

ΕΝΑΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΠΟΛΥΕΝΑΡΚΤΗΡΙΑΣ ΤΟΠΙΚΗΣ ΑΝΑΖΗΤΗΣΗΣ ΓΙΑ ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΣΗΣ

Νικόλαος Κουφάκης

*Πανεπιστήμιο Μακεδονίας, Σχολή Επιστημών Πληροφορίας
Τμήμα Εφαρμοσμένης Πληροφορικής, Εγνατίας 156, 54636 Θεσσαλονίκη*

25 Ιουνίου, 2020



Περιεχόμενα

- Εισαγωγή
- QAP
- Μέθοδοι επίλυσης
- Υλοποίηση προγράμματος
- Αποτελέσματα
- Συμπεράσματα και μελλοντικές βελτιώσεις



Σκοπός της Διπλωματικής

- Ανάπτυξη προγράμματος για την επίλυση του προβλήματος της τετραγωνικής αντιστοίχισης
- Ανάλυση και αξιολόγηση των αποτελεσμάτων του εν λόγω προγράμματος
- Σύγκριση των αποτελεσμάτων με άλλους State-of-the-art λύτες



Το πρόβλημα της τετραγωνικής αντιστοίχισης

- Πρόβλημα συνδυαστικής βελτιστοποίησης
- Πολύπλοκο εξαιτίας του χρονοβόρου υπολογισμού της αντικειμενικής συνάρτησης
- Ανάγκη επαναυπολογισμού της αντικειμενικής συνάρτησης μετά από κάθε μεταβολή της λύσης
- Υπάρχει ένα σύνολο εγκαταστάσεων και ένα ισόποσο σύνολο θέσεων. Για κάθε ζεύγος θέσεων ορίζεται μια απόσταση και για κάθε ζεύγος εγκαταστάσεων ορίζεται μια ροή.
- Πρέπει να ανατεθεί σε κάθε θέση μια εγκατάσταση με στόχο την ελαχιστοποίηση του αθροίσματος των αποστάσεων που πολλαπλασιάζονται με τις αντίστοιχες ροές (Koopmans, T. C. and M. J. Beckmann (1957). Assignment problems and the location of economic activities. *Econometrica* 25, 53-76.)



Αντικειμενική συνάρτηση του QAP

- Ως δεδομένα έχουμε δύο πίνακες, τον $A = (a_{ij})_{n \times n}$, ο οποίος περιέχει τις ροές μεταξύ των εγκαταστάσεων και τον $B = (b_{kl})_{n \times n}$, ο οποίος περιέχει τις αποστάσεις μεταξύ των θέσεων.
- με δεδομένους τους δύο πίνακες και το σύνολο Π που περιέχει όλες τις πιθανές μεταθέσεις των ακεραίων από 1 έως n , πρέπει να βρεθεί εκείνη η μετάθεση η οποία ελαχιστοποιεί την ακόλουθη συνάρτηση: (Misevicius, A. (2011). An implementation of the iterated tabu search algorithm for the quadratic assignment problem. Springer-Verlag 34, 665-690.)

$$z(\pi) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{\pi(i)\pi(j)}$$



Αναπαράσταση λύσης

- Η λύση αποτελεί ένα διάνυσμα που απεικονίζει τις θέσεις των εγκαταστάσεων
- Παρόμοια απεικόνιση με άλλα προβλήματα μεταθέσεων, όπως το TSP



State-of-the-art μεθοδολογίες για το QAP

- μέθοδος προσομοιωμένης ανόπτωσης (Simulated Annealing) (Wilhelm, R. and L. Ward (1987). Solving quadratic assignment problems by simulated annealing. IIE Transactions 19 (1), 107-119.)
- μέθοδος αναζήτησης Tabu (Battiti, R. and G. Tecchiolli (1994). The reactive tabu search. ORSA Journal on Computing 6 (2), 126-140)
- μέθοδος αναζήτησης γειτονιάς μεγάλης κλίμακας (Altner, D., R. Ahuja, O. Ergunm, and J. Orlin (2011). Very Large-Scale Neighborhood Search. American Cancer Society.)



