



ΣΧΟΛΗ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΦΟΡΟΛΟΓΙΑ
ΚΑΙ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΔΙΟΙΚΗΣΗ

Διπλωματική Εργασία

ΠΡΟΒΛΕΨΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΟΤΗΤΑΣ ΧΡΗΜΑΤΙΣΤΗΡΙΑΚΟΥ ΔΕΙΚΤΗ S&P 500
ΜΕ ΤΟ GARCH ΜΙΑ ΕΜΠΕΙΡΙΚΗ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ

του/της

ΜΑΡΙΟ ΝΤΙΝΑΚΟΥΣ

Επιβλέπων Καθηγητής: Αχιλλέας Ζαπράνης

Υποβλήθηκε ως απαιτούμενο για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος στη
Λογιστική Φορολογία και Χρηματοοικονομική Διοίκηση

Νοέμβριος 2022

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω πολύ , τον επιβλέποντα καθηγητή μου κύριο Αχιλλέα Ζαπράνη για την βοήθεια , την καθοδήγηση και την εμπιστοσύνη που μου έδειξε κατά την διάρκεια συγγραφής και ολοκλήρωσης της παρούσας διπλωματικής εργασίας καθώς και για τις γνώσεις που μου παρείχε κατά την διάρκεια των μαθημάτων .

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα διπλωματική εργασία έχει ως σκοπό να προβλέψει την μεταβλητότητα του Χρηματιστηριακού Δείκτη S&P 500 μέσω των Μοντέλων GARCH . Στα συγκεκριμένα μοντέλα περιλαμβάνονται και εξειδικεύονται, συμμετρικά και ασύμμετρα χαρακτηριστικά της μεταβλητότητας (GARCH , EGARCH και GJR-GARCH) . Επίσης για να εκπληρωθεί ο σκοπός της έρευνας, θα πρέπει να επιλεγθεί ένα συγκεκριμένο μοντέλο από τα παραπάνω , μέσω της σύγκρισης της προβλεπτικής τους ικανότητας μέσω των στατιστικών σφαλμάτων που προκαλούνται μετά την διαδικασία των προβλέψεων. Έτσι θα υπολογιστούν τρεις δείκτες σφάλματος MAE , RMSE και MAPE , όπου μέσω αυτών συμπεραίνεται ότι το μοντέλο το οποίο υπερισχύει των άλλων είναι το GJR-GARCH (1,1) λόγω του αποτελέσματος μόχλευσης που περιλαμβάνεται στην εξίσωση της δεσμευμένης διακύμανσης και της υψηλής μεταβλητότητας της περιόδου όπου επηρέασε αρνητικά τις διεθνείς αγορές (COVID-19) . Ως δεδομένα χρησιμοποιήθηκαν οι παρατηρήσεις από το 01/2010 μέχρι και το 12/2020 .

Λέξεις κλειδιά : Πρόβλεψη , Μεταβλητότητα , Μοντέλα , GARCH , EGARCH , GJR-GARCH , Στατιστικά σφάλματα .

ABSTRACT

The purpose of this Master Thesis is to predict the volatility of the US Stock Index S&P 500 through GARCH Models . These specific models include and specialize symmetric and asymmetric volatility characteristics (GARCH , EGARCH and GJR - GARCH) . To fulfill the purpose of the research should be selected one model from these, by comparing their predictive ability through the statistical errors which are caused after the forecasting process . Thus , they will be calculated three error indicators MAE , RMSE and MAPE , where through them it is concluded that the model that prevails over the others is GJR - GARCH (1,1) , due to the leverage effect which is included in the equation of conditional variance, and the high volatility of the period where it affected with negative shocks in the global markets (COVID-19). Observations that were used as data are from 01/2010 to 12/2020.

Key Words : Forecast , Volatility , Models , GARCH , EGARCH , GJR-GARCH , Statistical errors .

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΟΧΟΜΕΝΩΝ

Ευχαριστίες	2
ΠΕΡΙΛΗΨΗ	3
ABSTRACT	4
ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΟΧΟΜΕΝΩΝ	5
Κατάλογος πινάκων και διαγραμμάτων	7
ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ	9
1.1 Εισαγωγή.....	9
ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ	13
2.1 Επισκόπηση Βιβλιογραφίας - Εμπειρικές Μελέτες.....	13
2.1.1 Μοντέλα HVM (Ιστορικής Μεταβλητότητας)	14
2.1.2 Μοντέλα ARCH (Αυτοπαλινδρομούμενα Δεσμευμένης Διακύμανσης) .	14
2.1.3 Μοντέλα Stochastic Volatility (Στοχαστικής Μεταβλητότητας)	15
2.1.4 Μοντέλα Long Memory Volatility (Μακροχρόνιας Ισχυρής Μνήμης)..	16
ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ	18
3.1 Χρηματιστηριακός Δείκτης S&P 500.....	18
ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΕΤΑΡΤΟ	24
4.1 Μεταβλητότητα - Ορισμός.....	24
4.2 Κατηγορίες Μεταβλητότητας.....	26
4.3 Ιδιότητες Μεταβλητότητας	27
4.4 Μοντέλα Πρόβλεψης Μεταβλητότητας.....	29
4.4.1 Μοντέλα Ιστορικής Μεταβλητότητας.....	30
4.4.2 Μοντέλα Στοχαστικής Μεταβλητότητας	31
4.4.3 Μοντέλα ARCH και GARCH	32
4.4.4 Πολυμεταβλητή μεταβλητότητα σε ARCH / GARCH μοντέλα (Multivariate ARCH / GARCH).....	35

4.4.5 Μοντέλα GARCH(Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity)	41
4.4.6 Μοντέλο Εκθετικής Πρόβλεψης EGARCH (Exponential GARCH)	42
4.4.7 Μοντέλο Πρόβλεψης GJR- GARCH	43
ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΕΜΠΤΟ	44
Εμπειρική Διερεύνηση - Ανάλυση Δεδομένων	44
5.1 Μεθοδολογία	44
5.2 Διαγνωστικοί Έλεγχοι.....	45
5.2.1 Ανάλυση Μεταβλητότητας (Volatility Clustering)	45
5.2.2 Ανάλυση Αυτοσυσχέτισης της χρονολογικής σειράς.....	47
5.2.3 Έλεγχος Μοναδιαίας Ρίζας.....	49
5.2.4 Έλεγχος ARCH (ARCH effect)	50
ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΚΤΟ	52
6.1 Εκτίμηση Υποδειγμάτων	52
6.1.1 GARCH (1,1).....	52
6.1.2 EGARCH (1,1)	53
6.1.3 GJR- GARCH (1,1).....	53
6.2 Μοντελοποίηση των υποδειγμάτων μεταβλητότητας	54
ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΒΔΟΜΟ	56
7.1 Αξιολόγηση Προβλεπτικής Ικανότητας.....	56
7.2 Δείκτες Στατιστικού Σφάλματος	56
7.3 Αποτελέσματα Πρόβλεψης	58
7.4 Γραφική Απεικόνιση Υποδειγμάτων	59
ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....	63
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	66
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ.....	72

Κατάλογος πινάκων και διαγραμμάτων

• ΠΙΝΑΚΕΣ

Πίνακας 1 : Περιγραφικά Στατιστικά και Κανονικότητα Αποδόσεων	45
Πίνακας 2: Εκτίμηση 3 υποψηφίων υποδειγμάτων μέσω των καθημερινών αποδόσεων	54
Πίνακας 3: Στατιστικά Σφάλματα Πρόβλεψης.....	58

• ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ

Διάγραμμα 1: 10 εταιρείες με την υψηλότερη κεφαλαιοποίηση και τα αντίστοιχα μερίδια στον χρηματιστηριακό δείκτη S&P 500	19
Διάγραμμα 2 : Διαχρονική πορεία τιμής του χρηματιστηριακού δείκτη S&P 500 ...	19
Διάγραμμα 3: Διάρκεια σε μήνες των οικονομικών κρίσεων που επηρέασαν το δείκτη.....	23
Διάγραμμα 4 : Μεταβλητότητα του δείκτη S&P 500	47
Διάγραμμα 5 : Συνάρτηση Αυτοσυσχέτισης (ACF)	48
Διάγραμμα 6: Συνάρτηση Μερικής Αυτοσυσχέτισης (PACF)	48
Διάγραμμα 7 : Διαγνωστικός έλεγχος Ljung-Box Pierce Q-Test για αποδόσεις S&P 500	49
Διάγραμμα 8 : Στατιστικός Έλεγχος μέσω ADF test για μοναδιαία ρίζα	50
Διάγραμμα 9: Έλεγχος ARCH	51
Διάγραμμα 10 : Αποδόσεις και Μεταβλητότητα GARCH (1,1)	59
Διάγραμμα 11 : Αποδόσεις και Μεταβλητότητα EGARCH (1,1)	60
Διάγραμμα 12 : Αποδόσεις και Μεταβλητότητα GJRGARCH (1,1)	61
Διάγραμμα 13 : 100 τελευταίες παρατηρήσεις πραγματικές αποδόσεις και αποδόσεις υποδειγμάτων	62
Διάγραμμα 14 : Δεσμευμένες Διακυμάνσεις και Τυποποιημένα Κατάλοιπα GARCH (1,1) , για το σύνολο των παρατηρήσεων	81

Διάγραμμα 15 : Δεσμευμένες Διακυμάνσεις και Τυποποιημένα Κατάλοιπα EGARCH (1,1) , για το σύνολο των παρατηρήσεων	82
Διάγραμμα 16 : Δεσμευμένες Διακυμάνσεις και Τυποποιημένα Κατάλοιπα GJR-GARCH (1,1) , για το σύνολο των παρατηρήσεων	83
Διάγραμμα 17 : Κατανομή Καταλοίπων QQ Plot GARCH (1,1)	84
Διάγραμμα 18 : Κατανομή Καταλοίπων QQ Plot EGARCH (1,1)	85
Διάγραμμα 19 : Κατανομή Καταλοίπων QQ Plot GJR-GARCH (1,1)	85

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ

1.1 Εισαγωγή

Η πρόβλεψη της μεταβλητότητας των χρηματιστηριακών δεικτών αποτελεί τα τελευταία χρόνια ένα σημαντικό μέρος της ερευνητικής δραστηριότητας της χρηματοοικονομικής και οικονομικής επιστήμης . Η μεταβλητότητα ουσιαστικά μετράει την διασπορά γύρω από την τάση, δηλαδή είναι ο υπολογισμός του μέτρου εύρους μέσα στο οποίο κυμαίνεται η τιμή ενός χρηματοοικονομικού περιουσιακού στοιχείου γύρω από το μέσο επίπεδο του . Οπότε θα πρέπει να υπολογιστεί η διακύμανση σ^2 μέσα από την τυπική απόκλιση των αποδόσεων σ για να οριστεί η μεταβλητότητα. Ο κίνδυνος συνδέεται άμεσα με την μεταβλητότητα και ορίζει τις επιλογές των επενδυτών , π.χ. όσο υψηλότερη μεταβλητότητα που εμφανίζει μια μετοχή ή ένας χρηματιστηριακός δείκτης τόσο μεγαλύτερο είναι το ρίσκο και η απόδοση , άρα τόσο πιο δύσκολη η πρόβλεψη της μελλοντικής τιμής για οποιοδήποτε χρηματοοικονομικό στοιχείο.

Ως αποτέλεσμα της επίδρασης του κινδύνου των χρηματοοικονομικών περιουσιακών στοιχείων , τα τελευταία χρόνια έχουν διεξαχθεί αρκετές εμπειρικές μελέτες. Η ικανότητα της πρόβλεψης της διακύμανσης και του κινδύνου της χρηματοοικονομικής αγοράς είναι πολύ σημαντική για την επιλογή του άριστου χαρτοφυλακίου (Portfolio Optimization) , την διαχείριση του κινδύνου (Risk Management) και στην τιμολόγηση των χρηματοοικονομικών στοιχείων όπως μετοχών, ομολόγων , δεικτών και παραγώγων (Primary , Secondary , Derivatives Market) (Engle & Ng , 1993) . Η μεταβλητότητα , γενικά , είναι πολύ δύσκολη να προβλεφθεί και ,ειδικά, πιο μοντέλο είναι το ιδανικότερο για την αξιολόγηση της προβλεπτικής ικανότητας.

Αρχικά , ο Engle (1982) εισήγαγε τα ARCH μοντέλα και στην συνέχεια ο Bollerslev (1986) και Taylor (1986) επέκτειναν την δουλειά του Engle και δημοσίευσαν πολλές μελέτες (GARCH) με θέμα την μοντελοποίηση και την πρόβλεψη της μεταβλητότητας που διέπει τις αναπτυγμένες αγορές. Τα μετέπειτα χρόνια το ενδιαφέρον των ερευνητών επικεντρώθηκε στα συγκεκριμένα μοντέλα δεσμευμένης διακύμανσης ARCH /GARCH , προσθέτοντας επιπλέον χαρακτηριστικά

στα μοντέλα GARCH με σκοπό την βέλτιστη μοντελοποίηση χρηματοοικονομικών χρονολογικών σειρών . Έτσι μερικά χαρακτηριστικά είναι :

- **Συσσώρευση μεταβλητότητας (Volatility Clustering)**

Εδώ σύμφωνα με τον Mandelbrot (1963) , οι μεταβολές των αποδόσεων δεν παραμένουν σταθερές μέσα στον χρόνο και οι αλλαγές στην μεταβλητότητα δεν είναι τυχαίες (μεγάλη μεταβολή στην τιμή της μετοχής ακολουθείται από μεγάλες μεταβολές και αντίθετα) .

- **Λεπτοκύρτωση ή παχιές ουρές (Leptokurtosis & Tails)**

Εδώ οι Mandelbrot (1963) και Fama (1965), παρατήρησαν ότι οι οριακές κατανομές των αποδόσεων των χρηματοοικονομικών περιουσιακών στοιχείων εμφανίζουν παχύτερες ουρές από αυτές της κανονικής κατανομής .

- **Αποτέλεσμα μόχλευσης (Leverage effect)**

Ο Black (1976) παρατήρησε ότι στις αγορές χρεογράφων η μεταβλητότητα είναι μεγαλύτερη όταν η αγορά παρουσιάζει μείωση και το αντίθετο .

- **Πρόβλεψη μεταβλητότητας (Forecast Volatility)**

Ο Baillie & Bollerslev (1991) παρατήρησαν ότι η μεταβλητότητα είναι μεγαλύτερη στην αρχή και στο τέλος του οικονομικού έτους σε σχέση με τις υπόλοιπες περιόδους . Αυτό συμβαίνει λόγω της σημαντικότητας που δίνουν οι επιχειρήσεις στις λογιστικές καταστάσεις (ισολογισμούς) με σκοπό την σωστή πληροφόρηση στους επενδυτές .

Μερικά από αυτά τα μοντέλα ARCH (Engle , 1982) και διάφορες προεκτάσεις όπως το GARCH (Bollerslev , 1986) , EGARCH (Nelson , 1991) και GJR-GARCH (Glosten –Jagannathan–Runkle , 1993) , αναπτύχθηκαν με σκοπό να μοντελοποιήσουν μερικά από τα παραπάνω χαρακτηριστικά και θα χρησιμοποιηθούν στην παρακάτω διπλωματική εργασία .

Ωστόσο τα ARCH / GARCH μοντέλα παρά την καλή απόδοση σύμφωνα με αυτά τα χαρακτηριστικά εμφανίζουν ορισμένες αδυναμίες σύμφωνα με τους Poon & Granger (2003) :

- Τα κατάλοιπα των μοντέλων τείνουν «φέρουν» λεπτοκύρτωση , έτσι η δεσμευμένη ετεροσκεδαστικότητα δεν μπορεί να εξηγήσει τις παχιές ουρές της κατανομής των αποδόσεων .
- Η υπόθεση της μοναδιαίας ρίζας (ADF test) δεν έχει απορριφθεί σε κάποιες μελέτες όπως του Chou (1988) και Pagan & Schwert (1990) .
- Σε μερικές μελέτες επίσης παρατηρείται ότι το αποτέλεσμα από GARCH εξαφανίζεται όταν αρχίζουν να ελέγχονται μεγάλα θετικά ή αρνητικά σοκ (Aggarwal et al. , 1999) . Δηλαδή σε μερικά ασύμμετρα μοντέλα παρατηρείται αστάθεια σε σχέση με θετικές ή αρνητικές ειδήσεις στην αγορά και αδυναμία σωστής και ακριβής πρόβλεψης της δεσμευμένης διακύμανσης .

Παρακάτω θα αναλυθούν τα κεφάλαια της διπλωματικής εργασίας , σκοπός της παρούσας μελέτης είναι η σύγκριση προβλεπτικής ικανότητας τριών μοντέλων GARCH που είναι συμμετρικά και ασύμμετρα, η μελέτη θα πραγματοποιηθεί για δεδομένα που καλύπτουν τον χρηματιστηριακό δείκτη S&P 500 δηλαδή τον μεγαλύτερο δείκτη της οικονομίας των ΗΠΑ και Παγκοσμίως. Αφορά καθημερινές αποδόσεις από την τελευταία δεκαετία (01/01/2010 - 31/12/2020) δηλαδή ως σύνολο 2.768 παρατηρήσεων . Για την διενέργεια και την αξιολόγηση της πρόβλεψης θα χρησιμοποιηθούν οι τελευταίες 100 παρατηρήσεις και σύμφωνα με αυτές θα χρησιμοποιηθούν τρία στατιστικά σφάλματα (RMSE , MAE , MAPE) και σύμφωνα με αυτά θα προκριθεί ως καλύτερο μοντέλο εκείνο με τα μικρότερα στατιστικά λάθη . Τα αντίστοιχα κεφάλαια της έρευνας είναι τα εξής :

Πέρα από την πίνακα περιεχομένων , την περίληψη , και την εισαγωγή υπάρχει ως Κεφάλαιο 2 η επισκόπηση της βιβλιογραφίας και εμπειρικές μελέτες σχετικά με την πρόβλεψη της μεταβλητότητας και την εκτίμηση υποδειγμάτων . Σε συνέχεια στο Κεφάλαιο 3 υπάρχει η ανάλυση της πορείας του χρηματιστηριακού δείκτη S&P 500 από το 1957 (έτος δημιουργίας δείκτη με 500 εταιρείες) μέχρι και το 2022 και παρατηρούμε τις πολιτικές και οικονομικές κρίσεις στο διάστημα αυτό. Επίσης στο επόμενο Κεφάλαιο 4 αναλύονται τα βασικά χαρακτηριστικά της μεταβλητότητας και τα μοντέλα πρόβλεψης της στην διεθνή βιβλιογραφία . Στα επόμενα Κεφάλαια 5 , 6 και 7 είναι το εμπειρικό κομμάτι της έρευνας καθώς παρουσιάζονται και αναλύονται τα δεδομένα από τον χρηματιστηριακό δείκτη S&P 500 και ακολουθεί η ακριβής μεθοδολογία, ενώ μετέπειτα πραγματοποιείται η

εκτίμηση των προβλεπτικών μοντέλων καθώς και η αξιολόγηση της προβλεπτικής ικανότητας αυτών των υποδειγμάτων .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ

2.1 Επισκόπηση Βιβλιογραφίας - Εμπειρικές Μελέτες

Κατά την διάρκεια των τελευταίων δεκαετιών , έχει αναπτυχθεί πληθώρα εμπειρικών μελετών και ερευνών σχετικά με την πρόβλεψη μεταβλητότητας σε όλους τους τομείς των χρηματιστηριακών αγορών , όπως οι μετοχές, τα δικαιώματα προαίρεσης , οι χρηματιστηριακοί δείκτες , καθώς και άλλες διάφορες χρηματοοικονομικές σειρές . Η πρόβλεψη της μεταβλητότητας δηλαδή επηρεάζει άμεσα και έμμεσα το οικονομικό (μικροοικονομία και μακροοικονομία) και χρηματοοικονομικό περιβάλλον . Σύμφωνα με τους Huang Poon και Clive W . J . Granger (2003) στο άρθρο τους “ Forecasting Volatility in Financial Markets : A review ” παραθέτουν 93 δημοσιευμένες μελέτες με κεντρικό θέμα την πρόβλεψη της μεταβλητότητας χρησιμοποιώντας μοντέλα χρονολογικών σειρών. Σε αυτές τις μελέτες αναδεικνύεται η σημαντικότητα της ανάλυσης της μεταβλητότητας στις επενδύσεις, στην διαχείριση χαρτοφυλακίου καθώς και στην χάραξη οικονομικής πολιτικής . Στόχος όλων των ερευνών είναι η σύγκριση , και η ανάδειξη του μοντέλου με την καλύτερη προβλεπτική ικανότητα . Αυτό που παρατηρείται από την συγκεκριμένη έρευνα είναι ότι χρησιμοποιήθηκαν δεδομένα από διάφορες χρηματοοικονομικές αγορές , με σαφή την έλλειψη μιας κοινής μεθοδολογίας και διαχείρισης των δεδομένων . Ωστόσο τα συμπεράσματα που εξάγονται έχουν πανομοιότυπα στοιχεία οπότε είναι αρκετά χρήσιμα για μετέπειτα ερευνητική δραστηριότητα . Συνεπώς με βάση αυτή την σύγκριση των μοντέλων και τα συμπεράσματα που βγαίνουν από την έρευνα είναι η επιμονή της μεταβλητότητας (Volatility persistence or clustering) στις χρονολογικές σειρές που χρησιμοποιήθηκαν . Τα δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν είναι από ημερήσιες , εβδομαδιαίες και μηνιαίες αποδόσεις για τον υπολογισμό της μεταβλητότητας στον αντίστοιχο χρονικό ορίζοντα . Τα συμπεράσματα σε όλες τις περιπτώσεις, εξάγονται από την αξιολόγηση και την σύγκριση κάθε μοντέλου με την χρησιμοποίηση πληθώρας αριθμού στατιστικών λάθους (Statistical Errors) που θα αναλυθούν παρακάτω .

Στις παραπάνω εμπειρικές μελέτες μπορεί να αναχθεί ότι για την πρόβλεψη της μεταβλητότητας των χρηματοοικονομικών χρονοσειρών υπάρχουν τέσσερα βασικά μοντέλα με τις αντίστοιχες υποκατηγορίες τους τα τελευταία είκοσι χρόνια .

2.1.1 Μοντέλα HVM (Ιστορικής Μεταβλητότητας)

Αρχικά χρησιμοποιήθηκαν μοντέλα ιστορικής μεταβλητότητας (Historic Volatility Models) . Όπου ο Taylor (1987) , χρησιμοποίησε μέγιστες - ελάχιστες και τιμές κλεισίματος , και παρατήρησε ότι η μέθοδος κινητού μέσου (Moving Average Method) λειτουργεί σε καλύτερο βαθμό για την πρόβλεψη μεταβλητότητας σε συναλλαγματικές ισοτιμίες και συγκεκριμένα της ισοτιμίας DM/\$ για μια χρονική περίοδο είκοσι ημερών . Επίσης με βάση ιστορική μεταβλητότητα οι Alford & Boatman (1995) , ανέδειξαν την καλύτερη προβλεπτική ικανότητα της ιστορικής μεταβλητότητας , για ένα δείγμα περίπου 7000 μετοχών , για μετοχές επιχειρήσεων που δραστηριοποιούνται στον ίδιο κλάδο για μια μακροχρόνια περίοδο (5 ετών) .

2.1.2 Μοντέλα ARCH (Αυτοπαλινδρομούμενα Δεσμευμένης Διακύμανσης)

Τα συγκεκριμένα μοντέλα έχουν αποκτήσει μεγάλο ενδιαφέρον από την ερευνητική κοινότητα από τα τέλη της δεκαετίας του '90 μέχρι και σήμερα . Η αρχή της ανάλυσης των μοντέλων ARCH (Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) έγινε το 1989 με τον Akigray όπου αξιολόγησε την προβλεπτική ικανότητα ενός μοντέλου GARCH . Παρατήρησε , ότι το μοντέλο GARCH υπερισχύει σε σχέση με τα μοντέλα EWMA (Equally Weighted Moving Average) και τα HVM (Historic Volatility Models) για όλες τις περιόδους .

Τα επόμενα έτη εισήχθησαν και τα άλλα μοντέλα στην έρευνα όπως τα EGARCH , GJR-GARCH . Συγκεκριμένα , οι Pagan & Schwert (1990) και οι Figlewski & Hasbrouck (1993) , απέδειξαν ότι το μοντέλο EGARCH υπερισχύει από τα μη παραμετρικά μοντέλα (Non - parametric models) και από τα σταθερά μοντέλα (Naïve Models) . Επίσης, ο Figlewski (1997) ανέδειξε το εξής συμπέρασμα ότι τα μοντέλα GARCH λειτουργούν καλύτερα από τα άλλα μοντέλα σε σχέση με την

μεταβλητότητα ενός χρηματιστηριακού δείκτη σε μια βραχυχρόνια και μακροχρόνια περίοδο . Έτσι τα επόμενα χρόνια παρατηρούμε μια αύξηση των ερευνών σε μοντέλα GARCH λόγω της χρησιμότητάς τους σε επενδυτές αλλά και σε αυτούς που χαράζουν την οικονομική πολιτική μιας οικονομίας. Ωστόσο , υπάρχουν και αντιφάσεις σε μερικά αποτελέσματα που εξάγουν μερικά μοντέλα και έτσι δεν υπάρχει το ιδανικό για την ακριβή και την σωστή αξιολόγηση της προβλεπτικής ικανότητας. Οπότε, οι Brailsford & Faff (1996) και ο Taylor (2001) , συμπέραναν ότι το μοντέλο, των Glosten – Jagannathan – Runkle (1993) , GJR-GARCH (ασύμμετρο μοντέλο GARCH) λειτουργεί πολύ καλύτερα σε σχέση με τα υπόλοιπα ακόμα και από τα GARCH , ειδικά στην μεταβλητότητα των χρηματιστηριακών δεικτών . Ωστόσο οι Frances & Van Dijk (1996) υποστήριζαν ότι η προβλεπτική ικανότητα του GJR-GARCH δεν είναι τόσο καλή σε σχέση με τα υπόλοιπα (με δείγμα εβδομαδιαίες παρατηρήσεις) . Αυτό συμβαίνει διότι , χρησιμοποιούνται , διαφορετικά στατιστικά σφάλματα και δείγματα χρονοσειρών που αντιστοιχούν σε διαφορετικές περιόδους και χρεόγραφα (ομόλογα , μετοχές) .

