αλλαγή του συντελεστή σε κάποιο περιορισμό.
- Αλλαγή της φοράς της ανίσωσης σε κάποιον περιορισμό.
- Να καταστεί το άνω ή κάτω φράγμα μιας μεταβλητής πεπερασμένο.

4.7.4 <u>Η εντολή Pivot (Ctrl + N).</u>

Η θεμελιώδης λειτουργία του αλγορίθμου Simplex περιλαμβάνει την εισαγωγή στη βασική λύση μιας μεταβλητής, η οποία αρχικά είχε την τιμή 0 και την εξαγωγή μιας άλλης στην οποία επιβάλλεται η τιμή 0. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται ως **οδήγηση** (pivot). Η εντολή αυτή επιτρέπει στο χρήστη να επιτελέσει συγκεκριμένες περιστροφές, προαιρετικά επιλέγοντας την εισερχόμενη μεταβλητή και τον αντίστοιχο περιορισμό. Όταν καλείται η εντολή Pivot εμφανίζεται το παράθυρο διαλόγου του σχήματος 4.15.



<u>*Σχήμα 4.15:*</u> *Το Παράθυρο Διαλόγου της εντολής Pivot.*

Το LINDO® δίνει στο χρήστη δύο δυνατότητες: είτε να επιλέξει το ίδιο τη μεταβλητή (pivot variable) και τον περιορισμό (pivot row) με βάση τα οποία θα κάνει την οδήγηση, είτε να τα επιλέξει ο ίδιος ο χρήστης. Στις περισσότερες περιπτώσεις, ο χρήστης θέλει να επιλέγει ο ίδιος τη μεταβλητή οδηγό, οπότε σε αυτήν την περίπτωση του δίνεται η δυνατότητα να επιλέξει και τον περιορισμό οδήγησης. Αυτό ειδικά θέλει μεγάλη προσοχή, διότι μπορεί να οδηγήσει σε μη φραγμένες λύσεις. Αν ο χρήστης επιλέξει τον περιορισμό οδήγησης, τότε το LINDO® θα επιλέξει αυτόν που πρέπει.

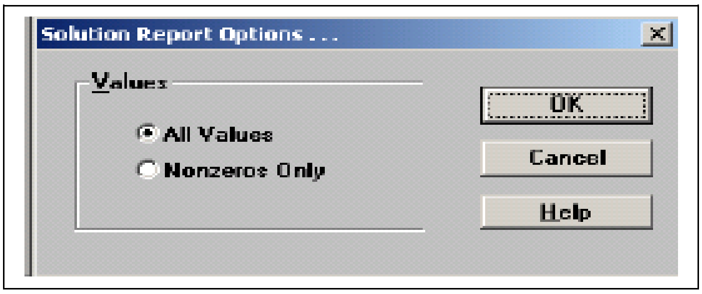
Συνοψίζοντας τα παραπάνω, η εντολή Pivot έχει μικρή πρακτική σημασία, αλλά ενδιαφέρουσα για όσους μελετούν τον αλγόριθμο Simplex, ειδικά όταν συνδυάζεται με την εντολή Tableau. Η τελευταία όταν καλείται δείχνει το τρέχον simplex tableau και βοηθά το χρήστη να αποφασίσει σωστά όσον αφορά ποια μεταβλητή θα χρησιμοποιηθεί για την οδήγηση.

4.8 <u>Το Μενού Reports.</u>

4.8.1 <u>Η εντολή Solution (Alt + 0).</u>

Η εντολή Solution στέλνει μια αναφορά λύσης (για το πρόβλημα το οποίο περιγράφεται στο ενεργό Παράθυρο Μοντέλου) στο Παράθυρο Αναφορών. Κανονικά, το LINDO® παράγει αυτόματα μια αναφορά λύσης κατά την εκτέλεση της εντολής Solve, αλλά είναι πιθανό ο χρήστης να έχει απενεργοποιήσει αυτήν τη δυνατότητα από την εντολή Options, αν έχει ενεργοποιήσει την επιλογή Terse mode. Σε αυτήν την περίπτωση, ο χρήστης πρέπει να τρέξει την εντολή Solution για να πάρει μια αναφορά λύσης.

Κατά την εκτέλεση της εντολής Solution, εμφανίζεται το παράθυρο διαλόγου του σχήματος 4.16 στο οποίο το LINDO® ρωτά το χρήστη αν θέλει στην αναφορά λύσης να συμπεριληφθούν όλες οι μεταβλητές (All Values) ή μόνον αυτές που έχουν μη μηδενική τιμή (Nonzeros Only).



<u>Σχήμα 4.16:</u> Το Παράθυρο Επιλογών για την Αναφορά Λύσης.

Αν ο χρήστης επιλέξει να εμφανιστούν μόνον οι μη-μηδενικές τιμές, τότε το LINDO® θα εμφανίσει στην αναφορά λύσεις μόνον τις μεταβλητές που έχουν μη-μηδενικές τιμές αλλά και μόνον τους δεσμευτικούς περιορισμούς. Η επιλογή αυτή είναι χρήσιμη σε προβλήματα με πολλές μεταβλητές, διότι περικόπτει σημαντικά το μήκος της αναφοράς λύσης.

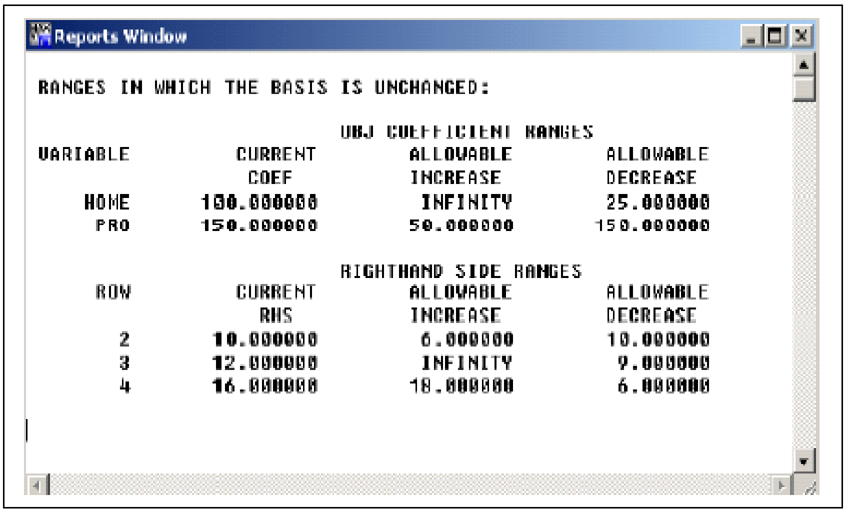
4.8.2 <u>Η εντολή Range (Alt + 1).</u>

Η εντολή Range δημιουργεί μια αναφορά διαστημάτων (δηλαδή επιτελεί ανάλυση ευαισθησίας) για το ενεργό παράθυρο μοντέλου. Η αναφορά διαστημάτων περιλαμβάνει:

1. τα ονόματα των μεταβλητών με τους αντίστοιχους αντικειμενικούς συντελεστές και τις επιτρεπτές αυξήσεις και μειώσεις στις τιμές των αντίστοιχων συντελεστών (διαστήματα εφικτότητας) και
2. τα ονόματα ή τους αριθμούς των περιορισμών με τους αντίστοιχους σταθερούς όρους και τις επιτρεπτές αυξήσεις και μειώσεις στις τιμές των σταθερών όρων (διαστήματα αριστότητας).

<u>Σημείωση:</u> Για να επιτελεστεί η ανάλυση ευαισθησίας πρέπει το πρόβλημα να έχει επιλυθεί.

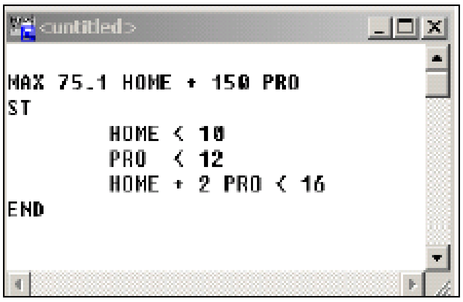
Η αναφορά διαστημάτων για ένα μικρό πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού, όπως αυτό που εξετάζουμε, μοιάζει με αυτήν του σχήματος 4.17 και ερμηνεύεται ως εξής:



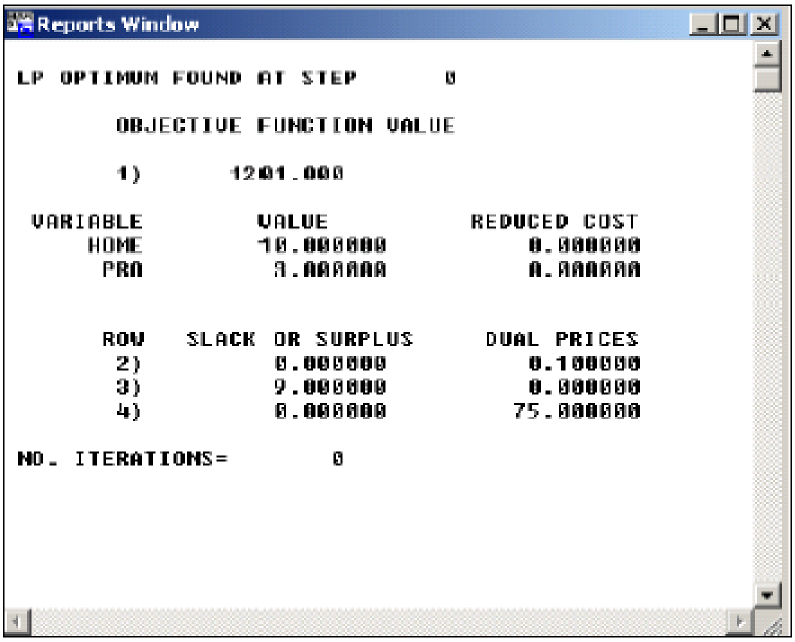
Σχήμα 4.17: Τα Παράθυρο Διαστημάτων του LINDO®.

1. στην πρώτη ενότητα της αναφοράς (OBJ COEFFICIENT RANGES:δηλαδή «διαστήματα αντικειμενικών συντελεστών») για κάθε μεταβλητή δίνονται οι τιμές κατά τις οποίες ο αντικειμενικός συντελεστής μπορεί να αυξηθεί ή να μειωθεί, χωρίς η αλλαγή αυτή να προκαλέσει και αλλαγή της βέλτιστης λύσης.
2. στη δεύτερη ενότητα (RIGHTHAND SIDE RANGES: δηλαδή « διαστήματα δεξιών μελών») για κάθε περιορισμό δίνονται οι τιμές κατά τις οποίες μπορεί να αυξηθεί ή να μειωθεί η τιμή του δεξιού μέλους του περιορισμού, χωρίς να προκληθεί αλλαγή της βέλτιστης λύσης.

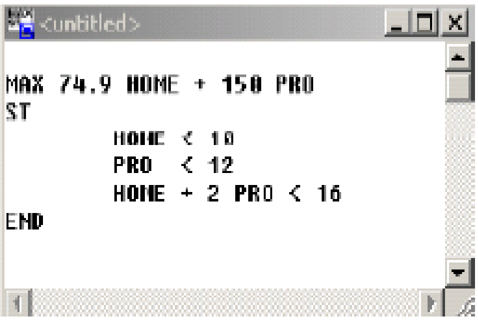
Για παράδειγμα, για την αναφορά του παραπάνω σχήματος, η επιτρεπτή μείωση της μεταβλητής HOME είναι άπειρη (INFINITY), ενώ η επιτρεπτή αύξηση είναι το πολύ 25. Άρα αν η τιμή του αντικειμενικό συντελεστή της HOME αλλαχθεί από 100 σε 100+24,9=124,9 η αλλαγή αυτή δε θα επιφέρει καμία αλλαγή στη βέλτιστη λύση [σχήμα 4.18(α), 4.18(β)]. Αντίθετα, αν η τιμή του αντικειμενικού συντελεστή της HOME αλλαχθεί από 100 σε 100-25,1=74,9, η αλλαγή αυτή θα επιφέρει αλλαγή στη βέλτιστη λύση [σχήμα 4.18(γ), 4.18(δ)].



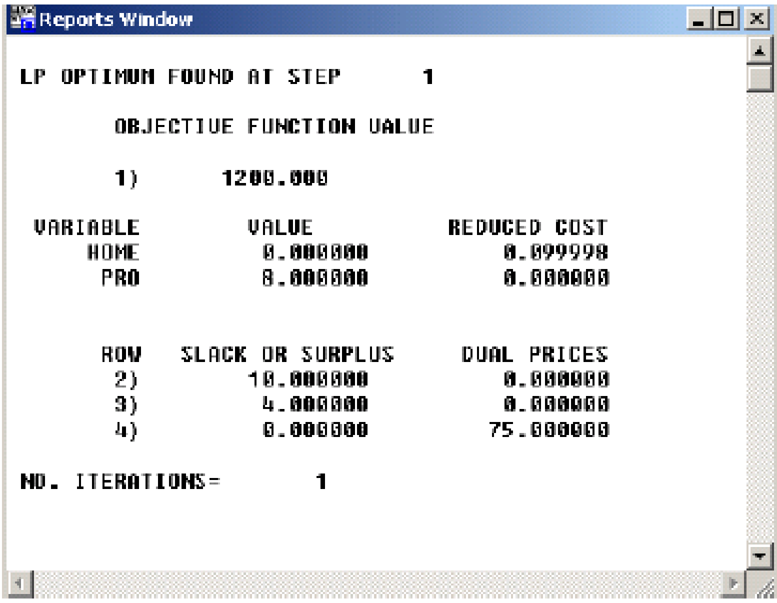
Σχήμα 4.18α: *Αλλαγή αντικειμ. Συντελεστή από 100 σε 75,1.*



Σχήμα 4.18β: *Η λύση για το μοντέλο του σχ. 4.18α.*



Σχήμα 4.18γ: Αλλαγή αντικειμ. Συντελεστή από 100 σε 74,9



Σχήμα 4.18δ: *Η λύση για το μοντέλο του σχ. 4.18γ.*

Σημείωση: Για μείωση του αντικειμενικού συντελεστή της μεταβλητής HOME μέχρι 25 η βέλτιστη λύση παραμένει η ίδια: $x^* = 10.3$, ενώ για μείωση μεγαλύτερη από 25, η βέλτιστη λύση αλλάζει σε $x^* = 0.8$.