Αναζήτηση μεταβλητής γειτνίασης

- Μεθευρετική μέθοδος για προβλήματα συνδυαστικής βελτιστοποίησης η οποία βασίζεται στις γειτονικές λύσεις
- Ένα τοπικό βέλτιστο (ελάχιστο ή μέγιστο) για μια δομή γειτονιάς δεν είναι απαραίτητα και τοπικό βέλτιστο για μια άλλη δομή γειτονιάς
- Το καθολικό βέλτιστο (η βέλτιστη δηλαδή λύση του προβλήματος) αποτελεί και τοπικό βέλτιστο για όλες τις δομές γειτονιών
- Για πολλά προβλήματα τα τοπικά βέλτιστα για διαφορετικές γειτονιές βρίσκονται σχετικά κοντά μεταξύ τους
- Δυνατότητα αλλαγής των δομών γειτονιών με δυναμικό τρόπο

(Mladenovic, N., P. Hansen, J. Perez, and J. Brimberg (2010, 09). In Variable Neighborhood Search, Volume 191, pp. 61-86.)



Φάση διατάραξης και τελεστές

- Αυτή η φάση βοηθάει στην απεγκλώβιση από τοπικά βέλτιστα
- Όσο πιο εντατική είναι, τόσο πιο διαφοροποιημένη λύση παράγεται
- Παραγωγή τυχαίας γειτονικής λύσης με χρήση προκαθορισμένων τελεστών
- Τελεστής swap: επιλογή δύο στοιχείων και μεταφορά του ενός στη θέση του άλλου
- Τελεστής 2-opt: επιλογή δύο στοιχείων του διανύσματος και αντιστροφή όλων των στοιχείων που βρίσκονται ανάμεσά τους
- Τελεστής relocate: μεταφορά ενός στοιχείου σε άλλη θέση



Φάση τοπικής αναζήτησης

- Χρήση ενός τελεστή σε μια συγκεκριμένη γειτονιά με στόχο την εύρεση του τοπικού βέλτιστού της
- Επιλέγεται συνήθως διαφορετικός τελεστής από τη φάση διατάραξης
- Τεχνική first improvement: Η πρώτη βελτίωση στην τρέχουσα λύση γίνεται αυτόματα αποδεκτή, καλύτερα αποτελέσματα με τυχαία αρχική λύση
- Τεχνική best improvement: Σάρωση ολόκληρης της γειτονιάς και αποδοχή της καλύτερης λύσης, καλύτερα αποτελέσματα με κατασκευασμένη αρχική λύση

(Mladenovic, N. and P. Hansen (2006). First vs. best improvement: An empirical study. Discrete Applied Mathematics 154 (5), 802-817.)



Αλλαγή γειτονιάς

- Μεταφορά σε άλλη δομή γειτονικών λύσεων, πρακτικά χρήση διαφορετικού τελεστή
- Basic: Η εύρεση καλύτερης ποιοτικά λύσης οδηγεί την αναζήτηση ξανά στην πρώτη γειτονιά. Διαφορετικά συνεχίζουμε στην επόμενη κατά σειρά δομή γειτονικών λύσεων
- Cyclic: Η αναζήτηση συνεχίζεται στην επόμενη γειτονιά λύσεων ανεξάρτητα από το αποτέλεσμα της τοπικής αναζήτησης
- Pipe: Αν βρεθεί καλύτερη λύση της τρέχουσας, η αναζήτηση συνεχίζεται στην ίδια γειτονιά λύσεων

(Mladenovic, N., P. Hansen, R. Todosijevic, and S. Hanafi (2016, 08). Variable neighborhood search: basics and variants. EURO Journal on Computational Optimization 5.)



Πολυεναρκτήρια τοπική αναζήτηση

- Σε περίπτωση εγκλωβισμού σε τοπικό βέλτιστο, γίνεται επανεκκίνηση της αναζήτησης
- Αυτό επιτυγχάνεται με τυχαιοποίηση της τρέχουσας λύσης
- Πρακτικά γίνονται χιλιάδες εκτελέσεις της αναζήτησης με σκοπό τη βελτίωση της καλύτερης τρέχουσας λύσης
- Στο συγκεκριμένο πρόγραμμα αυτή η τεχνική επέστρεψε τα καλύτερα αποτελέσματα



Χρήσιμες τεχνικές

- fast update: Η χρήση του τελεστή swap μας επιτρέπει να υπολογίζουμε μόνο τη διαφορά στις τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης και αποφεύγουμε τον επαναυπολογισμό της:

$$\Delta_z(\pi, i, j) = (a_{ii} - a_{jj})(b_{\pi(j)\pi(j)} - b_{\pi(i)\pi(j)}) + (a_{ij} - a_{ji})(b_{\pi(j)\pi(i)} - b_{\pi(i)\pi(j)}) \\ + \sum_{k=1, k \neq i, j}^n [(a_{ik} - a_{jk})(b_{\pi(j)\pi(k)} - b_{\pi(i)\pi(k)}) + (a_{ki} - a_{kj})(b_{\pi(k)\pi(j)} - b_{\pi(k)\pi(i)})]$$

Σχήμα: Fast update

(Misevicius, A. (2011). An implementation of the iterated tabu search algorithm for the quadratic assignment problem. Springer-Verlag 34, 665-690.)