Έτσι αυτή την περίοδο αναδείχθηκαν τα μοντέλα τα οποία απέρριπταν την υπόθεση της συμμετρίας στην μεταβλητότητα , τα οποία παρουσιάζουν καλή προβλεπτική ικανότητα σε σχέση με τα υπόλοιπα , συγκεκριμένα αυτά τα μοντέλα είναι τα EGARCH & GJR-GARCH. Αυτά τα μοντέλα επιλέχθηκαν για την πρόβλεψη της μεταβλητότητας του χρηματιστηριακού δείκτη S&P 500 .

2.1.3 Μοντέλα Stochastic Volatility (Στοχαστικής Μεταβλητότητας)

Τα συγκεκριμένα μοντέλα (SV) εμπεριέχουν έναν περισσότερο όρο σε σχέση με τα μοντέλα ARCH , οπότε είναι πιο ευέλικτα και αποδίδουν καλύτερα . Αυτό ήταν το αποτέλεσμα των πρώτων ερευνητικών δραστηριοτήτων , ωστόσο σύμφωνα με την μελέτη Heyman & Katt (1994) , όπου τα δεδομένα της έρευνας αποτελούσαν χρηματιστηριακοί δείκτες και συναλλαγματικές ισοτιμίες, αποδείχθηκε ότι παρά την υπεροχή τους , στα μοντέλα SV παρατηρούνται ότι τα στατιστικά λάθη της πρόβλεψης των συναλλαγματικών ισοτιμιών είναι μεγαλύτερα σε σχέση με τα αντίστοιχα μοντέλα GARCH , EGARCH και GJR-GARCH . Αντίστοιχες έρευνες εκείνες τις περιόδους , Bluhm & Yu (2000) και Lopez (2001) , αποδεικνύεται ότι τα

μοντέλα SV είναι στην ίδια κλίμακα σε σχέση με τα GARCH , οπότε εξαλείφεται η υπεροχή που προέβλεψαν οι αρχικές έρευνες λόγω των υψηλών στατιστικών σφαλμάτων.

Οι έρευνες μετέπειτα έδειξαν ότι δεν είναι ξεκάθαρο αν τα μοντέλα SV είναι καλύτερα στην πρόβλεψη των χρηματιστηριακών δεικτών , ενώ σύμφωνα με τον Bluhm & Yu (2001) , φάνηκε ότι τα μοντέλα SV είναι κατάλληλα για την πρόβλεψη της μεταβλητότητας των δικαιωμάτων προαίρεσης (Options) κυρίως μέσω του μοντέλου Black - Scholes (1973) όπου μπορεί να προβλεφθεί η τιμή του Ευρωπαϊκού Τύπου Δικαιώματος (European Style Options) , ενώ τα μοντέλα ARCH είναι καλύτερα για την εκτίμηση , της αξίας σε κίνδυνο (VaR) , και χρηματιστηριακών δεικτών .

2.1.4 Μοντέλα Long Memory Volatility (Μακροχρόνιας Ισχυρής Μνήμης)

Οι ακαδημαϊκοί τα τελευταία χρόνια για να εξηγήσουν την μακροχρόνια μνήμη των χρονοσειρών ανέδειξαν τα συγκεκριμένα μοντέλα μερικά από αυτά είναι τα FIGARCH το 1996, τα Log – ARFIMA & RS-GARCH το 2002 . Οι Baillie , Bollershev και Mikkelsen (1996) εισήγαγαν τα μοντέλα FIGARCH και σύμφωνα με τον Vilasuso (2002) τα συγκεκριμένα μοντέλα λειτουργούν καλύτερα στην πρόβλεψη της μεταβλητότητας σε βραχυπρόθεσμη περίοδο για τις συναλλαγματικές ισοτιμίες με τον μεγαλύτερο όγκο συναλλαγών σε καθημερινή βάση . Ωστόσο σύμφωνα με τον Zumbach (2002) ότι δεν υπάρχει σημαντική διαφορά σε σχέση με τα υπόλοιπα μοντέλα στην προβλεπτική ικανότητα για την πρόβλεψη της επόμενης μέρας .

Έπειτα οι Martiens & Zeein (2002) στην αντίστοιχη μελέτη τους εισαγάγουν το μοντέλο ARFIMA , όπου υποστήριξαν ότι το log - ARFIMA μοντέλο είναι καλύτερο (σε σχέση με τους χρηματιστηριακούς δείκτες) της τεκμαρτής μεταβλητότητας (Implied Volatility) αυτά τα μοντέλα IV χρησιμοποιούνται κυρίως για την αγορά και πώληση δικαιωμάτων προαίρεσης . Έτσι και σύμφωνα με τον Li (2002) τα μοντέλα ARFIMA είναι καλύτερα για ένα μεσοπρόθεσμο ορίζοντα ενώ τα μοντέλα IV για βραχυπρόθεσμο .

Αυτές οι εμπειρικές μελέτες αποτελούν την βάση για την διπλωματική έρευνα και αυτό που αποδεικνύεται είναι ότι υπάρχουν σημαντικά χαρακτηριστικά στις χρηματοοικονομικές χρονοσειρές όπως η επιμονή (Persistence) , η μακροχρόνια μνήμη (Long Memory) και οι αντιδράσεις στις μεταβολές (Shocks) , τα οποία επηρεάζουν την πρόβλεψη της για οποιοδήποτε χρονικό ορίζοντα . Αντίστοιχες μελέτες υποστηρίζουν ότι η προσαρμογή της μεταβλητότητας σε καταστάσεις υψηλής ή χαμηλής μεταβλητότητας (Positive or Negative Shocks) ακολουθεί μια διαδικασία που αποτυπώνεται σε δύο ταχύτητες δηλαδή αργή προσαρμογή και μεγαλύτερη επιμονή στην μεταβλητότητα και το αντίθετο . Μοντέλα που αναπτύχθηκαν σε αυτήν την λογική επηρέασαν την ερευνητική κοινότητα , έτσι ο Hamilton (1989) εισήγαγε ένα μοντέλο εναλλασσόμενης τάσης (Regime Switching Model) για να εξηγήσει την επιμονή στην μεταβλητότητα , και οι Cao & Tsay (1992) πρότειναν ένα μοντέλο TAR (Threshold Autoregressive) που συνδυάζει και στοχαστική μεταβλητότητα και εναλλασσόμενη τάση που σε μερικές περιπτώσεις αποδεικνύεται καλύτερο σε σχέση με τα μοντέλα GARCH . Επίσης πολύ σημαντική πληροφορία αποτελεί ότι όποια μοντέλα λαμβάνουν υπόψιν το αποτέλεσμα χρηματοοικονομικής μόχλευσης (leverage effect) λειτουργούν καλύτερα σε περιόδους υψηλής μεταβλητότητας (δηλαδή οι αρνητικές αποδόσεις έχουν μεγαλύτερη επιρροή στην μελλοντική μεταβλητότητα από τις θετικές αποδόσεις) . Τέτοια μοντέλα είναι το RS-GARCH όπου σύμφωνα με τον Gray (1996) και Klaasen (2002) αποδείχθηκε ότι το RS-GARCH (1,1) λειτουργεί καλύτερα στις συναλλαγματικές ισοτιμίες , ενώ αντίστοιχα μοντέλα GARCH όπως τα GJR-GARCH , EGARCH όπου λαμβάνουν αυτήν την υπόθεση της μόχλευσης λειτουργούν καλύτερα στους χρηματιστηριακούς δείκτες και στην πρόβλεψη τους .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ

3.1 Χρηματιστηριακός Δείκτης S&P 500

Ο χρηματιστηριακός δείκτης που θα χρησιμοποιηθεί στην έρευνα είναι ο Standard and Poor's 500 (S&P 500) , είναι ο μεγαλύτερος δείκτης του Χρηματιστηρίου των ΗΠΑ διότι παρακολουθεί την απόδοση μετοχών 500 μεγάλων εταιρειών με συνολική κεφαλαιοποίηση 32 τρισεκατομμύρια δολάρια ΗΠΑ (περίπου το 38% σε σχέση με το παγκόσμιο ΑΕΠ) . Το μεγαλύτερο μερίδιο στην αγορά έχει ο κλάδος της τεχνολογίας πληροφοριών που από την αρχή της δεκαετίας 2010 μέχρι και το 2020 έχει αύξηση της απόδοσης κατά 390 % . Οι μεγαλύτερες εταιρίες του δείκτη αντιπροσωπεύουν το 28 % της κεφαλαιοποίησης έτσι μερικές από αυτές είναι η Apple , Microsoft , Alphabet (A & C) , Amazon , Tesla , Berkshire Hathaway , UnitedHealth , Johnson & Johnson και NVIDIA . Παρακάτω παραθέτω το αντίστοιχο γράφημα για τα μερίδια στο δείκτη S&P 500 .

Top 10 Holdings

Apple Inc.	6.59%
Microsoft Corporation	6.02
Amazon.com Inc.	2.91
Alphabet Inc. Class A	2.05
Alphabet Inc. Class C	1.89
Tesla Inc	1.77
Berkshire Hathaway Inc. Class B	1.55
UnitedHealth Group Incorporated	1.52
Johnson & Johnson	1.46
NVIDIA Corporation	1.19

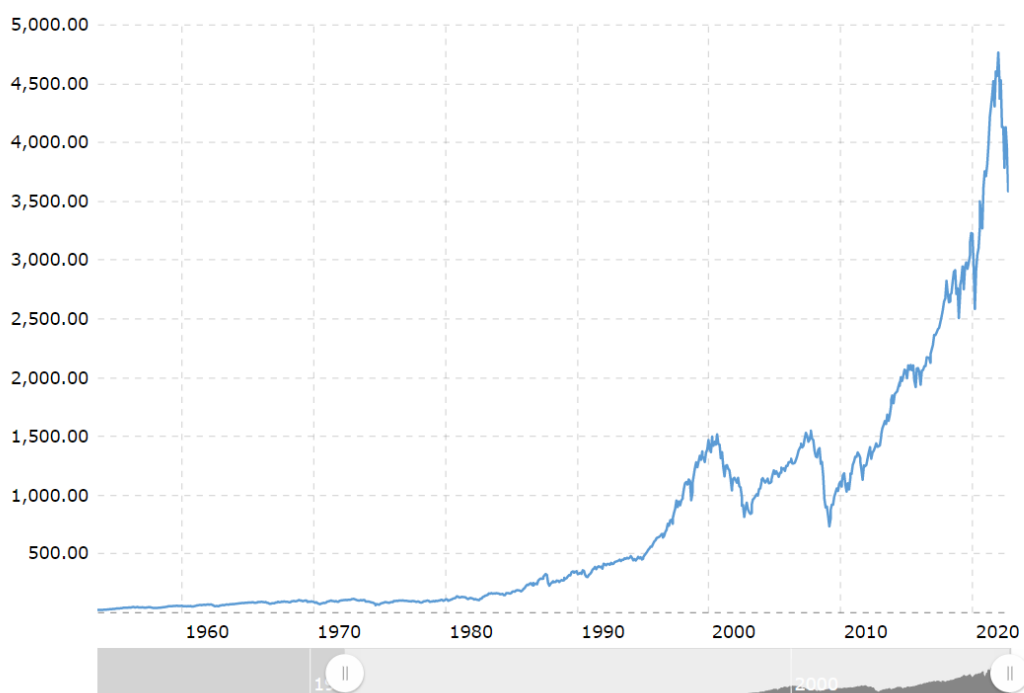
Sector Weights

Information Technology	26.86%
Health Care	15.14
Financials	10.84
Consumer Discretionary	10.57
Communication Services	8.83
Industrials	7.82
Consumer Staples	6.98
Energy	4.34
Utilities	3.08
Real Estate	2.91
Materials	2.62

Διάγραμμα 1: 10 εταιρείες με την υψηλότερη κεφαλαιοποίηση και τα αντίστοιχα μερίδια στον χρηματιστηριακό δείκτη S&P 500 .

(πηγή : <https://www.ssga.com/library-content/products/factsheets/mf/us/factsheet-us-en-svspcx.pdf>)

Η σημερινή μορφή του δείκτη με τις 500 εταιρείες δημιουργήθηκε το 1957 , όπου μέχρι και το 1956 η εταιρεία Standard & Poor's δημιουργήθηκε μετά από συγχώνευση της με την Standard Statistics Company και παρακολουθούσε 233 αμερικανικές εταιρίες σε εβδομαδιαία βάση και 90 σε καθημερινή με σκοπό την πληροφόρηση των επενδυτών . Παρακάτω θα αποτυπωθούν κάποια ιστορικά στοιχεία της μεταβλητότητας του δείκτη S&P 500 και το αντίστοιχο γράφημα της πορείας της τιμής του δείκτη από το 1957 - 2022 :



Διάγραμμα 2 : Διαχρονική πορεία τιμής του χρηματιστηριακού δείκτη S&P 500 .

(πηγή : <https://www.macrotrends.net/2324/sp-500-historical-chart-data>)

- **Περίοδος Ανάκαμψης (Boom) 1957 - 1967**

Γενικά από την περίοδο δημιουργίας του δείκτη σε αρκετές περιόδους παρατηρούμε μεγάλες αυξομειώσεις του δείκτη έτσι μπορούμε να διακρίνουμε μερικές από αυτές

από το 1957 μέχρι και το 2022 . Έτσι από το 1957 μέχρι το 1967 παρατηρούμε συνεχή άνοδο του δείκτη λόγω των ανασυγκρότησης της παγκόσμιας οικονομίας και της οικονομίας των ΗΠΑ από τον Δεύτερο Παγκόσμιο Πόλεμο .

- **Περίοδος Πτώσης (Bear Market) 1967 - 1973**

Ωστόσο το 1967 – 1973 , η ψύχρανση των σχέσεων μεταξύ ΗΠΑ – ΕΣΣΔ , ο πόλεμος του Βιετνάμ (Βόρειο Βιετνάμ υποστηρίζεται από την Σοβιετική Ένωση και Νότιο Βιετνάμ υποστηρίζεται από τις ΗΠΑ) , η αναστολή του συστήματος Bretton Woods (ακύρωση άμεσης μετατρεψιμότητας του δολαρίου ΗΠΑ σε χρυσό) το 1971 , καθώς και η πετρελαϊκή κρίση του 1973 (εμπάργκο πετρελαίου από Αραβικές χώρες) . Έτσι ο χρηματιστηριακός δείκτης S&P 500 επηρεάστηκε αρνητικά λόγω του παγκόσμιου οικονομικού περιβάλλοντος που συνεχώς μεταβαλλόταν .

- **Περίοδος Συνεχούς Ανόδου 1980 - 2000 (Bull Market)**

Την επόμενη περίοδο από το 1980 μέχρι και το 2000 , παρατηρείται συνεχής άνοδος του δείκτη , πέρα της Μαύρης Δευτέρας το 1987 που ο δείκτης σημείωσε την χειρότερη ημερήσια ποσοστιαία απώλεια υποχωρώντας 20,47 % μέσα σε μια μέρα. Ωστόσο ο δείκτης έπειτα ανέκαμψε και αυτό οφείλεται στην ανάπτυξη της παγκοσμιοποίησης και την χαλαρή νομισματική πολιτική της Κεντρικής Τράπεζας των ΗΠΑ (FED) , έτσι ο δείκτης έφτασε το 1998 για πρώτη φορά πάνω από 1.000 μονάδες από την δημιουργία του .

- **Περίοδος Χρηματιστηριακής Φούσκας 2000 - 2002 (Dot - Com Bubble)**

Ωστόσο, αυτό «κύμα» συνεχούς ανάπτυξης του δείκτη δημιούργησε μια χρηματιστηριακή φούσκα που βασιζόταν σε start - up εταιρείες που χρησιμοποιούσαν το διαδίκτυο (Dot - Com Bubble) , έτσι στο αποκορύφωμα της φούσκας dot - com το 2000 ο δείκτης έφτασε στις 1.552,87 μονάδες όμως το 2002 ο δείκτης έπεσε στις 768 μονάδες δηλαδή 50 % κάτω σε σχέση με το 2000 .

- **Περίοδος Παγκόσμιας Χρηματοπιστωτικής Κρίσης 2007 - 2009**

Μέχρι και πριν την έναρξη της Παγκόσμιας Χρηματοπιστωτικής Κρίσης του 2008 , ο δείκτης S&P 500 σημείωσε το υψηλότερο κλείσιμο όλων των εποχών τον Οκτώβριο του 2007 (1.576,09) . Αυτό που παρατηρούμε είναι σημαντική η κάθοδος του δείκτη από την πτώχευση της Lehman Brothers στις 15/09/2008 ο δείκτης «έπεσε» στις 750 μονάδες στα τέλη του Νοεμβρίου 2008 . Ο δείκτης στο τέλος έτους «έκλεισε» με ετήσια απώλεια 38,5 % , ενώ συνέχισε να μειώνεται μέχρι και τον Μάρτιο του 2009 , έτσι αυτή υποχώρηση του 56,8 % ήταν η μεγαλύτερη μετά από τον Β' ΠΠ .

- **Περίοδος Συνεχούς Ανάπτυξης 2013 - 2020 (Bull Market)**

Τα επόμενα χρόνια (2009-2020) ο δείκτης σημείωσε σημαντική άνοδο καθώς τριπλασιάστηκε σε σχέση με το 2009 , το πρώτο υψηλό κλείσιμο μετά την οικονομική κρίση 2007 - 2008 τον Απρίλιο του 2010 έδωσε σημαντικό μήνυμα εμπιστοσύνης στο χρηματοπιστωτικό σύστημα . Το 2013 ο δείκτης ξεπέρασε το υψηλό κλεισίματος σε σχέση με την περίοδο πριν την οικονομική κρίση και έτσι ανέκτησε της ζημιές . Αυτό που παρατηρούμε είναι ότι ο δείκτης κινείται υψηλά λόγω των συμβατικών και μη συμβατικών μέτρων που πήρε η FED με σκοπό να αντιμετωπίσει τις συνέπειες από την κρίση του 2008 όπως η ποσοτική χαλάρωση που μείωσαν την αξία του δανεισμού και βοήθησαν τις επιχειρήσεις να ανακτήσουν τις ζημιές που είχαν στις λογιστικές τους καταστάσεις και στα έσοδα τους στα προηγούμενα έτη , έτσι βελτιώθηκε η οικονομική κατάσταση τους . Παράλληλα υπάρχει η ανάπτυξη των εταιρειών (συνεχής αύξηση κερδών) που ασχολούνται με την τεχνολογία και την πληροφορία και έτσι συμπαρασύρουν την οικονομική ανάπτυξη του πλανήτη και των ΗΠΑ .

Ο δείκτης μέχρι και το 2018 ξεπέρασε τις 2.500 μονάδες και «άγγιξε» τις 3.000 , δείγμα της εμπιστοσύνης της αγοράς σε όλους τους τομείς της οικονομίας. Στα τέλη του 2018 παρατηρείται υψηλή μεταβλητότητα , λόγω της αύξησης της έντασης μεταξύ ΗΠΑ και Κίνας με τον εμπορικό πόλεμο , της εξόδου του Ηνωμένου Βασιλείου (Brexit), της αύξησης του παγκόσμιου χρέους και της αντιστροφής στην καμπύλη των αποδόσεων των ομολόγων των ΗΠΑ, έτσι ο δείκτης είχε την χειρότερη επίδοση από την ύφεση του 2008 , έτσι αποτέλεσε την χειρότερη περίοδο της ανάκαμψης της τελευταίας δεκαετίας . Ωστόσο το επόμενο έτος (2019) είναι μια από

τις καλύτερες χρονιές του δείκτη καθώς πέρασε για πρώτη φορά τις 3.000 μονάδες και αυξήθηκε 31,5 % σε σχέση με το 2018 .

- **Περίοδος Πανδημικής Κρίσης COVID - 19**

Το 2020 θεωρείται χρονιά ορόσημο για τον δείκτη, καθώς παρά την αύξηση του στις 19/02/2020 στις 3.386,15 μονάδες , η μετέπειτα πτώση είναι ταχύς λόγω της έναρξης της πανδημικής κρίσης του COVID - 19 και της οικονομικής ύφεσης που προκάλεσε παγκοσμίως . Στις 23/03/2020 (Κραχ Χρηματιστηρίου) ο δείκτης βρίσκεται στο κατώτερο σημείο καθώς υποχώρησε κατά 34 % σε σχέση με ένα μήνα πριν . Το πρώτο τρίμηνο του 2020 είναι από τα χειρότερα μετά από την οικονομική κρίση του 2008 , ωστόσο μετά ακολουθείται σημαντική άνοδος του με την μεγαλύτερη αύξηση από το 1998 (20%) λόγω των άμεσων οικονομικών μέτρων που λήφθηκαν από τις Κεντρικές Τράπεζες και τα κράτη παγκοσμίως και εξαλείφθηκαν οι ζημιές από την κρίση . Η επόμενη περίοδος χαρακτηρίζεται από συνεχή άνοδο του δείκτη σε αρκετά υψηλά και το 2021 ξεπέρασε τις 4.000 μονάδες . Ενώ αντίθετα το 2022 είναι η περίοδος στασιμότητας λόγω της πολεμικής σύγκρουσης Ρωσίας και Ουκρανίας όπου πλέον ο δείκτης αγγίζει τις 3.500 μονάδες .

Αντίστοιχα παρακάτω παραθέτω το αντίστοιχο γράφημα που αποτυπώνει τις μεγαλύτερες οικονομικές κρίσεις που επηρέασαν το δείκτη S&P 500 και σε πόσους μήνες επανήλθε στα προ - επίπεδα κρίσης , όπως φαίνεται η κρίση που επηρέασε για αρκετούς μήνες το δείκτη ήταν η παγκόσμια χρηματοπιστωτική κρίση του 2007 - 2008 , σε σχέση με την κρίση του 1973,2001 και του 2020 .



Διάγραμμα 3: Διάρκεια σε μήνες των οικονομικών κρίσεων που επηρέασαν το δείκτη. (πηγή : <https://www.macrotrends.net/2324/sp-500-historical-chart-data>)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΕΤΑΡΤΟ

4.1 Μεταβλητότητα - Ορισμός

Η μεταβλητότητα και η πρόβλεψη της είναι στο επίκεντρο των ερευνητικών δραστηριοτήτων τα τελευταία χρόνια και έχει αποκτήσει μια σημαντική δυναμική στην Οικονομετρική Επιστήμη . Όπως έχει αναφερθεί η μεταβλητότητα αποτελεί ένα βασικό μέτρο (Poon and Granger , 2003) για τους τομείς της λήψης επενδυτικών αποφάσεων (ως ερμηνεία της αβεβαιότητας που συμπεριλαμβάνει μια διαχείριση χαρτοφυλακίου) , της τιμολόγησης των χρηματοοικονομικών προϊόντων ειδικά στα δικαιώματα προαίρεσης (options) και σαφώς στην διαχείριση κινδύνου (είναι σημαντικό εργαλείο για την αξιολόγηση του κινδύνου σε μια επένδυση και στην βελτιστοποίηση των αποδόσεων) .

Η μεταβλητότητα μετράει τον κίνδυνο ή την αβεβαιότητα ενός χρηματοοικονομικού προϊόντος . Ο βασικός ορισμός της μεταβλητότητας είναι η τυπική απόκλιση των μεταβολών του λογαρίθμου μιας τιμής ή ενός δείκτη σε μια ορισμένη χρονική περίοδο . Η τυπική απόκλιση συμβολίζεται με σ και η εξάρτηση της από το χρόνο t συμβολίζεται ως σ_t .

Γενικά για να περιγραφεί η μεταβλητότητα μπορεί να χαρακτηριστεί ως στοχαστική διαδικασία και την συμπεριφορά μιας τιμής στο χρόνο , όπως για παράδειγμα η τιμή $S(1)$ σε μια μελλοντική στιγμή εξαρτάται από την σημερινή τιμή $S(0)$ και μια τυχαία μεταβλητή X , έτσι ώστε :

$$\ln S(1) = \ln S(0) + X$$

$$X \sim N(\text{μέση τιμή } \mu - 0.5\sigma^2, \text{διακύμανση } \sigma^2)$$

Για παράδειγμα για συνεχή χρόνο και όχι στατικό , έχουμε την παρακάτω εξίσωση :

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz_1$$

$$d\sigma = f_1(\sigma, \dots) + f_2(\sigma, \dots) dz_2$$

Επίσης μπορεί να αποτελέσει την υπό συνθήκη τυπική απόκλιση (Conditional) . Για παράδειγμα , εάν το t μετρά τις ημέρες συναλλαγών και το I_{t-1} αναπαριστά την πληροφορία η οποία είναι γνωστή κατά την χρονική στιγμή $t - 1$.

$$\ln S_t = \ln S_{t-1} + X_t$$

$$X_t \sim N (\text{μέση τιμή } \mu - 0.5 \sigma_t^2, \text{διακύμανση } \sigma_t^2)$$

Ως μεταβλητότητα μπορεί να θεωρηθεί η τιμή από την εξίσωση της αποτίμησης των δικαιωμάτων προαίρεσης , όπως η εξίσωση Black - Scholes δίνει την τιμή ενός δικαιώματος στην αγορά του Ευρωπαϊκού Τύπου ως μια αύξουσα συνάρτηση του σ , δηλαδή της τυπικής απόκλισης της τιμής :

$$c = c(\sigma, \dots)$$

Έτσι μπορούμε να αντικαταστήσουμε την τιμή c με την αγοραία τιμή c_m για την εκτίμηση της αγοράς σ_i , λύνοντας την εξίσωση προς σ_i :

$$c_m = c(\sigma_i, \dots)$$

Ωστόσο για να λυθεί θα πρέπει να χρησιμοποιηθούν αριθμητικές μέθοδοι όπως παρουσίασαν οι Black & Scholes (1973) .