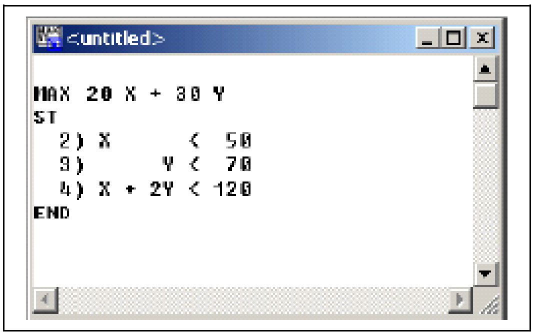
4.8.3 <u>Η εντολή Tableau (Alt + 7).</u>

Η εντολή Tableau δείχνει το τρέχον simplex tableau και παρέχει ένα χρήσιμο τρόπο για να παρατηρεί ο χρήστης τον αλγόριθμο simplex σε κάθε του βήμα, ειδικά όταν χρησιμοποιείται σε συνδυασμό με την εντολή Pivot. Η εντολή Tableau προβάλλει τις μεταβλητές στην πρώτη γραμμή, τον αριθμό των περιορισμών (ROW) στην πρώτη στήλη, τη βασική λύση στη δεύτερη στήλη, τα τρέχοντα δεξιά μέλη των περιορισμών στην τελευταία στήλη (στην πρώτη γραμμή της στήλης αυτής φαίνεται η τρέχουσα τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης) και το συντελεστή της κάθε μεταβλητής στις άλλες γραμμές και στήλες.

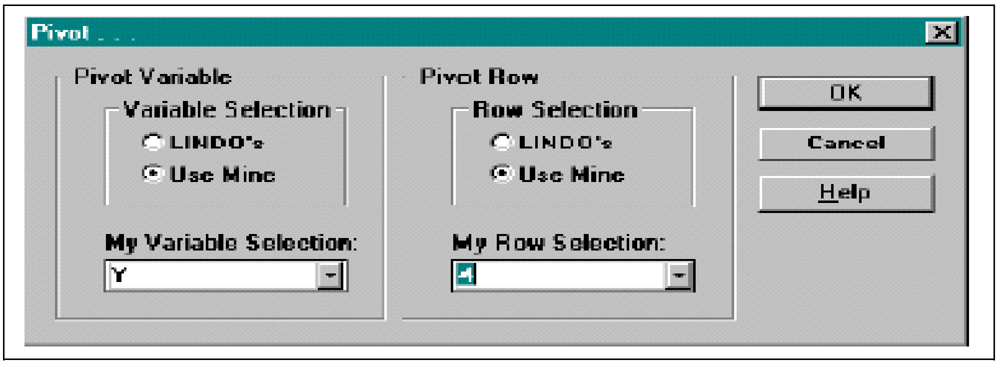
Η αναφορά του Tableau συμμορφώνεται με την τιμή της παραμέτρου του τερματικού μήκους (Terminal Width).

<u>Παράδειγμα χρήσης των εντολών Pivot και Tableau.</u>

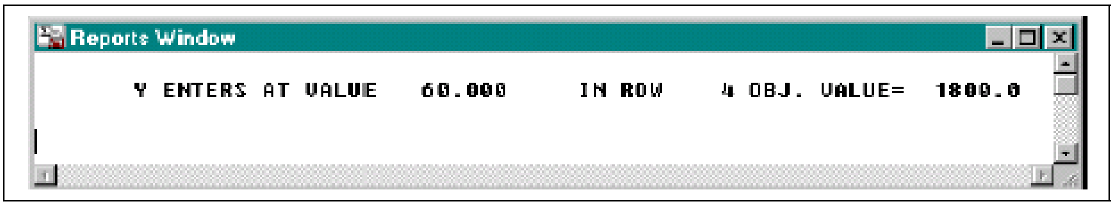
Ας υποτεθεί ότι το μοντέλο προς επίλυση είναι αυτό που φαίνεται στο σχήμα 4.19(α').



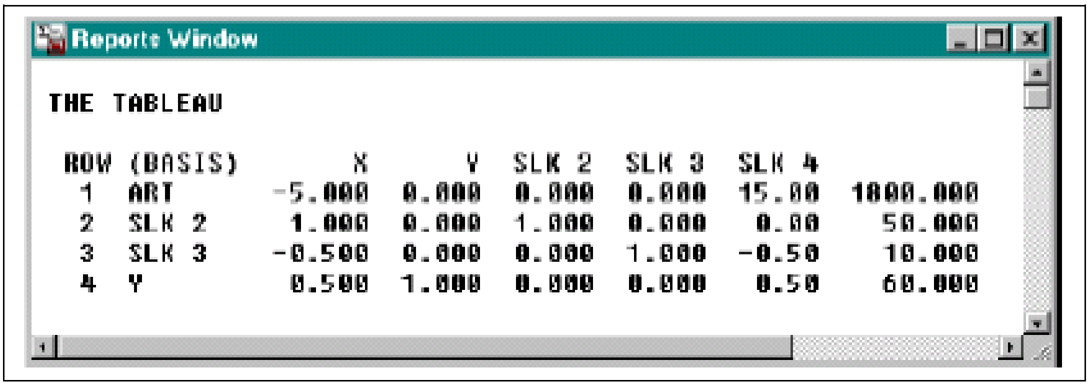
(α') Το προς επίλυση πρόβλημα.



(β') Επιλογή της μεταβλητής και του περιορισμού οδήγησης.



(γ’) Το παράθυρο αναφορών μετά την επιλογή του σχήματος (β’).



(δ’) Το Simplex Tableau που προκύπτει από την οδήγηση με οδηγό την Y και τον περιορισμό 4. Οι SLK 2, SLK 3 και SLK 4 είναι οι περιθώριες μεταβλητές που εισάγονται, ώστε το μοντέλο να έρθει στην τυπική μορφή προβλήματος simplex.

<u>*Σχήμα 4.19:*</u> *Παράδειγμα χρήσης των εντολών Pivot και Tableau.*

Είναι λογικό ο χρήστης να επιλέξει να εισάγει πρώτα τη μεταβλητή Y στη βασική λύση, αφού έχει το μεγαλύτερο αντικειμενικό συντελεστή (δηλαδή συνεισφέρει περισσότερο στη μεγιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης από ότι η μεταβλητή X). Άρα θα πρέπει να καλέσει την εντολή Pivot και στο αντίστοιχο παράθυρο διαλόγου να επιλέξει για τη μεταβλητή οδηγό Use mine. Στο πλαίσιο κειμένου My Variable Selection θα πρέπει να γράψει Y και εφόσον θέλει να επιλέξει και τον περιορισμό οδήγησης, θα πρέπει να επιλέξει τον περιορισμό 4), αφού αυτός επιβάλλει τον πιο αυστηρό περιορισμό (120/2 = 60 < 70). Το LINDO® εκτελεί τότε τη διαδικασία οδήγησης και επιστρέφει μια περίληψη των αποτελεσμάτων στο Παράθυρο Αναφορών (σχήμα (γ’)), το οποίο μας πληροφορεί ότι:

«Η μεταβλητή Y εισήλθε στη βασική λύση με τιμή 60 στη γραμμή (περιορισμό) 4), οπότε η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης έγινε 1800».

Στη συνέχεια ο χρήστης θα πρέπει να ελέγξει το simplex tableau, πριν προχωρήσει στην επόμενη οδήγηση. Αυτό γίνεται με κλήση της εντολής Tableau, οπότε το

LINDO® θα εμφανίσει ένα παράθυρο σαν αυτό του σχήματος 4.18(δ'). Από το simplex tableau είναι προφανές ότι η επόμενη μεταβλητή οδηγός είναι η X λόγω του αρνητικού ευκαιριακού του κόστους (-5 στη γραμμή (περιορισμό) 1). Επιπλέον, ο πιο αυστηρός περιορισμός 2) (αφού 10/(-0,5) < 0 και 50/1 < 60/0,5 = 120), συνεπώς αυτός πρέπει να είναι ο περιορισμός οδήγησης. Άρα ο χρήστης θα πρέπει να καλέσει την εντολή Pivot και να κάνει τα αντίστοιχα βήματα όπως προηγουμένως, οπότε θα ενημερωθεί από το LINDO® ότι:

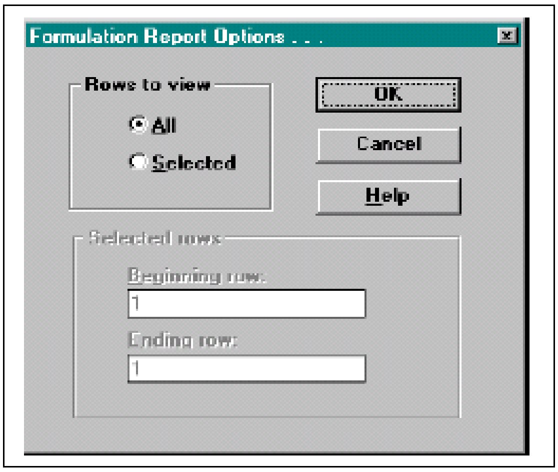
«Η μεταβλητή X εισήλθε στη βασική λύση με τιμή 50 στη γραμμή (περιορισμό) 2), οπότε η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης έγινε 2050»

Η τελευταία είναι και η βέλτιστη λύση (μετά από έλεγχο του simplex tableau). Αν ο χρήστης θέλει να δει την Αναφορά Λύσης, τότε μπορεί να καλέσει την εντολή Solution.

4.8.4 Η εντολή Formulation (Alt + 8).

Η εντολή Formulation χρησιμοποιείται για να προβάλλει ολόκληρο ή επιλεγμένο μέρος του μοντέλου στο Παράθυρο Αναφορών στη μεταγλωττισμένη μορφή που καταλαβαίνει το LINDO® . Αυτό έχει ως αποτέλεσμα τα σχόλια και άλλες ειδικές μορφοποιήσεις (εσοχές, συνεχόμενα κενά κτλ) να μην είναι ορατά.

Όταν ο χρήστης καλέσει την εντολή Formulation παρουσιάζεται το παράθυρο διαλόγου του σχήματος 4.20. Στο κουτί με τίτλο Rows to view, ο χρήστης μπορεί να επιλέξει αν θέλει να δει όλες τις γραμμές (περιορισμούς) ή κάποιες γραμμές μόνον. Αν επιλέξει να δει κάποιες γραμμές μόνο, τότε το κουτί με τίτλο Select rows ενεργοποιείται και μπορεί να καταχωρήσει περιοχές γραμμών τις οποίες θέλει να δει.



Σχήμα 4.20: Το παράθυρο διαλόγου Επιλογών Διατύπωσης Αναφοράς.

4.8.5 Η εντολή Show Column (Alt + 9).

Η εντολή Show Column δίνει τη δυνατότητα στο χρήστη να δει τα στοιχεία που αναφέρονται σε μια στήλη (μια μεταβλητή). Αυτή η δυνατότητα είναι ιδιαίτερα χρήσιμη όταν το μοντέλο είναι πολύ μεγάλο (έχει δηλαδή πολλές μεταβλητές).

4.9 Το Μενού Window.

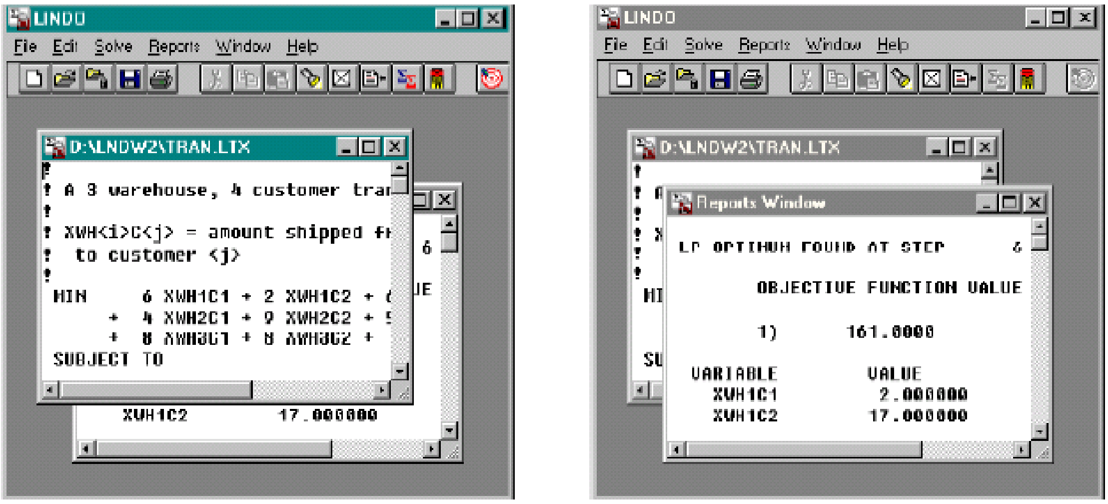
4.9.1 Η εντολή Open Status Window.

Όταν το LINDO® ξεκινά την επίλυση ενός μοντέλου, εμφανίζει αυτόματα ένα Παράθυρο Κατάστασης Λύσης, όπως αυτό του σχήματος 4.4, το οποίο επιτρέπει στο χρήστη να παρακολουθεί την πρόοδο του μηχανισμού επίλυσης του LINDO®. Η εντολή Open Status Window εμφανίζει αυτό το παράθυρο οποιαδήποτε στιγμή θελήσει ο χρήστης και όχι μόνο όταν ξεκινά η λύση.

4.9.2 Η εντολή Send to Back (Ctrl + B).