Χρήσιμες τεχνικές (Συνέχεια)

- Συμμετρικότητα: όταν το στιγμιότυπο είναι συμμετρικό, υπάρχει τύπος υπολογισμού της διαφοράς της αντικειμενικής συνάρτησης. Μπορούμε να τον χρησιμοποιήσουμε αν τουλάχιστον ένας από τους δύο πίνακες (αποστάσεων ή ροών) είναι συμμετρικός.

$$\Delta_z(\pi, i, j) = \sum_{k=1, k \neq i, j}^n (a'_{ik} - a'_{jk})(b_{\pi(j)\pi(k)} - b_{\pi(i)\pi(k)})$$

Σχήμα: Symmetric update

(Fischetti, M., M. Monaci, and D. Salvagnin (2012, 08). Three ideas for the quadratic assignment problem. Operations Research 60, 954-964.)



Χρήσιμες τεχνικές (Συνέχεια)

- self adjusting: εναλλαγή των τεχνικών first και best improvement ανάλογα με την ποιότητα της τρέχουσας λύσης
- failed iterations: Εντοπισμός εγκλωβισμού σε τοπικό βέλτιστο μετρώντας τις αποτυχημένες επαναλήψεις



Γλοποίηση με VNS

Form1

Choose File:
bur26a

VNS Single File

k = 10

Seconds: 5

VNS All Files

Failed Iterations

Self Adjusting Threshold = 30

Shake with:

1-opt 2-opt relocate

shift left shift right

Error

- Error = 0.59%
- Error = 0.56%
- Error = 0.52%
- Error = 0.52%
- Error = 0.49%
- Error = 0.48%
- Error = 0.48%

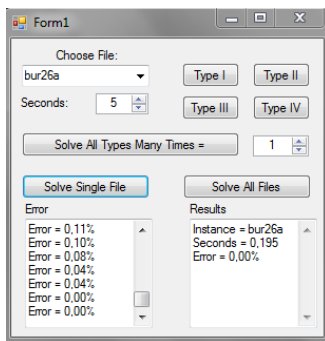
Results

- Instance = bur26a
- Seconds = 5
- Error = 0.48%

Σχήμα: Αρχικό GUI



Υλοποίηση με Multi-start local search



Σχήμα: Τελικό GUI



Ψευδοκώδικας της τοπικής αναζήτησης

Algorithm 19 localSearch

```

1: procedure LOCALSEARCH(solution, tmax)
2:   while Neighbourhood < 3 do                                ▷ while there are more neighbourhoods to be explored
3:     for i = 0; i < size; i ++ do
4:       for i = 0; i < size; i ++ do
5:         if elapsedMilliseconds > tmax then                    ▷ time's up
6:           return;
7:         end if
8:         if Neighbourhood == 1 then                                ▷ 1st neighbourhood
9:           Swap(solution, i, j);                                ▷ fast update is implemented inside the swap function
10:        else if Neighbourhood == 2 then                            ▷ 2nd neighbourhood
11:          TwoOpt(solution, i, j);
12:          calculateFitness(solution);
13:        end if
14:        if currentFitness > bestFitness then                    ▷ improvement
15:          Neighbourhood ← 1;                                       ▷ back to 1st neighbourhood
16:          return;
17:        end if
18:      end for
19:    end for
20:    Neighbourhood ++;                                             ▷ next neighbourhood
21:    Randomize(solution);
22:    calculateFitness(solution);
23:  end while
24:  Neighbourhood ← 1                                             ▷ back to 1st neighbourhood
25:  return;
26: end procedure

```



Τύποι μετροπροβλημάτων QAPLIB

- Τύπος 1: Αποτελείται από τυχαία, μη δομημένα στιγμιότυπα. Η τυχαία παραγωγή τους βασίζεται σε μια ομοιόμορφη κατανομή.
- Τύπος 2: Αποτελείται επίσης από τυχαία στιγμιότυπα τα οποία όμως βασίζονται σε πλέγμα. Δηλαδή οι ροές παράγονται τυχαία και οι αποστάσεις ορίζονται από την απόσταση Μανχάταν.
- Τύπος 3: Ο τύπος αυτός απαρτίζεται από στιγμιότυπα με δεδομένα από την πραγματική ζωή.
- Τύπος 4: Ο τελευταίος τύπος περιλαμβάνει τυχαία μεν στιγμιότυπα, τα οποία όμως παράγονται με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε να μοιάζουν με αυτά της πραγματικής ζωής

(Burkard, R. E., S. Karisch, and F. Rendl (1997). Qaplib a quadratic assignment problem library. *Journal of Global Optimization* 1 10, 391-403.)