Ως τελευταίος ορισμός της μεταβλητότητας μπορεί να οριστεί ότι η τελευταία αποτελεί μια ιστορική μέτρηση των μεταβολών των τιμών του παρελθόντος και υπολογίζεται ως εξής :

$$\sigma_t^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=0}^{N-1} (X_{t-i} - \bar{X})^2$$

4.2 Κατηγορίες Μεταβλητότητας

Η μεταβλητότητα υπολογίζεται σε συνάρτηση με τις χρονοσειρές των μετοχών και των δεικτών και δεν παρατηρείται άμεσα στις χρηματιστηριακές αγορές . Έτσι υπάρχουν τρεις βασικές κατηγορίες που μπορεί να διατυπωθεί η μεταβλητότητα :

- **Πραγματοποιηθείσα μεταβλητότητα (realized volatility)**

Είναι η ετήσια τυπική απόκλιση των ημερήσιων αποδόσεων του χρηματοοικονομικού μέσου σε μια συγκεκριμένη χρονική περίοδο παρατηρήσεων .

- **Τεκμαρτή μεταβλητότητα (implied volatility)**

Είναι η αναμενόμενη μεταβλητότητα των ρυθμών μεταβολής της τιμής ενός χρηματοοικονομικού μέσου (μετοχές , δείκτες και ομόλογα) . Για να υπολογιστεί η διαδικασία είναι η ίδια με τον υπολογισμό της θεωρητικής τιμής του δικαιώματος προαίρεσης (fair value) όπου εισάγονται όλες οι μεταβλητές , (τιμή υποκείμενου χρηματοοικονομικού μέσου, τιμή εξάσκησης του δικαιώματος, ημερομηνία λήξεως καθώς και η απόδοση του επιτοκίου με μηδενικό κίνδυνο (risk - free rate)) , σε ένα μοντέλο αποτίμησης δικαιωμάτων όπως του Black & Scholes . Εάν στην παραπάνω διαδικασία υπολογισμού της θεωρητικής τιμής ενός δικαιώματος προαίρεσης (option) , εισαχθεί η πραγματική τιμή ενός δικαιώματος σε ένα μοντέλο αποτίμησης εξάγεται η πραγματική τιμή της μεταβλητότητας . Έτσι η τεκμαρτή μεταβλητότητα μας δείχνει με ποιο τρόπο οι επενδυτές εκτιμούν και αξιολογούν την αγορά .

- **Προθεσμιακή μεταβλητότητα (forward volatility)**

Αναφέρεται στην μελλοντική μεταβλητότητα που το υποκείμενο χρηματοοικονομικό στοιχείο θα πρέπει να έχει στη συγκεκριμένη χρονική στιγμή t και για το συγκεκριμένο επίπεδο τιμών S , με στόχο οι σημερινές τιμές των δικαιωμάτων να έχουν δίκαια αξία . Έτσι η προθεσμιακή μεταβλητότητα μπορεί να συνταχθεί με το σύνολο της τεκμαρτής μεταβλητότητας σε μια χρονική στιγμή , όπου σε οποιαδήποτε περίοδο μπορούν να κλειδωθούν συγκεκριμένες θέσεις (put or call option) σε υπάρχοντα δικαιώματα προαίρεσης .

4.3 Ιδιότητες Μεταβλητότητας

Επίσης για τους παραπάνω τύπους μεταβλητότητας παρατηρούνται οι εξής ιδιότητες :

- **Λεπτοκύρτωση (Thick Tails)**

Σύμφωνα με τις μελέτες του Mandelbrot (1963) και του Fama (1965) , οι οριακές κατανομές των αποδόσεων διάφορων αξιών φαίνεται να έχει παχύτερες ουρές (fat tails) από αυτές της κανονικής κατανομής. Αυτό το φαινόμενο είναι η λεπτοκύρτωση και μας αποδεικνύει ότι οι αποδόσεις χαρακτηρίζονται από μεγάλες πιθανότητες ακραίων γεγονότων και συγκεντρώνονται οι τιμές στο κέντρο της κατανομής .

- **Συσσώρευση (Clustering)**

Αυτό που παρατηρούμε είναι ότι η μεταβλητότητα της χρηματοοικονομικής χρονοσειράς σε συνάρτηση του χρόνου δεν παραμένει σταθερή αλλά μεταβάλλεται συνεχώς . Υπάρχουν μερικές περίοδοι όπου η μεταβλητότητα είναι συνεχώς υψηλή ενώ σε άλλες είναι συνεχώς χαμηλή . Αυτό συμβαίνει λόγω εξωγενών κρίσεων (shocks) όπως οι οικονομικές κρίσεις , οι μεταβολές σε μακροοικονομικά μεγέθη (ΑΕΠ , Πληθωρισμός , Επιτόκια Κεντρικής Τράπεζας και λοιπά άλλα) , η επιρροή από την πληροφόρηση (θετικά ή αρνητικά νέα) , οι μεταβολές στους όγκους συναλλαγών καθώς και οι προτιμήσεις των επενδυτών . Για κάθε περίπτωση όμως το πρόσημο των μεταβολών τυπικά δεν είναι ακριβώς προβλέψιμο . Επίσης , η ύπαρξη της συσσώρευσης μεταβλητότητας (clustering) ή αλλιώς το φαινόμενο της «επιμονής» (persistence) ευθύνεται για ένα μέρος άλλα όχι για το σύνολο του φαινομένου των παχιών ουρών που τυπικά παρατηρείται στα χρηματοοικονομικά δεδομένα . Ένα μέρος αυτού του φαινομένου μπορεί να είναι αποτέλεσμα μη κανονικών κατανομών που απλώς έτυχε να έχουν παχιές ουρές . Ιστορικά , οι έρευνες που πραγματοποιήθηκαν σχετικά με το φαινόμενο της συσσώρευσης της μεταβλητότητας

ξεκίνησαν από την δεκαετία του 1960, όπου οι Mandelbrot (1963) και του Fama (1965) συμπέραναν ότι μεγάλες μεταβολές στην τιμή ενός αγαθού ακολουθείται από μεγάλες μεταβολές και το αντίθετο , μικρές μεταβολές τείνουν επίσης σε μικρές μεταβολές . Αυτό σημαίνει ότι οι υψηλές τιμές της μεταβλητότητας σήμερα επηρεάζουν την πρόβλεψη της μελλοντικής μεταβλητότητας για ένα μεγάλο χρονικό διάστημα . Τα τελευταία μοντέλα που έχουν δημιουργηθεί συμπεριλαμβάνουν αυτό το φαινόμενο όπως το υπόδειγμα ARCH, GARCH (Engle , 1982) και SV (Heston , Black & Scholes) .

- **Ισχυρή και μακροχρόνια μνήμη (Long Memory Property)**

Η ισχυρή μνήμη των χρονοσειρών συνδέεται άμεσα με την συσσώρευση της μεταβλητότητας καθώς αναλύεται το σοκ που επηρεάζει την μεταβλητότητα . Έτσι ένα ισχυρό σοκ επηρεάζει σημαντικά την μελλοντική μεταβλητότητα για ένα μεγάλο χρονικό διάστημα . Αυτό που επίσης παρατηρούμε είναι ότι η αυτοσυσχέτιση μεταξύ αποδόσεων και τετραγώνων των αποδόσεων είναι αρκετά υψηλή , το φαινόμενο αυτό επιβεβαιώνεται και από τους Ding & Granger (1996) κυρίως σε χρηματιστηριακούς δείκτες, στις αγορές εμπορευμάτων και στις συναλλαγματικές ισοτιμίες .

- **Επιστροφή προς την μέση τιμή της μεταβλητότητας (Mean Reversion)**

Σε περιόδους υψηλής μεταβλητότητας τείνει σε μια άλλη περίοδο κανονικών διακυμάνσεων των τιμών και αντίθετα σε περίοδο χαμηλής μεταβλητότητας τείνει σε υψηλές διακυμάνσεις των τιμών , αυτό συμβαίνει σε αρκετές χρηματοοικονομικές χρονοσειρές . Οπότε ως συμπέρασμα μπορεί να εξαχθεί ότι οι μακροχρόνιες προβλέψεις της μεταβλητότητας τείνουν να συγκλίνουν σε ένα κανονικό επίπεδο τιμών (μέση μεταβλητότητα) .

- **Ασυμμετρία (Asymmetry)**

Αρχικά υπάρχει αρνητική συσχέτιση της μεταβλητότητας με τις αποδόσεις των χρεογράφων και επίσης μια αρνητική μεταβολή των αποδόσεων προκαλεί μεγαλύτερη μεταβλητότητα από ότι μια ίδια θετική μεταβολή (Nelson & Cao ,1991 ; Glosten , Jagannathan & Runkle , 1993 ; Engle , 1993) αυτό το φαινόμενο είναι γνωστό ως αποτέλεσμα μόχλευσης ή ανατροφοδότησης της μεταβλητότητας (

leverage effect). Σύμφωνα με το μοντέλο αποτίμησης περιουσιακών στοιχείων (CAPM)(Sharpe , 1964) , υπάρχει αρνητική συσχέτιση μεταξύ της αναμενόμενης απόδοσης του χρεογράφου με την μεταβλητότητα αυτό συμβαίνει λόγω της σχέσης της απόδοσης με τον κίνδυνο που αναλαμβάνει ο επενδυτής . Αυτό που παρατηρείται επίσης είναι η αύξηση της τιμής της σχέσης $\frac{\text{ΕΝΑΚΕΦΑΛΑΙΑ}}{\text{ΙΔΙΑΚΕΦΑΛΑΙΑ}}$, λόγω πτώσης της αναμενόμενης απόδοσης μιας μετοχής έτσι αυξάνεται η μεταβλητότητα των αποδόσεων , σύμφωνα με τον Black (1976) αυτό είναι το φαινόμενο της μόχλευσης . Αντίστοιχα το φαινόμενο ανατροφοδότησης της μεταβλητότητας των αποδόσεων είναι ότι σε περίπτωση που υπάρχει υψηλή μεταβλητότητα σε μια μετοχή ή ένα δείκτη , οι επενδυτές για να βελτιστοποιήσουν το χαρτοφυλάκιο τους επιθυμούν να έχουν υψηλότερες μελλοντικές αποδόσεις , αυτό θα πραγματοποιηθεί με την μελλοντική πτώση των τιμών της μετοχής ή του δείκτη .

4.4 Μοντέλα Πρόβλεψης Μεταβλητότητας

Για να μελετηθούν και να αναλυθούν τα μοντέλα GARCH , EGARCH και GJR-GARCH στο επόμενο κεφάλαιο θα πρέπει διατυπωθούν και τα άλλα μοντέλα πρόβλεψης μεταβλητότητας όπως της Ιστορικής Μεταβλητότητας, της Στοχαστικής Μεταβλητότητας και διάφορα άλλα μοντέλα GARCH που χρησιμοποιούνται στην βιβλιογραφία πέρα από αυτά που θα ασχοληθούμε στην ανάλυση των δεδομένων για το δείκτη S&P 500 στο επόμενο κεφάλαιο .

Έτσι στην πρώτη κατηγορία έχουμε τα μοντέλα Ιστορικής Μεταβλητότητας όπου η πρόβλεψη βασίζεται σε παλιές τιμές των τυπικών αποκλίσεων όπως τα μοντέλα Μέσης Τιμής , Κινητού Μέσου Όρου κ.α.. Σαν δεύτερη κατηγορία έχουμε τα μοντέλα Στοχαστικής Μεταβλητότητας όπου μοντελοποιούνται με δυο εξισώσεις (μέσο και διακύμανση). Επίσης σαν τρίτη κατηγορία έχουμε τα μοντέλα ARCH (με μια μεταβλητή και με πολυμεταβλητότητα) τα οποία δεν χρησιμοποιούν την τυπική απόκλιση του δείγματος αλλά χρησιμοποιούν τη μέθοδο της μέγιστης πιθανοφάνειας (Likelihood) και σχηματίζουν την δεσμευμένη διακύμανση των αποδόσεων (Conditional Variance). Τέτοια υποδείγματα είναι τα GARCH κ.α. , επίσης θα αναλυθούν διεξοδικά τα μοντέλα GARCH , EGARCH , GJR-GARCH και θα αναφερθούν επιπλέον ως μοντέλα GARCH τα παρακάτω : IGARCH , APARCH , FIGARCH , QGARCH , TGARCH , CO-GARCH , ZD-GARCH και Spatial GARCH

. Περαιτέρω , θα αναλυθούν ως πολυμεταβλητά μοντέλα ARCH / GARCH τα εξής τα Διανυσματικά GARCH , BEKK GARCH , MGARCH , CCC – GARCH , DCC GARCH , OGARCH καθώς και οι ασυμμετρίες τους .

4.4.1 Μοντέλα Ιστορικής Μεταβλητότητας

- **Μοντέλο Μέσης Τιμής (Historical Mean Model)**

Αποτελεί την πιο απλή μέθοδο πρόβλεψης μεταβλητότητας, στηρίζεται στην υπόθεση ότι η μέση τιμή της μεταβλητότητας του δείγματος του χρηματοοικονομικού μέσου για μια συγκεκριμένη χρονική περίοδο παραμένει σταθερή στο χρόνο . Έτσι η πρόβλεψη της μεταβλητότητας του δείκτη για τον επόμενο μήνα θεωρείται η μέση τιμή της παρατηρούμενης μεταβλητότητας όλων των προηγούμενων μηνών του δείγματος, μαθηματικά μπορεί να εκφραστεί ως εξής :

$$\hat{\sigma}_T^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{j=1}^{T-1} \sigma_j^2 \quad \text{με το } T = t + 1, t + 2, \dots, t + n$$

- **Μοντέλο Κινητού Μέσου Όρου (Moving Average Model)**

Η διαδικασία υπολογισμού γίνεται όταν μια πρόσφατη παρατήρηση είναι διαθέσιμη και έτσι ένας νέος μέσος όρος δημιουργείται για αυτό ονομάζεται και Κινητός Μέσος Όρος . Αυτό που παραμένει σταθερό είναι ο αριθμός δεδομένων της μεταβλητότητας ενώ αλλάζει ο υπολογισμός όταν συμπεριλαμβάνονται οι πιο πρόσφατες παρατηρήσεις . Για να επιλεχθούν τα δεδομένα και να υπολογιστεί ο Κινητός Μέσος Όρος θα πρέπει το συγκεκριμένο μοντέλο να βασιστεί στην κρίση και την εμπειρική γνώση του αναλυτή . Έτσι το μοντέλο μπορεί να υπολογιστεί μαθηματικά ως εξής :

$$F_{T+1} = \frac{1}{L} \sum_{t=1}^L Y_t \quad \text{με } L \text{ να είναι ο αριθμός των δεδομένων } Y \text{ της χρονοσειράς και } F_{T+1} \text{ η πρόβλεψη που συμπεριλαμβάνει την νέα παρατήρηση .}$$

- **Μοντέλο Εκθετικής Εξομάλυνσης (Exponential Smoothing Model)**

Για να υπολογιστεί χρησιμοποιείται ένας σταθμισμένος μέσο όρος των ιστορικών χρονολογικών σειρών με στόχο την πρόβλεψη της μελλοντικής τιμής , δηλαδή λαμβάνει ως πληροφορία τα σφάλματα της πρόβλεψης του παρελθόντος τα οποία προσαρμόζονται για να υπολογισθούν οι μελλοντικές τιμές. Ο υπολογισμός γίνεται ως εξής : $\sigma f_{T+1}^2 = \sigma f_T^2 + \alpha * (\sigma_T^2 - \sigma f_T^2)$ με σf_T^2 πρόσφατη τιμή σφάλματος πρόβλεψης. Το α αποτελεί την σταθερά εξομάλυνσης από μηδέν έως ένα λαμβάνει τιμές , όταν η τιμή είναι κοντά στο 1 , η νέα πρόβλεψη έχει προσαρμοστεί καλύτερα στα σφάλματα πρόβλεψης από το παρελθόν , ενώ αν η τιμή α είναι κοντά στο 0 , η νέα πρόβλεψη που δημιουργείται δεν έχει προσαρμοστεί καλά το μοντέλο στα σφάλματα πρόβλεψης απο το παρελθόν. Η τιμή μπορεί να υπολογιστεί με την μέθοδο μέγιστης πιθανοφάνειας .

4.4.2 Μοντέλα Στοχαστικής Μεταβλητότητας

Τα συγκεκριμένα υποδείγματα διαφέρουν σε σχέση με τα ARCH / GARCH σε σχέση με την μεταβλητότητα που στα SV υποδείγματα εξετάζεται ως στοχαστική με παχιές ουρές κατανομής ενώ τα ARCH / GARCH έχουν μια προσδιοριστική μεταβλητή . Τα μοντέλα SV συμπεριλαμβάνουν δηλαδή τα σοκ που επηρεάζουν την μεταβλητότητα, ωστόσο είναι πολύ δύσκολη η πρακτική διαδικασία τους και η εφαρμογή τους, καθώς είναι μοντέλα ανοιχτής μορφής και δεν υπολογίζεται άμεσα με την διαδικασία μέγιστης πιθανοφάνειας . Μερικά από τα σημαντικότερα μοντέλα είναι τα εξής :

- **Μοντέλο Heston** , είναι το βασικό μοντέλο SV και χρησιμοποιείται κατά κόρον , η βασική προϋπόθεση είναι ότι η διακύμανση ορίζεται από μια τυχαία διαδικασία, επίσης υπάρχει τάση επιστροφής στην μακροπρόθεσμη μέση τιμή.
- Επίσης ένα άλλο σημαντικό μοντέλο SV είναι το **Markov Chain Monte Carlo** των Kim , Shepard και Chib (1998) που μπορεί να υπολογιστεί μέσω :

$$y_t = \beta * e^{\frac{h_t}{2}} * \varepsilon_t , \text{ με το } \varepsilon_t \sim NID(0,1)$$

$$h_t = \mu + \varphi(h_{t-1} - \mu) + \sigma_n * n_t, \text{ με το } n_t \sim NID(0,1)$$

Ισχύει ότι $h_t = \ln(\sigma_t^2)$ όπου η διαδικασία αυτή είναι στάσιμη εάν $|\phi| < 1$, ε_t & n_t δεν συσχετίζονται και ακολουθούν διαδικασία λευκού θορύβου, όπου σ_n η μεταβλητότητα του h_t . Ο σταθερός όρος β είναι ίσος με 1 στην περίπτωση που το $\mu = 0$. Για να εκτιμηθούν οι υπόλοιπες παράμετροι χρησιμοποιείται η μέθοδος ολοκλήρωσης Monte Carlo μέσω αλυσίδων Markov η οποία είναι πιο αποτελεσματική σε σχέση με τις άλλες, η συγκεκριμένη τεχνική βασίζεται επίσης στην Μπαεσιανή Θεωρία Πιθανοτήτων (MCMC Methods). Λοιπά μοντέλα για την πρόβλεψη ενός στοχαστικού μοντέλου είναι η γενικευμένη μέθοδος ροπών με προσομοιώσεις, με αναλυτικές λύσεις, καθώς και η τεχνική προσομοίωσης μέγιστης πιθανοφάνειας.

4.4.3 Μοντέλα ARCH και GARCH

- **Μοντέλα ARCH**

Το συγκεκριμένο οικονομετρικό μοντέλο αυτοπαλίνδρομης δεσμευμένης ετεροσκεδαστικότητας που εισάχθηκε από τον Engle, και έχει ως βάση ότι η διακύμανση του διαταρακτικού όρου δεν είναι συνάρτηση μίας από τις ερμηνευτικές μεταβλητές του μοντέλου, ωστόσο μεταβάλλεται διαχρονικά και σχετίζεται άμεσα στην μεταβλητότητα του διαταρακτικού όρου στο παρελθόν. Επίσης η διακύμανση του στατιστικού σφάλματος του μοντέλου είναι μια αύξουσα συνάρτηση με χρονική υστέρηση, ενώ λόγω ότι τα σφάλματα είναι υψωμένα στο τετράγωνο δεν μας ενδιαφέρει το πρόσημο. Ένα μοντέλο ARCH (p) στηρίζεται στην χρονική υστέρηση (p) οπότε είναι πολύ σημαντική για την εκτίμηση του μοντέλου, έτσι είναι πολύ σημαντική η τάξη της χρονικής υστέρησης καθώς έτσι καθορίζεται το μήκος του χρόνου και επηρεάζει την δεσμευμένη διακύμανση. Όσο μεγαλύτερο το μήκος τόσο μεγαλύτερο είναι το διάστημα που θα εκτείνονται οι επιδράσεις στις διαταραχές. Έτσι όπως έχει αποδειχθεί από τον Engle μεγάλες / μικρές μεταβολές ακολουθούνται από μεγάλες / μικρές μεταβολές είτε θετικές είτε αρνητικές.

- **Ολοκληρωμένο Μοντέλο Πρόβλεψης GARCH (Integrated GARCH)**

Ως βάση αποτελεί ότι ένα ARMA υπόδειγμα έχει μοναδιαία ρίζα όταν ισχύει ότι :

$$\sum_{i=1}^p a_i + \sum_{j=1}^q \gamma_j = 1$$

$$\text{ή } a(p) + \gamma(q) = 1$$

Εάν ένα μοντέλο ικανοποιεί τις παραπάνω υποθέσεις τότε αυτό το μοντέλο καλείται ολοκληρωμένο μοντέλο πρόβλεψης GARCH , στην συγκεκριμένη φάση χρησιμοποιείται ένα μη στάσιμο μοντέλο πρόβλεψης IGARCH (1,1) όπου γράφεται ως εξής :

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \gamma_1 \sigma_{t-1}^2 + (1 - \gamma_1) u_{t-1}^2$$

$$a_t = \sigma_t * u_t$$

Όπου το $\varepsilon_t \sim N(0,1)$ με τον περιορισμό $1 > \gamma_1 > 0$, όταν οι παράμετροι $\alpha_1 + \gamma_1 = 1$, έτσι η πρόβλεψη δίνεται από την ακόλουθη εξίσωση για λ περιόδους :

$$\sigma_h^2(\lambda) = \sigma_h^2(1) + (\lambda - 1)\alpha_0 \quad \lambda \geq 0$$

Στην περίπτωση που η επίδραση της $\sigma_h^2(1)$ στην μελλοντική μεταβλητότητα είναι ισχυρή τότε η πρόβλεψη για την μεταβλητότητα αποτελεί μια ευθεία γραμμή με κλίση α_0 . Αντιθέτως αν το $\alpha_0 = 0$ οι προβλέψεις της μελλοντικής μεταβλητότητας για όλους τους χρονικούς ορίζοντες είναι ίσες με $\sigma_h^2(1)$.

- **Μοντέλο Πρόβλεψης FIGARCH (p,d,q)**

Πολύ σημαντική για τις χρηματοοικονομικές χρονοσειρές είναι η ισχυρή μνήμη, δηλαδή η περίπτωση που ένα ισχυρό σοκ επηρεάζει σε μεγάλο βαθμό και για μεγάλο χρονικό διάστημα για την μελλοντική μεταβλητότητα . Αυτή την ιδιότητα την περιλαμβάνει ένα μοντέλο FIGARCH(1,d,1) σύμφωνα με τους Ding , Granger & Engle (1993), όπου σε περίπτωση το $d=0$ τότε το μοντέλο μετατρέπεται σε ένα απλό GARCH (1,1) , ενώ για $0 < d < 1$ η επίδραση στην πρόβλεψη της μεταβλητότητας μειώνεται με έναν υπερβολικά αργό ρυθμό . Ανατρέπει δηλαδή την υπόθεση ενός IGARCH μοντέλου όπου το αρνητικό σοκ επηρεάζει για πάντα την μεταβλητότητα , όλη αυτή η διαδικασία υπολογίζεται με ένα ARFIMA μοντέλο .

- **Μοντέλο Πρόβλεψης QGARCH**

Το συγκεκριμένο μοντέλο βασίζεται στην ύψωση στο τετράγωνο των όρων (Quadratic GARCH) και χρησιμοποιείται για την μοντελοποίηση την ασύμμετρων επιδράσεων από τα θετικά ή αρνητικά σοκ .

Για παράδειγμα ένα μοντέλο GARCH (1,1) μπορείς να υπολογίσεις το στατιστικό σφάλμα ως εξής :

$$\begin{aligned}\varepsilon_t &= \sigma_t z_t \\ \sigma_t^2 &= K + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 + \varphi \varepsilon_{t-1}\end{aligned}$$

- **Μοντέλο Πρόβλεψης ZD - GARCH**

Το συγκεκριμένο μοντέλο σε αντίθεση με το GARCH , οι Li et al. (2018) υπέθεσαν ότι ο όρος drift είναι ίσος με το μηδέν ($\omega = 0$) σε ένα μοντέλο GARCH (1,1) , αντίστοιχα έχουμε την παρακάτω εξίσωση :

$$\sigma_t^2 = \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$$

Στο συγκεκριμένο μοντέλο δεν απαιτείται οι όροι $\alpha + \beta = 1$ και ενσωματώνει το μοντέλο σταθμισμένου κινητού μέσου όρου (EWMA) στο μοντέλο διακύμανσης RiskMetrics (δημιουργήθηκε από την JPMorgan & Co , 1992). Έτσι σε αυτό το μοντέλο ο όρος $\omega = 0$ (έτσι ο όρος ονομάζεται Zero Drift) είναι μη στάσιμος και γενικά τα αποτελέσματα που προκύπτουν είναι διαφορετικά σε σχέση με το κλασικό μοντέλο GARCH, ενώ οι όροι α , β μπορούν να εκτιμηθούν με την γενικευμένη μέθοδο QMLE μέγιστης πιθανοφάνειας .