Η εντολή Send to Back στέλνει το ενεργό παράθυρο πίσω από όλα τα άλλα που είναι ανοιχτά. Είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για την εναλλαγή ανάμεσα στο Παράθυρο Μοντέλου και το Παράθυρο Αναφορών. Για παράδειγμα, αν τα παράθυρα είναι τοποθετημένα όπως φαίνεται στο σχήμα 4.21(α’), δηλαδή το Παράθυρο Μοντέλου μπροστά και το Παράθυρο Αναφορών πίσω, μετά την κλήση της εντολής Send to Back, το Παράθυρο Αναφορών θα έρθει στο προσκήνιο και το Παράθυρο Μοντέλου θα σταλεί πίσω από το Παράθυρο Αναφορών (σχήμα 4.21(β')).

(α') (β')

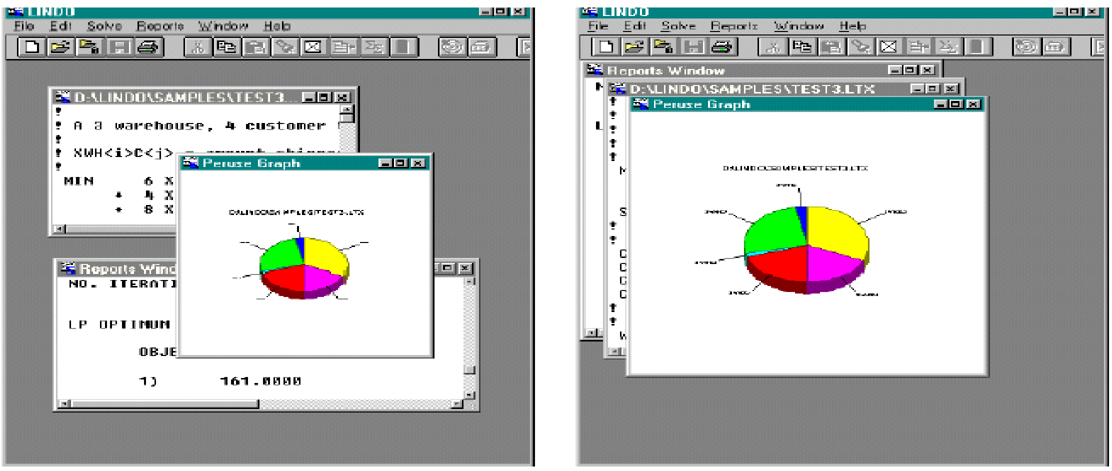


<u>Σχήμα 4.21:</u> Η χρήση της εντολής Send to Back.

4.9.3 <u>Η εντολή Cascade (Alt + A).</u>

Η εντολή Cascade τακτοποιεί όλα τα ανοιχτά παράθυρα σε μορφή καταρράκτη από την πάνω αριστερή γωνία προς την κάτω δεξιά γωνία με το ενεργό παράθυρο πάνω από όλα τα παράθυρα. Για παράδειγμα αν τα παράθυρα είναι τακτοποιημένα όπως στο σχήμα 4.22 (α') και κληθεί η εντολή Cascade, τότε τα παράθυρα θα επανατοποθετηθούν όπως στο σχήμα 4.22(β').

(α') (β')



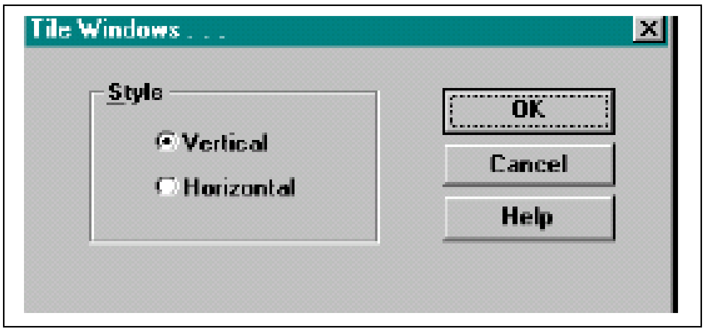
<u>Σχήμα 4.22:</u> Η εντολή Cascade.

4.9.4 Η εντολή Tile (Alt + T).

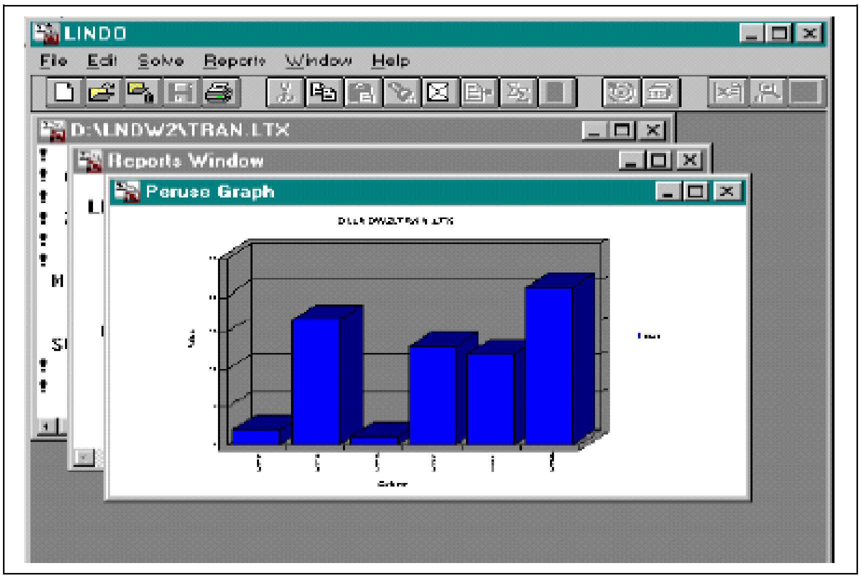
Η εντολή αυτή τακτοποιεί όλα τα παράθυρα του LINDO® σε παράθεση (το ένα δίπλα στο άλλο). Το μέγεθος κάθε παραθύρου τροποποιείται, ώστε όλα τα παράθυρα να έχουν το πολύ το ίδιο μέγεθος. Ο χρήστης μπορεί να επιλέξει ανάμεσα σε οριζόντια ή κάθετη παράθεση, οπότε το πρόγραμμα προσπαθεί να μεγιστοποιήσει την οριζόντια ή κάθετη διάσταση των παραθύρων αντίστοιχα.

Η κλήση της εντολής εμφανίζει ένα παράθυρο διαλόγου όπως αυτό του σχήματος 4.23. Αν υπάρχουν περισσότερα από τρία ανοιχτά παράθυρα, τότε το LINDO® τα παραθέτει αλλά η επιλογή οριζόντια ή κάθετη δεν παίζει κανένα ρόλο. Για παράδειγμα, αν υποτεθεί ότι υπάρχουν τρία ανοιχτά παράθυρα όπως στο σχήμα 4.23(β') και κληθεί η εντολή, τότε είτε ο χρήστης επιλέξει οριζόντια, είτε κάθετη παράθεση, τα παράθυρα επανατοποθετούνται όπως στο σχήμα 4.23(γ').

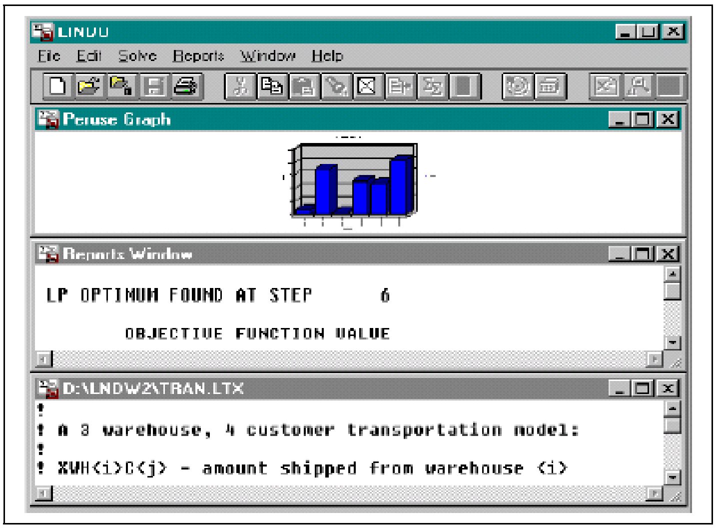
(α') Το παράθυρο διαλόγου της εντολής Tile.



(β') Παράθυρα πριν την εκτέλεση της εντολής Tile.



(γ') Τα παράθυρα του σχήματος 4.23(β') μετά την εκτέλεση της Tile.

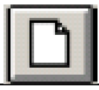
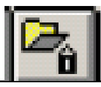
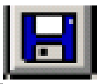
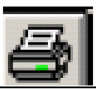
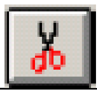
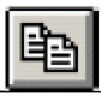


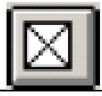
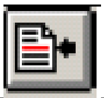
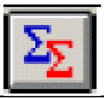
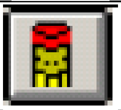
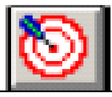
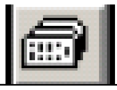
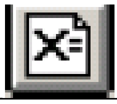
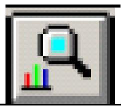
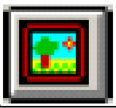
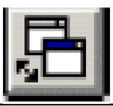
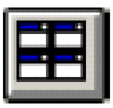
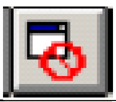
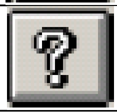
<u>*Σχήμα 4.23:*</u> *Η εντολή Tile.*

4.9.5 <u>Η εντολή Arrange Icons (Alt + I).</u>

Η εντολή Arrabge Icons βάζει στη σειρά όλα τα εικονίδια των ελαχιστοποιημένων ανοιχτών παραθύρων στην κάτω αριστερή γωνία του παραθύρου του LINDO®.

4.10 <u>Η Γραμμή Εργαλείων Menu Bar του LINDO®.</u>

Εικονίδιο	**Εντολή**
	Δημιουργία Μοντέλου (New)
	Άνοιγμα Μοντέλου (Open)
	Προβολή (View)
	Αποθήκευση (Save)
	Εκτύπωση (Print)
	Αποκοπή (Cut)
	Αντιγραφή (Copy)

	Επικόλληση (Paste)
	Εύρεση/Αντικατάσταση (Find/Replace)
	Επιλογές (Options)
	Πήγαινε στη γραμμή (Go To Line)
	Επικόλληση Συμβόλου (Paste Symbol).
	Εκκαθάριση όλων (Clear All)
	Επίλυση (Solve)
	Μεταγλώττιση (Compile Model)
	Λύση (Solution)
	Προσεκτικό διάβασμα (Peruse)
	Εικόνα (Picture)
	Εναλλαγή Παραθύρων (Send To Back)
	Παράθεση Παραθύρων (Tile)
	Κλείσιμο Παραθύρου (Close)
	Βοήθεια (Help)

Πίνακας 4.3: *Η Γραμμή Εργαλείων Menu Bar του LINDO®.*

4.11 Παράδειγμα ανάλυσης ευαισθησίας με το LINDO®.

Ένας αγρότης έχει μόλις αγοράσει 1000 στρέμματα γεωργική γη. Η περιοχή φημίζεται για την παραγωγή σταφυλιών πολύ καλής ποιότητας στις ποικιλίες $Σ_1$, $Σ_2$, $Σ_3$ για τις οποίες είναι βέβαιο ότι οποιαδήποτε παραγόμενη ποσότητα μπορεί να διατεθεί στην αγορά. Ο αγρότης επιθυμεί να προσδιορίσει τις ποικιλίες τις οποίες πρέπει να καλλιεργήσει στη έκταση αυτή με στόχο να μεγιστοποιήσει τα κέρδη του. Στο πίνακα που ακολουθεί δίδονται οι απαιτήσεις - πόροι, σε ανθρώπινο δυναμικό (ανθρωποώρες) και κεφάλαια (χρήματα) που απαιτούνται για την καλλιέργεια ενός στρέμματος γης, οι διαθέσιμες ποσότητες σε ανθρωποώρες και κεφάλαια, καθώς και το κέρδος ανά στρέμμα από την καλλιέργεια της κάθε ποικιλίας.

	Απαιτούμενοι Πόροι για την καλλιέργεια ενός στρέμματος γης		Καθαρή απόδοση ανά στρέμμα
Ποικιλία	Ανθρωποώρες	Χρήματα (χ.μ.)	Κέρδος (χ.μ.)
$Σ_1$	20	115	70
$Σ_2$	10	90	50
$Σ_3$	15	200	120
Διαθέσιμοι Πόροι	8000	100000	

Οι μεταβλητές απόφασης:

x_1 : τα στρέμματα που θα καλλιεργηθούν με την ποικιλία $Σ_1$

x_2 : τα στρέμματα που θα καλλιεργηθούν με την ποικιλία $Σ_2$

x_3 : τα στρέμματα που θα καλλιεργηθούν με την ποικιλία $Σ_3$

Αντικειμενική συνάρτηση:

Αν συμβολίσουμε με z το συνολικό κέρδος, τότε η αντικειμενική συνάρτηση είναι:

$z = \max (70x_1+50x_2+120x_3)$.

Οι περιορισμοί είναι:

$x_1 + x_2 + x_3 \leq 1000$ (διαθέσιμη γη, στέμματα)

$20x_1 +10x_2 + 15x_3 \leq 8000$ (διαθέσιμος χρόνος εργασίας, ώρες)

$115x_1 + 90x +200x_3 \leq 100000$ (διαθέσιμα κεφάλαια, χ.μ)

Συνοψίζοντας το μαθηματικό μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού (Γ.Π.) που πρέπει να επιλυθεί είναι το:

max z = $70x_1 + 50x_2 + 120x_3$		(1)
Διαθέσιμη γη, σε στέμματα	$x_1 + x_2 + x_3 \leq 1000$	(2)
Διαθέσιμος χρόνος εργασίας, σε ώρες	$20x_1 + 10x_2 + 15x_3 \leq 8000$	(3)
Διαθέσιμα κεφάλαια, σε χ.μ	$115x_1 + 90x_2 + 200x_3 \leq 100000$	(4)
Φυσικοί Περιορισμοί		$x^j \geq 0$

Αυτό είναι ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης στην τυπική μορφή. Αν προσθέσουμε χαλαρές μεταβλητές τότε το πρόβλημα γίνεται:

max z = $70x_1 + 50x_2 + 120x_3$

μ.π.:.