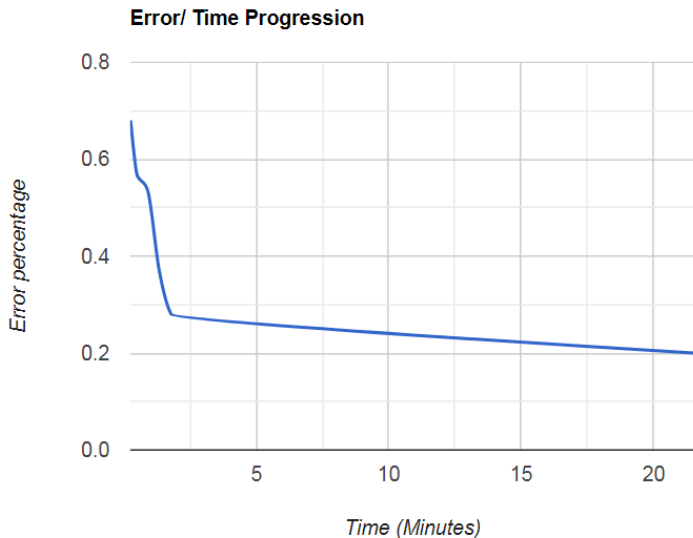


Υπολογιστικά Αποτελέσματα

- Εμπειρικά αποδείχτηκε ότι τα καλύτερα αποτελέσματα ήταν αυτά με ανώτατο χρονικό όριο για κάθε στιγμιότυπο τα τέσσερα λεπτά.
- Λιγότερος χρόνος οδηγούσε σε αρκετά χειρότερα αποτελέσματα και περισσότερος χρόνος οδηγούσε σε μηδαμινή βελτίωση στην ποιότητα των λύσεων.
- Μέσο σφάλμα για όλα τα στιγμιότυπα με ανώτατο χρονικό όριο τα 4 λεπτά: 0.28 τοις εκατό.
- Μέσος χρόνος επίλυσης για κάθε στιγμιότυπο: 1.79 λεπτά.



Γράφημα μέσου σφάλματος



Σύγκριση με άλλους λύτες

- Μέσο σφάλμα και χρόνος επίλυσης σε λεπτά επιλεγμένων στιγμιοτύπων:

ITS		PHA		BLS		MS-ITS		MS-LS	
Gap	Time	Gap	Time	Gap	Time	Gap	Time	Gap	Time
0,09	16	0,04	21,3	0	44,5	0	31	0,65	3,47

Σχήμα: Σύγκριση με άλλους λύτες

- ITS: Iterated Tabu Search (Misevicius, A. (2011). An implementation of the iterated tabu search algorithm for the quadratic assignment problem. Springer-Verlag 34, 665-690.)
- PHA: Parallel Hybrid Algorithm (Tosun, U. (2015). On the performance of parallel hybrid algorithms for the solution of the quadratic assignment problem. Engineering Applications of Artificial Intelligence 39, 267-278.)
- BLS: parallel Breakout Local Search (Aksan, Y., T. Dokeroglu, and A. Cosar (2017). A stagnation-aware cooperative parallel breakout local search algorithm for the quadratic assignment problem. Computers and Industrial Engineering 103, 105-115.)
- MS-ITS: parallel Multi-Start Iterated Tabu Search (Silva, A., L. C. Coelho, and M. Darvish (2019). A parallel iterated tabu search applied to several quadratic assignment problems.)



Συμπεράσματα

- Μεγάλη βελτίωση με χρήση πολυεναρκτήριας τοπικής αναζήτησης σε σχέση με τις VNS προσεγγίσεις
- Λιγότερος απαιτούμενος χρόνος σε σχέση με τους άλλους State-of-the-art λύτες, λίγο χειρότερα ποιοτικά αποτελέσματα



Μελλοντικές βελτιώσεις

- Παραλληλοποίηση του προγράμματος
- Αυτόματη εξαγωγή γραφημάτων για καλύτερη ανάλυση των αποτελεσμάτων



Ερωτήσεις

Ευχαριστώ για τον χρόνο σας!