- **Μοντέλο Πρόβλεψης Spatial GARCH**

Η διαδικασία που ακολουθήθηκε από τους Otto , Schmid & Garthoff (2018) βρίσκεται σε αντίθεση , με την χρονική υστέρηση του μοντέλου ARCH όπου η κατανομή είναι γνωστή από ένα σύνολο πληροφοριών από τις προηγούμενες περιόδους , σε αυτό το μοντέλο λαμβάνει γνώση το χωροχρονικό περιβάλλον των κατανομών και κατά πόσο επηρεάζεται από «γειτονικές τοποθεσίες» και έτσι δίνεται η παρακάτω εξίσωση :

$$\varepsilon(s_i) = \sigma(s_i)z(s_i)$$

$$\sigma(s_i)^2 = \alpha_i + \sum_{v=1}^n \rho w_{iv} \varepsilon(s_v)^2$$

Όπου το s_i δηλώνει την χωρική θέση (i) και το w_{iv} αναφέρεται στην καταχώρηση ενός πίνακα με χωρικό βάρος, και έτσι καθορίζεται ποιες «τοποθεσίες» είναι αλληλεξαρτώμενες και συσχετίζονται.

4.4.4 Πολυμεταβλητή μεταβλητότητα σε ARCH / GARCH μοντέλα (Multivariate ARCH / GARCH)

Η μοντελοποίηση των πολυμεταβλητών συστημάτων μεταβλητότητας είναι πανομοιότυπη με την μοντελοποίηση μιας μεταβλητής δηλαδή ενός χρηματοοικονομικού περιουσιακού στοιχείου, η συγκεκριμένη ανάλυση των πολυμεταβλητών μοντέλων GARCH πραγματοποιείται για σκοπούς μελλοντικής ερευνητικής δραστηριότητας σχετικά με τον χρηματιστηριακό δείκτη S&P 500 καθώς και για μια πιο ακριβής ανάλυση της πρόβλεψης μεταβλητότητας μέσω GARCH Μοντέλων. Η πολυμεταβλητότητα εξασφαλίζει ότι η πρόβλεψη της συνδιακύμανσης είναι θετικά ορισμένη, ενώ περιορίζει τον αριθμό των παραμέτρων που χρειάζονται για να εκτιμηθεί όσο ο αριθμός των σειρών μεγαλώνει, στο συγκεκριμένο υποκεφάλαιο θα αναλυθούν τα παρακάτω μοντέλα τα οποία αποτελούνται από δυο και παραπάνω μεταβλητές όπως τα Διανυσματικά GARCH, BEKK GARCH, MGARCH, OGARCH, CCC – GARCH, DCC GARCH καθώς και οι ασυμμετρίες τους.

Τα συγκεκριμένα μοντέλα μεταβλητότητας χρησιμοποιούν τις αποδόσεις λόγω ότι είναι κατάλληλες όταν η χρονική περίοδος είναι μικρή με αποτέλεσμα ο δεσμευμένος μέσος να είναι μικρότερος από την δεσμευμένη διακύμανση και αντίθετα όταν η χρονική περίοδος είναι μεγάλη. Γενικά αυτό που παρατηρείται στα συγκεκριμένα μοντέλα είναι ότι είναι ικανά να προβλέψουν την συνδιακύμανση σε συγκεκριμένο χρονικό ορίζοντα t χρησιμοποιώντας τις πληροφορίες από την πρόβλεψη στο παρελθόν. Η πρόβλεψη πραγματοποιείται σε πολλά επίπεδα από τα περισσότερα μοντέλα που θα αναλυθούν ενώ μπορεί να πραγματοποιηθεί και πιο

άμεση τεχνική πρόβλεψης , με σκοπό την προσαρμογή των ημερήσιων δεδομένων σε ένα μακροχρόνιο ορίζοντα.

- **Διανυσματικά GARCH μοντέλα (Vectors GARCH Models)**

Το πρώτο πολυμεταβλητό ARCH , GARCH μοντέλο ήταν το διανυσματικό σύμφωνα και με την ερευνητική δραστηριότητα των Bollerslev , Engle και Wooldridge (1988) , το συγκεκριμένο μοντέλο χρησιμοποιεί τον πίνακα δεσμευμένης διακύμανσης . Με το πίνακα θετικά ορισμένο ο τελεστής vec επιτρέπει τον υπολογισμό του σταυρωτού γινομένου ενώ επηρεάζει την συνδιακύμανση της κάθε χρονικής περιόδου . Συγκεκριμένα χρησιμοποιείται ένα διμεταβλητό μοντέλο ενώ ο τύπος της συνδιακύμανσης ενός GARCH μοντέλου είναι ο εξής :

$$vec(\Sigma_t) = vec(C) + A vec(\varepsilon_{t-1} \varepsilon'_{t-1}) + B vec(\Sigma_{t-1})$$

Γενικά η εξέλιξη της διακύμανσης εξαρτάται σημαντικά τις αποδόσεις και τα εξωτερικά γινόμενα του παρελθόντος. Αυτό που παρατηρούμε είναι ότι είναι δύσκολο να χρησιμοποιηθεί ένα διανυσματικό GARCH μοντέλο εφόσον είναι αδύνατο να διατυπωθούν υποθέσεις για τους όρους A και B οι οποίες να διαβεβαιώνουν ότι το Σ_{t-1} είναι θετικά ορισμένος . Έτσι το διαγώνιο γινόμενο vec είναι πιο επιτυχημένο με την πρόβλεψη της συνδιακύμανσης λόγω της υπόθεσης ότι η δεσμευμένη διακύμανση είναι θετικά ημι-ορισμένη ωστόσο απαιτούνται επιπλέον περιορισμοί για να διαβεβαιωθεί ότι η δεσμευμένη διακύμανση είναι ορισμένη θετική.

- **BEKK GARCH**

Το συγκεκριμένο μοντέλο δημιουργήθηκε από τους Baba, Engle , Kraft και Kroner σε συνέχεια των προβλημάτων που δημιουργήθηκαν από το διανυσματικό GARCH μοντέλο και τους περιορισμούς . Έτσι διευθετήθηκαν άμεσα οι δυσκολίες εύρεσης των περιορισμών για τον προσδιορισμό ενός vec , αυτό που προκύπτει είναι ότι οι αλγεβρική μορφή είναι θετικά ημιορισμένη και το άθροισμα ενός θετικά

ημιορισμένου πίνακα και ενός θετικά ορισμένου πίνακα έχουν ως αποτέλεσμα ο πίνακας να είναι θετικά ορισμένος .

Ο τύπος που χρησιμοποιείται για την συνδιακύμανση είναι : $\Sigma_t = CC' + A \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-1}' A' + B \Sigma_{t-1} B'$, όπου το C να είναι ένας κάτω τριγωνικός πίνακας k x k διαστάσεων και τα A , B είναι οι πίνακες παραμέτρων k x k διαστάσεων. Αυτό που παρατηρείται είναι ότι το BEKK GARCH είναι μια περιορισμένη έκδοση ενός vec GARCH μοντέλο με κυρίως σκοπό την αντιμετώπιση των προβλημάτων που προέκυψαν στον έλεγχο των περιορισμών . Επίσης όπως αποδεικνύεται το ολοκληρωμένο μοντέλο BEKK μπορεί να δημιουργηθεί όταν ο αριθμός των στοιχείων είναι χαμηλός ενώ το στο διαγώνιο BEKK μειώνει το πλήθος των παραμέτρων περιορίζοντας τους A και B σε διαγώνιους πίνακες . Πέρα από αυτά τα δύο είδη BEKK GARCH υπάρχει και το βαθμωτό BEKK GARCH (1,1) το οποίο έχει ως πλεονέκτημα ότι μπορεί να θέσει ως στόχο την συνδιακύμανση και οι παράμετροι μπορούν να εκτιμηθούν με την μέθοδο μέγιστης πιθανοφάνειας και έτσι το μοντέλο μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε χαρτοφυλάκια με αρκετά χρηματοοικονομικά περιουσιακά στοιχεία σε αντίθεση με τα μοντέλα χωρίς στόχο συνδιακύμανσης .

- **Matrix GARCH (MGARCH)**

Το συγκεκριμένο μοντέλο εμπεριέχει ένα σύνολο από παραμετροποιήσεις οι οποίες περιλαμβάνουν το διαγώνιο vec και μια εναλλακτική παραμετροποίηση ενός διαγώνιου BEKK . Η συνδιακύμανση σε ένα MGARCH (1,1) ορίζεται ως εξής : $\Sigma_t = CC' + AA' \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-1}' + BB' \Sigma_{t-1}$, με το A , B , C να είναι οι κάτω τριγωνικοί πίνακες .

Ο Engle και Ding (2001) απέδειξαν ότι αν τα U , V είναι θετικά ημιορισμένοι πίνακες τότε το άθροισμα είναι θετικά ημιορισμένο όπου όταν συνδυάζεται με δευτεροβάθμιες (υψωμένο στο τετράγωνο) μορφές του μοντέλου έχει ως αποτέλεσμα ότι τα Σ_t είναι θετικά ορισμένα όσο το C είναι πλήρους τάξης . Αυτό που αναδεικνύεται επίσης είναι ότι ο ορισμός ενός μοντέλου MGARCH είναι πανομοιότυπος με ένα διαγώνιο BEKK μοντέλο , όπως και η βαθμωτή μορφή του MGARCH με το βαθμωτό BEKK .

- **Σταθερής Δεσμευμένης Συσχέτισης (CCC GARCH)**

Το μοντέλο σταθερής δεσμευμένης συσχέτισης (Constant Conditional Correlation GARCH) δημιουργήθηκε από τον Bollerslev (1990) και διαφέρει σε μερικά σημεία σε σχέση με τα άλλα τρία μοντέλα (vec , BEKK , MGARCH) . Αναλύει την δεσμευμένη συνδιακύμανση με k δεσμευμένες διακυμάνσεις και δεσμευμένη συσχέτιση όπου είναι σταθερά . $\Sigma_t = D_t R D_t$, με το D_t να είναι ο διαγώνιος πίνακας , επίσης αξίζει να επισημανθεί ότι οι δεσμευμένες διακυμάνσεις είναι τυπικά μοντελοποιημένες χρησιμοποιώντας τα GARCH (1,1) μοντέλα ωστόσο μπορεί να χρησιμοποιηθεί και το EGARCH μοντέλο. Η μοντελοποίηση μπορεί να πραγματοποιηθεί με διάφορα μοντέλα τα οποία θα προσαρμόζονται στις δυναμικές της μεταβλητότητας . Για να εκτιμηθεί το CCC GARCH υπάρχουν στάδια σύμφωνα με τον Bollerslev , αρχικά προσαρμόζεται τα k δεσμευμένα μοντέλα διακύμανσης σύμφωνα με το GARCH (1,1) ή EGARCH (1,1) με σκοπό να παραχθεί ένα διάνυσμα των τυποποιημένων καταλοίπων . Έπειτα εκτιμάται η σταθερά της δεσμευμένης συσχέτισης χρησιμοποιώντας τον συντελεστή τυπικής συσχέτισης στα κατάλοιπα .

- **Δυναμικής Δεσμευμένης Συσχέτισης (DCC GARCH)**

Το μοντέλο δυναμικής δεσμευμένης συσχέτισης επεκτείνει το CCC GARCH χρησιμοποιώντας ένα βαθμωτό BEKK όπως οι δυναμικές στις δεσμευμένες συσχέτισεις και έτσι το R στο CCC αντικαθίσταται με το R_t στο DCC (Engle , 2002) . Όπως και στο CCC GARCH έτσι και εδώ η δεσμευμένη διακύμανση ακολουθεί την διαδικασία GARCH (1,1) . Ο τύπος που χρησιμοποιείται είναι ο εξής $\Sigma_t = D_t R_t D_t$ με $R_t = Q_t \Phi Q_t^*$, το R_t είναι ένας πίνακας συσχετίσεων με τα στοιχεία στην διαγώνιο να είναι ίσα με το 1 . Η διαδικασία που ακολουθεί Q_t είναι παραμετροποιημένη με παρόμοιο τρόπο όπως το BEKK και υπάρχουν τρία βήματα για την εκτίμηση του μοντέλου , τα δύο πρώτα βήματα είναι ίδια με αυτά της Σταθερής Δεσμευμένης Διακύμανσης (CCC GARCH) , ενώ το τρίτο διαφέρει στην εκτίμηση διότι προβάλλει την εκτίμηση της συσχέτισης , για την εκτίμηση των παραμέτρων οι οποίες επηρεάζουν τις δυναμικές δεσμευμένης συσχέτισης .

- **Ορθογώνια GARCH (OGARCH)**

Τα κύρια μέρη του μοντέλου είναι ένας πίνακας αποδόσεων ε που ορίζεται ως $F=\varepsilon U$, με το U να είναι ο πίνακας των ιδιοδιανυσμάτων των εξωτερικών γινομένων του ε . Το ορθογώνιο GARCH (OGARCH) , χρησιμοποιεί το πρώτο μέρος για την μοντελοποίηση της δεσμευμένης συνδιακύμανσης υποθέτοντας ότι οι παράγοντες είναι μη συσχετισμένοι και δεσμευμένοι . Η συνδιακύμανση προκύπτει μέσω της εξίσωσης : $\Sigma_t = \beta \Sigma_t^f \beta' + \Omega$, όπου το β είναι ένας πίνακας διάστασης $k \times p$ (πίνακας παραγόντων – factor loadings) , που αντιστοιχεί στον p παράγοντα με το μεγαλύτερο συνολικό R^2 , επίσης η δεσμευμένη διακύμανση των παραγόντων είναι διαγώνια . Αντίστοιχα η δεσμευμένη διακύμανση ακολουθεί την διαδικασία GARCH (1,1) .

- **Ασύμμετρα Πολυμεταβλητά GARCH Μοντέλα**

Σε όλα τα μοντέλα που αναφέρθηκαν παρατηρούμε ότι όλα τα τυπικά πολυμεταβλητά ARCH / GARCH μοντέλα είναι συμμετρικά δηλαδή οι καμπύλες των τυποποιημένων καταλοίπων είναι παρόμοιες ($\varepsilon_t, -\varepsilon_t$) . Τα μοντέλα σε όλες τους τις εκδοχές μπορούν να επιτρέψουν δεσμευμένες ασυμμετρίες στην συνδιακύμανση οι οποίες μπορεί να είναι σημαντικές όταν μοντελοποιούνται για παράδειγμα οι αποδόσεις μετοχών και δεικτών . Στα διάφορα ασύμμετρα μοντέλα π.χ. ασύμμετρο διαγώνιο βαθμωτό BEKK , ελέγχεται η αντίδραση της συνδιακύμανσης σε αρνητικά σοκ ή άσχημα νέα και έτσι μπορεί να μοντελοποιηθεί η μεταβλητότητα με ένα GJR – GARCH (1,1,1) μοντέλο . Όλες οι δεσμευμένες διακυμάνσεις ακολουθούν την διαδικασία GJR – GARCH (1,1,1) όπως και οι συνδιακυμάνσεις , στο συγκεκριμένο μοντέλο χρησιμοποιούνται τρεις όροι για την ασύμμετρη διαδικασία λόγω του πίνακα που δημιουργείται με τρεις παραμέτρους .

- **Εκτίμηση Πολυμεταβλητών Μοντέλων GARCH**

Για την εκτίμηση ενός Πολυμεταβλητού Μοντέλου GARCH , χρησιμοποιείται η μεγιστοποίηση της πολυμεταβλητής συνάρτησης πιθανοφάνειας του Gauss . Η εκτίμηση του μοντέλου είναι σχετικά απλή όταν το μέγεθος των μεταβλητών που θα χρησιμοποιηθεί είναι μικρό ή όταν το μοντέλο έχει παραμετροποιηθεί σωστά μετά από την διαδικασία που ακολουθήθηκε στην εκτίμηση π.χ. ένα βαθμωτό μοντέλο BEKK . Το πρόβλημα που δημιουργείται οφείλεται στην δυσκολία εύρεσης της κατάλληλης τιμής λόγω των πιθανοτήτων που κινούνται σε πολλές κατευθύνσεις , καθώς και η δυσκολία υπολογισμού των πιθανοτήτων λόγω υψηλού αριθμού αγνώστων παραμέτρων . Για να αντιμετωπιστεί αυτό το πρόβλημα έχουν δημιουργηθεί διάφορα στάδια σε όλα τα μοντέλα με στόχο την σωστή και ακριβής πρόβλεψη .

Έτσι σε ένα μοντέλο BEKK που έχει ως στόχο την πρόβλεψη της συνδιακύμανσης χρησιμοποιείται η συνάρτηση intercept για τις συνδιακυμάνσεις των αποδόσεων , στόχος αυτής της αριθμητικής μεθόδου είναι η εξάλειψη των αγνώστων παραμέτρων και η χρησιμοποίηση αυτών των παραμέτρων που διέπονται από δυναμικές δεσμευμένης διακύμανσης .

Αντίστοιχα σε ένα μοντέλο CCC GARCH για την εκτίμηση του θα πρέπει να υπάρχει προσαρμογή του k GARCH μοντέλων μιας μεταβλητής με μια εκτίμηση κλειστής μορφής που διέπεται από σταθερή δεσμευμένη συσχέτιση .

Έτσι με τα δυο προηγούμενα στάδια για τα CCC GARCH (Συσχέτιση) και BEKK (Συνδιακύμανση) , δηλαδή σε καθένα από τα δυο μοντέλα υπάρχει στόχος για την δεσμευμένη συσχέτιση και συνδιακύμανση αντίστοιχα . Με αυτήν την διαδικασία μπορεί να εκτιμηθεί ένα DCC GARCH Μοντέλο το οποίο διαφέρει από το CCC GARCH λόγω της Δυναμικής Δεσμευμένης Συσχέτισης που διέπεται το μοντέλο DCC GARCH .

Επίσης το Ορθογώνιο Μοντέλο GARCH είναι σχετικά πιο απλό στην εκτίμηση του λόγω της κλειστής μορφής του εκτιμητή για την διακύμανση , και χρησιμοποιεί απλά την προσαρμογή $p \leq k$ GARCH μοντέλων .

4.4.5 Μοντέλα GARCH(Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity)

Σύμφωνα με το οικονομετρικό μοντέλο του Engle παρατηρήθηκε ότι σε ορισμένες χρονολογικές σειρές χρειάζεται μεγάλη τάξη μεγέθους (p) ώστε να εξαχθούν πιο ασφαλή συμπεράσματα . Έτσι ο Bollershev το 1986-87 εισήγαγε ένα γενικευμένο μοντέλο ARCH , καθώς πρόσθεσε αυτοπαλίνδρομους όρους κινητού μέσου όρου των τετραγώνων δεσμευμένων διακυμάνσεων (q) . Έτσι πήρε την μορφή GARCH (p,q) , και έτσι η υπό συνθήκη διακύμανση σ_t^2 είναι συνάρτηση των τιμών με χρονική υστέρηση , οπότε δημιουργείται η παρακάτω εξίσωση :

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p u_{t-p}^2 + \gamma_1 \sigma_{t-1}^2 + \dots + \gamma_q \sigma_{t-q}^2$$

Αυτή η σχέση είναι γνωστή ως γενικευμένη αυτοπαλίνδρομη υπό συνθήκη ετεροσκεδαστικότητα ή μοντέλο GARCH . Το πιο γνωστό μοντέλο που χρησιμοποιείται από την διεθνή ερευνητική κοινότητα είναι αυτό με μια χρονική υστέρηση GARCH (1,1) και έχει την συγκεκριμένη μορφή :

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \gamma_1 \sigma_{t-1}^2$$

Έτσι η εκτίμηση του υποδείγματος με $p=q=1$ είναι πιο εύκολη σε σχέση με περισσότερες χρονικές υστερήσεις . Αυτό που προκύπτει επίσης είναι ότι οι συντελεστές του μοντέλου GARCH (1,1) σε χρηματοοικονομικές χρονοσειρές εμφανίζει τιμές από 0,25 και 0,75 για τα α & γ αντίστοιχα (Kutana & Zhoud , 2006). Το άθροισμα θα πρέπει να είναι μικρότερο του 1 . Οι συγκεκριμένοι συντελεστές είναι πολύ σημαντική για την γενικότερη εικόνα της μεταβλητότητας και της εκτίμησης της, έτσι υψηλές τιμές του α δείχνουν ότι η μεταβλητότητα αντιδρά σχετικά έντονα στις «ειδήσεις» της αγοράς, και αντίστοιχα υψηλές τιμές του γ δείχνουν ότι υπάρχουν μεγάλες διαταραχές στην δεσμευμένη διακύμανση που θα χρειαστούν περισσότερο χρόνο να μειωθούν . Οπότε και στις δυο περιπτώσεις παρατηρούνται υψηλές κορυφές με μεγάλη διάρκεια . Επίσης ο σταθερός όρος μας δείχνει την μέση τιμή της μεταβλητότητας .

4.4.6 Μοντέλο Εκθετικής Πρόβλεψης EGARCH (Exponential GARCH)

Το συγκεκριμένο μοντέλο όπως και το επόμενο λαμβάνουν υπόψιν και το αποτέλεσμα της μόχλευσης (leverage effect) , όπως και τα άλλα δύο σημαντικά χαρακτηριστικά των χρηματοοικονομικών χρονοσειρών (συσσώρευση μεταβλητότητας και την λεπτοκύρτωση) . Έτσι οι κακές ειδήσεις επηρεάζουν με διαφορετικό τρόπο την χρονοσειρά σε σχέση με τις θετικές ειδήσεις. Δηλαδή τα αρνητικά σοκ έχουν μεγαλύτερη ισχύ σε σχέση με τα θετικά σοκ . Έτσι ο Nelson και Cao (1991) για να λύσουν το πρόβλημα εισήγαγαν το εκθετικό μοντέλο EGARCH , όπου το συγκεκριμένο μοντέλο διαφέρει με το GARCH διότι χρησιμοποιεί λογαρίθμους . Επομένως έχει μεγάλη σημασία το πρόσημο των υστερήσεων των καταλοίπων όπως και το μέγεθος . Ενώ το αποτέλεσμα της δεσμευμένης διακύμανσης εξασφαλίζεται λόγω των λογαρίθμων . Έτσι ένα τέτοιο μοντέλο EGARCH (p,q) είναι το εξής :

$$\log \sigma_t^2 = \omega + \sum_{k=1}^q \beta_k g(\varepsilon_{t-k}) + \sum_{k=1}^p \alpha_k \log \sigma_{t-k}^2$$

όπου το $g(\varepsilon_t)$ αποτελεί συνάρτηση του μεγέθους και του πρόσημου του ε_t και παίρνει την εξής μορφή :

$$g(\varepsilon_t) = \theta * \varepsilon_t + \gamma * \{|\varepsilon_t| - E(|\varepsilon_t|)\}$$

Τα γ , θ είναι σταθερές , έτσι αν το $\gamma = 0$ τότε το θετικό σοκ έχει την ίδια επίδραση στην μεταβλητότητα με ένα αρνητικό σοκ του ίδιου μεγέθους . Αντίστοιχα αν έχει αρνητικές τιμές τότε ένα θετικό σοκ μειώνει την μεταβλητότητα ενώ αν έχει θετικές τιμές τότε το θετικό σοκ αυξάνει την μεταβλητότητα . Επίσης το πιο διαδεδομένο μοντέλο είναι το EGARCH (1,1) ενώ αντίστοιχα μπορούν να γίνουν προβλέψεις για την επόμενη περίοδο (steps ahead forecasts) .

4.4.7 Μοντέλο Πρόβλεψης GJR- GARCH

Είναι το μοντέλο το οποίο εισάχθηκε το 1993 από τους Glosten , Jagannathan και Runkle και αποτελεί μια απλούστευση της προσαρμογής της ασυμμετρίας της μεταβλητότητας της χρονοσειράς . Ενώ το πιο διαδεδομένο μοντέλο είναι το GJR-GARCH (1,1) που δίνεται ως εξής στην παρακάτω συνάρτηση :

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q (\alpha_i * \varepsilon_{t-i}^2 + \gamma_i * s_{t-1}^- * \varepsilon_{t-1}^2) + \sum_{j=1}^p \beta_j * \sigma_{t-j}^2$$

Το s_{t-1} είναι μια ψευδομεταβλητή που παίρνει τιμή ίση με 1 όταν $\gamma_i < 0$ και 0 όταν $\gamma_i > 0$. Η επίδραση του ε_t^2 στην δεσμευμένη διακύμανση εξαρτάται από το πρόσημο του ε_t^2 . Σε περίπτωση μόχλευσης το $\gamma_i > 0$ αντίθετα όταν δεν υπάρχει μόχλευση θα πρέπει το $\gamma_i = 0$, έτσι τα παλιά θετικά σοκ έχουν την ίδια επίδραση στην παρούσα μεταβλητότητα της χρονοσειράς με τα παλιά αρνητικά σοκ . Επίσης και εδώ μπορούν να γίνουν προβλέψεις για την επόμενη περίοδο (steps ahead forecasts) όπως και στο GARCH , EGARCH .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΕΜΠΤΟ

Εμπειρική Διερεύνηση - Ανάλυση Δεδομένων

5.1 Μεθοδολογία

Ο χρηματιστηριακός δείκτης που επιλέχθηκε για την ερευνητική δραστηριότητα και την μελέτη και πρόβλεψη της μεταβλητότητας είναι ο S&P 500 . Ο οποίος περιέχει την απόδοση των μετοχών για τις 500 μεγαλύτερες εταιρείες του Αμερικανικού Χρηματιστηρίου . Η χρονοσειρά που εξετάζεται αποτελεί τις τιμές κλεισίματος (Close Adj .) σε καθημερινή βάση στο τέλος της ημέρας , τα δεδομένα λήφθηκαν από το finance.yahoo.com και wsj.com. Καλύπτουν την περίοδο από 01/01/2010 μέχρι 31/12/2020, με συνολικές 2.769 καθημερινές παρατηρήσεις του δείκτη όπου προέκυψαν 2.768 αποδόσεις (r) του δείκτη στην δεκαετία . Έτσι πραγματοποιήθηκαν συγκεκριμένοι διαγνωστικοί έλεγχοι και μετά εκτιμήθηκαν και αξιολογήθηκαν τα μοντέλα πρόβλεψης . Επίσης αξίζει να σημειωθεί χρησιμοποιήθηκαν καθημερινές αποδόσεις του δείκτη για την καλύτερη εκτίμηση και αξιολόγηση της μεταβλητότητας και των μοντέλων πρόβλεψης .