$x_1 + x_2 + x_3 + s_1 = 1000$

$20x_1 + 10x_2 + 15x_3 + s_2 = 8000$

$115x_1 + 90x_2 + 200x_3 + s_3 = 10000$

$x_i, s_i \geq 0$ (i =1,2,3).

Η επίλυση του προβλήματος με το LINDO δίδει το παρακάτω Output:

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      2
     OBJECTIVE FUNCTION VALUE
     1)     60043.96
 VARIABLE       VALUE         REDUCED COST
     X1           43.956043       0.000000
     X2            0.000000       4.285714
     X3          474.725281       0.000000
    ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
     2)     481.318695              0.000000
     3)       0.000000              0.087912
     4)       0.000000              0.593407

NO. ITERATIONS=      2

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:
                     OBJ COEFFICIENT RANGES
 VARIABLE     CURRENT      ALLOWABLE        ALLOWABLE
               COEF         INCREASE          DECREASE
    X1       70.000000     90.000000         1.000000
    X2       50.000000     4.285717          INFINITY
    X3       120.000000    1.739130          15.000004

              RIGHTHAND SIDE RANGES
   ROW       CURRENT         ALLOWABLE        ALLOWABLE
              RHS             INCREASE          DECREASE
    2        1000.000000      INFINITY          481.318695
    3        8000.000000      9391.304688       499.999969
    4        100000.000000   6666.666504        54000.000000
```

<u>Α’ ΜΕΡΟΣ</u>

Κομμάτι του output από το Lindo που αφορά μόνο τη λύση.

Αναφορές.

Η λύση είναι

$x_1 = 43.95$, $x_2 = 0$, $x_3 = 474.72$, $s_1 = 481.31$, $s_2 = 0$, $s_3 = 0$.

Άρα το βέλτιστο καλλιεργητικό πλάνο επιβάλλει να καλλιεργηθούν στρέμματα στην ποικιλία $Σ_1$και 475 περίπου στρέμματα στην ποικιλία $Σ_3$, δηλαδή αποκλείεται παντελώς καλλιέργεια της ποικιλίας $Σ_2$.Σε αυτή τη λύση οι μεταβλητές x_1, x_3, s_1 είναι οι **βασικές μεταβλητές** της λύσης, ενώ οι x_2, s_2, s_3 είναι οι **μη βασικές** της λύσης.

Ακόμη παρατηρείστε ότι από τις μεταβλητές απόφασης του προβλήματος οι βασικές μεταβλητές έχουν reduced cost μηδέν, ενώ οι μη βασικές έχουν θετικό reduced cost. Η οικονομική ερμηνεία του reduced cost για τη μη βασική μεταβλητή είναι ότι αν βελτιώσουμε την ανά κιλό απόδοση της ποικιλίας $Σ_2$ κατά 4.285714 δηλαδή αν η απόδοση από 50 γίνει 54.285714 χρηματικές μονάδες τότε στο βέλτιστο πλάνο θα προτείνει οπωσδήποτε καλλιέργεια της ποικιλίας $Σ_2$.

Από τους διαθέσιμους παραγωγικούς πόρους που είναι: η καλλιεργήσιμη γη, οι ανθρωποώρες, και τα κεφάλαια, θα μείνουν αδιάθετα δηλαδή θα μείνουν ακαλλιέργητα 481.31 στρέμματα διότι $s_1 = 481.31$, ενώ θα χρησιμοποιηθούν στο σύνολο τους οι ανθρωποώρες, διότι $s_2 = 0$ και τα κεφάλαια διότι $s_3 = 0$.

Β' ΜΕΡΟΣ

Κομμάτι του output από το Lindo που αφορά στην ανάλυση ευαισθησίας των συντελεστών της αντικειμενικής συνάρτησης.

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

OBJ COEFFICIENT RANGES

VARIABLE	CURRENT COEF	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
X1	70.000000	90.000000	1.000000
X2	50.000000	4.285717	INFINITY
X3	120.000000	1.739130	15.000004

Από στα στοιχεία αυτά βλέπουμε ότι τα διαστήματα μεταβολής των είναι:

- Το c_1 μπορεί να μεταβάλλεται στο διάστημα: $I_1 = (c_1 - 1.0, c_1 + 90) = (69, 160)$.
- Το c_2 μπορεί να μεταβάλλεται στο διάστημα: $I_2 = (c_2 - \infty, c_2 + 4.2857) = (-\infty, 54.2857)$.

- Το c_3 μπορεί να μεταβάλλεται στο διάστημα: $I_3 = (c_3 - 15.0, c_3 + 1.7391) = (105, 121.7319)$.

Αν η τιμή ενός από τα c_1, c_2, c_3 μεταβληθεί, έτσι ώστε η νέα τιμή να είναι μέσα στο διάστημα I_ι , η λύση του νέου προβλήματος δεν αλλάζει. Δηλαδή, οι βασικές μεταβλητές παραμένουν βασικές και οι τιμές τους μένουν αμετάβλητες, ενώ και οι μη βασικές μεταβλητές εξακολουθούν να παραμένουν μη βασικές.

Αν τώρα, η τιμή ενός εκ των συντελεστών c_1, c_2, c_3 μεταβληθεί, έτσι ώστε η νέα τιμή να είναι μέσα στο διάστημα I_ι, η βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης αλλάζει και προκύπτει από τον παρακάτω τύπο:

Νέα βέλτιστη τιμή = Παλαιά βέλτιστη τιμή + (Μεταβολή στο συντελεστή c_i της μεταβλητής i)* (Τιμή της μεταβλητής x_i)

Σε συντομογραφία η εξίσωση που συνδέει την νέα με την παλαιά τιμή γράφεται ως εξής:

$$NBT = \Pi BT + (\delta c_i) * (x_i)$$

Έτσι αν το c_2=50 γίνει c_2=54 η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης θα μεταβληθεί κατά $\delta z = (\delta c_2)*(x_2) = 4*0 = 0$, δηλαδή η αντικειμενική συνάρτηση παραμένει αμετάβλητη. Αυτό συμβαίνει διότι η x_2 δεν είναι βασική μεταβλητή.

Έτσι γίνεται φανερό ότι αν η αλλαγή αναφέρεται στο συντελεστή c_i μιας μεταβλητής x_i η οποία δεν είναι βασική δεν έχουμε αλλαγή στην αντικειμενική συνάρτηση διότι x_i =0.

Στην περίπτωση που η τιμή ενός c_i μεταβληθεί έτσι ώστε η νέα τιμή του να είναι έξω από το διάστημα I_i, αλλάζει και η λύση και η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης. Για να βρούμε τα νέα στοιχεία, δηλαδή λύση και τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης. θα πρέπει να λύσουμε το νέο πρόβλημα, δηλαδή αυτό που θα προκύψει μετά την αλλαγή. Αν το c_1 = 70 γίνει c_1 = 68 η λύση θα αλλάξει και προφανώς και η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης.

Γ' ΜΕΡΟΣ.

Κομμάτι του output από το LINDO που αφορά στην ανάλυση ευαισθησίας των δεξιών σταθερών, μελών των περιορισμών, δηλαδή των b_i.

	RIGHTHAND SIDE RANGES		
ROW	CURRENT RHS	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
2	1000.000000	INFINITY	481.318695
3	8000.000000	9391.304688	499.999969
4	100000.000000	6666.666504	54000.000000

Από τα στοιχεία αυτά βλέπουμε ότι οι συντελεστές b_i μπορούν να μεταβάλλονται στα διαστήματα:

- Το b_1 μπορεί να μεταβάλλεται στο διάστημα: R_1 = (b1-481.32, +∞) = (518.68, +∞).
- Το b_2 μπορεί να μεταβάλλεται στο διάστημα: R_2 = (b2-499.99, b2+9391.30) = (7500.01, 17391.3).
- Το b_3 μπορεί να μεταβάλλεται στο διάστημα: R_3 = (b3-54000, b3+6666.66) = (46000, 106666.66).

Αν η τιμή ενός b_i αλλάξει εντός του διαστήματος R_i, τότε η βάση δεν αλλάζει, δηλαδή οι βασικές μεταβλητές παραμένουν οι ίδιες, αλλά οι τιμές τους αλλάζουν. Οι μη βασικές μεταβλητές παραμένουν μη βασικές.

Για να βρούμε τη νέα λύση θα πρέπει να λύσουμε ξανά το πρόβλημα. Με b_2 = 12000 που είναι μέσα στα όρια η λύση είναι (LINDO output):