Οπότε η μεθοδολογία που ακολουθήθηκε περιλαμβάνει συγκεκριμένα βήματα:

1. Ανάλυση της μεταβλητότητας του S&P 500 (Volatility Clustering).
2. Συνάρτηση Αυτοσυσχέτισης και Μερικής Αυτοσυσχέτισης (ACF & PACF) της χρονολογικής σειράς των αποδόσεων και διαγνωστικός έλεγχος μέσω του Ljung - Box test(LBQ).
3. Έλεγχος Μοναδιαίας Ρίζας μέσω του Επαυξημένου Ελέγχου Dickey Fuller (ADF).
4. Έλεγχος για ARCH (ετεροσκεδαστικότητα)
5. Επιλογή υποψήφιων μοντέλων πρόβλεψης GARCH (συμμετρικό και ασύμμετρα).
6. Εκτίμηση των υποδειγμάτων που προέκυψαν από το παραπάνω βήμα (GARCH, EGARCH και GJR-GARCH).
7. Αξιολόγηση της προβλεπτικής ικανότητας των υποδειγμάτων (μέσω στατιστικών σφαλμάτων) και της δεσμευμένης διακύμανσης (Forecast Conditional Variance).

Η μεθοδολογία και η ανάλυση των δεδομένων πραγματοποιήθηκε με το λογισμικό MATLAB R 2022a MathWorks . Παρακάτω βρίσκεται ο Πίνακας 1 όπου υπολογίστηκαν τα περιγραφικά στατιστικά χαρακτηριστικά και η κανονικότητα των αποδόσεων .

Πίνακας 1 : Περιγραφικά Στατιστικά και Κανονικότητα Αποδόσεων

<i>Μέση Τιμή</i>	<i>0,0004</i>
<i>Τυπική Απόκλιση</i>	<i>0,0111</i>
<i>Έλαχιστη Τιμή</i>	<i>0,0897</i>
<i>Μέγιστη Τιμή</i>	<i>-0,1277</i>
<i>Κύρτωση</i>	<i>19,34</i>
<i>Ασυμμετρία</i>	<i>-0,864</i>

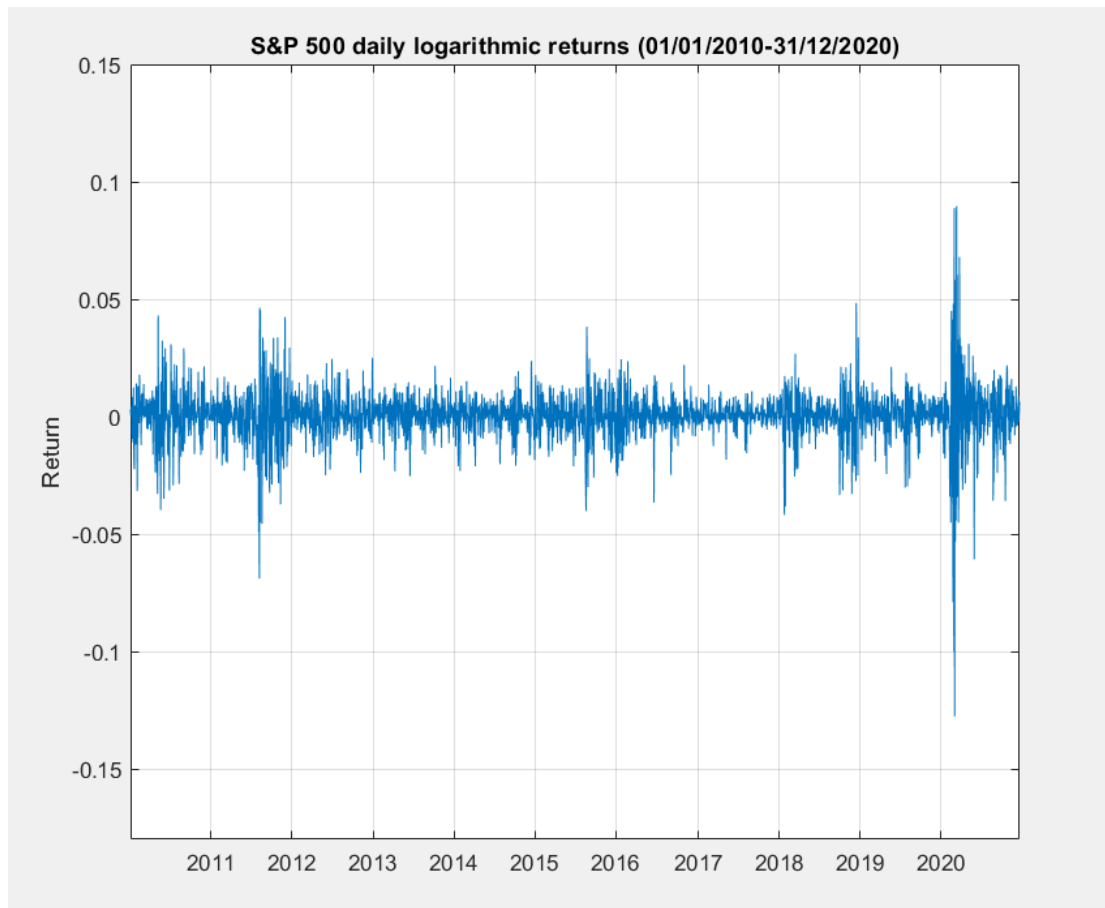
5.2 Διαγνωστικοί Έλεγχοι

5.2.1 Ανάλυση Μεταβλητότητας (Volatility Clustering)

Μέσω των καθημερινών αποδόσεων μπορούν να παρατηρηθούν ευκολότερα φαινόμενα συσσώρευσης μεταβλητότητας . Έτσι και μέσω της παρατήρησης της πορείας της μεταβλητότητας του δείκτη S&P 500 (Διάγραμμα 4) παρατηρείται ότι η μεταβλητότητα δεν παραμένει σταθερή την δεκαετία που εξετάζεται άλλα εμφανίζεται σε συστάδες για μερικές περιόδους. Έτσι το φαινόμενο της συσσώρευσης της μεταβλητότητας που παρατηρείται συχνά σε χρηματοοικονομικές χρονολογικές σειρές μέσω των αποδόσεων , εμφανίζεται και στην υπό εξέταση χρονοσειρά οπότε μπορεί να επαληθευτεί . Κυρίως το παρατηρούμε σε περιόδους με μεγάλες μεταβολές στις τιμές (θετικές ή αρνητικές) όπου ακολουθούνται περίοδοι όπου οι τιμές μεταβάλλονται ελάχιστα και επομένως μπορούν να διαχωριστούν σε περιόδους υψηλής και χαμηλής μεταβλητότητας αντίστοιχα .

Αυτό που παρατηρούμε στο Διάγραμμα 4 είναι ότι ο δείκτης S&P 500 παρουσιάζει κάποιες αστάθειες κατά την περίοδο εξέτασης 2010 - 2019, ωστόσο όπως είναι λογικό λόγω της πανδημικής κατάστασης του COVID -19 το 2020 υπάρχουν έντονες αστάθειες και μεταβολές του δείκτη. Ωστόσο μπορούμε να διακρίνουμε και άλλες περιόδους με συστάδες μεταβλητότητας και αστάθειας (

volatility clustering). Όπως η περίοδος **2010 - 2012** όπου υπάρχει έντονη μεταβλητότητα λόγω της αστάθειας από την Παγκόσμια Χρηματοπιστωτική Κρίση του 2008 η οποία επηρέασε την οικονομία των ΗΠΑ για αρκετά έτη . Έτσι τα επόμενα χρόνια μέχρι και τα μέσα του 2015 παρατηρείται σταθερότητα λόγω της εμπιστοσύνης που «απέπνεε» η Αμερικανική Οικονομία (συμβατικά και μη συμβατικά μέσα άσκησης Νομισματικής Πολιτικής από την FED) καθώς και η ανάπτυξη των εταιρειών της πληροφορίας και τεχνολογίας . Η δεύτερη περίοδος που παρατηρούμε είναι από τα μέσα του **2015 μέχρι τα μέσα του 2016**, αυτή η μεταβλητότητα οφείλεται σε ένα μείγμα αστάθειας , κυρίως λόγω της επιβράδυνσης του μεταποιητικού τομέα στις μεγάλες οικονομίες του πλανήτη και στην Αμερικανική καθώς και στην αστάθεια που θα προκαλούσαν οι Αμερικανικές Εκλογές του 2016 και της εκλογής του Ντόναλντ Τράμπ ως προέδρου των ΗΠΑ . Η τρίτη περίοδος είναι το **2018 - 2019** λόγω της επιβράδυνσης της παγκόσμιας οικονομίας (εμπορικός πόλεμος ΗΠΑ - Κίνα & BREXIT κλπ). Ενώ ακολουθεί η τέταρτη περίοδος τον **Μάρτιο του 2020** λόγω της πανδημίας και αναστολής της οικονομικής δραστηριότητας σε όλο τον πλανήτη . Η ανάλυση των συστάδων έγινε μέσω των λογαριθμικών αποδόσεων που δίνονται από την σχέση $r = \ln\left(\frac{X_t}{X_{t-1}}\right)$. Με X_t την καθημερινή απόδοση του δείκτη .

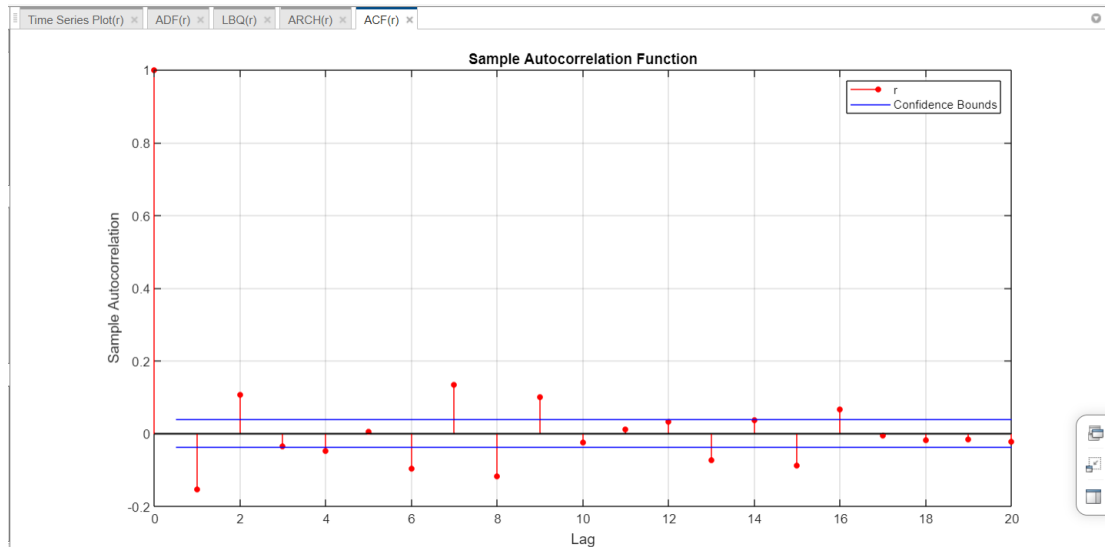


Διάγραμμα 4 : Μεταβλητότητα του δείκτη S&P 500 .

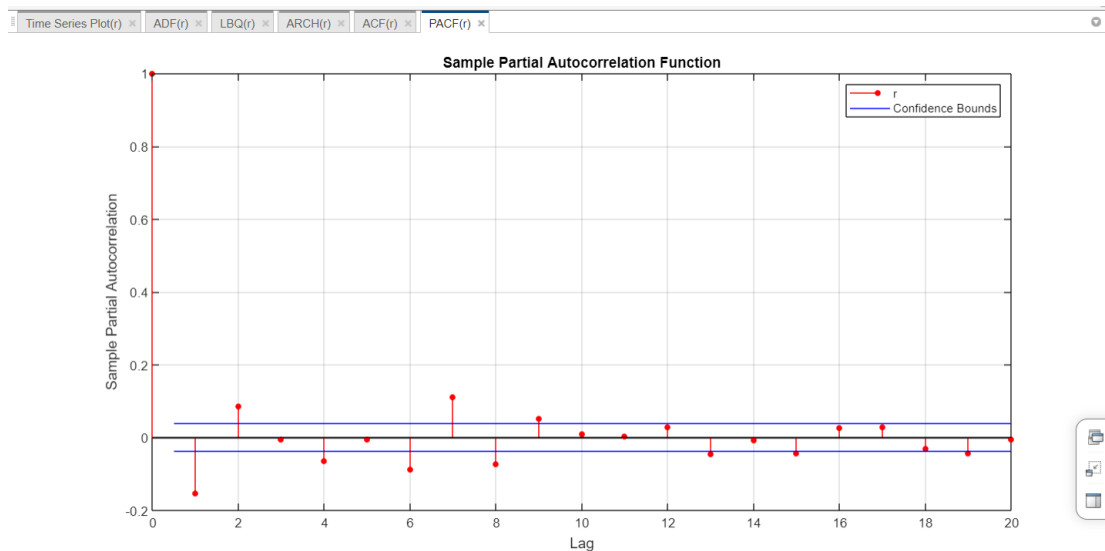
5.2.2 Ανάλυση Αυτοσυσχέτισης της χρονολογικής σειράς

Αρχικά θα παρατηρήσουμε μέσω των διαγραμμάτων της συνάρτησης και θα αποφανθούμε για την αυτοσυσχέτιση και μερική αυτοσυσχέτιση της χρονολογικής σειράς των αποδόσεων. Έτσι για $lag = 0,1,2, \dots, 20$ και στα δυο διαγράμματα (πρώτο για αυτοσυσχέτιση (ACF- Autocorrelation) και το δεύτερο για την μερική αυτοσυσχέτιση (PACF-Partial Autocorrelation)). Στα δυο διαγράμματα (Διάγραμμα 5 & 6) το διάστημα εμπιστοσύνης είναι 95 % για τους συντελεστές αυτοσυσχέτισης και τις τιμές τους . Και στα δυο διαγράμματα παρατηρούμε ότι για όλες τις χρονικές υστερήσεις δεν υπάρχει μεγάλη απόκλιση με το μηδέν, οπότε υπάρχει αυτοσυσχέτιση στις αποδόσεις (ένδειξη ότι η χρονολογική σειρά S&P 500 δεν είναι τυχαία) , στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε και τις τιμές των συντελεστών μερικής αυτοσυσχέτισης (όπου επίσης φανερώνεται και ετεροσκεδαστικότητα). Αξίζει να

επισημάνουμε ότι στις χρηματοοικονομικές χρονοσειρές μπορούμε να αναμένουμε μια σημαντική τιμή αυτοσυσχέτισης στις 20 χρονικές υστερήσεις κατά μέσο όρο, ένα και εφόσον τα δεδομένα μας είναι πραγματικά τυχαία .



Διάγραμμα 5 : Συνάρτηση Αυτοσυσχέτισης (ACF) .



Διάγραμμα 6: Συνάρτηση Μερικής Αυτοσυσχέτισης (PACF) .

Επίσης μπορεί να γίνει ανάλυση της παρουσίας αυτοσυσχέτισης στα δεδομένα και με τον έλεγχο Ljung - Box Pierce Q-Test . Όπου σύμφωνα με τον συγκεκριμένο διαγνωστικό έλεγχο και μέσω του MATLAB καταλήγουμε στα ίδια συμπεράσματα

ότι υπάρχει παρουσία αυτοσυσχέτισης στα δεδομένα μας . Έτσι όπως παρατηρούμε και στο διάγραμμα 7 έχουμε δυο υποθέσεις και διάφορα επίπεδα σημαντικότητας που γίνεται η ανάλυση :

Υποθέσεις

H_0 : Σύνολο m των αποδόσεων r, η αυτοσυσχέτιση είναι από κοινού ίση με το 0

H_1 : Σύνολο m των αποδόσεων r, η αυτοσυσχέτιση διαφέρει με το 0

Οπότε απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση και στα τρία επίπεδα σημαντικότητας(1%, 5%, 10%) , και αποδεικνύεται ότι υπάρχει αυτοσυσχέτιση στα δεδομένα.

Ljung-Box Q-Test for Autocorrelation(r)								
Null Hypothesis: The first m autocorrelations of r are jointly 0								
Results								
	Select	Null Rejected	P-Value	Test Statistic	Critical Value	Lags	DOF	Significance Level
1	<input type="checkbox"/>	true	0	309.2298	37.5662	20	20	0.0100
2	<input type="checkbox"/>	true	0	309.2298	31.4104	20	20	0.0500
3	<input type="checkbox"/>	true	0	309.2298	28.4120	20	20	0.1000

Διάγραμμα 7 : Διαγνωστικός έλεγχος Ljung-Box Pierce Q-Test για αποδόσεις S&P 500 .

5.2.3 Έλεγχος Μοναδιαίας Ρίζας

Εδώ ο πιο γνωστός έλεγχος της στασιμότητας είναι ο έλεγχος μοναδιαίας ρίζας μέσω του επαυξημένου ελέγχου Dickey - Fuller (ADF test). Στο συγκεκριμένο έλεγχο επίσης υπάρχει και ένας επιπλέον στατιστικός έλεγχος αν οι αποδόσεις είναι στάσιμες ή όχι . Οπότε , έχουμε το αντίστοιχο μοντέλο : $R_t = \rho R_{t-1} + \varepsilon_t$, έτσι πραγματοποιείται ο στατιστικός έλεγχος της μηδενικής υπόθεσης αν το $\rho = 1$, έτσι αποδεικνύεται ότι η απόδοση έχει μια μοναδιαία ρίζα . Οπότε στο παρακάτω διάγραμμα και με την βοήθεια του MATLAB πραγματοποιούμε τον επαυξημένο

έλεγχο Dickey - Fuller για τον έλεγχο της στασιμότητας και της μοναδιαίας ρίζας των αποδόσεων του δείκτη S&P 500 .

Υποθέσεις

H_0 : Υπάρχει μοναδιαία ρίζα

H_1 : Δεν υπάρχει μοναδιαία ρίζα

Για επίπεδο σημαντικότητας 1 %, 5 % και 10 % παρατηρούμε ότι $t_1 = 2,56, t_2 = 1,94, t_3 = 1,61$ αντίστοιχα είναι μικρότερα από το $|t| = 11,70$, έτσι καταλήγουμε ότι απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση ότι δηλαδή υπάρχει μοναδιαία ρίζα που σημαίνει ότι η χρονολογική σειρά των αποδόσεων είναι στάσιμη όπως παρατηρείται και στο παρακάτω διάγραμμα .

Augmented Dickey-Fuller Test(r)									
Null Hypothesis: r contains a unit root									
Results									
	Select	Null Rejected	P-Value	Test Statistic	Critical Value	Lags	Model	Test Statistic	Significance Level
1	<input type="checkbox"/>	true	1.0000e-03	-11.7082	-2.5688	20	AR	t1	0.0100
2	<input type="checkbox"/>	true	1.0000e-03	-11.7082	-1.9416	20	AR	t1	0.0500
3	<input type="checkbox"/>	true	1.0000e-03	-11.7082	-1.6169	20	AR	t1	0.1000

Διάγραμμα 8 : Στατιστικός Έλεγχος μέσω ADF test για μοναδιαία ρίζα .

5.2.4 Έλεγχος ARCH (ARCH effect)

Γενικά αποτελεί ένα σημαντικό διαγνωστικό μοντέλο διότι βοηθάει στην εύρεση της ετεροσκεδαστικότητας και στην ουσία στην εκτίμηση των υποδειγμάτων GARCH . Οπότε αποτελεί το τελευταίο βήμα πριν την εκτίμηση των μοντέλων .

Αρχικά ο διαταρακτικός όρος θα πρέπει να συμπεριφέρεται ως μια ARCH διαδικασία, ενώ τα κατάλοιπα θα εμφανίζουν αυτοσυσχέτιση αυτό είναι γνωστό ως αποτέλεσμα ARCH (ARCH effect) δηλαδή η διακύμανση του διαταρακτικού όρου είναι συνάρτηση των τιμών με χρονική υστέρηση. Αυτό το φαινόμενο είναι γνωστό

και σύνηθες στις χρηματοοικονομικές σειρές . Ο έλεγχος ARCH γίνεται με έλεγχο της μηδενικής υπόθεσης ότι οι συντελεστές $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_p$ είναι ίση με το μηδέν .

Υποθέσεις

$H_0: \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_p = 0$ (Ομοσκεδαστικότητα)

$H_1: \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_p \neq 0$ (Ετεροσκεδαστικότητα)

Ο στατιστικός έλεγχος για την ετεροσκεδαστικότητα φαίνεται και στο παρακάτω διάγραμμα , ενώ καταλήγουμε για 20 χρονικές υστερήσεις και σε επίπεδο σημαντικότητας 5 % ότι απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση , οπότε δεχόμαστε ότι υπάρχει ετεροσκεδαστικότητα στα δεδομένα μας καθώς και συστάδες μεταβλητότητας (volatility clustering) δηλαδή η διακύμανση του διαταρακτικού όρου είναι συνάρτηση των τιμών με υστέρηση , οπότε μπορούμε να προβούμε σε μοντελοποίηση της διακύμανσης των αποδόσεων με τα μοντέλα GARCH εφόσον υπήρχε αποτέλεσμα ARCH (ARCH effect) .

Engle's ARCH Test for Heteroscedasticity(r)							
Null Hypothesis: r exhibits no ARCH effects							
Results							
	Select	Null Rejected	P-Value	Test Statistic	Critical Value	Lags	Significance Level
1	<input type="checkbox"/>	true	0	1.1211e+03	31.4104	20	0.0500

Διάγραμμα 9: Έλεγχος ARCH .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΚΤΟ

6.1 Εκτίμηση Υποδειγμάτων

Σε συνέχεια του προηγούμενου κεφαλαίου που διαπιστώθηκε ότι υπάρχει παρουσία ετεροσκεδαστικότητας και έτσι ο διαταρακτικός όρος δεν έχει σταθερή διακύμανση οπότε αυτή η κατάσταση υποδηλώνει ότι τα μοντέλα GARCH είναι τα κατάλληλα για μοντελοποίηση . Έτσι μπορεί να προστεθεί μια δεύτερη εξίσωση στο υπόδειγμα , η οποία επικεντρώνεται στην ανάλυση της δεσμευμένης διακύμανσης των μη αναμενόμενων αποδόσεων του δείκτη S&P 500 . Οπότε θα χρησιμοποιηθούν συμμετρικά και ασύμμετρα μοντέλα για εκτίμηση των σωστών υποδειγμάτων . Τα υποδείγματα που επιλέχθηκαν και θα αναλυθούν εμπεριέχουν και τις δυο κατηγορίες και είναι το GARCH (1,1) , EGARCH (1,1) και GJR- GARCH (1,1). Παρακάτω θα αναλυθούν τα συγκεκριμένα μοντέλα .

6.1.1 GARCH (1,1)

Η εξίσωση της δεσμευμένης διακύμανσης που θα χρησιμοποιηθεί στο συγκεκριμένο **συμμετρικό μοντέλο** , είναι η εξής :

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \gamma_1 \sigma_{t-1}^2$$

Οι τιμές των συντελεστών α_1 και γ_1 προσδιορίζουν την δυναμική συμπεριφορά της μεταβλητότητας που προκύπτει από ένα GARCH μοντέλο . Έτσι μεγάλες τιμές του γ_1 υπονοούν μεγαλύτερη διάρκεια και ένταση της μεταβλητότητας , διότι θετικά ή αρνητικά σοκ επηρεάζουν την διακύμανση και χρειάζεται χρόνος για να ελαττωθεί η επιρροή τους. Αντίστοιχα μεγάλες τιμές του α_1 υποδηλώνουν μεγάλη αντίδραση της μεταβλητότητας σε μεταβολές της αγοράς . Αντίστοιχα αν είναι υψηλές και οι δυο τιμές των συντελεστών τότε η μεταβλητότητα θα είναι ακιδωτή , δηλαδή θα υπάρχουν υψηλά και χαμηλά σε καθημερινή βάση .

6.1.2 EGARCH (1,1)

Η εξίσωση της δεσμευμένης διακύμανσης που θα χρησιμοποιηθεί στο συγκεκριμένο **ασύμμετρο μοντέλο** , είναι η εξής :

$$\sigma_t^2 = \sigma_{t-1}^{2\alpha_1} * \exp\{(1 - \alpha_1) * \alpha_0\} * \exp\{g(\varepsilon_{t-1})\}$$
$$g(\varepsilon_{t-1}) = \theta * \varepsilon_{t-1} + \gamma * (|\varepsilon_{t-1}| - \sqrt{\frac{2}{\pi}})$$

Εάν τα θ και $\gamma > 0$, τότε αρνητικά γεγονότα στις αποδόσεις της χρονολογικής σειράς παράγουν υψηλές δεσμευμένες διακυμάνσεις από ότι θετικά γεγονότα . Αυτό οφείλεται στο αποτέλεσμα μόχλευσης (leverage effect) που εμπεριέχεται στην εξίσωση της δεσμευμένης διακύμανσης . Γενικά στο EGARCH μοντέλο παρατηρούμε ότι δεν υπάρχουν περιορισμοί στην εξίσωση και στους συντελεστές διότι η δεσμευμένη διακύμανση υπολογίζεται με λογαρίθμους . Ωστόσο είναι δύσκολη η εκτίμηση του μοντέλου λόγω έλλειψης δομής της μεταβλητότητας .

6.1.3 GJR- GARCH (1,1)

Η εξίσωση της δεσμευμένης διακύμανσης που θα χρησιμοποιηθεί στο συγκεκριμένο **ασύμμετρο μοντέλο** , είναι η εξής :

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q (\alpha_i * \varepsilon_{t-i}^2 + \gamma_i * s_{t-1}^- * \varepsilon_{t-1}^2) + \sum_{j=1}^p \beta_j * \sigma_{t-j}^2$$

Εδώ σε αντίθεση με το μοντέλο EGARCH η εκτίμηση του υποδείγματος GJR-GARCH (1,1) είναι πιο εύκολη λόγω της αναλυτικής δομής της μεταβλητότητας και εδώ να επισημανθεί ότι υπάρχει το αποτέλεσμα μόχλευσης .

6.2 Μοντελοποίηση των υποδειγμάτων μεταβλητότητας

- **Στατιστική Σημαντικότητα Συντελεστών**

Στην προβλεπτική διαδικασία αρχικό βήμα αποτελεί η εκτίμηση και ο έλεγχος της στατιστική σημαντικότητας των συντελεστών του κάθε υποδείγματος που αναλύθηκε παραπάνω δηλαδή του GARCH (1,1), EGARCH (1,1) και του GJR-GARCH (1,1). Στον πίνακα παρακάτω συγκαταλέγονται όλοι οι παράμετροι των 3 υποψηφίων μοντέλων και στην κάτω στήλη παρουσιάζονται οι τιμές t-stat για επίπεδο σημαντικότητας 5 % .

Πίνακας 2: Εκτίμηση 3 υποψηφίων υποδειγμάτων μέσω των καθημερινών αποδόσεων .

	<i>GARCH</i>	<i>EGARCH</i>	<i>GJR-GARCH</i>
<i>Constant</i>	0,000003	-0,5239	0,000004
<i>t-stat(5%)</i>	6,5084	-11,8665	7,5975
<i>GARCH {1}</i>	0,7932	0,9432	0,7938
<i>t-stat(5%)</i>	58,1469	205,3814	63,6712
<i>ARCH {1}</i>	0,1737	0,2462	0,0433
<i>t-stat(5%)</i>	14,3087	16,7220	7,5497
<i>Leverage {1}</i>	-	-0,1761	0,2670
<i>t-stat(5%)</i>	-	-18,4700	11,6402

Αυτό που προκύπτει από τον Πίνακα 1 είναι το εξής :

1. Constant

- Αρχικά για τις εκτιμήσεις του σταθερού συντελεστή (Constant) , παρατηρούμε ότι για το GARCH και GJR-GARCH ο στατιστικός έλεγχος (t-stat) είναι θετικός και στατιστικά σημαντικός για επίπεδο εμπιστοσύνης 5 % , και για το EGARCH είναι αρνητικός ωστόσο και εδώ είναι στατιστικά σημαντικός ο όρος .

2.GARCH{1}

- Ο συντελεστής GARCH {1} βρέθηκε θετικός και στατιστικά σημαντικός και για τα τρία μοντέλα (GARCH , EGARCH & GJR-GARCH), επίσης αυτό που παρατηρούμε είναι ότι ο έλεγχος παράγει υψηλές τιμές κατάσταση που υποδηλώνει ότι η εμπιστοσύνη είναι μεγαλύτερη και αποτελεί σημαντικό προγνωστικό παράγοντα .

3.ARCH {1}

- Ο συντελεστής ARCH {1} βρέθηκε και αυτός θετικός και στατιστικά σημαντικός και για τα τρία μοντέλα (GARCH , EGARCH & GJR-GARCH) .

4. Leverage {1}

- Εδώ οι τιμές που παράχθηκαν από το MATLAB και όπως γνωρίζουμε από τα προηγούμενα κεφάλαια (αποτέλεσμα μόγλευσης - leverage effect) είναι για τα δυο μοντέλα τα οποία είναι ασύμμετρα (EGARCH & GJR-GARCH). Οπότε η τιμή για το EGARCH είναι αρνητική ωστόσο στατιστικά σημαντική ενώ η τιμή του στατιστικού ελέγχου για το μοντέλο GJR-GARCH είναι θετική και στατιστικά σημαντική . Επίσης η τιμή του όρου για το EGARCH είναι αρνητική και όπως αναλύθηκε είναι στατιστικά σημαντικός κατάσταση που δηλώνει ότι τα θετικά σοκ αυξάνουν την μεταβλητότητα περισσότερο από τα αρνητικά σοκ . Αντίστοιχα για το GJR-GARCH η τιμή του όρου είναι θετική και όπως αναλύθηκε παραπάνω είναι στατιστικά σημαντικός οπότε τα αρνητικά σοκ στην αγορά αυξάνουν την μεταβλητότητα περισσότερο από τα θετικά σοκ . Οπότε συμπεραίνουμε ότι υπάρχει αποτέλεσμα μόγλευσης στα δεδομένα δηλαδή στην χρονολογική σειρά του δείκτη S&P 500 .

Με την οριοθέτηση της εξίσωσης της δεσμευμένης διακύμανσης για τα τρία υποδείγματα και αναλύοντας την στατιστική σημαντικότητα για επίπεδο σημαντικότητας 5 % για την εκτίμηση των συντελεστών, παρατηρούμε ότι στα τρία επιλεγμένα μοντέλα μπορούν να μας δώσουν σωστές και ακριβείς προβλέψεις, στο επόμενο βήμα θα πρέπει να ελεγχθεί ποιο μοντέλο από τα τρία είναι ικανό να μας δώσει τις καλύτερες προβλέψεις . Η ανάλυση θα γίνει στο επόμενο κεφάλαιο .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΒΔΟΜΟ

7.1 Αξιολόγηση Προβλεπτικής Ικανότητας

Όταν θέλουμε να ελέγξουμε της ικανότητα των υποδειγμάτων (GARCH, EGARCH , GJR-GARCH) ώστε να προβλέπουν την μελλοντική δεσμευμένη διακύμανση συγκρίνουμε τις 100 τελευταίες παρατηρήσεις με αυτές που εκτιμήθηκαν από τα μοντέλα . Έτσι πραγματοποιούμε την ακόλουθη διαδικασία αφήνουμε τις τελευταίες 100 παρατηρήσεις (2.668-2.768) και επανεκτιμούμε τα μοντέλα GARCH , EGARCH και GJR-GARCH , και έπειτα για αυτό το σύνολο των 100 παρατηρήσεων υπολογίζουμε την μέση τιμή των προβλέψεων μεταβλητότητας για κάθε ένα από τους χρονικούς ορίζοντες πρόβλεψης . Έπειτα υπολογίζουμε τα κριτήρια για το σφάλμα πρόβλεψης όπως το MAE (Mean Absolute Error) , RMSE (Root Mean Squared Error) και MAPE (Mean Average Percentage Error) για τις μέσες τιμές των προβλέψεων μεταβλητότητας για κάθε ένα από τους ορίζοντες πρόβλεψης 100 ημερών παρατηρήσεων .

7.2 Δείκτες Στατιστικού Σφάλματος

Με την πραγματοποίηση της σύγκρισης των προβλεπτικών τιμών και των πραγματικών τιμών , στην ουσία υπάρχει πιο σωστή αποτίμηση της ακρίβειας των προβλέψεων που παράγει ένα μοντέλα . Για να καταλήξουμε στους τρεις δείκτες στατιστικού σφάλματος , αρχικά θα πρέπει να υπολογιστούν τα εξής :

Ορίζουμε αρχικά $\hat{\sigma}_t^2 = Actual$ και $\sigma_t^2 = Forecast$ οπότε ,

- **Σφάλμα**

$$e_t = Actual - Forecast$$

με *Actual* να είναι η πραγματική τιμή της χρονοσειράς και *Forecast* να είναι η πρόβλεψη .

- **Μέσο Σφάλμα**

$$ME = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n e_t$$

όπου e_t να είναι το σφάλμα της χρονικής στιγμής t και n είναι ο αριθμός των σφαλμάτων, για τα οποία θα υπολογιστεί η μέση τιμή.

- **Μέσο Απόλυτο Σφάλμα (Mean Absolute Error)**

$$MAE = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n |e_t|$$

όπου $|e_t|$ είναι το απόλυτο στατιστικό σφάλμα της χρονικής στιγμής t και n είναι ο αριθμός των σφαλμάτων, για τα οποία θα υπολογιστεί η μέση τιμή.

- **Ρίζα Μέσου Τετραγωνικού Σφάλματος (Root Mean Squared Error)**

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n e_t^2}$$

όπου e_t^2 είναι το απόλυτο στατιστικό σφάλμα της χρονικής στιγμής t και n είναι ο αριθμός των σφαλμάτων, για τα οποία θα υπολογιστεί η μέση τιμή.

- **Μέσο Απόλυτο Ποσοστιαίο Σφάλμα (Mean Average Percentage Error)**

$$MAPE = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left| \frac{Forecast - Actual}{Actual} \right|$$

με *Actual* να είναι η πραγματική τιμή της χρονοσειράς και *Forecast* να είναι η πρόβλεψη.

Κάθε ένα από τα κριτήρια που επιλέχθηκαν MAE, RMSE και MAPE έχει τα δικά του χαρακτηριστικά. Ο δείκτης MAE έχει πλεονέκτημα ότι είναι απλός τόσο στον υπολογισμό όσο και στην ερμηνεία του και γενικά προτιμάται από την ερευνητική κοινότητα σε σχέση με τους άλλους, επίσης το RMSE έχει το πλεονέκτημα ότι

μεγάλα στατιστικά σφάλματα επηρεάζουν σημαντικά το συγκεκριμένο δείκτη (οπότε αυτοί οι δυο δείκτες εξαρτώνται από το μέγεθος των τιμών ενώ το MAPE όχι ,δηλαδή είναι scale invariant).Επιπλέον ο MAPE έχει ένα πλεονέκτημα το ότι δείχνει το σφάλμα πρόβλεψης ως ποσοστό και όχι ως απλή τιμή .

Έτσι το μοντέλο με την καλύτερη επίδοση στους περισσότερους δείκτες στατιστικών σφαλμάτων που επιλέχθηκαν , θα αποτελεί το μοντέλο με την καλύτερη προβλεπτική ικανότητα .

7.3 Αποτελέσματα Πρόβλεψης

Τα αποτελέσματα από τις στατιστικές σφάλματος πρόβλεψης των καθημερινών αποδόσεων του δείκτη S&P 500 παρουσιάζονται στον Πίνακα 3 .

Πίνακας 3: Στατιστικά Σφάλματα Πρόβλεψης.

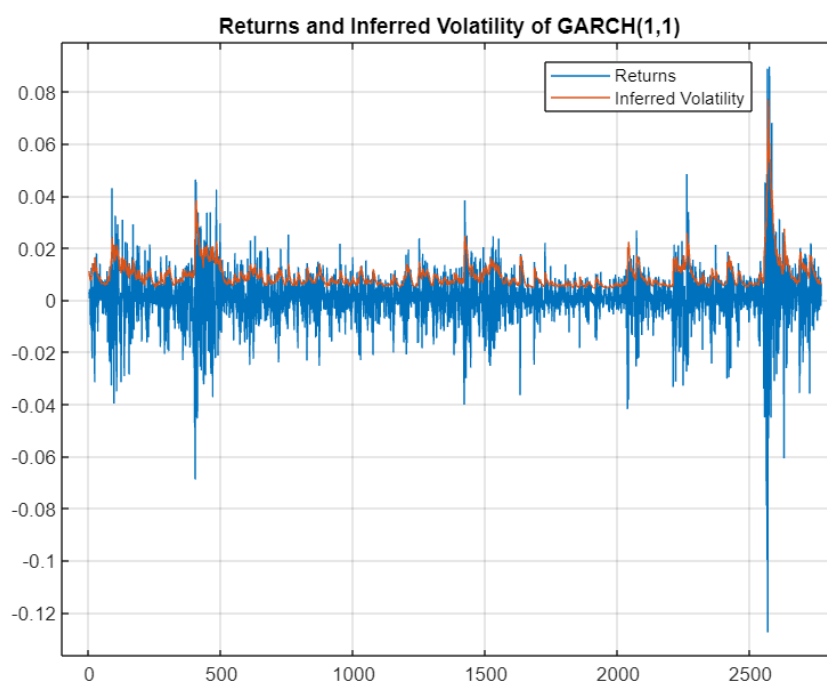
	<i>MAE</i>	<i>RMSE</i>	<i>MAPE</i>
<i>GARCH(1,1)</i>	0,008474	0,011123	0,0832
<i>EGARCH(1,1)</i>	0,008475	0,011124	0,0872
<i>GJR-GARCH(1,1)</i>	0,008473	0,011122	0,0794

Τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την παραπάνω ανάλυση των στατιστικών σφαλμάτων , για την επιλογή του καλύτερου μοντέλου για την πρόβλεψη των καθημερινών αποδόσεων και της δεσμευμένης διακύμανσης του δείκτη S&P 500 , μας αναδεικνύουν ότι το μοντέλο GJR-GARCH (1,1) υπερέχει έναντι των υπολοίπων και αυτό διότι οι δείκτες σφάλματος είναι μικρότεροι και καλύτερη από τα μοντέλα GARCH (1,1) και EGARCH (1,1). Επίσης αυτό που παρατηρούμε είναι ότι έχει οριακά καλύτερη επίδοση στους δείκτες MAE & RMSE , ενώ στο MAPE η διαφορά του GJR-GARCH (1,1) με το GARCH (1,1) και EGARCH (1,1) είναι αντίστοιχα - 0,0038 και -0,0078 με αυτά τα αποτελέσματα εξάγεται το συμπέρασμα ότι το GJR-GARCH(1,1) έχει καλύτερη επίδοση από τα άλλα δυο μοντέλα και στους τρεις δείκτες , ενώ την δεύτερη και τρίτη καλύτερη επίδοση έχουν το GARCH και EGARCH αντίστοιχα.

7.4 Γραφική Απεικόνιση Υποδειγμάτων

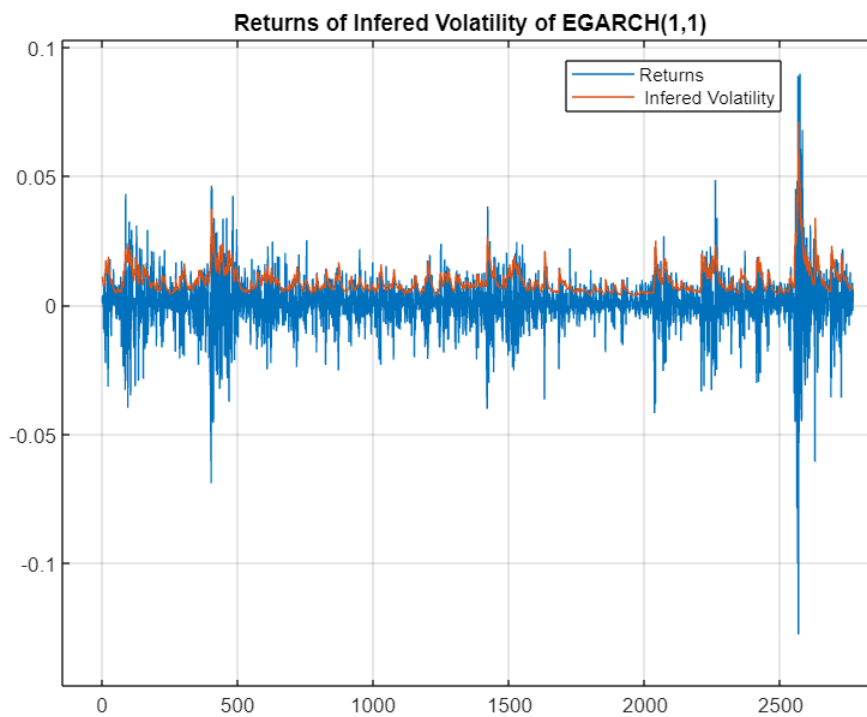
- Μεταβλητότητα

GARCH(1,1)



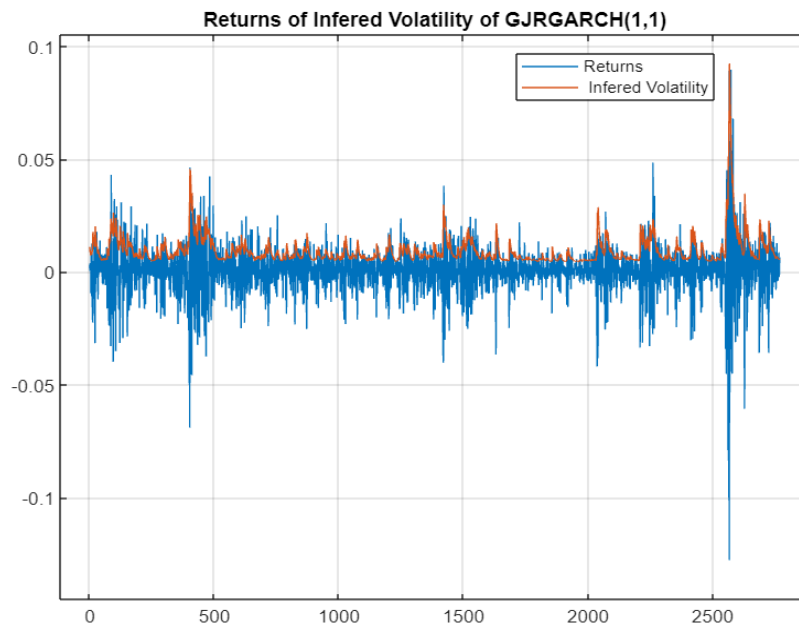
Διάγραμμα 10 : Αποδόσεις και Μεταβλητότητα GARCH (1,1) .

EGARCH(1,1)



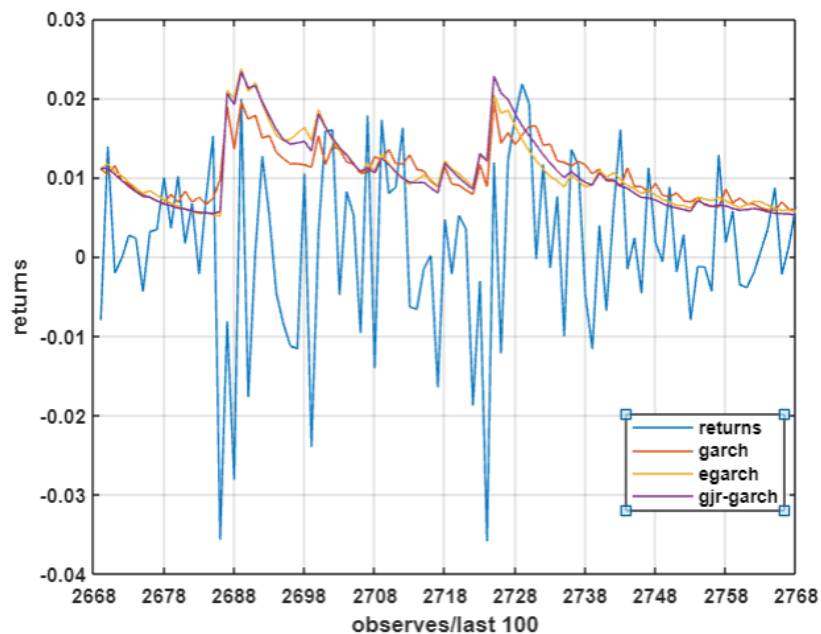
Διάγραμμα 11 : Αποδόσεις και Μεταβλητότητα EGARCH (1,1) .

GJR-GARCH(1,1)



Διάγραμμα 12 : Αποδόσεις και Μεταβλητότητα GJRGARCH (1,1) .

- Αποδόσεις πραγματικές και πρόβλεψης / 100 τελευταίες παρατηρήσεις



Διάγραμμα 13 : 100 τελευταίες παρατηρήσεις πραγματικές αποδόσεις και αποδόσεις υποδειγμάτων .

Αυτό που παρατηρούμε από τα Διαγράμματα 10, 11 , 12 ,13 είναι ότι το μοντέλο GJR-GARCH κινείται και αποδίδει καλύτερα από τα άλλα μοντέλα και γραφικά , δηλαδή σε ανοδικά / καθοδικά σημεία του δείκτη παρέχει καλύτερες προγνώσεις από τα άλλα μοντέλα τα οποία επιλέχθηκαν παρά την αυξημένη μεταβλητότητα , ενώ οι αποκλίσεις είναι αρκετά μικρές λόγω της αστάθειας στις διεθνείς αγορές . Επίσης στα Παραρτήματα υπάρχουν έξι διαγράμματα από τα οποία τα πρώτα τρία αποτελούν τις δεσμευμένες διακυμάνσεις και τα τυποποιημένα κατάλοιπα και για τα τρία μοντέλα (GARCH , EGARCH , GJR-GARCH) , ενώ τα υπόλοιπα τρία αποτυπώνουν την καταλληλότητα των κατανομών μέσω του Q-Q plot όπου εδώ παρατηρείται ότι η κατανομή και στα τρία μοντέλα έχει υψηλό βαθμό λεπτοκύρτωσης , κατάσταση που επιβεβαιώνει την θεωρία των Mandelbrot (1963) και Fama (1965) για τις παχιές ουρές στα χρηματοοικονομικά δεδομένα.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Ο στόχος της παρούσας έρευνας είναι η πρόβλεψη της μεταβλητότητας του χρηματιστηριακού δείκτη S&P 500 μέσω των μοντέλων GARCH , καθώς και μια εμπειρική διερεύνηση σχετικά με το ποιο μοντέλο από τα τρία (GARCH , EGARCH , GJR- GARCH) μπορεί να εξηγήσει την μελλοντική προβλεπτική ικανότητα καλύτερα , μέσω των στατιστικών σφαλμάτων MAE, RMSE & MAPE . Τα αρχικά βήματα στην έρευνα είναι η μελέτη της μεταβλητότητας και των υποδειγμάτων στις χρηματοοικονομικές χρονολογικές σειρές , μετέπειτα πραγματοποιήθηκε η ανάλυση των δεδομένων (αποδόσεων από το 01 / 2010 – 12 / 2020) , όπου σύμφωνα με αυτήν η χρονοσειρά των αποδόσεων εμφάνιζε τα τυπικά χαρακτηριστικά της μεταβλητότητας όπως και σε άλλες , δηλαδή την συσσώρευση μεταβλητότητας (ακραία γεγονότα κατά την διαχρονική πορεία του δείκτη) , την επιμονή της μεταβλητότητας (persistence) και την ασυμμετρία (δηλαδή το αποτέλεσμα μόχλευσης) . Έπειτα μέσω των διαγραμμάτων Αυτοσυσχέτισης (ACF) και Μερικής Αυτοσυσχέτισης (PACF) , καθώς και με τον διαγνωστικό έλεγχο Ljung - Box Pierce Q-Test , αποδείχθηκε ότι υπάρχει αυτοσυσχέτιση στα δεδομένα . Στο επόμενο βήμα , αποδείχθηκε ότι η διακύμανση του διαταρακτικού όρου δεν είναι σταθερή αλλά ακολουθεί μια διαδικασία GARCH (ARCH effect) . Οπότε αποδεικνύεται ότι η επιλογή των μοντέλων , GARCH (1,1) , EGARCH (1,1) και GJR-GARCH (1,1) δεν έγινε τυχαία . Με όλα τα δεδομένα (2.768 αποδόσεις) εκτιμήθηκαν τα μοντέλα GARCH με σκοπό να επαληθευτεί η καταλληλότητα τους για την καλύτερη πρόβλεψη της μεταβλητότητας .

Έτσι ελέγχθηκε η στατιστική σημαντικότητα (t-stat) των συντελεστών από τις εξισώσεις διακύμανσης που προέκυψαν από την χρησιμοποίηση του MATLAB για την δημιουργία των συμμετρικών και ασύμμετρων μοντέλων GARCH . Όλοι οι συντελεστές είναι στατιστικά σημαντικοί , και μάλιστα ο όρος GARCH {1} έχει υψηλές τιμές στον έλεγχο t-stat , αυτό σημαίνει ότι είναι αρκετά σημαντικός προγνωστικός παράγοντας στην εξίσωση της διακύμανσης .

Επίσης αποδείχθηκε ότι υπάρχει αποτέλεσμα μόχλευσης στα δεδομένα και επηρεάζει σημαντικά τα δυο μοντέλα που την συμπεριλαμβάνουν στην εξίσωση της

διακύμανσης (EGARCH , GJR- GARCH) , ενώ αποδεικνύεται και η έρευνα των Glosten , Jagannathan & Runkle , 1993 , διότι το μοντέλο GJR – GARCH έχει θετικό όρο όπου είναι στατιστικά σημαντικός και έτσι μια αρνητική μεταβολή (αρνητικό σοκ) των αποδόσεων προκαλεί μεγαλύτερη μεταβλητότητα από ότι μια ίδια θετική μεταβολή π.χ. πανδημική κρίση COVID -19 (μείωση των αποδόσεων – τιμές του δείκτη S&P 500 για αρκετούς μήνες το 2020) .