```
    1)     60395.61
VARIABLE       VALUE         REDUCED COST
    X1      395.604401        0.000000
    X2        0.000000        4.285714
    X3      272.527466        0.000000
   ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
    2)     331.868134         0.000000
    3)       0.000000         0.087912
    4)       0.000000         0.593407
```

Βλέπουμε ότι οι μεταβλητές x_1, x_3, s_1 εξακολουθούν να είναι βασικές, όπως και στην περίπτωση b_2 = 8000 αλλά οι τιμές τους έχουν αλλάξει (νέες τιμές) και οι μη βασικές x_2, s_2, s_3 εξακολουθούν να είναι μη βασικές (τιμές μηδέν).

Τα b_i συνήθως παριστάνουν τους διαθέσιμους πόρους για την παραγωγή. Έτσι είναι χρήσιμο να γνωρίζουμε τα όρια μέσα στα οποία αυτοί οι συντελεστές μπορούν να μεταβάλλονται και η παραγωγή θα εξακολουθεί να παράγει τα ίδια προϊόντα, έστω και σε διαφορετικές ποσότητες κάθε φορά. Στο παράδειγμά μας με $b_2 = 8000$ ή $b_2 = 12000$, είναι βέλτιστο να καλλιεργήσουμε μόνο τις ποικιλίες, σε διαφορετικές στρεμματικές εκτάσεις κάθε φορά.

Αν η τιμή ενός (ή και περισσοτέρων) b_i μεταβληθεί έτσι ώστε η νέα τιμή του να είναι έξω από το διάστημα R_i, η βάση αλλάζει και φυσικά αλλάζει και η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης, δηλαδή κάποιες βασικές μεταβλητές γίνονται μη βασικές και κάποιες μη βασικές γίνονται βασικές. Για να βρούμε τη νέα λύση θα πρέπει να λύσουμε το νέο πρόβλημα (αυτό που θα προκύψει μετά τις αλλαγές στις τιμές των bi).

Αν το $b_2 = 8000$ γίνει $b_2 = 7400$ η λύση αλλάζει. Το Lindo output είναι:

1) 59600.00

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	0.000000	90.000000
X2	0.000000	30.000000
X3	496.666656	0.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	503.333344	0.000000
3)	0.000000	8.000000
4)	666.666687	0.000000

Στο νέο πρόβλημα οι βασικές μεταβλητές είναι οι x_3, s_1, s_3, ενώ στο παλιό είναι x_1, x_3, s_1. Οι μη βασικές μεταβλητές του νέου προβλήματος είναι οι x_1, x_2, s_2, ενώ στο παλιό είναι οι x_2, s_2, s_3.

Όσον αφορά την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης, όταν υπάρχει οποιαδήποτε αλλαγή σε ένα από τα b_i, εντός ή εκτός του διαστήματος R_i, η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης πάντα αλλάζει και θα πρέπει να την υπολογίσουμε αφού πρώτα βρούμε τις τιμές της νέας λύσης. Το ίδιο ισχύει και για αλλαγές σε περισσότερα από ένα b_i.

<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ε’</u>

«Πληροφοριακά Συστήματα Γραμμικού Προγραμματισμού: ο Solver του Excel»

5.1 <u>Εισαγωγή.</u>

Ο Solver του Excel μπορεί να χρησιμοποιηθεί με επιτυχία για την επίλυση προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού, δεδομένου ότι αποτελεί πρόγραμμα γενικής χρήσης και ευρείας διάδοσης. Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιαστεί η χρήση του Solver του Excel βήμα προς βήμα, μέσω της επίλυσης ενός απλού γραμμικού προβλήματος.

5.2 Χρήση του Solver.

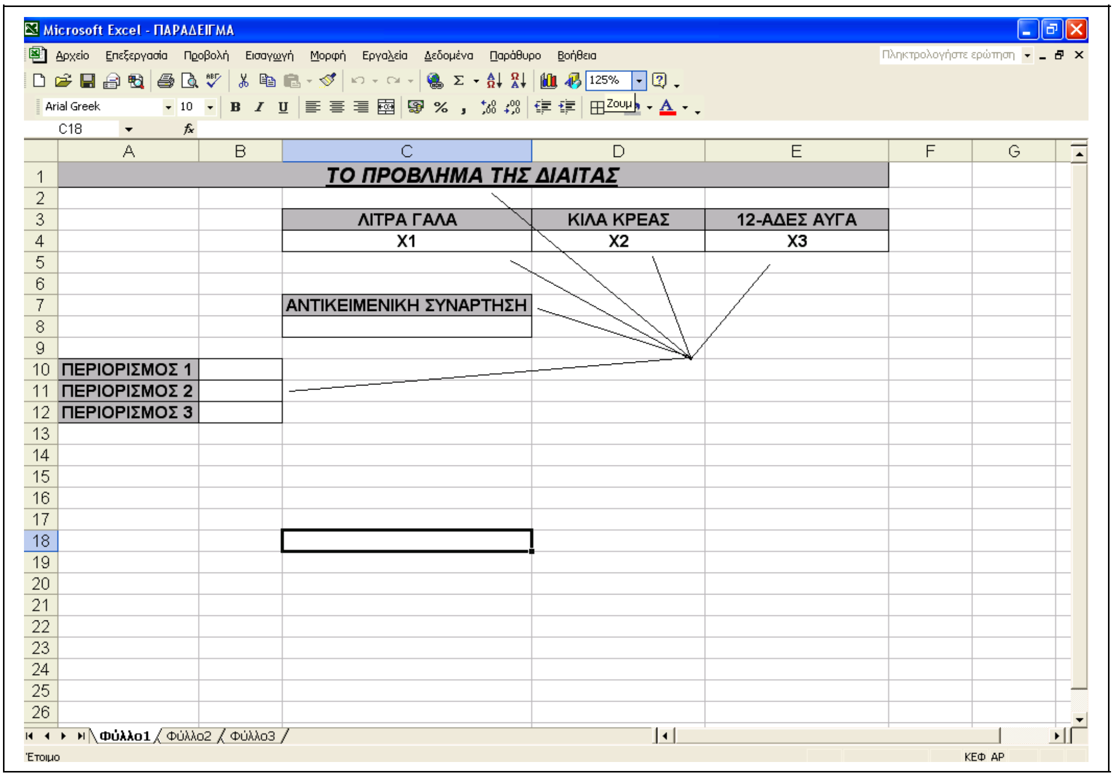
Το παράδειγμα το οποίο θα χρησιμοποιηθεί για την παρουσίαση της χρήσης του Solver του Excel είναι αυτό της δίαιτας, που παρουσιάστηκε στην παράγραφο 6 του $1^{ου}$ κεφαλαίου της παρούσας εργασίας. Προς υπενθύμιση του αναγνώστη, το μοντελοποιημένο πρόβλημα της δίαιτας ξαναγράφεται αμέσως παρακάτω στην κανονική του μορφή:

$$\begin{aligned}
&\min z = 5x_1 + 50x_2 + 15x_3 \\
&\text{μ.π.: } 0.2x_1 + 2x_2 + 10x_3 \geq 1 \\
&\qquad 20x_1 + 20x_2 + 10x_3 \geq 50 \\
&\qquad 2x_1 + 200x_2 + 10x_3 \geq 10 \\
&\qquad x_j \geq 0, \ (j = 1, 2, 3)
\end{aligned}$$

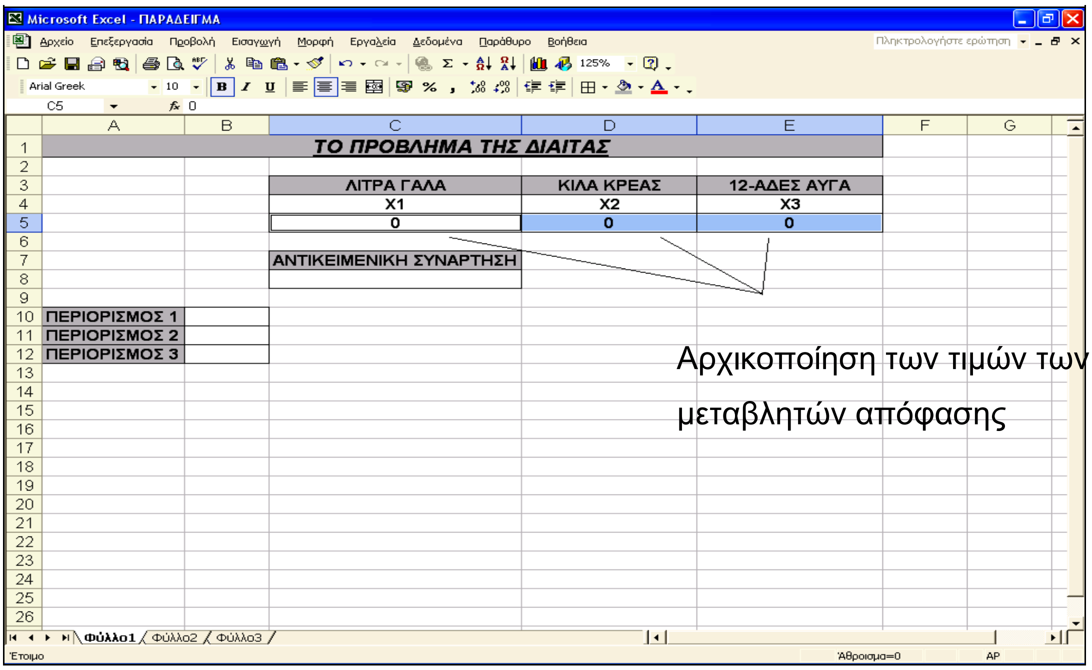
5.3 Εισαγωγή δεδομένων στο φύλλο εργασίας.

Το αρχικό αυτό βήμα αφορά την εισαγωγή των τίτλων της αντικειμενικής συνάρτησης, των περιορισμών και των μεταβλητών απόφασης, όπως επίσης και την αρχικοποίηση των τιμών των τελευταίων.

Η εισαγωγή τίτλων δεν είναι απολύτως απαραίτητη, παρ'όλα αυτά βοηθάει σημαντικά τόσο στην κατανόηση, όσο και στην παρουσίαση του λογιστικού φύλλου. Από την άλλη, η αρχικοποίηση των τιμών των μεταβλητών απόφασης (συνήθως μηδενικές τιμές) είναι απαραίτητη για την έναρξη της επεξεργασίας των δεδομένων από το πρόγραμμα. Επίσης, η εισαγωγή της αντικειμενικής συνάρτησης και του δεξιού μέρους των περιορισμών του προβλήματος γίνεται συναρτήσει των κελιών του λογιστικού φύλλου που αντιστοιχούν στις μεταβλητές απόφασης. Στα παρακάτω γραφήματα φαίνεται αναλυτικά η παραπάνω διαδικασία.



<u>Σχήμα 5.1:</u> *Εισαγωγή βοηθητικών τίτλων στο Excel.*



<u>Σχήμα 5.2</u> : *Απόδοση αρχικών τιμών 0 στις μεταβλητές απόφασης.*

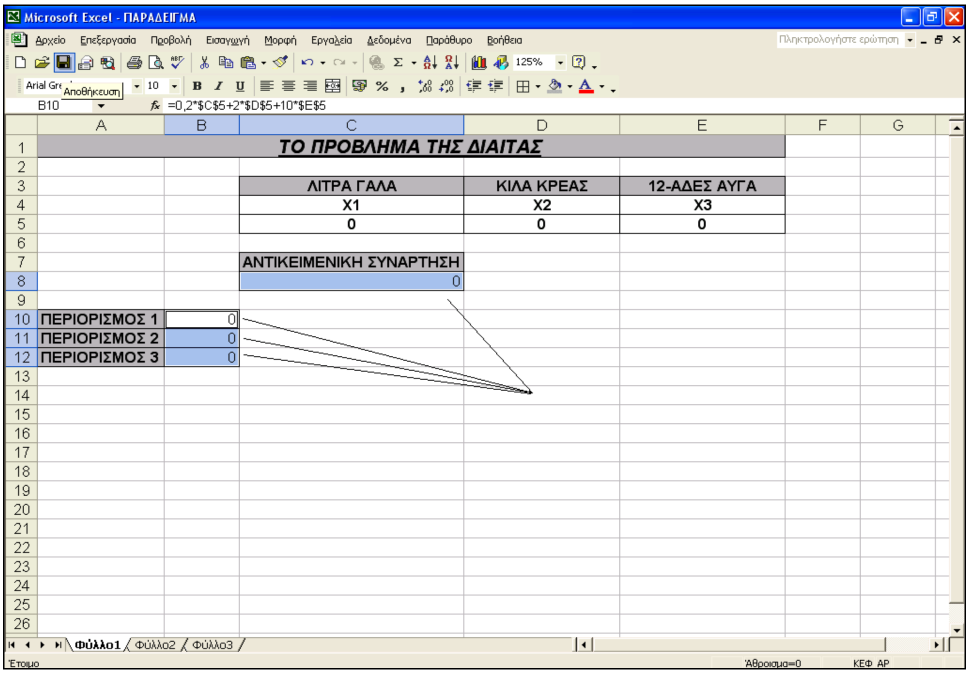
Από τα δύο παραπάνω σχήματα φαίνεται ότι έχουμε αντιστοιχίσει στα κελιά C5, D5 και E5 τις μεταβλητές απόφασης του προβλήματος x_1, x_2 και x_3 αντίστοιχα. Στα κελιά αυτά το Excel θα γράψει αργότερα τις τιμές των αντίστοιχων μεταβλητών, που θα υπολογιστούν από την επίλυση του προβλήματος. Επίσης στο κελί C8, το οποίο ονομάζεται και κελί προορισμού (target cell), θα γραφεί ο τύπος που υπολογίζει την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης, ενώ στα κελιά B10, B11 και B12 θα γραφούν οι περιορισμοί. Στο πάνω μέρος του φύλλου εργασίας υπάρχει για υπενθύμιση το όνομα του προβλήματος που εξετάζουμε.

Όσον αφορά τώρα την εισαγωγή του τύπου της αντικειμενικής συνάρτησης, στο κελί C8 θα πληκτρολογηθεί ακριβώς

= 5*$C$5 + 50*$D$5 + 15*$E$5

και το Excel θα βάλει από μόνο του αυτόματα την τιμή 0, αφού οι τιμές των μεταβλητών απόφασης αρχικοποιήθηκαν με μηδενικές τιμές. Είναι σημαντικό να επισημανθεί ότι ο τύπος της αντικειμενικής συνάρτησης αναγράφεται σαν συνάρτηση των κελιών των μεταβλητών απόφασης. Παρόμοια και για τους περιορισμούς, πληκτρολογούμε τους αντίστοιχους τύπους **<u>των αριστερών μόνο μελών</u>** στα αντίστοιχα κελιά B10, B11, B12, όπου και πάλι αυτόματα μπαίνουν οι τιμές 0.

- <u>Στο κελί B10 πληκτρολογούμε:</u> **= 0.2*$C$5 + 2*$D$5 + 10*$E$5**
- <u>Στο κελί B11 πληκτρολογούμε:</u> **= 20*$C$5 + 20*$D$5 + 10*$E$5**
- <u>Στο κελί B12 πληκτρολογούμε:</u> **= 2*$C$5 + 200*$D$5 + 10*$E$5**

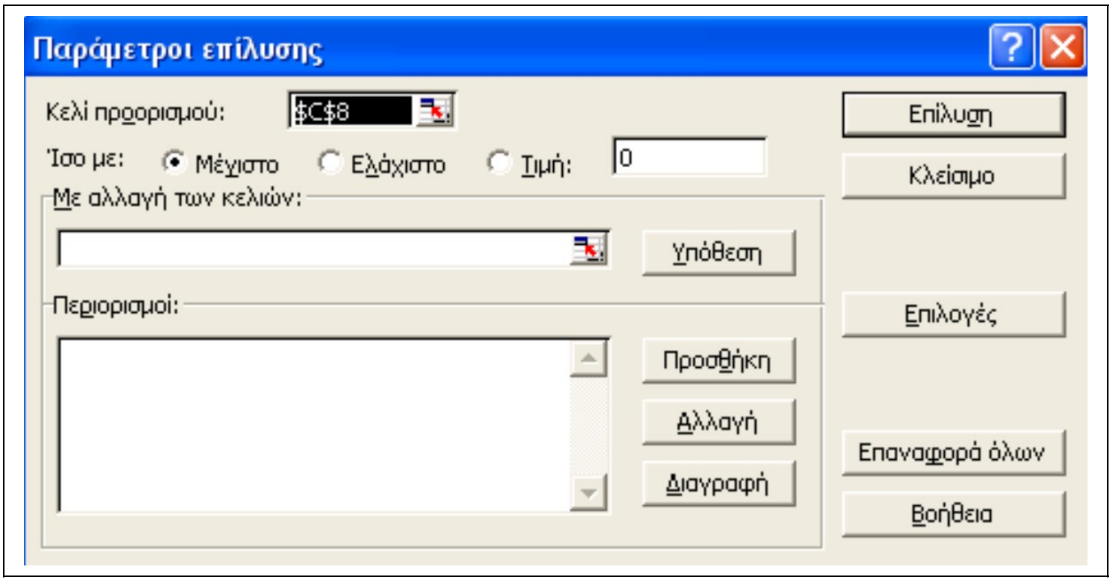


<u>Σχήμα 5.3:</u> *Εισαγωγή τύπων αντικειμενικής συνάρτησης & περιορισμών.*

Έχοντας ολοκληρώσει την εισαγωγή όλων των παραπάνω στο φύλλο εργασίας, μπορούμε να προχωρήσουμε στην επίλυση του γραμμικού προβλήματος. Όπως, έχει γίνει αντιληπτό, το είδος των περιορισμών (≥ ή ≤), καθώς και οι τιμές των δεξιών τους μελών δεν έχουν ακόμα εισαχθεί.

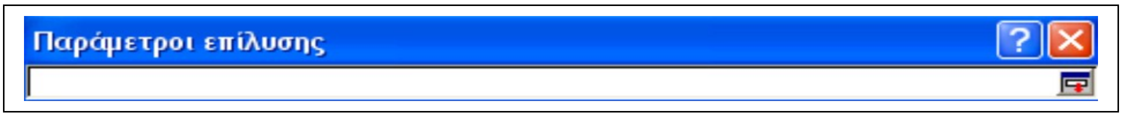
5.4 Επίλυση.

Για να ολοκληρωθεί η εισαγωγή των παραμέτρων επίλυσης, δίνεται η εντολή από το Excel **«Εργαλεία → Επίλυση»**, η οποία ανοίγει το πάραθυρο **«Παράμετροι Επίλυσης»**, που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 5.4: *Το παράθυρο «Παράμετροι Επίλυσης».*

Αρχικά στο παράθυρο «Παράμετροι Επίλυσης» ορίζουμε το κελί προορισμού (target cell), το κελί δηλαδή στο οποίο θα καταγραφεί η βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης στο τέλος της διαδικασίας επίλυσης του προβλήματος. Αυτό γίνεται στο πάνω αριστερά πλαίσιο του παραθύρου με τίτλο **«Κελί προορισμού»**, όπου αναγράφουμε την αναφορά του κελιού προορισμού. Εδώ αυτόματα, το Excel έχει αναγράψει **$C$8.** Αν δεν αναγραφεί αυτόματα η αναφορά αυτή ή δεν θυμόμαστε ποιο είναι το κελί προοσισμού, τότε μπορούμε να το κάνουμε πατώντας το κουμπί δεξιά του πλαισίου. Σε αυτή την περίπτωση εμφανίζεται το πλαίσιο του σχήματος 5.5 και αφού εμείς στη συνέχεια τσεκάρουμε με το δείκτη του ποντικιού το κελί προορισμού, η αναφορά μεταφέρεται αυτόματα στο εν λόγω πλαίσιο. Επιλέγοντας κλείσιμο επιστρέφουμε στο παράθυρο Παράμετροι Επίλυσης.