Επιπλέον για να εξαχθεί το συμπέρασμα για το πιο μοντέλο έχει την καλύτερη επίδοση στην πρόβλεψη της μεταβλητότητας και με όλους τους όρους των εξισώσεων της δεσμευμένης διακύμανσης από τα τρία μοντέλα GARCH , πραγματοποιήθηκε σύγκριση (πραγματικών αποδόσεων και αποδόσεων πρόβλεψης) των στατιστικών σφαλμάτων (Statistical errors) για τις τελευταίες 100 παρατηρήσεις (2.668 – 2.768 αποδόσεις), όπου αναδείχθηκε ότι το μοντέλο που προκρίνεται για πρόβλεψη της μεταβλητότητας του δείκτη S&P 500 είναι το GJR – GARCH (1,1). Αυτό οφείλεται στην καλύτερη επίδοση από τα άλλα δυο μοντέλα στους δείκτες MAE, RMSE & MAPE . Η σύγκριση ανέδειξε ότι το μοντέλο που λειτουργεί καλύτερα σε περιόδους αστάθειας όπως το 2020 (λόγω της πανδημικής κρίσης COVID- 19 και της αποσταθεροποίησης της διεθνούς αγοράς (προσφοράς και ζήτησης)) , όπου επηρεάστηκε ο χρηματιστηριακός δείκτης S&P 500 είναι το GJR-GARCH (1,1) και μετά το GARCH (1,1) και EGARCH (1,1). Διότι παρουσιάζει μεγαλύτερη ακρίβεια σε όλους τους δείκτες στατιστικού σφάλματος και αυτό λόγω της ασυμμετρίας που λαμβάνει ως όρο στην εξίσωση της διακύμανσης.

Πέρα από την πρακτική εφαρμογή της μεταβλητότητας και της θεωρητική επεξήγησης μέσω των δεδομένων , τους επενδυτές και τα επενδυτικά hedge funds τους απασχολεί εκτός από την συνεχή υψηλή απόδοση της επένδυσής τους , η σταθερότητα στα ποσοστά απόδοσης (δηλαδή σε ένα λιγότερο ασταθές περιβάλλον), ωστόσο από την συγκεκριμένη διπλωματική εξάγεται το συμπέρασμα , ότι σε ένα ασταθές περιβάλλον μπορεί να περιγραφεί και να εκτιμηθεί η μεταβλητότητα με ένα μοντέλο GJR-GARCH (1,1) και αντίθετα σε ένα περιβάλλον πιο σταθερό σε σχέση με τις αποδόσεις μπορεί να εφαρμοστεί το μοντέλο GARCH (1,1) λόγω της δεύτερης καλύτερης επίδοσης (στατιστικά σφάλματα) στην συγκεκριμένη περίοδο. Επομένως και με την κριτική ικανότητα των επενδυτών μπορεί να αποφασιστεί αν θα πρέπει να αγοραστεί , είτε να πωλήσει τον συγκεκριμένο χρηματιστηριακό δείκτη.

Σαν μελλοντική έρευνα μπορεί να προκριθεί η χρήση και άλλων μοντέλων GARCH όπως IGARCH , ZD - GARCH , Spatial GARCH , επίσης μπορεί να γίνει

ανάλυση και άλλων μεταβλητών (Πληθωρισμός , Επιτόκια , αποδόσεις δείκτη S&P 500) μέσα σε ένα μοντέλο (Multivariate GARCH ή VAR (Vector Autoregression)) καθώς και ένα υβριδικό μοντέλο που θα περιλαμβάνει ένα DCC – GARCH (Dynamic Conditional Correlation) , που υπερέχει σε σχέση με ένα Multivariate GARCH , και ένα VAR μοντέλο . Έτσι μπορεί να πραγματοποιηθεί με μεγαλύτερη ανάλυση του ευρύτερου οικονομικού περιβάλλοντος ένα μοντέλο που υπερισχύει στην ακρίβεια πρόβλεψης της μεταβλητότητας για όλους τους χρηματιστηριακούς δείκτες και τις μετοχές με σκοπό την μεγιστοποίηση του κέρδους και την ελαχιστοποίηση της ζημίας των επενδυτών .

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Άρθρα (Papers)

1. Engle , R. NG , V . (1993) , Measuring and Testing the Impact of News on Volatility , The Journal of Finance , Volume 48 , Issue 5 p . 1749 - 1778 .
2. Engle, R.(1992) , Do Bulls and Bears Move Across Borders: International Transmission of Stock Returns and Volatility as the World Turns .
3. Engle, R. (1982) , Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation , Econometrica Vol. 50, No. 4 (Jul., 1982), pp. 987-1007 (21 pages) .
4. Bollerslev ,T. (1986) , Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity , Journal of Econometrics 31 (1986) 307-327. North-Holland.
5. Taylor , S.J. (1986), Modelling Financial Time Series.
6. Mandelbrot, B.B. (1963) , The Variation of Certain Speculative Prices. Journal of Business, 36, 394-413.
7. Fama, E. (1970) , Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work, The Journal of Finance Vol. 25, No. 2, Papers and Proceedings of the Twenty-Eighth Annual Meeting of the American Finance Association New York, N.Y. December, 28-30, 1969 (May, 1970), pp. 383-417 (35 pages).
8. Black, F. (1976) , Studies of Stock Price Volatility Changes .

9. Baillie, R. Bollerslev, T. (1996) , Fractionally integrated generalized autoregressive conditional heteroskedasticity , Journal of Econometrics Volume 74, Issue 1, September 1996, Pages 3-30 .
10. Nelson ,D. (1991), Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach , Econometrica, 1991, vol. 59, issue 2, 347-70 .
11. Glosten , L. et al . (1993) , On the Relation between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks , Journal of Finance, 1993, vol. 48, issue 5, 1779-1801 .
12. Poon ,SH. Granger, WJ. (2003), Forecasting Volatility in Financial Markets : A review , Journal of Economic Literature , Vol.41, No. 2. , pp. 478 – 539 .
13. Pagan ,AR. Schwert , GW. (1990) , Alternative models for conditional stock volatility, Journal of Econometrics Volume 45, Issues 1–2, July–August 1990, Pages 267-290 .
14. Figlewski, S . Hasbrouck, J .(1993) , Forecasting Volatilities and Correlations with EGARCH Models , The Journal of Derivatives Winter 1993, 1 (2) 51-63 .
15. Brailsford , T. Faff , R. (1996) , An evaluation of volatility forecasting techniques , Journal of Banking & Finance, 1996, vol. 20, issue 3, 419-438 .
16. Franses, PH. Van Dijk, R. (1996) , Forecasting Stock Market Volatility Using (Non-Linear) Garch Models. Journal of Forecasting, 15, 229-235 .
17. Hansen ,P. Lunde ,A. (2005) , A forecast comparison of volatility models: does anything beat a GARCH(1,1) ?
18. Black , F. Scholes , M . (1973) , The Pricing of Options and Corporate Liabilities , The Journal of Political Economy, Vol. 81, No. 3 (May - Jun., 1973), pp. 637-654 .

19. Bluhm ,H. Yu (2001) , Forecasting Volatility :Evidence from the German Stock Market .
20. Vilasuso , J. (2002) , Forecasting exchange rate volatility , Economics Letters, 2002, vol. 76, issue 1, 59-64 .
21. Zumbach , G. (2002) , Volatility processes and volatility forecast with long memory .
22. Martins , M . Zein , J . (2002) , Predicting Financial Volatility: High-Frequency Time-Series Forecasts Vis-a-Vis Implied Volatility .
23. Li (2002) , Long-Memory versus Option-Implied Volatility Predictions , The Journal of Derivatives ,Spring 2002, 9 (3) 9-25 .
24. Hamilton (1989) , A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series and the Business Cycle , Econometrica Vol. 57, No. 2 (Mar., 1989), pp. 357-384 (28 pages) .
25. Cao , Tsay (1992) , Nonlinear time-series analysis of stock volatilities .
26. Klaasen (2002) , Improving GARCH volatility forecasts with regime-switching GARCH , Empirical Economics, 2002, vol. 27, issue 2, 363-394 .
27. Crisostomo ,R. (2014) , An Analysis of the Heston Stochastic Volatility Model:
28. Implementation and Calibration using Matlab .
29. Sharpe (1964) , Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk .
30. Sangjoon et al (1998) , Stochastic Volatility : Likelihood Inference and Comparison with ARCH Models , Review of Economic Studies (1998) 65, 361-393 .

31. Li (2018) , The ZD-GARCH model: A new way to study heteroscedasticity, Journal of Econometrics, Elsevier, vol. 202(1), pages 1-17 .
32. Otto, P. Schmid ,W. Garthoff , R. (2018) , Generalized spatial and spatiotemporal autoregressive conditional heteroscedasticity .
33. Bollerslev, T . Engle , R . Wooldridge , J . (1988) , A Capital Asset Pricing Model with Time-Varying Covariances , Journal of Political Economy, 1988, vol. 96, issue 1, 116-31 .
34. Engle , R. Kroner , K . (1995) , Multivariate Simultaneous Generalized ARCH , Econometric Theory Vol. 11, No. 1 (Mar., 1995), pp. 122-150 (29 pages) .
35. Engle , R. Ding , Z . (2001) , Large Scale Conditional Covariance Matrix Modeling, Estimation and Testing , NYU Working Paper No. FIN-01-029 .
36. He , C . Teräsvirta , T . (2004) , An Extended Constant Conditional Correlation GARCH Model and Its Fourth-Moment Structure , Econometric Theory Vol. 20, No. 5 (Oct., 2004), pp. 904-926 (23 pages) .
37. Engle , R . (2002) , Dynamic Conditional Correlation: A Simple Class of Multivariate Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity Models , Journal of Business & Economic Statistics Vol. 20, No. 3 (Jul., 2002), pp. 339-350 (12 pages) .

Βιβλία (Books)

1. Ζαπράνης , Α , (2005) , Χρηματοοικονομική και Νευρωνικά Συστήματα , εκδόσεις Κλειδάριθμος , Πανεπιστήμιο Μακεδονίας .
2. Πουφινάς , Θ. Φλώρος , Χ . (2014) , Χρηματοοικονομικά Παράγωγα , εκδόσεις Δίσιγμα , Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης .
3. Νούλας , Α. (2019) , Χρηματοοικονομική Διοίκηση : Επενδυτικές και Χρηματοδοτικές Αποφάσεις , εκδόσεις Τζιόλας , Πανεπιστήμιο Μακεδονίας .

4. Gujarati, D. Porter, D. επιμέλεια Περσεφόνη , Τ. (2013,2018) , Οικονομετρία : Αρχές και Εφαρμογές , εκδόσεις Τζιόλας .
5. Pilbeam , Κ . επιμέλεια Σαμίτας , Α. (2017) , Διεθνής Χρηματοοικονομική , εκδόσεις Υτορία .
6. Reilly, F . Brown , Κ . (2012) , Analysis of Investments & Management of Portfolios , South – Western Cengage Learning .

Διαδίκτυο (Internet)

1. https://www.mathworks.com/help/econ/index.html?s_tid=hc_product_card
2. <https://www.macrotrends.net/2324/sp-500-historical-chart-data>
3. <https://www.ssga.com/library-content/products/factsheets/mf/us/factsheet-us-en-svspk.pdf>
4. <https://www.investopedia.com/terms/g/generalizedautogressiveconditionalityheteroskedasticity.asp>
5. <https://money.com/stock-market-volatility-frequency-2022/>
6. <https://www.entrepreneur.com/money-finance/why-the-stock-market-has-been-so-volatile-in-2022/428890>
7. <https://finance.yahoo.com/quote/%5EGSPC/history?p=%5EGSPC>
8. <https://www.wsj.com/market-data/quotes/index/SPX>
9. <https://seekingalpha.com/article/4538023-sp-500-volatility-tsunami-breeds>

10. <https://www.nasdaq.com/articles/tracking-sp-500-volatility-2020-10-09>

11. <https://www.schwab.com/learn/story/market-volatility>

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

Εταιρίες που απαρτίζουν τον δείκτη S&P 500

Top 10 Holdings

Apple Inc.	6.59%
Microsoft Corporation	6.02
Amazon.com Inc.	2.91
Alphabet Inc. Class A	2.05
Alphabet Inc. Class C	1.89
Tesla Inc	1.77
Berkshire Hathaway Inc. Class B	1.55
UnitedHealth Group Incorporated	1.52
Johnson & Johnson	1.46
NVIDIA Corporation	1.19

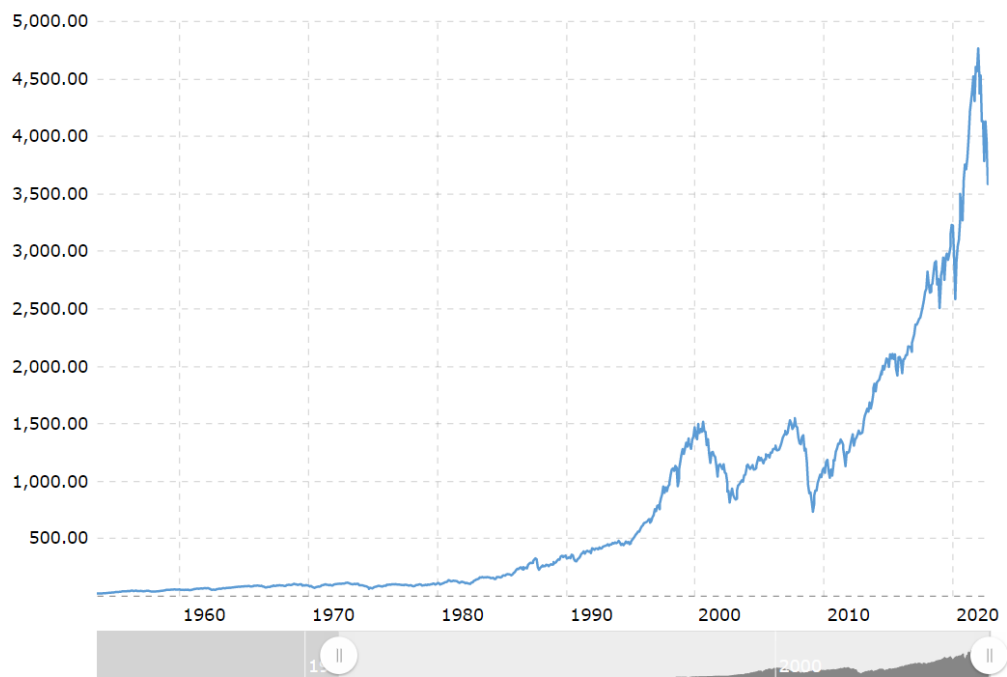
Sector Weights

Information Technology	26.86%
Health Care	15.14
Financials	10.84
Consumer Discretionary	10.57
Communication Services	8.83
Industrials	7.82
Consumer Staples	6.98
Energy	4.34
Utilities	3.08
Real Estate	2.91
Materials	2.62

Διάγραμμα 1: 10 εταιρείες με την υψηλότερη κεφαλαιοποίηση και τα αντίστοιχα μερίδια στον χρηματιστηριακό δείκτη S&P 500 .

(πηγή : <https://www.ssga.com/library-content/products/factsheets/mf/us/factsheet-us-en-svspk.pdf>)

Διαχρονική Πορεία Δείκτη (1957 – 2022)



Διάγραμμα 2 : Διαχρονική πορεία τιμής του χρηματιστηριακού δείκτη S&P 500 .

(πηγή : <https://www.macrotrends.net/2324/sp-500-historical-chart-data>)

Διάρκεια Κρίσεων (1973 , 2001 , 2007 , 2020) που επηρέασαν τον δείκτη



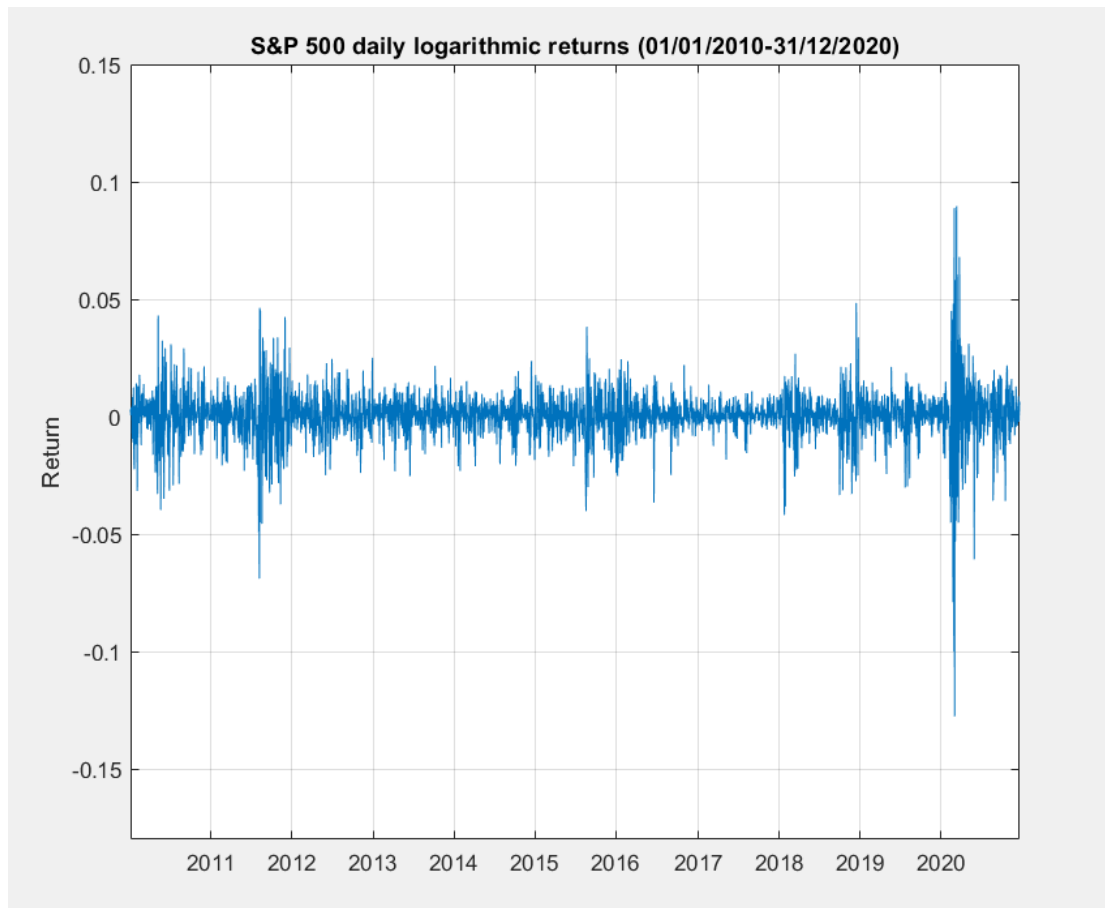
Διάγραμμα 3: Διάρκεια σε μήνες των οικονομικών κρίσεων που επηρέασαν το δείκτη. (πηγή : <https://www.macrotrends.net/2324/sp-500-historical-chart-data>)

Στατιστικά Αποδόσεων του δείκτη

Πίνακας 1 : Περιγραφικά Στατιστικά και Κανονικότητα Αποδόσεων

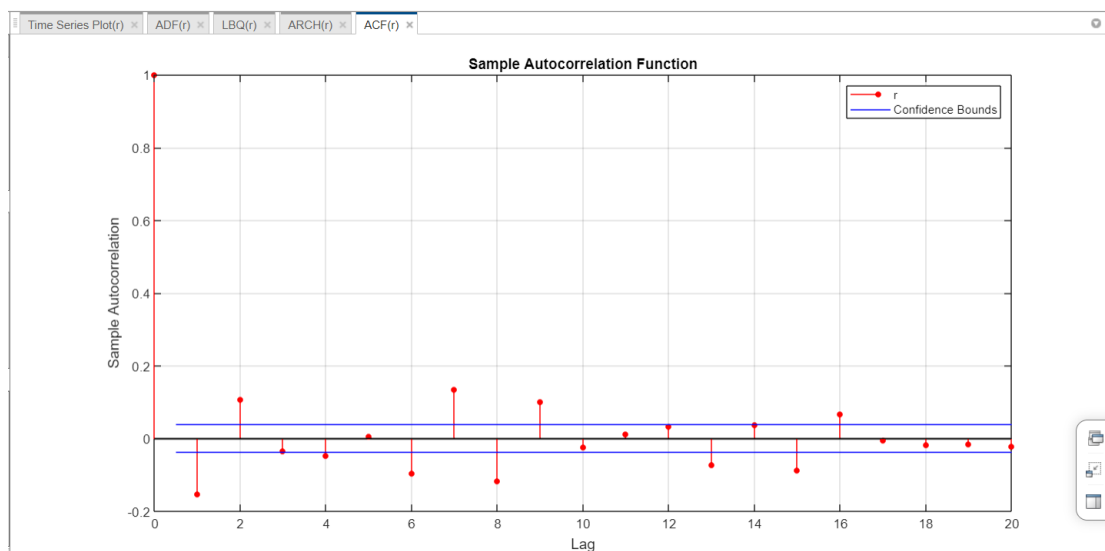
Μέση Τιμή	0,0004
Τυπική Απόκλιση	0,0111
Έλαχιστη Τιμή	0,0897
Μέγιστη Τιμή	-0,1277
Κύρτωση	19,34
Ασυμμετρία	-0,864

Λογαριθμικές Αποδόσεις του δείκτη

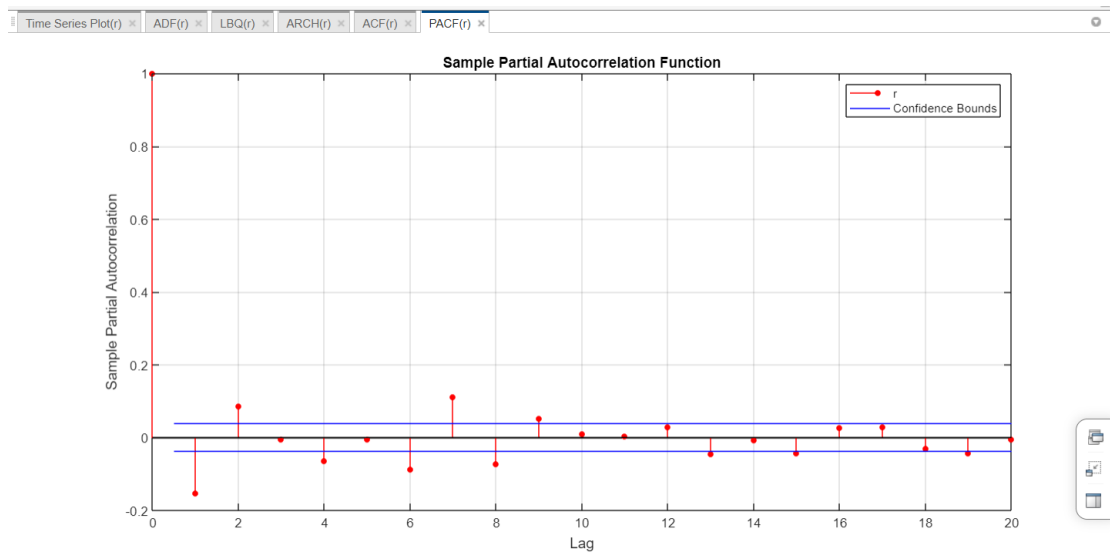


Διάγραμμα 4 : Μεταβλητότητα του δείκτη S&P 500 .

Αυτοσυσχέτιση Αποδόσεων



Διάγραμμα 5 : Συνάρτηση Αυτοσυσχέτισης (ACF) .



Διάγραμμα 6: Συνάρτηση Μερικής Αυτοσυσχέτισης (PACF) .

Time Series Plot(r) × ADF(r) × LBQ(r) ×

Ljung-Box Q-Test for Autocorrelation(r)
 Null Hypothesis: The first m autocorrelations of r are jointly 0

Results									
	Select	Null Rejected	P-Value	Test Statistic	Critical Value	Lags	DOF	Significance Level	
1	<input type="checkbox"/>	true	0	309.2298	37.5662	20	20	0.0100	
2	<input type="checkbox"/>	true	0	309.2298	31.4104	20	20	0.0500	
3	<input type="checkbox"/>	true	0	309.2298	28.4120	20	20	0.1000	

Διάγραμμα 7 : Διαγνωστικός έλεγχος Ljung-Box Pierce Q-Test για αποδόσεις S&P 500 .

Έλεγχος Στασιμότητας και Μοναδιαίας Ρίζας για τις αποδόσεις

Time Series Plot(r) x ADF(r) x

Augmented Dickey-Fuller Test(r)
Null Hypothesis: r contains a unit root

Results

	Select	Null Rejected	P-Value	Test Statistic	Critical Value	Lags	Model	Test Statistic	Significance Level
1	<input type="checkbox"/>	true	1.0000e-03	-11.7082	-2.5688	20	AR	t1	0.0100
2	<input type="checkbox"/>	true	1.0000e-03	-11.7082	-1.9416	20	AR	t1	0.0500
3	<input type="checkbox"/>	true	1.0000e-03	-11.7082	-1.6169	20	AR	t1	0.1000

Διάγραμμα 8 : Στατιστικός Έλεγχος μέσω ADF test για μοναδιαία ρίζα .

Έλεγχος αποτελέσματος ARCH (ARCH effect)

Time Series Plot(r) x ADF(r) x LBQ(r) x ARCH(r) x

Engle's ARCH Test for Heteroscedasticity(r)
Null Hypothesis: r exhibits no ARCH effects

Results

	Select	Null Rejected	P-Value	Test Statistic	Critical Value	Lags	Significance Level
1	<input type="checkbox"/>	true	0	1.1211e+03	31.4104	20	0.0500

Διάγραμμα 9: Έλεγχος ARCH .

Στατιστική Σημαντικότητα συντελεστών εξίσωσης διακύμανσης υποδειγμάτων

Πίνακας 2: Εκτίμηση 3 υποψηφίων υποδειγμάτων μέσω των καθημερινών αποδόσεων .

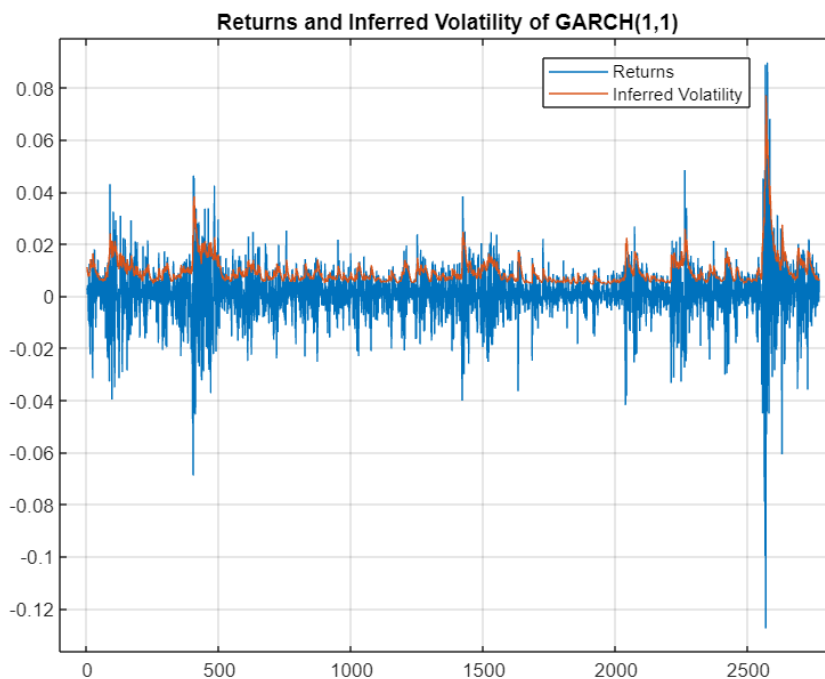
	<i>GARCH</i>	<i>EGARCH</i>	<i>GJR-GARCH</i>
<i>Constant</i>	0,000003	-0,5239	0,000004
<i>t-stat(5%)</i>	6,5084	-11,8665	7,5975
<i>GARCH {1}</i>	0,7932	0,9432	0,7938
<i>t-stat(5%)</i>	58,1469	205,3814	63,6712
<i>ARCH {1}</i>	0,1737	0,2462	0,0433
<i>t-stat(5%)</i>	14,3087	16,7220	7,5497
<i>Leverage {1}</i>	-	-0,1761	0,2670
<i>t-stat(5%)</i>	-	-18,4700	11,6402

Σύγκριση Στατιστικών σφαλμάτων

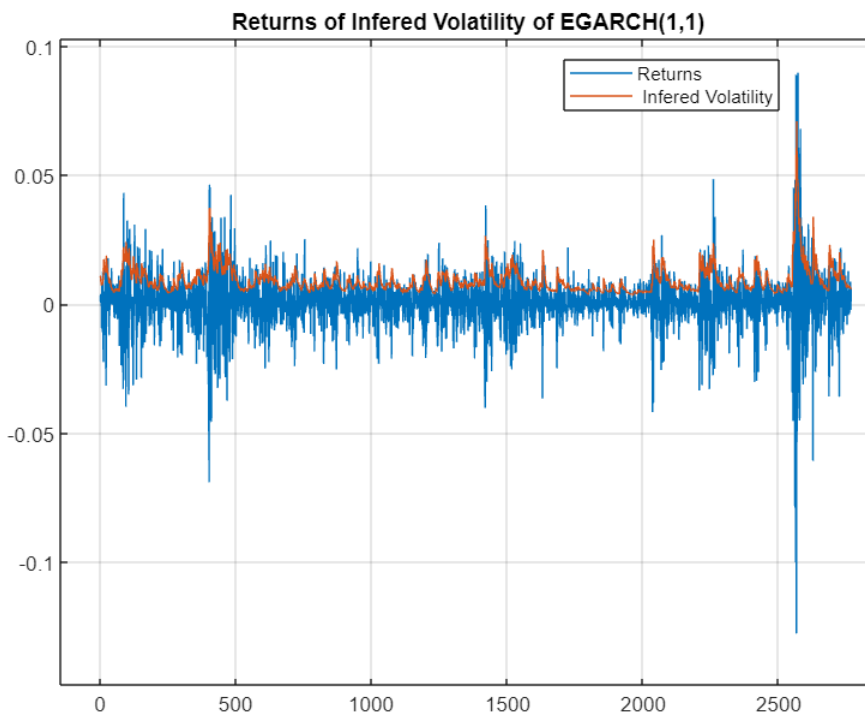
Πίνακας 3: Στατιστικά Σφάλματα Πρόβλεψης.

	<i>MAE</i>	<i>RMSE</i>	<i>MAPE</i>
<i>GARCH(1,1)</i>	0,008474	0,011123	0,0832
<i>EGARCH(1,1)</i>	0,008475	0,011124	0,0872
<i>GJR-GARCH(1,1)</i>	0,008473	0,011122	0,0794

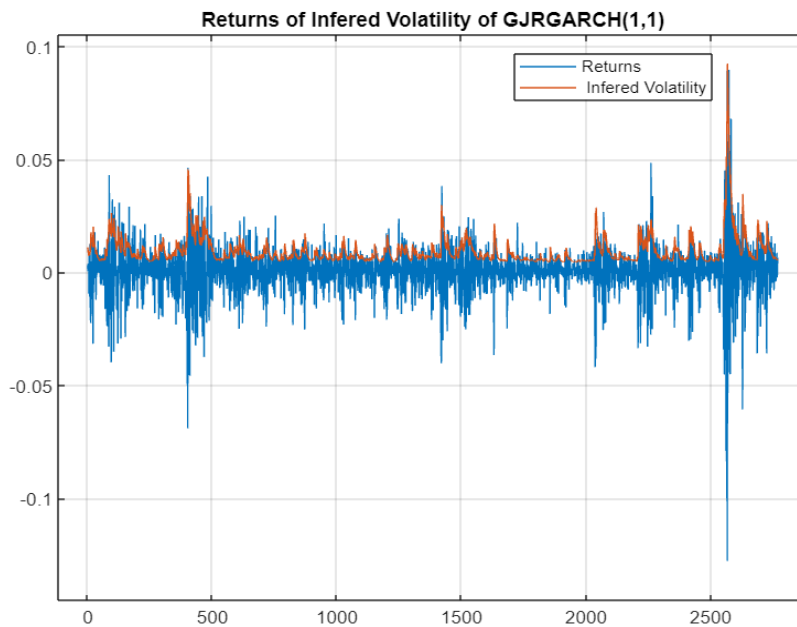
Σύγκριση αποδόσεων δείκτη και υποδειγμάτων GARCH , EGARCH , GJR-GARCH



Διάγραμμα 10 : Αποδόσεις και Μεταβλητότητα GARCH (1,1) .

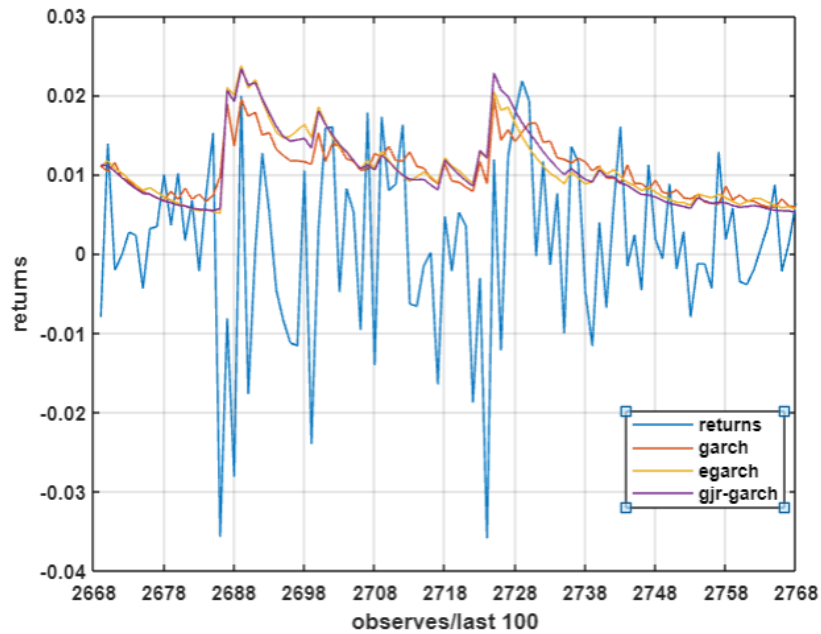


Διάγραμμα 11 : Αποδόσεις και Μεταβλητότητα EGARCH (1,1) .



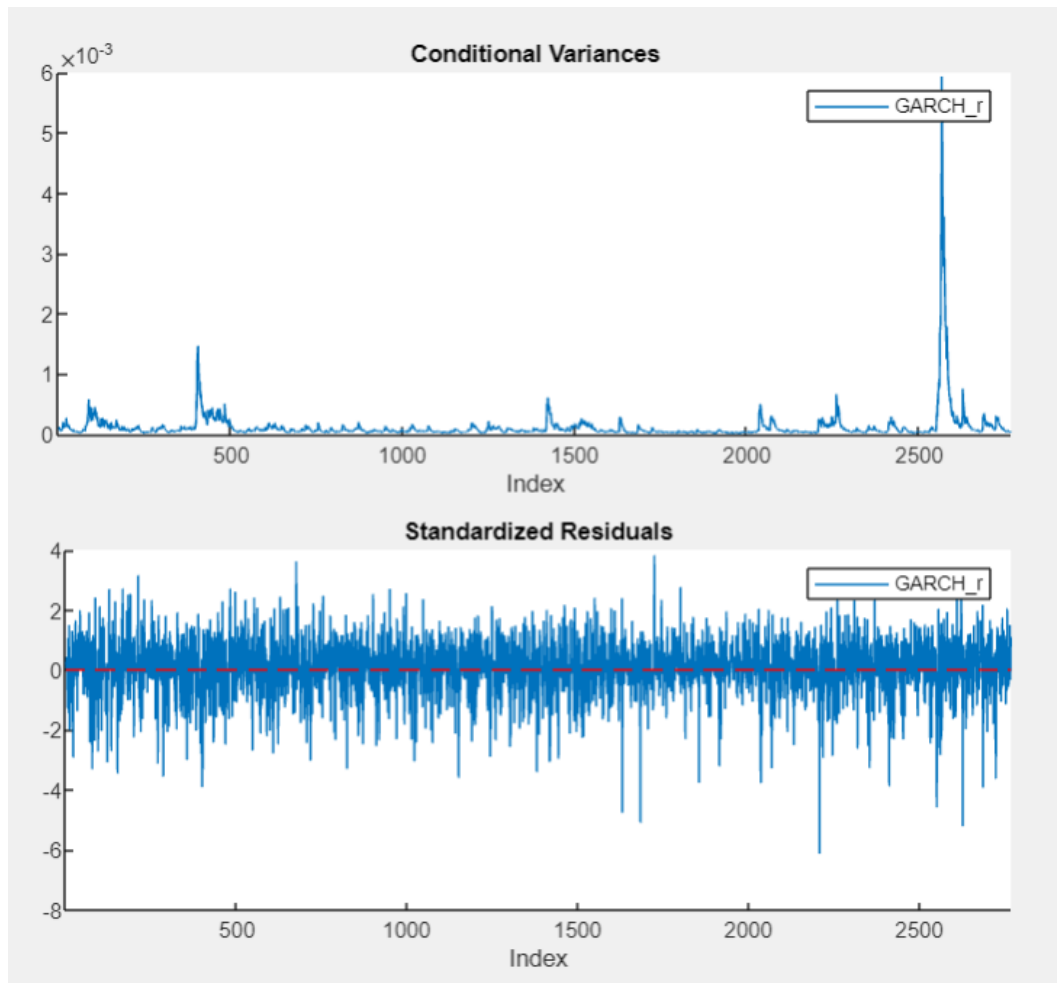
Διάγραμμα 12 : Αποδόσεις και Μεταβλητότητα GJRGARCH (1,1) .

Σύγκριση αποδόσεων δείκτη και υποδειγμάτων GARCH , EGARCH , GJR-GARCH για τις τελευταίες 100 παρατηρήσεις.

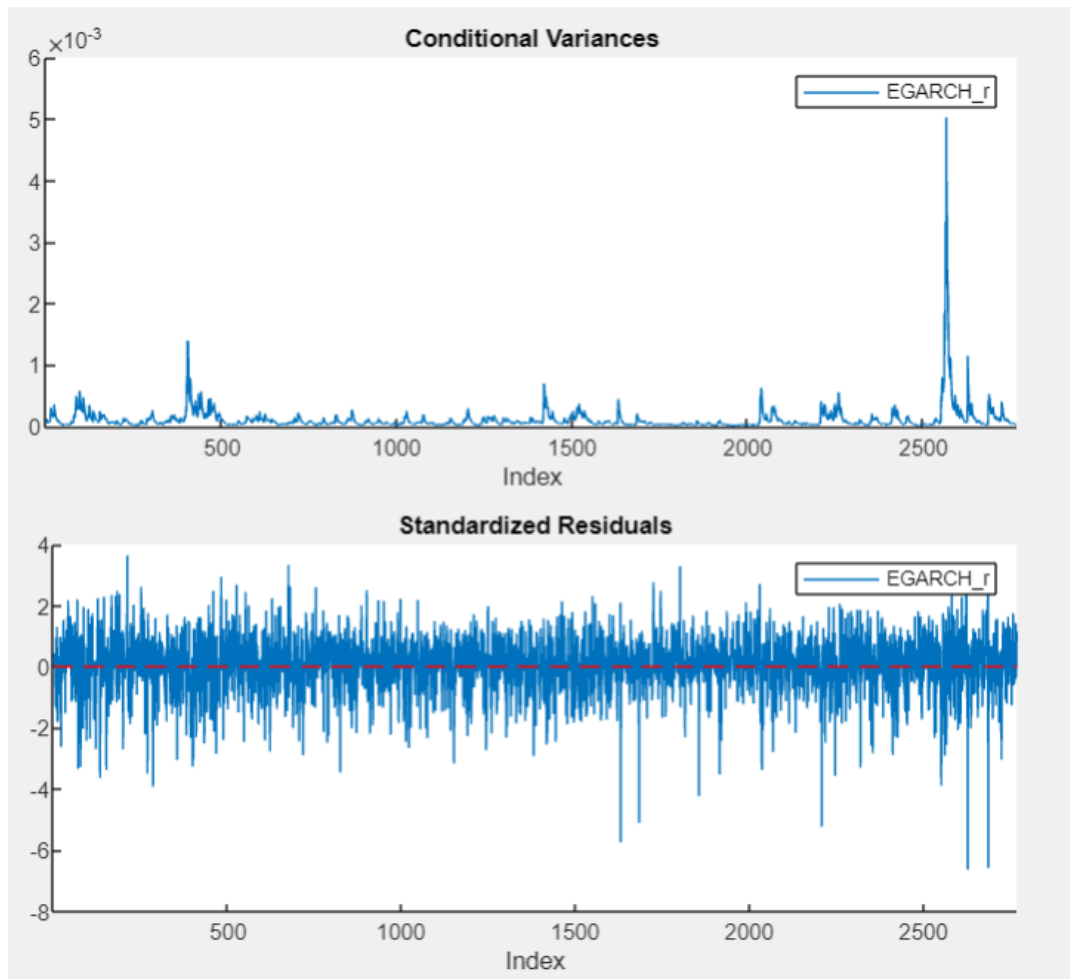


Διάγραμμα 13 : 100 τελευταίες παρατηρήσεις πραγματικές αποδόσεις και αποδόσεις υποδειγμάτων .

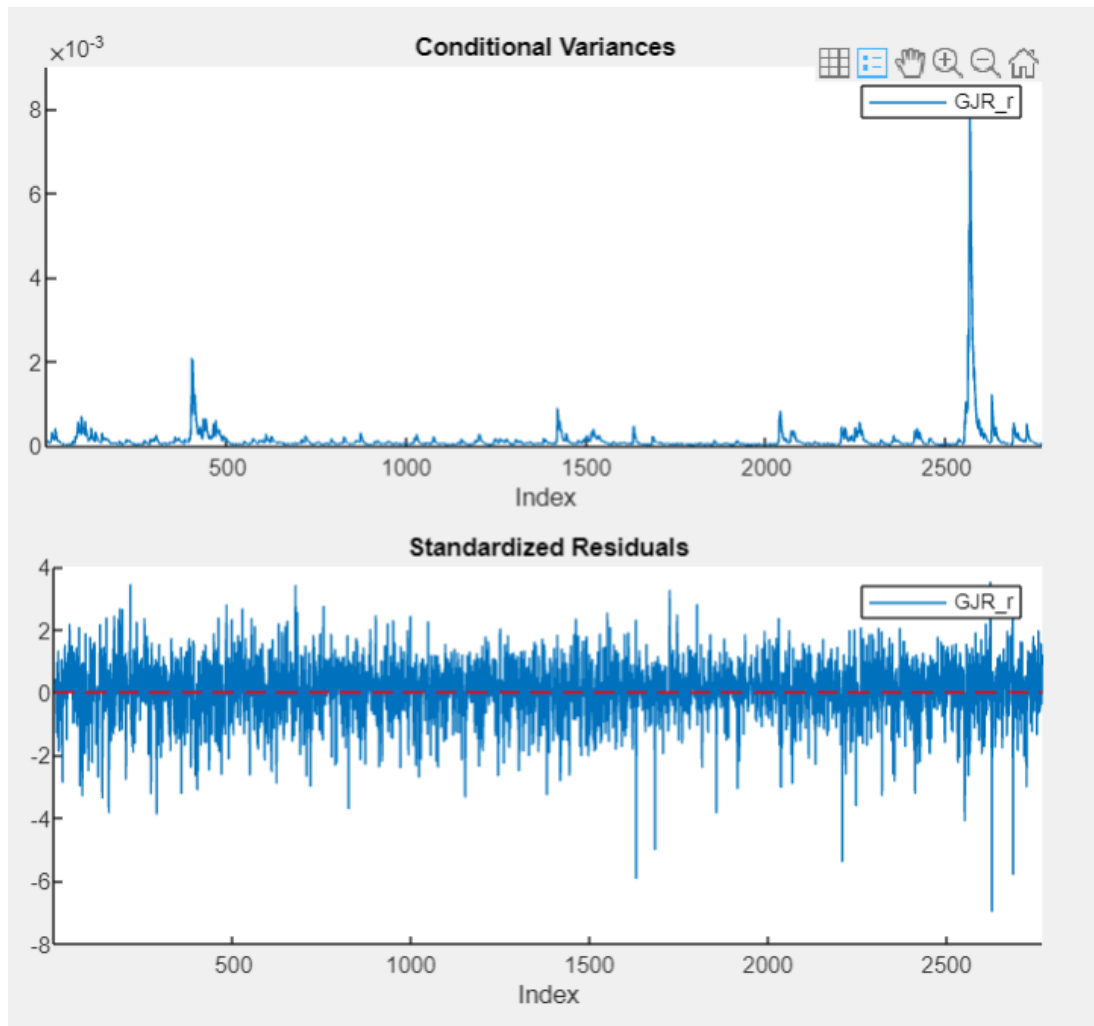
Δεσμευμένες Διακυμάνσεις και Τυποποιημένα Κατάλοιπα GARCH (1,1) , EGARCH (1,1) GJR GARCH (1,1) για το σύνολο των παρατηρήσεων .



Διάγραμμα 14 : Δεσμευμένες Διακυμάνσεις και Τυποποιημένα Κατάλοιπα GARCH (1,1) , για το σύνολο των παρατηρήσεων .

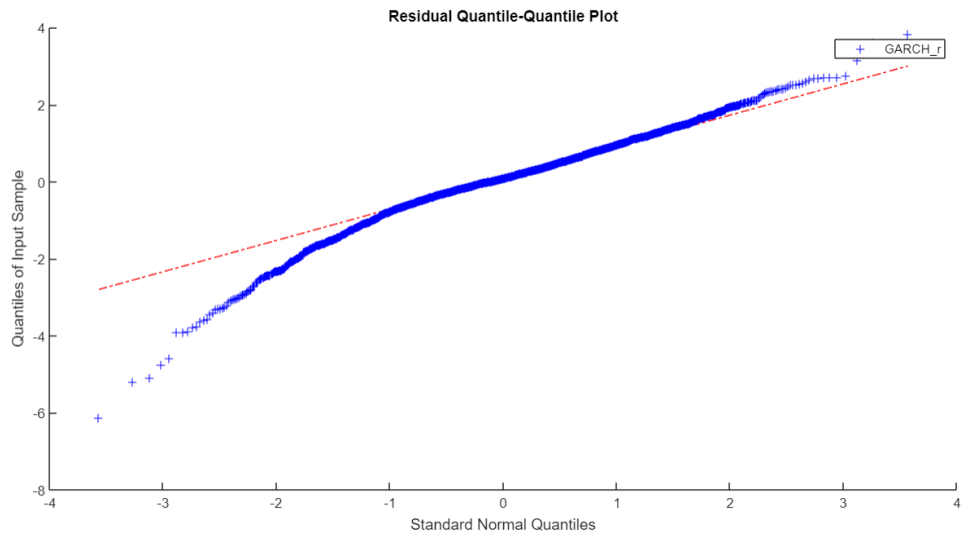


Διάγραμμα 15 : Δεσμευμένες Διακυμάνσεις και Τυποποιημένα Κατάλοιπα EGARCH (1,1) , για το σύνολο των παρατηρήσεων .

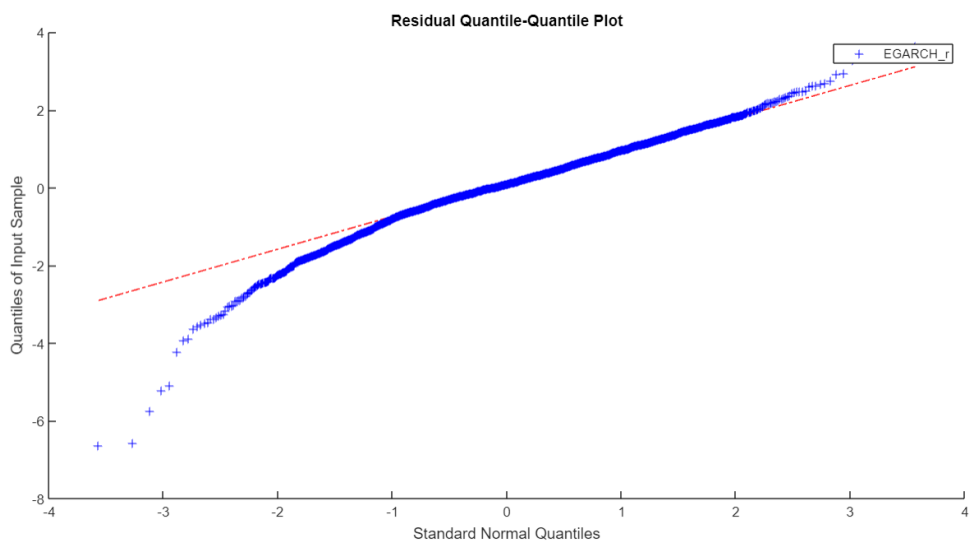


Διάγραμμα 16 : Δεσμευμένες Διακυμάνσεις και Τυποποιημένα Κατάλοιπα GJR-GARCH (1,1) , για το σύνολο των παρατηρήσεων .

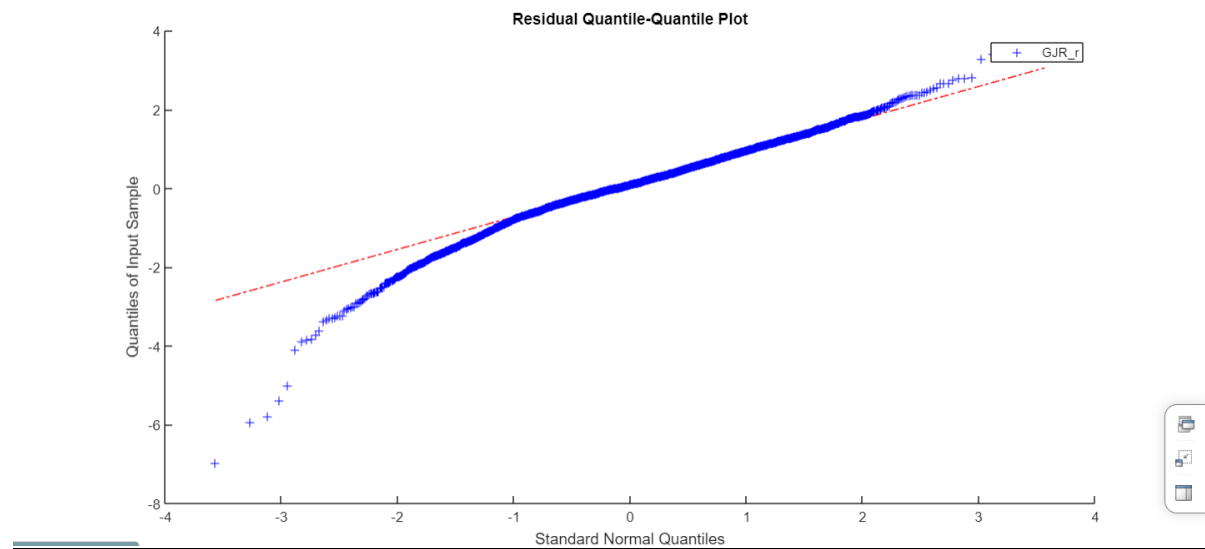
Κατανομή Καταλοίπων QQ Plot GARCH (1,1) , EGARCH (1,1) GJR GARCH (1,1).



Διάγραμμα 17 : Κατανομή Καταλοίπων QQ Plot GARCH (1,1) .



Διάγραμμα 18 : Κατανομή Καταλοίπων QQ Plot EGARCH (1,1) .



Διάγραμμα 19 : Κατανομή Καταλοίπων QQ Plot GJR-GARCH (1,1) .