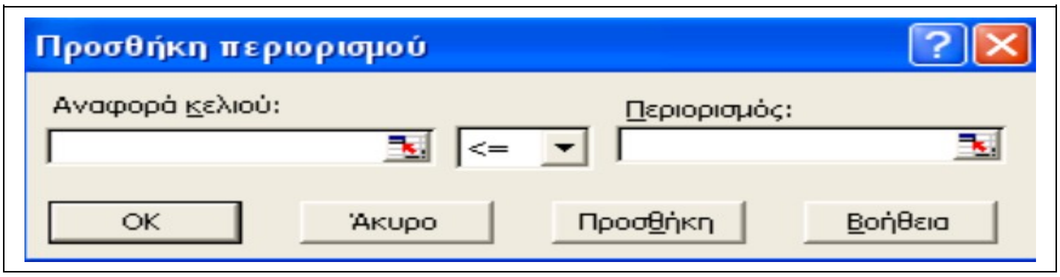


Σχήμα 5.5: *Το πλαίσιο εισαγωγής αναφοράς κελιών.*

Κάτω από το τον ορισμό του κελιού προορισμού στο παράθυρο Παράμετροι Επίλυσης (σχήμα 5.4), υπάρχουν οι κατάλληλες επιλογές, με τις οποίες θα δηλωθεί εάν το πρόβλημα που εξετάζουμε είναι μεγιστοποίησης (max) ή ελαχιστοποίησης (min). Επιλέγουμε, λοιπόν, ***Μέγιστο*** ή ***Ελάχιστο***, αντίστοιχα. Η επιλογή ***Τιμή*** δεν επιλέγεται στα γραμμικά προβλήματα.

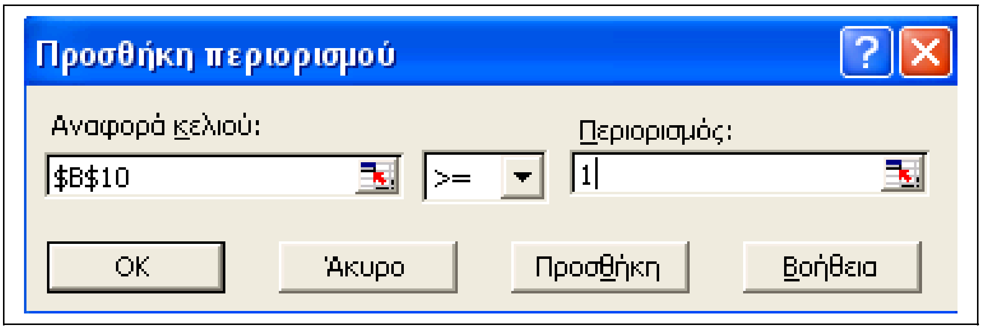
Στο αμέσως παρακάτω πλαίσιο με τίτλο ***«Με αλλαγή των κελιών»***, εισάγεται η περιοχή των κελιών του φύλλου εργασίας, η οποία αντιστοιχεί στις μεταβλητές απόφασης του προβλήματος. Η εισαγωγή του στοιχείου αυτού γίνεται με τρόπους ίδιους ακριβώς με την εισαγωγή του κελιού προορισμού. Εδώ, λοιπόν, αναγράφουμε **$C$5:$E$5**.

Οι τεχνολογικοί περιορισμοί εισάγονται στην περιοχή με τίτλο ***«Περιορισμοί»***. Επιλέγοντας ***«Προσθήκη»*** εμφανίζεται το πλαίσιο του σχήματος 5.6, στο οποίο εισάγεται ένας περιορισμός κάθε φορά.



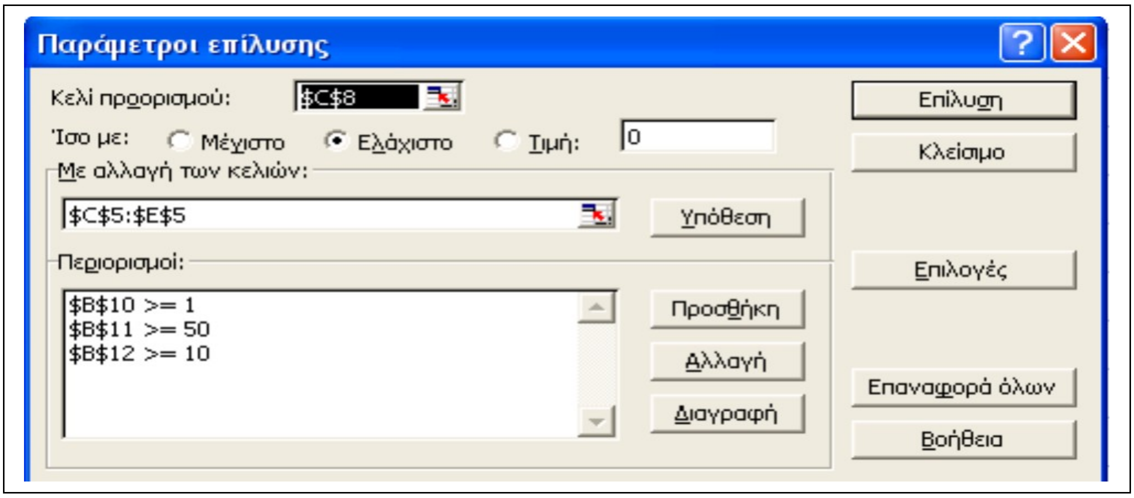
Σχήμα 5.6: *Πλαίσιο προσθήκης περιορισμού.*

Στην ***«Αναφορά κελιού:»*** εισάγεται το αριστερό μέλος του κάθε περιορισμού, είτε με πληκτρολόγηση, είτε επιλέγοντας την αναφορά του κελιού που αναφέρεται στο αριστερό μέρος του περιορισμού στο φύλλο εργασίας, με τρόπο πάλι όμοιο με αυτόν της επιλογής του κελιού προορισμού. Έπειτα, επιλέγεται το είδος του περιορισμού **(<=, =>,** = κ.α.) και η τιμή του δεξιού μέρους του. Η τιμή του πλαισίου ***«Περιορισμός»*** μπορεί να είναι αριθμός ή αναφορά κελιού ή τύπος. Οι επιλογές int και bin εφαρμόζονται σε ακέραια προβλήματα. Επίσης, στην περιοχή **«Περιορισμός»** μπορεί να εισαχθεί η αναφορά του κελιού όταν τα δεδομένα των δεξιών μερών των περιορισμών έχουν εισαχθεί σε κελιά του φύλλου εργασίας. Τέλος επιλέγοντας ***Προσθήκη*** ο περιορισμός εισάγεται στο πάραθυρο και ο νέος είναι έτοιμος προς εισαγωγή. Ενδεικτικά στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η εισαγωγή του 1ου περιορισμού του παραδείγματός μας.



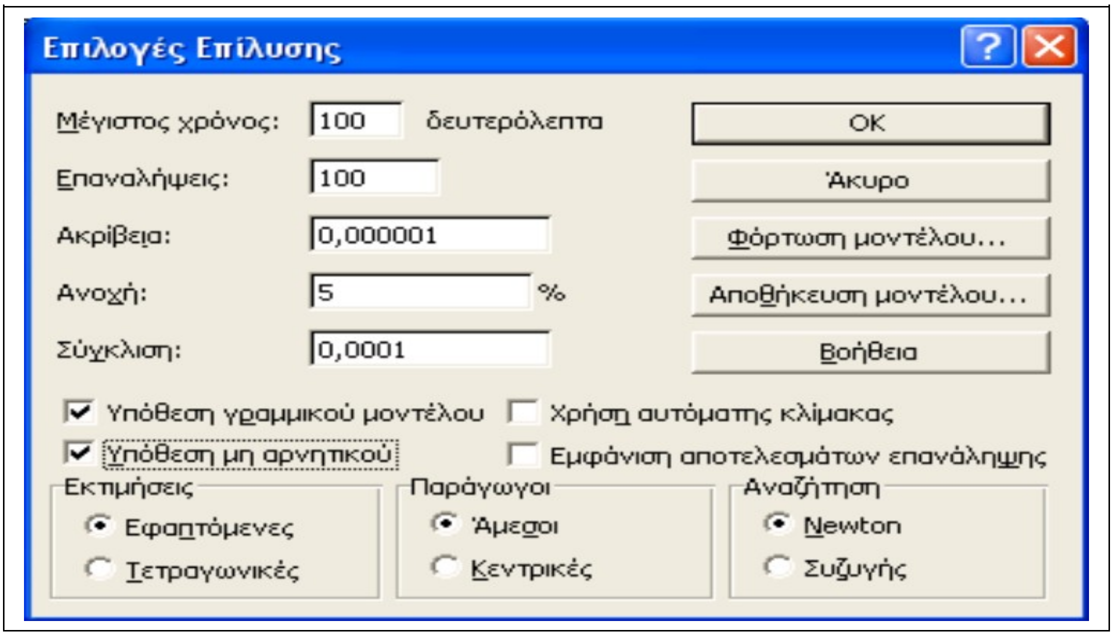
<u>Σχήμα 5.7:</u> *Εισαγωγή του 1ου περιορισμού του παραδείγματος.*

Αφού εισαχθεί και ο τελευταίος περιορισμός πατάμε ***ΟΚ*** και το Excel επιστρέφει στο παράθυρο ***«Παράμετροι Επίλυσης»***, όπου φαίνονται ότι όλοι οι περιορισμοί έχουν εισαχθεί κανονικά. Αν έχει γίνει λάθος στην εισαγωγή κάποιου περιορισμού, τότε μπορούμε να τον διορθώσουμε επιλέγοντας τον περιορισμό και πατώντας ***Αλλαγή***. Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να προχωρήσουμε και στη διαγραφή κάποιου περιορισμού, πατώντας το αντίστοιχο πλήκτρο ***Διαγραφή***. Όλα τα παραπάνω απεικονίζονται στο σχήμα 5.8.



<u>Σχήμα 5.8:</u> *Το παράθυρο Παράμετροι Επίλυσης μετά την εισαγωγή των περιορισμών.*

Στη συνέχεια επιλέγουμε το κουμπί ***Επιλογές*** και εμφανίζεται το πλαίσιο διαλόγου ***«Επιλογές Επίλυσης»***.



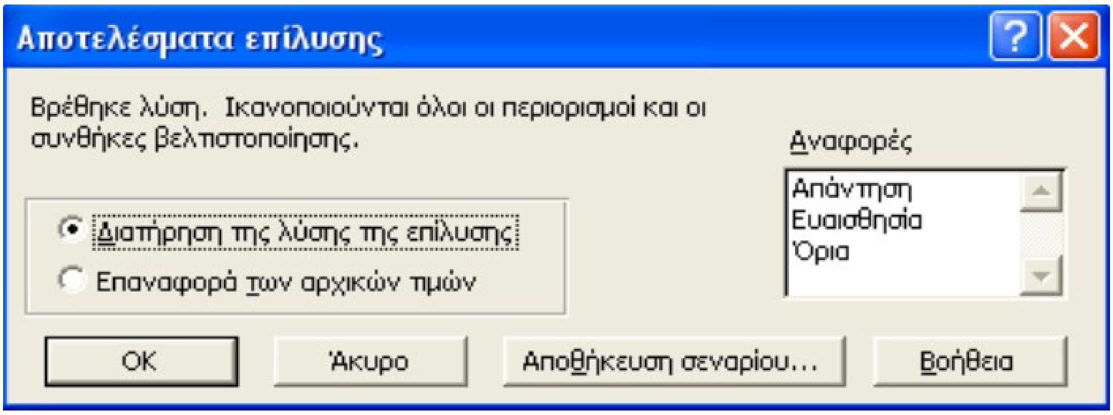
Σχήμα 5.9: *Το πλαίσιο διαλόγου Επιλογές Επίλυσης.*

Στο πλαίσιο αυτό επιλέγουμε τα check box ***«Υπόθεση γραμμικού μοντέλου»*** και ***«Υπόθεση μη αρνητικού»***, για να δηλώσουμε ότι πρόκειται αντίστοιχα για γραμμικό πρόβλημα και ότι όλες οι μεταβλητές απόφασης ικανοποιούν τους φυσικούς περιορισμούς, είναι δηλαδή μη αρνητικές. Το πλαίσιο **Μέγιστος χρόνος**, μας επιτρέπει να ρυθμίσουμε τον μέγιστο επιτρεπτό χρόνο σε δευτερόλεπτα, για την ολοκλήρωση της επίλυσης. Το πλαίσιο **Επαναλήψεις** μας επιτρέπει να προσδιορίσουμε τον μέγιστο επιτρεπτό αριθμό επαναλήψεων για την ολοκλήρωση της επίλυσης. Εάν η διαδικασία επίλυσης εξαντλήσει τον μέγιστο χρόνο ή αριθμό επαναλήψεων, πριν η Επίλυση καταλήξει σε μια λύση, εμφανίζεται το πλαίσιο διαλόγου **Εμφάνιση δοκιμαστικής λύσης**. Το πλαίσιο **Ακρίβεια** είναι ο βαθμός ακρίβειας του αλγόριθμου της Επίλυσης (για παράδειγμα, πόσο κοντά πρέπει να είναι η αριθμητική τιμή του αριστερού μέλους ενός περιορισμού σε αυτήν του δεξιά μέλους προκειμένου να θεωρηθούν ίσα) — όσο μικρότερος είναι ο αριθμός, τόσο μεγαλύτερη είναι η ακρίβεια.. Το πλαίσιο **Ανοχή** χρησιμοποιείται για ακέραια προγράμματα.. Προσδιορίζει το ποσοστό σφάλματος που θέλουμε να επιτρέψουμε για τη λύση. Εάν αναζητούμε την βέλτιστη λύση, τότε θα πρέπει να τεθεί ίσο με 0. Εάν ο χρόνος της διαδικασίας εύρεσης της λύσης γίνει πολύ μεγάλος, ίσως πρέπει να ρυθμίσουμε την τιμή αυτή σε υψηλότερα επίπεδα (εάν βέβαια επιθυμούμε να δεχτούμε μια λύση μέσα σε αυτό το ποσοστό σφάλματος). Τέλος, στο πλαίσιο **Σύγκλιση** πληκτρολογούμε το μέγεθος της επιτρεπόμενης σχετικής μεταβολής στις πέντε τελευταίες επαναλήψεις, πριν η Επίλυση καταλήξει σε μια λύση — όσο μικρότερος είναι ο αριθμός, τόσο μικρότερη είναι η επιτρεπόμενη σχετική μεταβολή.

Εάν το μοντέλο μας είναι είτε γραμμικό, είτε ακέραιου προγραμματισμού πρέπει να επιλέξουμε **Υπόθεση γραμμικού μοντέλου**. Με τον τρόπο αυτό λέμε στον Solver να χρησιμοποιήσει τον Αλγόριθμο Simplex και όχι τον περισσότερο χρονοβόρο μη γραμμικό αλγόριθμο (Generalized Reduced Gradient Method). Η δυνατότητα **Υπόθεση μη αρνητικού** θα πρέπει να επιλεγεί εάν θέλουμε όλα τα ρυθμιζόμενα κελιά να είναι μεγαλύτερα ή ίσα του μηδενός. Επιλέγουμε **Εμφάνιση αποτελεσμάτων επανάληψης** εάν θέλουμε να δούμε τις τιμές κάθε δοκιμαστικής λύσης σε κάθε επανάληψη του Αλγόριθμου. Η **Χρήση αυτόματης κλίμακας** είναι χρήσιμη στην περίπτωση που το μοντέλο υπολείπεται στην επιλογή της κατάλληλης κλίμακας των μεγεθών (εάν τα inputs είναι διαφορετικής τάξης μεγέθους μεταξύ τους ή εάν τα inputs είναι διαφορετικής τάξης μεγέθους από τα outputs). Τέλος, το κάτω τμήμα του παράθυρου διαλόγου αφορά επιλογές για τον μη γραμμικό αλγόριθμο, δηλαδή πως αυτός εκτιμά την μη γραμμικότητα, πως εκτιμούνται οι ρυθμοί μεταβολής και την τεχνική αναζήτησης που εφαρμόζεται.

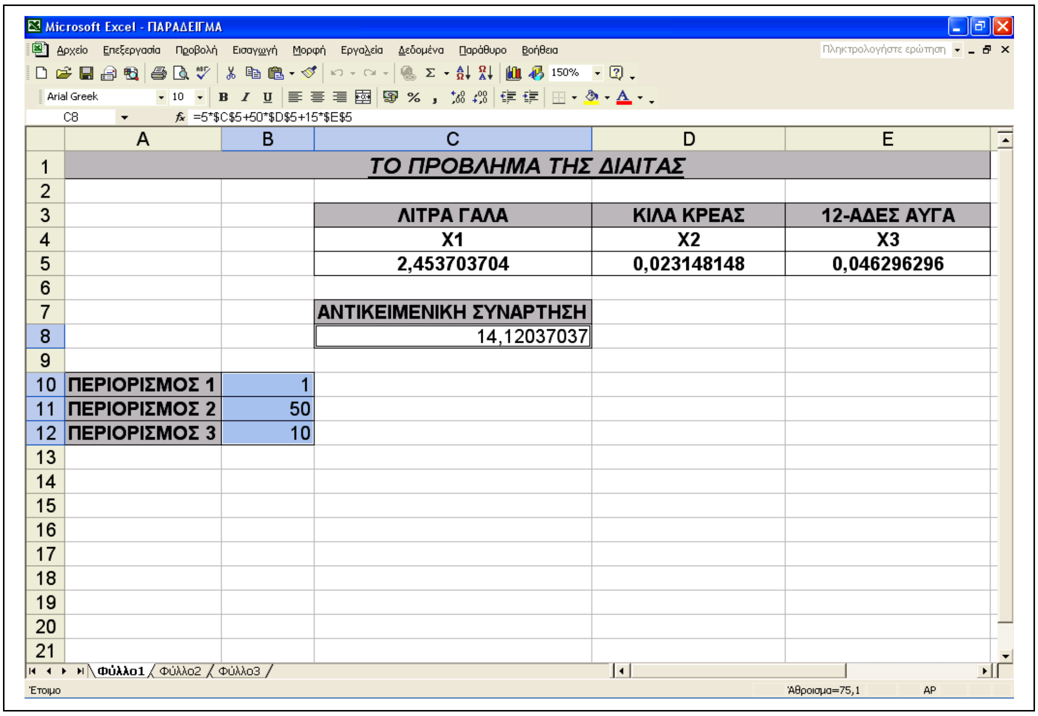
Γενικά, οι προεπιλεγμένες τιμές των περισσοτέρων των παραμέτρων λειτουργούν ικανοποιητικά στα περισσότερα από τα προβλήματα. Το σημαντικό που θα πρέπει να θυμόμαστε είναι να επιλέγουμε **Υπόθεση γραμμικού μοντέλου** εάν το πρόβλημα είναι γραμμικό και **Υπόθεση μη αρνητικού,** εάν θέλουμε να επιβάλλουμε την μη αρνητικότητα των μεταβλητών. Επίσης, εάν επιλύουμε ένα πρόβλημα ακέραιου προγραμματισμού και αναζητούμε την άριστη λύση, θα πρέπει να ρυθμίσουμε την **Ανοχή** στο 0%.

Αφού ολοκληρωθούν οι παραπάνω ενέργειες, πατάμε ***ΟΚ*** για να μεταφερθούμε πάλι στο παράθυρο ***«Επιλογές Επίλυσης»*** και ***Επίλυση*** για να ξεκινήσει το Excel την επίλυση του γραμμικού προβλήματος. Όταν αυτή ολοκηρωθεί, εμφανίζεται ένα ακόμη πλαίσιο διαλόγου με τίτλο ***«Αποτελέσματα Επίλυσης»***.



<u>Σχήμα 5.10:</u> *Το πλαίσιο διαλόγου Αποτελέσματα Επίλυσης.*

Αν το πρόβλημα είναι βέλτιστο, τότε αναγράφεται ***«Βρέθηκε λύση. Ικανοποιούνται όλοι οι περιορισμοί και οι συνθήκες βελτιστοποίησης»*** και αυτόματα στο κελί προορισμού τοποθετείται η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης. Επιλέγουμε ***«Διατήρηση της λύσης της επίλυσης»*** αν θέλουμε να διατηρήσουμε την νέα λύση, ή ***«Επαναφορά των αρχικών τιμών»*** αν θέλουμε να διατηρήσουμε κάποια προηγούμενη λύση του προβλήματος. Έπειτα επιλέγουμε ***OK*** και μεταφερόμαστε στο αρχικό φύλλο εργασίας, όπου φαίνεται η λύση (σχήμα 5.11).



<u>Σχήμα 5.11:</u> *Το φύλλο εργασίας μετά την επίλυση του προβλήματος.*

Τα σχόλια, επομένως, που μπορούν να γίνουν τώρα πάνω στο πρόβλημα της δίαιτας είναι ότι το ελάχιστο δυνατό κόστος αυτής ισούται με περίπου **14,12 χρηματικές μονάδες.** Οι ποσότητες των διάθεσιμων προϊόντων διατροφής ώστε να ελαχιστοποιηθεί το κόστος της δίαιτας, αλλά και να ικανοποιούνται οι θρεπτικές ανάγκες ενός ατόμου και η ημερήσια ποσότητα σε mg βιταμινών A, C και D, που δίνεται από την εκφώνηση, είναι ≈ 2,45 λίτρα γάλα, ≈ 0,023 κιλά κρέας και ≈ 0,046 δωδεκάδες αυγά. Στο φύλλο εργασίας έχουν εμφανιστεί επίσης και τα αριστερά μέλη των τεχνολογικών περιορισμών του προβλήματος, υπενθυμίζοντας μας την ελάχιστη απαιτούμενη ημερήσια κατανάλωση βιταμινών A, C και D σε mg, η οποία είναι 1mg, 50mg και 10mg, αντίστοιχα.

5.5 Οι αναφορές του Excel.

Εκτός από τις βέλτιστες τιμές που καταγράφονται στο φύλλο εργασίας μετά την επίλυση του γραμμικού προβλήματος, ο Solver του EXCEL παράγει και άλλα αποτελέσματα, τα οποία καταγράφει σε τρεις ειδικές αναφορές, που ονομάζονται ***Αναφορά Απάντησης* (*Answer Report*), *Αναφορά Ευαισθησίας* (*Sensitivity Report*) και *Αναφορά Ορίων* (*Limits Report*).** Παρακάτω θα παρουσιάσουμε και τα τρία είδη αναφορών, ξεκινώντας από την αναφορά απάντησης. Μια αναφορά παράγεται αν έχει πρώτα επιλεγεί στο πλαίσιο διαλόγου της εικόνας 5.10.

Στις αναφορές υπολογίζονται διάφορες ποσότητες, οι οποίες σχετίζονται με το κελί προορισμού, τα κελιά των μεταβλητών απόφασης και τα κελιά των περιορισμών. Για να διευκολυνθούν αυτές οι αντιστοιχίες το EXCEL χρησιμοποιεί ετικέτες, οι οποίες συνδυάζονται για να δοθούν κατάλληλα ονόματα στα κελιά. Αυτό που χρειάζεται για να εμφανισθούν τα σωστά ονόματα είναι να αναπροσαρμόσουμε τη μορφή των δεδομένων που εισάγουμε με βάση τον τρόπο που το EXCEL βρίσκει και τοποθετεί τα ονόματα των κελιών που παρουσιάζει στην αναφορά. Συγκεκριμένα, με βάση το γεγονός ότι τα δεδομένα γενικά εισάγονται σε μορφή πινάκων, το EXCEL ονομάζει κάθε κελί συνενώνοντας την οριζόντια με την κάθετη ετικέτα του. Η διαδικασία με την οποία βρίσκει τις ετικέτες είναι η εξής. Σαρώνει τη γραμμή του κελιού προς τα αριστερά μέχρι να βρει (αν υπάρχει) κάποιο κελί που να έχει μια μη αριθμητική τιμή. Αυτή η τιμή είναι η οριζόντια ετικέτα. Το ίδιο κάνει και στη στήλη. Σαρώνει τη στήλη από το κελί προς τα πάνω μέχρι να βρει (αν υπάρχει) ένα κελί με μία μη αριθμητική τιμή. Αυτή η τιμή είναι η κάθετη ετικέτα. Το όνομα του κελιού αποτελείται από την συνένωση των δυο ετικετών.

5.5.1 <u>Αναφορά Απάντησης.</u>

Microsoft Excel 10.0 Αναφορά απάντησης
Φύλλο εργασίας: [ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ.xls]Φύλλο1
Ημερομηνία δημιουργίας αναφοράς: 16/10/2008 2:39:35 μμ

Κελί προορισμού (Ελάχιστο)

Κελί	Όνομα	Αρχική τιμή	Τελική τιμή
$C$7	ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ	14,1203703 7	14,1203703 7

Ρυθμιζόμενα κελιά

Κελί	Όνομα	Αρχική τιμή	Τελική τιμή
$C$4	ΛΙΤΡΑ ΓΑΛΑ	2,45370370 4	2,45370370 4
$D$4	ΚΙΛΑ ΚΡΕΑΣ	0,02314814 8	0,02314814 8
$E$4	12-ΑΔΕΣ ΑΥΓΑ	0,04629629 6	0,04629629 6

Περιορισμοί

Κελί	Όνομα	Τιμή κελιού	Τύπος	Κατάσταση	Απόκλιση
$B$1 0	ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΣ 1	1	$B$10>=1	Υποχρεωτικό ς	0
$B$1 1	ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΣ 2	50	$B$11>=50	Υποχρεωτικό ς	0
$B$1 2	ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΣ 3	10	$B$12>=10	Υποχρεωτικό ς	0

<u>**Σχήμα 5.12:**</u> *Η Αναφορά Απάντησης του προβλήματος της δίαιτας.*

Όπως παρατηρούμε και από το σχήμα 5.12, η Αναφορά Απάντησης χωρίζεται σε τρία τμήματα. Στο πρώτο από αυτά αναγράφεται το κελί προορισμού (***$C$7***), το όνομά του (***ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ***) και η αρχική τιμή και τελική τιμή, η οποία είναι και η βέλτιστη.

Το δεύτερο τμήμα του σχήματος 5.12 αναφέρεται στις μεταβλητές απόφασης του προβλήματος. Πιο συγκεκριμένα, για κάθε μεταβλητή απόφασης το EXCEL χρησιμοποιεί μια γραμμή του, στην οποία αναγράφεται το κελί της στο φύλλο εργασίας (**$C$4, $D$4, $E$4** για **ΛΙΤΡΑ ΓΑΛΑ, ΚΙΛΑ ΚΡΕΑΣ** και **12-ΑΔΕΣ ΑΥΓΑ**, αντίστοιχα), το όνομά της και η αρχική και τελική της τιμή.

Τέλος, το τρίτο τμήμα αφιερώνεται στους περιορισμούς. Σε κάθε περιορισμό αφιερώνεται μια γραμμή στην οποία αναγράφεται το κελί του αριστερού μέλους στο φύλλο εργασίας ($B$10, $B$11, $B$12), το όνομά του, ο τύπος του περιορισμού, η κατάσταση του και η απόκλιση. Στην κατάσταση φαίνονται τα μηνύματα *υποχρεωτικός* ή *μη υποχρεωτικός*. Ο όρος *υποχρεωτικός* σημαίνει ότι ο περιορισμός ισχύει σαν ισότητα, δηλαδή, είναι ενεργός ενώ ο όρος μη υποχρεωτικός δηλώνει ότι ο περιορισμός ισχύει σαν αυστηρή ανισότητα, δηλαδή είναι μη ενεργός. Στη στήλη απόκλισης εμφανίζεται η τιμή της αντίστοιχης χαλαρής μεταβλητής. Έτσι αν ο περιορισμός είναι ενεργός, η απόκλιση είναι μηδέν ενώ αν είναι μη ενεργός, η απόκλιση είναι ένας θετικός αριθμός. Για παράδειγμα, στην αναφορά απάντησης του σχήματος 5.12 και οι δύο περιορισμοί είναι “*Υποχρεωτικοί*” (κελιά F20, F21, F22). Αυτό σημαίνει ότι οι τρεις περιορισμοί του προβλήματός μας ισχύουν σαν ισότητες στη βέλτιστη λύση, όταν δηλαδή οι μεταβλητές απόφασης πάρουν τις τιμές που υπάρχουν στα κελιά E11, E12 και E13 της Αναφοράς Απάντησης του σχήματος 5.12.

5.5.2 Αναφορά Ευαισθησίας.

Microsoft Excel 10.0 Αναφορά ευαισθησίας							
Φύλλο εργασίας: [ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ.xls]Φύλλο1							
Ημερομηνία δημιουργίας αναφοράς: 18/10/2008 7:28:03 μμ							
Ρυθμιζόμενα κελιά							
			Τελική	**Μειωμένο**	**Αντικειμενικός**	**Επιτρεπόμενη**	**Επιτρεπόμενη**
	Κελί	**Όνομα**	**τιμή**	**κόστος**	**συντελεστής**	**αύξηση**	**μείωση**
	$C$4	ΛΙΤΡΑ ΓΑΛΑ	2,453703704	0	5	23	4,272727273
	$D$4	ΚΙΛΑ ΚΡΕΑΣ	0,023148148	0	50	230	42,72727273
	$E$4	12-ΑΔΕΣ ΑΥΓΑ	0,046296296	0	15	235	10,45454545
Περιορισμοί							
			Τελική	**Σκιώδης**	**Περιορισμός**	**Επιτρεπόμενη**	**Επιτρεπόμενη**
	Κελί	**Όνομα**	**τιμή**	**τιμή**	**R.H. Side**	**αύξηση**	**μείωση**
	$B$10	ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΣ 1	1	1,064814815	1	5	0,454545455
	$B$11	ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΣ 2	50	0,217592593	50	50	48,18181818
	$B$12	ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΣ 3	10	0,217592593	10	50	4,545454545

Σχήμα 5.13: *Η Αναφορά Ευαισθησίας του προβλήματος της δίαιτας.*

Τα αποτελέσματα σχετικά με την ανάλυση ευαισθησίας καταγράφονται στη δεύτερη αναφορά του Solver. Για να παραχθούν τα αποτελέσματα αυτά, πρέπει πρώτα να επιλεγεί η αναφορά ευαισθησίας στην περιοχή Αναφορών του παράθυρου Αποτελέσματα Επίλυσης. Η αναφορά του προβλήματος της δίαιτας φαίνεται σχήμα 5.13. Για να εμφανιστούν τα αποτελέσματα πρέπει να επιλέξουμε το φύλλο εργασίας με τίτλο Αναφορά Ευαισθησίας. Η Αναφορά Ευαισθησίας παρέχει πληροφορίες σχετικά με την ευαισθησία της λύσης σε μικρές μεταβολές του τύπου στο κελί που ορίζεται στο πλαίσιο Κελί προορισμού, στο παράθυρο διαλόγου Παράμετροι επίλυσης, ή των περιορισμών. Η αναφορά αυτή δεν δημιουργείται για μοντέλα που έχουν ακέραιους περιορισμούς. Σε μη γραμμικά μοντέλα, η αναφορά παρέχει τιμές για μειωμένες κλίσεις και συντελεστές Lagrange. Σε γραμμικά μοντέλα, η αναφορά περιλαμβάνει μειωμένα κόστη, σκιώδεις τιμές, συντελεστή προσέγγισης (με επιτρεπόμενη αύξηση και μείωση), καθώς και περιοχές περιορισμών στη δεξιά πλευρά.

Η αναφορά περιλαμβάνει δύο τμήματα, το τμήμα ***Ρυθμιζόμενα Κελιά*** και το τμήμα ***Περιορισμοί***. Στο τμήμα των ρυθμιζόμενων κελιών στη στήλη ***μειωμένο κόστος*** αναγράφεται η τιμή s_j. Αναγράφεται επίσης ο συντελεστής c_j κάτω από τη στήλη ***Αντικειμενικός Συντελεστής***. Στις στήλες ***επιτρεπόμενη αύξηση*** και ***επιτρεπόμενη μείωση*** αναγράφονται οι μεταβολές του συντελεστή c_j, έτσι ώστε η τρέχουσα βέλτιστη βάση να μην αλλάζει. Οι μεταβολές αυτές υπολογίζονται κάτω από την αυστηρή προϋπόθεση ότι μόνο ο συντελεστής c_j αλλάζει τιμές ενώ όλα τα υπόλοιπα δεδομένα παραμένουν αμετάβλητα.

Η ερμηνεία των αποτελεσμάτων στην περιοχή των περιορισμών είναι παρόμοια. Στη στήλη ***Σκιώδης τιμή*** αναγράφεται η τιμή της αντίστοιχης δυϊκής μεταβλητής. Όπως και στην επιτρεπόμενη αύξηση και μείωση του συντελεστή κόστους c_j έτσι και εδώ οι επιτρεπόμενες αλλαγές σε κάποιο δεξιό μέρος b_i, για να μην αλλάξει η τρέχουσα βέλτιστη βάση, υπολογίζονται με την προϋπόθεση ότι κανένα άλλο στοιχείο εκτός του b_i δεν αλλάζει τιμές.

5.5.3 Αναφορά Ορίων.

Η *Αναφορά Ορίων* (Σχήμα 5.14) εμφανίζει το κελί προορισμού και τα ρυθμιζόμενα κελιά με τις αντίστοιχες τιμές τους, τα άνω και κάτω όρια, καθώς και τις τιμές στόχου. Η αναφορά αυτή δεν δημιουργείται για μοντέλα που έχουν ακέραιους περιορισμούς. Το κάτω όριο αποτελεί τη μικρότερη τιμή που μπορεί να λάβει το ρυθμιζόμενο κελί, όταν όλα τα άλλα κελιά διατηρούνται σταθερά και ικανοποιούνται οι περιορισμοί. Το άνω όριο είναι η μεγαλύτερη τιμή.

Microsoft Excel 10.0 Αναφορά ορίων							
Φύλλο εργασίας: [ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ.xls]Αναφορά ορίων 1							
Ημερομηνία δημιουργίας αναφοράς: 18/10/2008 6:58:39 μμ							
	Κελί	**Επιθυμητές τιμές**	**Τιμή**				
		Όνομα					
	$C$7	ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ	14,12037037				
	Κελί	**Ρυθμιζόμενα**	**Τιμή**	**Κάτω**	**Επιθυμητό**	**Άνω**	**Επιθυμητό**
		Όνομα		**όριο**	**αποτέλεσμα**	**όριο**	**αποτέλεσμα**
	$C$4	ΛΙΤΡΑ ΓΑΛΑ	2,453703704	2,453703704	14,12037037	#Δ/Υ	#Δ/Υ
	$D$4	ΚΙΛΑ ΚΡΕΑΣ	0,023148148	0,023148148	14,12037037	#Δ/Υ	#Δ/Υ
	$E$4	12-ΑΔΕΣ ΑΥΓΑ	0,046296296	0,046296296	14,12037037	#Δ/Υ	#Δ/Υ

<u>**Σχήμα 5.15:**</u> *Η Αναφορά Ορίων του προβλήματος της δίαιτας.*

5.6 <u>Εισαγωγή νέας μεταβλητής / περιορισμού σε γραμμικό πρόβλημα.</u>

Το Excel μας δίνει τη δυνατότητα να εισάγουμε μια νέα μεταβλητή απόφασης ή τεχνολογικό περιορισμό στο γραμμικό πρόβλημα που επεξεργαζόμαστε με τον Solver. Η διαδικασία είναι απλή. Αφού κλείσουμε το πλαίσιο διαλόγου «Παράμετροι Επίλυσης» προσθέτουμε τη νέα μεταβλητή απόφασης, μαζί με τις ήδη υπάρχουσες, και αρχικοποιούμε την τιμή της με 0 (εφ’όσον δεν ορίζεται κάπως διαφορετικά). Στη συνέχεια, διορθώνουμε τον τύπο της αντικειμενικής συνάρτησης στο κελί προορισμού, αλλά και τα αριστερά μέλη των περιορισμών με την εισαγωγή της νέας μεταβλητής απόφασης, ως αναφορά του κελιού στο οποίο έχουμε ορίσει να αποθηκευτεί η τιμή της μετά την επίλυση του προβλήματος, και προχωρούμε στην επίλυση.

Όσον αφορά την εισαγωγή περιορισμού, από το πλαίσιο διαλόγου «Παράμετροι Επίλυσης», απλά προσθέτουμε τον επιπλέον περιορισμό μέσω του κουμπιού «Προσθήκη» και ακολουθούμε τα ίδια βήματα για να φτάσουμε στην επίλυση του προβλήματος.

<u>ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ</u>

Όπως αναφέρθηκε και στην αρχή αυτής της εργασίας, η επιστήμη του Γραμμικού Προγραμματισμοού βρίσκει όλο και περισσότερες εφαρμογές στη σύγχρονη αγορά εργασίας. Μεγάλος αριθμός εταιριών και οργανισμών χρησιμοποιεί τα διάφορα πληροφοριακά συστήματα επίλυσης γραμμικών προβλημάτων, προκειμένου να φτάσει στη λήψη κρίσιμων αποφάσεων. Αυτός, λοιπόν, ήταν ο κύριος λόγος για τον οποίο γράφτηκε αυτή η διπλωματική εργασία.

Οι γνώσεις όμως που απαιτούνται για να μπορέσει κανείς να φτάσει στο επίπεδο λήψης αποφάσεων, από τις οποίες κρίνεται πολλές φορές μέχρι και το ίδιο το μέλλον οργανισμών, είναι πολλές και εξειδικευμένες. Γι' αυτό στος σελίδες που προηγήθηκαν παρουσιάστηκε ένα μόνο μέρος αυτών των πληροφοριών, οι οποίες όμως είναι ιδιαίτερα χρήσιμες για την απόκτηση σφαιρικής γνώσης πάνω σε ζητήματα Γραμμικού Προγραμματισμού και επίλυσης προβλημάτων.

Πιο συγκεκριμένα, εξετάστηκε το πώς ένα καθημερινό πρόβλημα μοντελοποιείται υπό τη μορ΄φη αντικειμενικής συνάρτησης και τεχνολογικών περιορισμών. Παρουσιάστηκε ο τρόπος με τον οποίο αυτό το μοντελοποιημένο πρόβλημα μπορεί να παρασταθεί γραφικά, αλλά και να επιλυθεί με τη μέθοδο Simplex, εφαρμόζοντας είτε τον πρωτεύων, είτε το δυϊκό αλγόριθμο. Έγιναν όμως και σαφείς οι δυσκολίες που κρύβει η χωρίς Η/Υ επίλυση μεγάλων σε μέγεθος γραμμικών προβλημάτων, με πολλές μεταβλητές απόφασης και πολλοούς τεχνολογικούς περιορισμούς.

Αυτές τις δυσκολίες έρχοεται να υπερκεράσει η νέα τεχνολογία, η οποία έχει επηρεάσει και την επιστήμη του Γραμμικού Προγραμματισμού. Η ύπαρξη πληροφοριακών συστημάτων επίλυσης γραμμικών προβλημάτων, όπως ο Solver του Excel και το LINDO, που παρουσιάστηκαν στα τελευταία κεφάλαια, έχει καταστήσει πιο εύκολη όσο ποτέ την αναζήτηση βέλτιστων λύσεων. Η χρηστικότητα αυτών των προγραμμάτων και η ευκολία που παρέχουν στο χρήστη να εισάγει και να επεξεργαστεί δεδομένα, τα καθιστούν πολύ σημαντικά εργαλεία.

Κλείνοντας και έχοντας εξετάσει όλα τα παραπάνω, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η γνώση αντιμετώπισης ζητημάτων Γραμμικού Προγραμματσιμού αποτελεί ένα χρήσιμο εφόδιο και ανταγωνιστικό πλεονέκτημα για οποιονδήποτε επιθυμεί να εξελιχθεί μέσα στην αγορά εργασίας.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

⇒ Linus E. Schrage (c1991), ***"User's manual for linear, integer, and quadratic programming with LINDO, release 5.0",*** , south San Francisco, CA: Scientific Press.

⇒ Ασημακόπουλος, Ν. (1991), ***"Επιχειρησιακή Έρευνα"***, Εκδόσεις Σταμούλης, Πειραιάς.

⇒ Βασιλείου, Π.Χ. (1994), "**Εφαρμοσμένος Μαθηματικός Προγραμματισμός**", Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη.

⇒ Καρκάζης Ι. (1988), ***"Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα"***, Εκδόσεις Σμπίλιας, Αθήνα.

⇒ Λουλάκης Μ. (1990), ***"Επιχειρησιακή Έρευνα"***, Γ' έκδοση, , Εκδόσεις Εκδοτικό Κέντρο Βορείου Ελλάδος Ε.Π.Ε., Θεσσαλονίκη.

⇒ Παπαρρίζος Κ. (1999) ***"Γραμμικός Προγραμματισμός: αλγόριθμοι και εφαρμογές",*** Εκδόσεις Ζυγός, Θεσσαλονίκη.

⇒ Παπαρρίζος Κ., **«Σημειώσεις μαθήματος *«Αλγόριθμοι Γραμμικής Βελτιστοποίησης»***, , τμήμα Εφαρμοσμένης Πληροφορικής Πανεπιστημίου Μακεδονίας.

⇒ Σίσκος Ι. (2000), ***"Γραμμικός Προγραμματισμός",*** Β' έκδοση, , Εκδόσεις Νέων Τεχνολογιών, Αθήνα.

⇒ Ψωίνος Δ.Π. (1996), ***"Ποσοτική Ανάλυση"***, Β' έκδοση, Τόμοι Α' & Β', Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη.