



ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗ ΔΙΟΙΚΗΣΗ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ

Διπλωματική Εργασία

**ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ VAR
ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΕΘΟΔΩΝ ΚΑΙ ΠΡΑΚΤΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ**

ΤΟΥ

ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ ΓΚΑΔΑΚΗ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: ΙΟΡΔΑΝΗΣ ΕΛΕΥΘΕΡΙΑΔΗΣ, ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ

Υποβλήθηκε ως απαιτούμενο για την απόκτηση του μεταπτυχιακού
διπλώματος ειδίκευσης στη Διοίκηση Επιχειρήσεων

ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2020

*Αφιερώνεται στους γονείς μου που μου προσέφεραν
τα μέσα και τη δυνατότητα να φτάσω ως εδώ*

*και στον αδερφό μου που πάντα με παρακινεί
για κάτι καλύτερο*

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέπων καθηγητή κ. Ιορδάνη Ελευθεριάδη, ο οποίος με καθοδήγησε στην συγκέντρωση και τη διαμόρφωση του υλικού της διπλωματικής αλλά κυριότερα συνέβαλε καθοριστικά με την βοήθεια του στους πρακτικούς υπολογισμούς.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τα μέλη της εξεταστικής επιτροπής καθηγητή κ. Σουμπενιώτη Δημήτριο και επίκουρο καθηγητή κ. Ταμπακούδη Ιωάννη, οι οποίοι διέθεσαν τον χρόνο τους για την αξιολόγηση της παρούσας εργασίας.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω συγγενείς και φίλους που με στήριξαν κατά τα διαστήματα μελέτης μου για να μπορέσω να ολοκληρώσω το παρόν πόνημα.

Περίληψη

Στην παρούσα εργασία γίνεται ανασκόπηση της θεωρίας που εξηγεί την αξία σε κίνδυνο (Value at Risk). Αρχικά εξετάζονται οι βασικές παράμετροι της μεθόδου και στη συνέχεια παρουσιάζονται οι εναλλακτικοί τρόποι υπολογισμού της. Οι τρόποι εξηγούνται τόσο για χαρτοφυλάκιο όσο και για μοναδική θέση και γίνεται προσπάθεια να φανούν οι διαφορές σε κάθε περίπτωση.

Επίσης εξετάζονται θεωρητικά περιπτώσεις εφαρμογής VaR σε ευρέως διαδεδομένα προϊόντα των αγορών. Αυτά αποτελούν προϊόντα σταθερού επιτοκίου, όπως τα ομόλογα και τα προθεσμιακά συμβόλαια. Επίσης μελετώνται δικαιώματα προαίρεσης με τους παράγοντες κινδύνου τους.

Για την καλύτερη κατανόηση της θεωρίας αλλά και την μελέτη της πρακτικότητας δημιουργούνται υποθετικά χαρτοφυλάκια, τα οποία εξετάζονται και σημειώνονται τα αποτελέσματα των υπολογισμών για το καθένα. Αυτό αυτήν την πρακτική εφαρμογή φαίνεται πως για γραμμικά χαρτοφυλάκια που περιέχουν μόνο μετοχές χωρίς δικαιώματα προαίρεσης οι μέθοδοι παράγουν παρόμοια αποτελέσματα. Παρόλα αυτά η πολυπλοκότητα του υπολογισμού στην παραμετρική και τη Monte Carlo μέθοδο είναι εμφανής.

Πίνακας περιεχομένων

1. Εισαγωγή.....	1
1.1 Σκοπός εργασίας	1
1.2 Διάρθρωση εργασίας.....	2
2. Έννοια κινδύνου.....	5
2.1 Ορισμός κινδύνου	5
2.2 Είδη κινδύνου	5
2.3 Διαχείριση κινδύνου.....	7
2.4 Μέτρηση κινδύνου-κέρδους	8
2.4.1 Καμπύλη απόδοσης.....	8
2.4.2 Πηλίκιο Sharpe	9
2.4.3 Πηλίκιο Van	9
3. Βασικές έννοιες	11
3.1 Τυπική απόκλιση.....	11
3.2 Κατανομές.....	12
3.2.1 Κανονική και τυπική κανονική κατανομή.....	12
3.2.2 Κύρτωση κατανομής	13
3.3 Μεταβλητότητα	13
3.4 Μοντέλα μεταβλητότητας.....	14
3.4.1 Απλός κινητός μέσος	14
3.4.2 Μέθοδος ποσοστών-Ιστορική προσομοίωση.....	15
3.4.3 Εκθετικός μέσος όρος.....	15
3.4.4 GARCH	17
3.5 Συσχέτιση.....	18
4. Αξία σε κίνδυνο.....	21
4.1 Ορισμός.....	21
4.2 Βασικές παράμετροι μεθόδου.....	23
4.2.1 Χρονικός ορίζοντας	23
4.2.2 Επίπεδο εμπιστοσύνης.....	24
4.3 Μέθοδοι υπολογισμού VaR.....	25
4.3.1 Διακύμανση - Συνδιακύμανση	26
4.3.2 Ιστορική προσομοίωση.....	31
4.3.3 Μέθοδος Monte Carlo	34
4.3.4 Σύγκριση μεθόδων	39
5. VaR σε προϊόντα.....	41

5.1 Ομόλογα.....	41
5.2 Προθεσμιακά συμβόλαια	42
5.3 VaR σε δικαιώματα προαίρεσης.....	43
5.3.1 Υπολογισμός αξίας δικαιώματος προαίρεσης.....	43
5.3.2 Παράγοντες κινδύνου (the Greeks)	44
5.3.3 Μεταβλητότητα στον υπολογισμό αξίας.....	46
5.3.4 Εφαρμογή VaR σε δικαιώματα προαίρεσης.....	47
6. Έλεγχος αποτελεσμάτων	51
6.1 Τυπικό σφάλμα και μέγεθος δείγματος.....	51
6.2 Εκτίμηση διαστημάτων εμπιστοσύνης και μεταβλητότητα	51
6.3 Εκτίμηση διαστημάτων εμπιστοσύνης και συσχέτιση	52
6.4 Δοκιμή μοντέλων.....	54
7. Προσομοιώσεις ακραίων καταστάσεων.....	61
7.1 Κατηγορίες σεναρίων	62
7.1.1 Τύποι αλλαγών	62
7.1.2 Τύποι δεδομένων	63
7.2 Stress Tests.....	64
7.3 Παράγοντες κινδύνου και αδυναμίες συστήματος	65
7.4 Μεταβλητότητα και περίοδος διάρκειας σε stress tests	65
7.5 Συσχετίσεις σε stress tests.....	66
8. Πρακτικές εφαρμογές	67
8.1 Εισαγωγή	67
8.2 Αξιολόγηση δεδομένων και κανονικότητα	67
8.3 Μοναδική θέση.....	69
8.3.1 Ιστορική προσομοίωση.....	69
8.3.2 Αναλυτική μέθοδος.....	70
8.3.3 Monte Carlo.....	72
8.4 Χαρτοφυλάκιο.....	73
8.4.1 Ιστορική προσομοίωση.....	74
8.4.2 Αναλυτική μέθοδος.....	75
8.4.3 Monte Carlo.....	76
9. Συμπεράσματα και προτάσεις.....	79
9.1 Αξιολόγηση αποτελεσμάτων	79
9.1.1 Μοναδική θέση.....	79
9.1.2 Χαρτοφυλάκιο	79

9.2 Προτάσεις.....	80
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ	83
Βιβλιογραφία	101

1. Εισαγωγή

1.1 Σκοπός εργασίας

Τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα βασίζονται σε υποθετικές προβλέψεις μέτρων κινδύνου για την διαχείριση του εσωτερικού κινδύνου καθώς και για λόγους υπολογισμού του απαιτούμενου από τη νομοθεσία κεφαλαίου. Τα δύο κύρια μέρη της διαχείρισης κινδύνου είναι η επιλογή ενός κατάλληλου μέτρου κινδύνου και μιας μεθόδου προβλέψεων, με την τελευταία συνήθως να προηγείται της επιλογής του μοντέλου και του τρόπου εκτίμησης για την κατανομή των απωλειών (υποθετική) του χαρτοφυλακίου των επικίνδυνων προϊόντων υπό εξέταση (Nolde & Ziegler, 2017).

Η ποσοτικοποίηση του κινδύνου της αγοράς αποτελεί το πρώτο βήμα προς μια πειστική οικονομική διοίκηση και διαχείριση (Chen, 2018). Με την υιοθέτηση της το 1996 από την επιτροπή Basel II, η αξία σε κίνδυνο (value at risk) αποτελεί την ευρέως διαδεδομένη μέθοδο προσδιορισμού του οικονομικού κινδύνου.

Αρχικός στόχος της παρούσας εργασίας είναι η παρουσίαση της θεωρίας πίσω από την τιμή της αξίας σε κίνδυνο (value at risk) και η ανάλυση της έννοιας της. Με αυτόν τον τρόπο μπορεί να κατανοηθεί καλύτερα η φυσική σημασία της τιμής VaR καθώς και οι περιορισμοί της. Είναι πολύ σημαντικό να γίνει σαφές τι μπορεί να προβλέψει ως τιμή αλλά ακόμη πιο σπουδαίο να κατανοηθεί τι δεν μπορεί να προβλέψει.

Δεύτερος στόχος είναι η θεωρητική παρουσίαση και εξήγηση των κυριότερων μεθόδων υπολογισμού της τιμής VaR. Με αυτόν τον τρόπο μπορούν να γίνουν καλύτερα κατανοητές αλλά κυρίως να εξηγηθούν οι διαφορές μεταξύ τους. Οι παραδοχές που γίνονται κατά την εφαρμογή της κάθε μεθόδου επηρεάζουν και επηρεάζονται από το είδος των προϊόντων που περιέχει το κάθε χαρτοφυλάκιο. Δυστυχώς μια γενική μεθοδολογία υπολογισμού δεν μπορεί να εφαρμοστεί σε όλες τις περιπτώσεις και ο κάθε τρόπος δίνει καλύτερα αποτελέσματα ανάλογα με τη σύσταση του χαρτοφυλακίου που εξετάζεται.

Τελικός σκοπός της εργασίας είναι η προσομοίωση μιας θέσης επένδυσης καθώς και ενός χαρτοφυλακίου θέσεων για τον υπολογισμό της τιμής VaR σε κάθε περίπτωση. Με αυτόν τον τρόπο μπορούν αφενός να γίνουν πιο εμφανείς

οι διαφορές ανάμεσα στις μεθόδους υπολογισμού αλλά και να φανεί πως η επιλογή του τρόπου προσέγγισης μπορεί να δώσει διαφορετικά αποτελέσματα. Έτσι φαίνεται η αντικειμενική δυσκολία και οι παραδοχές που πρέπει να γίνουν σε κάθε περίπτωση καθώς και ο όγκος υπολογισμών που απαιτούνται. Είναι πολύ σημαντική η θεωρητική κατανόηση των εννοιών που χρησιμοποιούνται αλλά ο τελικός σκοπός είναι πάντα η πρακτική εφαρμογή και αξιοποίηση τους.

1.2 Διάρθρωση εργασίας

Στο δεύτερο κεφάλαιο προσεγγίζεται η έννοια του κινδύνου. Γίνεται μια προσπάθεια να οριστεί και να κατηγοριοποιηθούν τα διάφορα είδη του. Εισάγεται η έννοια της διαχείρισης του και τέλος γίνεται μια παρουσίαση των τρόπων αξιολόγησης του σε σχέση με το κέρδος.

Το τρίτο κεφάλαιο περιέχει στοιχεία της στατιστικής τα οποία θεωρούνται βασικά και χρησιμοποιούνται κατά κόρον από τη θεωρία και κατά την εφαρμογή της αξίας σε κίνδυνο. Αυτά είναι η τυπική απόκλιση, η κανονική κατανομή και τα χαρακτηριστικά της, η έννοια της μεταβλητότητας και οι διάφοροι τρόποι υπολογισμού της, η συσχέτιση και η μέτρηση της.

Το τέταρτο κεφάλαιο αποτελεί την εισαγωγή στη μέθοδο VaR. Πρώτα ορίζεται και δίνονται οι γενικές μαθηματικές σχέσεις που την υπολογίζουν αλλά και η φυσική σημασία της. Εξετάζονται οι βασικές παράμετροι της, όπως το διάστημα υπολογισμού και το επίπεδο εμπιστοσύνης. Στη συνέχεια παρουσιάζεται η επίδραση που έχουν στην τελική τιμή που υπολογίζεται. Έπειτα μελετώνται οι τρεις κύριες μέθοδοι, δηλαδή η αναλυτική, η ιστορική προσομοίωση και η μέθοδος Monte Carlo. Οι μέθοδοι εξετάζονται τόσο για μια θέση, όσο και για περίπτωση χαρτοφυλακίου. Σε αυτό το κεφάλαιο γίνεται προσπάθεια ανάδειξης των διαφορών και αναφορά των περιπτώσεων που κάθε μέθοδος υπερτερεί της άλλης.

Στο πέμπτο κεφάλαιο εξετάζονται χαρακτηριστικές περιπτώσεις υπολογισμού VaR σε προϊόντα. Συγκεκριμένα μελετώνται οι περιπτώσεις προϊόντων σταθερού επιτοκίου σε πρώτη φάση και σε δεύτερη VaR δικαιωμάτων προαίρεσης (options). Τα προϊόντα σταθερού επιτοκίου είναι τα ομόλογα (bonds) και τα προθεσμιακά συμβόλαια (Forward Rate Agreement). Στην κατηγορία των

options εξετάζεται πρώτα ο τρόπος υπολογισμού της αξίας τους μέσω του μοντέλου Black-Scholes, στη συνέχεια μελετάται η μεταβλητότητα στον υπολογισμό αξίας, οι παράγοντες κινδύνου (the Greeks) ενώ το κεφάλαιο κλείνει με τον τρόπο εφαρμογής VaR σε αυτά.

Το έκτο κεφάλαιο πραγματεύεται τον έλεγχο και την αξιολόγηση των αποτελεσμάτων VaR. Ξεκινάει με το τυπικό σφάλμα και το μέγεθος του δείγματος. Έπειτα συνεχίζει στην εκτίμηση διαστημάτων εμπιστοσύνης, μεταβλητότητας και συσχέτισης. Επόμενο στάδιο είναι η δοκιμή των μοντέλων (back testing) και το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με τη μέτρηση της ακρίβειας τους.

Το έβδομο κεφάλαιο ασχολείται με την προσομοίωση ακραίων καταστάσεων (stress tests). Όπως γίνεται σαφές και μέσα στο κεφάλαιο τα stress tests αποτελούν πολύ σημαντικό συμπλήρωμα της μεθόδου VaR. Έτσι το κεφάλαιο ξεκινάει εξηγώντας τους περιορισμούς της μεθόδου VaR και τους λόγους που η χρήση των stress tests είναι αναγκαία. Εξηγείται η ανάλυση σεναρίων και η ιστορική προσομοίωση ενώ στο τέλος παρουσιάζεται η προσομοίωση ακραίων καταστάσεων μέσω συνδιακύμανσης και της μεθόδου Monte Carlo.

Το όγδοο κεφάλαιο παρουσιάζει την πρακτική εφαρμογή των μεθόδων. Εξηγείται ο λόγος επιλογής του Excel ως εργαλείου εφαρμογής και ο τρόπος απόκτησης των αναγκαίων δεδομένων. Γίνεται επεξήγηση του ελέγχου των δεδομένων ως προς τη δυνατότητα εφαρμογής των μεθόδων. Το πρώτο μέρος του κεφαλαίου ασχολείται με θέση μιας μετοχής και παρουσιάζει τον τρόπο εφαρμογής των τριών μεθόδων. Το δεύτερο τμήμα του κεφαλαίου μελετάει την περίπτωση ενός υποθετικού χαρτοφυλακίου και την εφαρμογή των μεθόδων.

Στο ένατο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα συμπεράσματα που προκύπτουν από την εργασία καθώς και την πρακτική εφαρμογή. Επίσης αναφέρονται προτάσεις για μελλοντικές προσεγγίσεις και εργασίες. Γίνεται αναφορά στους περιορισμούς που παρουσιάστηκαν κατά τη μελέτη και τη συγγραφή της εργασίας.

Τέλος παρατίθεται παράρτημα πινάκων με τιμές που χρησιμοποιήθηκαν ή προέκυψαν από τους υπολογισμούς των τιμών VaR.

2. Έννοια κινδύνου

2.1 Ορισμός κινδύνου

Οι επενδύσεις και κάθε μορφή οικονομικής δραστηριότητας αποσκοπούν στο κέρδος, το οποίο συνήθως είναι χρηματικό. Η διαδικασία μιας επένδυσης μπορεί να διαιρεθεί σε δύο μέρη: την ανάλυση αξιογράφων και τη διαχείριση χαρτοφυλακίου (Βασιλείου, 2009). Στα πλαίσια της ανάλυσης γίνεται άμεσα αντιληπτό πως σημαντικό ρόλο παίζει η έννοια της απόδοσης της επένδυσης. Η απόδοση μπορεί να λάβει τη μορφή της πραγματοποιηθείσας, της αναμενόμενης και της απαιτούμενης. Η πρώτη αναφέρεται στην πραγματική απόδοση μιας επένδυσης, η δεύτερη στην μελλοντική που οι επενδυτές προσδοκούν να αποκτήσουν και η τρίτη στην ελάχιστη απαιτούμενη ώστε να έχει νόημα να υλοποιηθεί η επένδυση.

Άρρηκτα συνδεδεμένη με τις επενδύσεις, είναι η έννοια του κινδύνου. Ο κίνδυνος είναι η πιθανότητα για την έκβαση ενός γεγονότος. Με αυτήν τη λογική, βρίσκει εφαρμογή στα πλαίσια που καταλήγει σε οικονομική απώλεια άμεσα ή έμμεσα (Best, 1998). Εναλλακτικά μπορούμε να ορίσουμε ως κίνδυνο τη μεταβλητότητα των δυνητικών αποτελεσμάτων γύρω από την αναμενόμενη τιμή τους ή τον αριθμητικό τους μέσο (Βασιλείου, 2009). Σημαντικό είναι να τονιστεί η διαφορά ανάμεσα στον κίνδυνο και την αβεβαιότητα. Ο πρώτος μπορεί να υπολογιστεί μέσω πειραμάτων ή στατιστικών υπολογισμών ενώ η αβεβαιότητα δεν είναι δυνατόν να προβλεφθεί ούτε με πιθανότητες.

Κατά τον ορισμό του κινδύνου είναι πολύ σημαντικό να αναφερόμαστε και στο χρονικό ορίζοντα του, ο οποίος μπορεί να οριστεί ως η στιγμή που η επένδυση θα ολοκληρωθεί ή θα αποδώσει χρηματικές ροές. Αυτός ο ορίζοντας μπορεί να εκτείνεται από λίγες ώρες ως και χρόνια.

2.2 Είδη κινδύνου

Όλες οι τράπεζες και τα χρηματοοικονομικά ιδρύματα είναι εκτεθειμένα σε διαφόρων ειδών κινδύνους. Το πρώτο βήμα για την αντιμετώπιση των κινδύνων είναι η ταυτοποίησή τους. Με αυτό υπόψη, μπορούμε να κατατάξουμε τους κινδύνους στις παρακάτω κύριες κατηγορίες:

- **Κίνδυνος αγοράς (market risk).** Προκύπτει από την πιθανή μεταβολή των τιμών στις χρηματοδοτικές αγορές. Ουσιαστικά συναντάται σε προϊόντα που συναλλάσσονται σε αντίθεση με αυτά που αποδίδουν όταν φτάσουν σε ωριμότητα και επισήμως δεν αναδιαμορφώνεται η τιμή τους.
- **Πιστοληπτικός κίνδυνος (credit risk).** Αυτό το είδος του κινδύνου αναφέρεται στην πιθανότητα να πτωχεύσει κάποιος από τους συναλλασσόμενους με αποτέλεσμα την απώλεια εσόδων.
- **Κίνδυνος ρευστότητας (liquidity risk).** Εδώ συναντούμε δυο υποκατηγορίες:
 1. **Ρευστότητα επένδυσης (funding liquidity).** Αναφέρεται στην αδυναμία συγκέντρωσης των απαραίτητων κεφαλαίων για την εξυπηρέτηση υποχρεώσεων.
 2. **Εμπορική ρευστότητα (trading liquidity).** Αφορά τη δυνατότητα μετατροπής μιας επένδυσης σε μετρητά σε σύντομο σχετικά χρόνο, σε λογική τιμή και συνήθως σε συνθήκες κρίσης.
- **Λειτουργικός κίνδυνος.** Αποτελεί ένα ευρύ φάσμα κινδύνων που κυρίως συνίσταται από:
 1. **Αδυναμία ελέγχου.** Συνήθως αναφέρεται στην αποτυχία του υπολογισμού της έκθεσης σε κίνδυνο διαφόρων τμημάτων της επιχείρησης ή του ιδρύματος.
 2. **Κίνδυνος μοντέλου.** Οι πιθανές απώλειες που ενδεχομένως να προκύψουν εξαιτίας της αδυναμίας σωστής αποτίμησης ενός οικονομικού προϊόντος.
 3. **Κίνδυνος συστημάτων.** Κίνδυνος που ελλοχεύει από την αστοχία ή την καθυστέρηση των συστημάτων που χρησιμοποιεί κάθε οργανισμός για τη λειτουργία του.

Ο κίνδυνος αγοράς περιέχει τις παρακάτω υποκατηγορίες που είναι σημαντικό να αναφερθούν. Πρώτον, ο **συναλλαγματικός κίνδυνος (currency risk)**, ο οποίος προκύπτει κατά τις μεταβολές στις νομισματικές ισοτιμίες. Δεύτερο συναντούμε τον **κίνδυνο των επιτοκίων (interest rate risk)** που προέρχεται από τη μεταβλητότητα των επιτοκίων της αγοράς σε σχέση με την

επένδυση. Ακόμη έχουμε τον **κίνδυνο κεφαλαίων (equity risk)** που αφορά όσους κατέχουν ένα χαρτοφυλάκιο μετοχών, η αξία των οποίων θα επηρεαστεί από την πορεία του γενικού δείκτη.

Μια πιο σύγχρονη προσέγγιση των ειδών κινδύνου, τους κατατάσσει σε δυο κύριες κατηγορίες: στους **συστηματικούς (systematic risk)**, οι οποίοι συνδέονται με τις κινήσεις της συνολικής αγοράς και τους **μη συστηματικούς (unsystematic risk)**, που οφείλονται σε λόγους ξεχωριστούς για την κάθε επένδυση (Βασιλείου, 2009). Απόρροια των παραπάνω είναι πως ο συνολικός κίνδυνος θα ισούται με το άθροισμα του συστηματικού και του μη συστηματικού κινδύνου.

2.3 Διαχείριση κινδύνου

Είναι σημαντικό να γίνει κατανοητός ο σκοπός της διαχείρισης κινδύνου, ο οποίος είναι διττός. Δηλαδή αποσκοπεί στην βελτίωση της απόδοσης ενός οργανισμού αλλά ταυτόχρονα επιθυμεί να τον προστατέψει από μη αποδεκτές απώλειες. Εκ πρώτης όψεως θα ήταν δυνατό να ειπωθεί πως η διαχείριση κινδύνου επικεντρώνεται στον έλεγχο αλλά κάτι τέτοιο θα ήταν λάθος. Η διαχείριση κινδύνου αφορά τόσο την κατανόηση των κινδύνων που αντιμετωπίζει ένας οργανισμός όσο και τον έλεγχο τους (Best, 1998). Συνέπεια των παραπάνω είναι πως η ορθή λειτουργία ενός τέτοιου τμήματος πρέπει βασίζεται στην ακόλουθη σειρά:

1. Κατανόηση των κινδύνων που ελλοχεύουν
2. Μέτρηση και αξιολόγηση των κινδύνων
3. Λήψη μέτρων αντιμετώπισης
4. Επικοινωνία κινδύνων στους υπευθύνους

Τα τμήματα διαχείρισης κινδύνου δεν υπάρχουν ώστε να εξαλείψουν κάθε πιθανό κίνδυνο, ακόμη και αν κάτι τέτοιο ήταν δυνατό, αλλά για να ελέγχουν τη συχνότητα, το μέγεθος και το αντίκτυπο των απωλειών (Choudhry, 2013). Αυτό επιτρέπει στη διοίκηση αλλά και τους επενδυτές να είναι προετοιμασμένοι για τις εξελίξεις και να λάβουν τις απαραίτητες αποφάσεις.

2.4 Μέτρηση κινδύνου-κέρδους

Για τη λήψη μιας απόφασης σχετικά με την υλοποίηση μιας επένδυσης δεν αρκεί να υπολογιστεί το κέρδος της. Το κέρδος πρέπει πάντα να συνυπολογίζεται σε συνάρτηση με το ύψος της επένδυσης αλλά και του κινδύνου που τη συνοδεύει. Κατά αυτόν τον τρόπο ο επενδυτής είναι σε θέση να εκτιμήσει καλύτερα το όφελος που μπορεί να έχει αλλά κυριότερα την έκθεση του σε ζημιές οι οποίες ενδεχομένως να είναι πολλαπλάσιες του κέρδους. Οι παραδοσιακοί τρόποι αξιολόγησης κινδύνου παραθέτονται παρακάτω.

2.4.1 Καμπύλη απόδοσης

Η αξία των προϊόντων επιτοκίου (πλην των option) είναι ίση με την παρούσα αξία των μελλοντικών χρηματικών ροών, οι οποίες εξαρτώνται από το χρόνο ωρίμανσης και το επιτόκιο απόδοσης. Συνεπώς για κάθε προϊόν είναι δυνατόν να σχεδιαστεί μια καμπύλη απόδοσης η οποία θα αποτυπώνει την εξέλιξη του επιτοκίου σε συνάρτηση με το χρόνο.

Σε μια επένδυση που αποτελείται από αρκετά επιμέρους προϊόντα δεν είναι πρακτικό να εξετάζεται η κάθε καμπύλη απόδοσης ξεχωριστά καθώς είναι χρονοβόρο και επιπρόσθετα μπορεί να έχουμε διαφορετικούς χρόνους ωρίμανσης. Συνεπώς δημιουργείται η ανάγκη για τη δημιουργία μιας συνολικής καμπύλης απόδοσης που θα αντιπροσωπεύει την επένδυση και στην οποία οι επιμέρους αποδόσεις μπορούν να θεωρηθούν ως παράγοντες κινδύνου.

Για να μπορέσουμε να εξάγουμε συμπεράσματα σχετικά με τον κίνδυνο της επένδυσης θα πρέπει να είμαστε σε θέση να μελετήσουμε τη συμπεριφορά της καμπύλης απόδοσης σε σχέση με τους παράγοντες κινδύνου. Οι πιθανές μεταβολές στην καμπύλη είναι:

- Παράλληλη μετατόπιση
- Περιστροφή γύρω από έναν μεμονωμένο κίνδυνο
- Αύξηση ή βύθιση

Η μεταβολή της παρούσας αξίας εξαιτίας μιας παράλληλης μετατόπισης της καμπύλης απόδοσης ονομάζεται αξία μετακίνησης σημείου αναφοράς (Value of Base Point Move). Αντιστοίχως τη μεταβολή της παρούσας αξίας λόγω

περιστροφής μεμονωμένου κινδύνου την ονομάζουμε κίνδυνο καμπύλης απόδοσης (yield curve risk).

2.4.2 Πηλίκo Sharpe

Στην ακαδημαϊκή κοινότητα, ο κίνδυνος αντιμετωπίζεται στα πλαίσια της θεωρίας χαρτοφυλακίου ως τυπική απόκλιση (Choudhry, 2013). Για τους επενδυτές ο κίνδυνος είναι η πιθανότητα απώλειας. Η τυπική απόκλιση αποτελεί ένα παραδοσιακό μέτρο που χρησιμοποιούν οι επαγγελματίες του χώρου για τη μέτρηση του κινδύνου, καθώς εξετάζει την μεταβλητότητα των αποδόσεων σε σχέση με τη μέση τους τιμή.

Επειδή η τυπική απόκλιση στην ουσία αποτελεί ένα κριτήριο αξιολόγησης απωλειών χρειάζεται να την μελετήσουμε σε συνάρτηση με τα κέρδη ώστε να έχουμε μια πληρέστερη εικόνα. Αυτό επιτυγχάνεται μέσω του πηλίκου Sharpe, το οποίο εξετάζει τον λόγο κέρδους-κινδύνου και μετράει κατά πόσο η απόδοση μιας επένδυσης (πάνω από την μηδενική απόδοση) υπερβαίνει την μεταβλητότητα της. Ορίζεται ως εξής:

$$Sharpe = \frac{R_m - R_f}{V_m} \quad (2.1)$$

όπου R_m : η απόδοση της επένδυσης m , R_f : η μηδενική απόδοση και V_m : η τυπική απόκλιση

Τιμές της τάξης του 0,5 θεωρούνται λογικές για τον κίνδυνο που εγκυμονεί κάθε επένδυση. Παρόλα αυτά θα πρέπει να τονιστεί πως το πηλίκo Sharpe βρίσκει εφαρμογή περισσότερο ως εργαλείο σύγκρισης μεταξύ δύο επενδύσεων και όχι ως απόλυτο μέτρο αξιολόγησης κινδύνου.

2.4.3 Πηλίκo Van

Το πηλίκo Van εκφράζει την πιθανότητα μια επένδυση να υποστεί απώλειες σε δεδομένο ορίζοντα χρόνου. Πρώτα υπολογίζεται το πηλίκo του αθροίσματος των αποδόσεων για την περίοδο προς τη μέση τιμή των τυπικών αποκλίσεων της ίδιας περιόδου. Στη συνέχεια η πιθανότητα απώλειας υπολογίζεται χρησιμοποιώντας πίνακες κανονικών κατανομών.

Το πηλίκο Van αποτελεί ένα διαισθητικό εργαλείο απόλυτου κινδύνου εξετάζοντας την πιθανότητα απώλειας. Σημαντική παράμετρος είναι πως γίνεται παραδοχή κανονικότητας για την κατανομή.

3. Βασικές έννοιες

3.1 Τυπική απόκλιση

Υποθέτοντας πως έχουμε μια σειρά παρατηρήσεων, ορίζουμε ως μέση τιμή το πηλίκο του αθροίσματος προς το πλήθος τους. Δηλαδή:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^N X_i}{K} \quad (3.1)$$

όπου \bar{X} =η μέση τιμή

X_1, X_2, \dots, X_k = οι τιμές της ομάδας

K = το πλήθος των τιμών

Η τυπική απόκλιση (σ) αποτελεί τη διασπορά της κατανομής και ουσιαστικά μετράει την απόσταση μιας μεταβολής από τη μέση τιμή. Υπολογίζεται από μια από τις παρακάτω σχέσεις ανάλογα με το κριτήριο που θα εξηγηθεί αμέσως μετά:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2}{n-1}} \quad (3.2)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2}{N}} \quad (3.3)$$

όπου: n = δείγμα από τον πληθυσμό

N = το σύνολο του πληθυσμού

\bar{X} =η μέση τιμή δείγματος

μ = η μέση τιμή του πληθυσμού

Η σχέση (3.2) χρησιμοποιείται όταν έχουμε ένα δείγμα τιμών και η (3.3) στην περίπτωση που έχουμε το σύνολο του πληθυσμού. Στην πράξη το ποια σχέση θα χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό που μας ενδιαφέρει, θα προκύψει από την παραδοχή που θα κάνουμε για τη μεταβολή της τυπικής απόκλισης. Εάν αυτή η μεταβολή, την οποία ονομάζουμε **μεταβλητότητα**, είναι συνεχής θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την σχέση για το σύνολο του πληθυσμού. Εάν όμως η μεταβλητότητα παρουσιάζει διαστήματα σταθερότητας, θα γίνει χρήση της σχέσης για δείγμα (Best, 1998).

3.2 Κατανομές

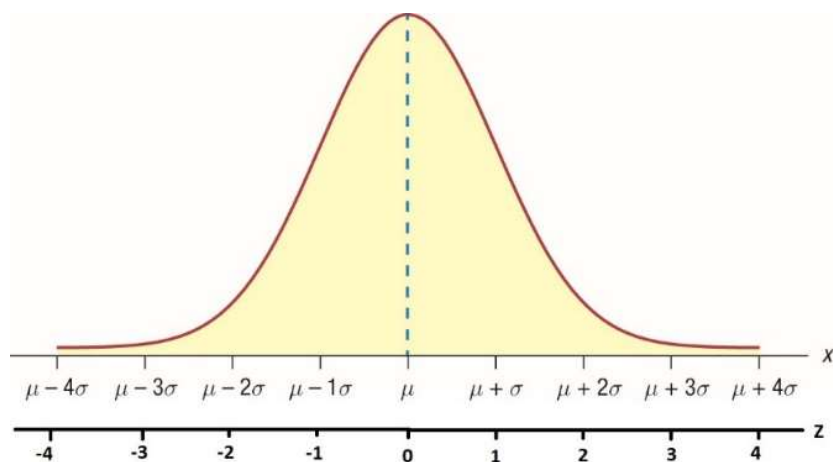
3.2.1 Κανονική και τυπική κανονική κατανομή

Η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση είναι βασικά στοιχεία για την αποτύπωση ενός πλήθους τιμών γραφικά. Αυτή η αναπαράσταση ονομάζεται κατανομή και το πιο σημαντικό είδος της που θα μας απασχολήσει είναι η **κανονική**. Τα βασικά χαρακτηριστικά της κανονικής κατανομής είναι πως αναφέρεται σε συνεχείς μεταβλητές, περιγράφει ικανοποιητικά την μεταβλητότητα των παρατηρήσεων πολλών τυχαίων μεταβλητών και αποτελεί ικανοποιητική προσέγγιση άλλων θεωρητικών κατανομών κάτω από ορισμένες, ελάχιστα περιοριστικές συνθήκες (Ζαχαροπούλου, 2015). Όταν μία μεταβλητή X ακολουθεί την κανονική κατανομή, αυτό σημειώνεται μαθηματικά ως εξής: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, όπου (μ) η μέση τιμή και (σ^2) η διακύμανση.

Προέκταση της κανονικής, αποτελεί η **τυπική κανονική κατανομή**. Για να προκύψει, χρειάζεται να ορίσουμε την τυποποιημένη ή τυπικά τυχαία μεταβολή της X , την οποία καλούμε Z και υπολογίζουμε από την ακόλουθη σχέση:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \quad (3.4)$$

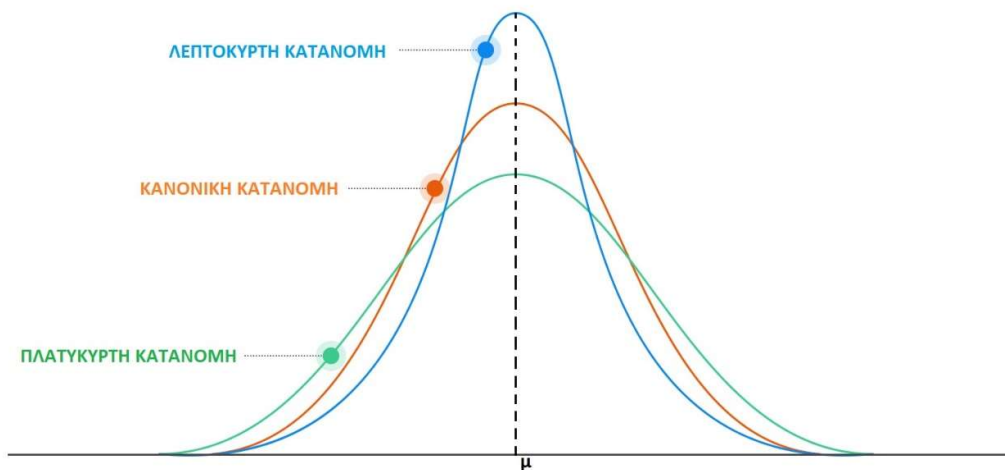
Η Z έχει μέση τιμή ίση με μηδέν και διακύμανση ίση με την μονάδα. Η φυσική σημασία της είναι πως εκφράζει τις διαφορές των τιμών της X από το μέσο τους σε τυπικές αποκλίσεις και συνεπώς είναι ελεύθερη από μονάδες μέτρησης. Η τυπική κανονική κατανομή σημειώνεται μαθηματικά ως εξής: $Z \sim N(0,1)$.



Εικόνα 3.1: Κανονική κατανομή με αντιπαραβολή άξονα Z

3.2.2 Κύρτωση κατανομής

Ένα σημαντικό σημείο της κατανομής είναι και η μορφή της. Αυτή εξαρτάται από τη συχνότητα που παρουσιάζει η μέση αλλά και οι ακραίες τιμές της. Αυτό σημαίνει πως μπορεί δυο κατανομές να παρουσιάζουν την ίδια μέση τιμή αλλά να έχουν διαφορετική **κύρτωση**. Με τον όρο κύρτωση εννοούμε πόσο λεπτή (με μακριές ουρές αριστερά και δεξιά) ή πλατιά (με κοντές ουρές) είναι μια κατανομή. Η πρώτη ονομάζεται λεπτόκυρτη ενώ η δεύτερη πλατύκυρτη κατανομή. Όταν μια κατανομή είναι πλατύκυρτη λέγεται πως έχει “παχιές ουρές” (fat tails). Στην πράξη οι κατανομές των οικονομικών μεγεθών προσομοιάζουν την κανονική αλλά εμφανίζουν πολλές φορές τιμές που βρίσκονται εκτός αυτής. Αυτό μπορεί να συμβαίνει λόγω υψηλής μεταβλητότητας ή επειδή οι αγορές παρουσιάζουν βίαιες προσαρμογές τιμών.



Εικόνα 3.2: Λεπτόκυρτη, κανονική και πλατύκυρτη κατανομή με την ίδια μέση τιμή

3.3 Μεταβλητότητα

Με οικονομικούς όρους, η **μεταβλητότητα** είναι ένα μέτρο του κατά πόσο η τιμή ενός προϊόντος μεταβάλλεται ανα ημέρα ή εβδομάδα ή μήνα. Από στατιστική άποψη, η μεταβλητότητα ορίζεται ως η αυξομείωση της τιμής του υποκείμενου προϊόντος σε μια ορισμένη χρονική περίοδο. Σε γενικές γραμμές υψηλή μεταβλητότητα ισοδυναμεί με υψηλότερο κέρδος αλλά και κίνδυνο απώλειας (Choudhry, 2013). Προϊόντα που εμφανίζουν υψηλότερη μεταβλητότητα θα πρέπει να αποτιμώνται με τέτοιο τρόπο ώστε οι αποδόσεις τους να αντισταθμίζουν τον αυξημένο κίνδυνο.

Αν θεωρήσουμε ένα προϊόν, η απόδοση του για την επόμενη χρονική περίοδο (Δt) μπορεί να υπολογιστεί από την παρακάτω σχέση:

$$R = \mu \cdot \Delta t + \epsilon \cdot \sigma \cdot \sqrt{\Delta t} \quad (3.5)$$

και εάν θεωρήσουμε χρονική περίοδο μίας ημέρας μετασχηματίζεται:

$$R = \mu + \epsilon \cdot \sigma \quad (3.6)$$

όπου: R = η απόδοση του προϊόντος (ως ποσοστό της μεταβολής της τιμής)

μ = η αναμενόμενη απόδοση

σ = η μεταβλητότητα του προϊόντος

ϵ = τυχαία τιμή από την κατανομή των αποδόσεων του προϊόντος. Εάν θεωρηθεί πως είναι κανονικά κατανομημένη, τότε η τιμή λαμβάνεται από κανονική κατανομή με τυπική απόκλιση ίση με τη μεταβλητότητα.

Σε αυτό το σημείο κρίνεται σκόπιμο να αναφερθούν τρία είδη μεταβλητότητας: η ιστορική, η προσδοκώμενη και η μελλοντική. Η ιστορική μεταβλητότητα (historical volatility) υπολογίζεται βάσει ιστορικών τιμών. Είναι η μέση απόκλιση των τιμών από το μέσο όρο τους και εφράζεται από την τυπική απόκλιση (Αγοραστός & Ελευθεριάδης, 2007). Η τιμή της εξαρτάται από την έκταση της περιόδου παρατήρησης και τη στιγμή που αυτή θα παρατηρηθεί. Από αυτήν μπορούμε να κάνουμε εκτιμήσεις για την εξέλιξη της μεταβλητότητας αλλά χωρίς απόλυτη βεβαιότητα. Το συμπέρασμα που εξάγουμε για τη μελλοντική πορεία της ονομάζεται προσδοκώμενη μεταβλητότητα (implied volatility) και αποτελεί αναγκαίο μέσο για να εκτιμήσουμε την μελλοντική τιμή ενός προϊόντος, εισάγοντας τιμές σε μοντέλο κοστολόγησης (Choudhry, 2013). Τέλος, η μελλοντική μεταβλητότητα (future volatility) αποτελεί την αναμενόμενη μεταβολή τιμών για το χρονικό διάστημα που κάνουμε προβλέψεις.

3.4 Μοντέλα μεταβλητότητας

3.4.1 Απλός κινητός μέσος

Ο απλός κινητός μέσος της μεταβλητότητας είναι ίδιος με την τυπική απόκλιση με τη διαφορά πως η μέση τιμή θεωρείται πως είναι μηδέν. Με

δεδομένο πως η μέση τιμή των περισσότερων χρονικών σειρών τιμών θα τείνει στο μηδέν, ο απλός κινητός μέσος θα δίνει αποτελέσματα παραπλήσια με την τυπική απόκλιση και θα συμπεριφέρεται με παρόμοιο τρόπο (Best, 1998). Υπολογίζεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^n X_t^2}{n}} \quad (3.7)$$

όπου: X_t = η μεταβολή της τιμής για την ημέρα t ($t=1$ η προηγούμενη ημέρα, $t=2$ πριν 2 ημέρες κ.ο.κ.)

n = ο αριθμός των ημερών για τις οποίες γίνεται ο υπολογισμός

Όταν το χρονικό διάστημα που εξετάζεται είναι μικρό, ο απλός κινητός μέσος μπορεί και καταγράφει με μεγάλη αμεσότητα τις μεταβολές. Αυτή η συμπεριφορά αλλάζει όταν το διάστημα μεγαλώνει καθώς παρατηρείται πως τα αποτελέσματα εξομαλύνονται και η μεταβλητότητα είναι πιο σταθερή.

3.4.2 Μέθοδος ποσοστών-Ιστορική προσομοίωση

Αυτό το μοντέλο εκτίμησης της μεταβλητότητας δεν απαιτεί εξισώσεις. Η λογική του έγκειται στη συγκέντρωση τιμών ιστορικής μεταβλητότητας και την κατάταξη τους σε ποσοστημόρια, ανάλογα με τη συχνότητα εμφάνισης. Στη συνέχεια η εκτιμώμενη μεταβλητότητα λαμβάνεται από το ποσοστημόριο που αντιστοιχεί στο βαθμό βεβαιότητας που θέλουμε να έχει η πρόβλεψη μας.

Αυτή η προσέγγιση έχει το πλεονέκτημα ότι δεν χρειάζεται να κάνει καμία παραδοχή για την κατανομή των τιμών. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως αφετηρία για τον υπολογισμό μεταβλητότητας που θα χρησιμοποιηθεί στη συνέχεια σε διαφορετικό μοντέλο υπολογισμών.

3.4.3 Εκθετικός μέσος όρος

Η μέθοδος του εκθετικού μέσου όρου εισάγει έναν συντελεστή βαρύτητας στην τιμή κάθε μέρας του δείγματος. Με αυτόν τον τρόπο μπορεί να δώσει μεγαλύτερη σημασία στις νεότερες τιμές από τις παλαιότερες. Η μέθοδος είναι μη-παραμετρική, δηλαδή δεν υποθέτει πως οι τιμές των αποδόσεων ανήκουν σε κανονική κατανομή. Η εξίσωση υπολογισμού είναι η ακόλουθη:

$$\sigma = \sqrt{(1 - \lambda) \cdot \sum_{t=1}^{t=n} \lambda^t (X_t - \mu)^2} \quad (3.8)$$

όπου: λ = συντελεστής εξομάλυνσης. Καθορίζει την βαρύτητα των νεότερων τιμών καθώς και την ταχύτητα με την οποία η μεταβλητότητα θα προσαρμοστεί μετά από ασυνήθιστα μεγάλες αποδόσεις. Μικρή τιμή του συντελεστή δίνει μεγαλύτερη βαρύτητα στις νεότερες τιμές και γρήγορη επαναφορά της μεταβλητότητας μετά από μεγάλες αποδόσεις.

n = ο αριθμός των ημερών που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό

μ = η μέση τιμή της κατανομής

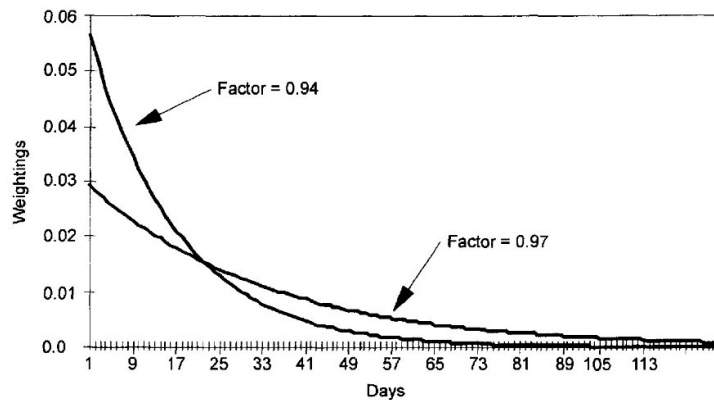
Η παραπάνω σχέση μπορεί να εκφραστεί και ως εξής:

$$\sigma = \sqrt{\lambda \cdot \sigma_{t-1}^2 + (1 - \lambda) \cdot X_t^2} \quad (3.9)$$

όπου: σ_{t-1} = η μεταβλητότητα της προηγούμενης ημέρας

X_t = η ποσοστιαία μεταβολή της τιμής της ημέρας

Γίνεται άμεσα αντιληπτό πως η επιλογή της τιμής του λ είναι κρίσιμης σημασίας. Ανάλογα με τη τιμή που θα θέσουμε αλλάζει η αξιοποίηση του δείγματος. Δηλαδή τιμή $\lambda=0,94$ εκμεταλλεύεται δείγμα της τάξης των 30 ημερών. Αντιθέτως $\lambda=0,97$ μπορεί να χρησιμοποιήσει δείγμα 100 ημερών (Best, 1998).



Εικόνα 3.3: Συντελεστές εξομάλυνσης [πηγή: Best (1998)]

Ο συνολικός αριθμός των τιμών του απαιτούμενου δείγματος δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\text{Πλήθος απαιτούμενων τιμών δείγματος} = \frac{\log(\text{απαιτούμενη ακρίβεια})}{\log \lambda} \quad (3.10)$$

3.4.4 GARCH

Ενώ οι αποδόσεις από μόνες τους παρουσιάζουν μικρή ή μηδενική αυτό-συσχέτιση, υπάρχει ισχυρή θετική αυτό-συσχέτιση των τετραγώνων τους. Αυτό το χαρακτηριστικό καλείται γενικευμένη αυτοπαλινδρομική εξαρτημένη ετεροσκεδαστικότητα επειδή η μεταβλητότητα αλλάζει με τον χρόνο, καθώς οι αγορές περνάνε από περιόδους με χαμηλή και υψηλή μεταβλητότητα (Alexander, 2008).

Η μέθοδος GARCH(1,1) (generalized autoregressive conditional heteroscedasticity) εξηγεί τη συμπεριφορά της διακύμανσης μιας χρονοσειράς τιμών με δυο τρόπους. Πρώτον συλλαμβάνει τις επιπτώσεις υψηλών συχνοτήτων μέσω του τετραγώνου των εναπομενουσών τιμών και δεύτερον εμφανίζει τυχόν μακροπρόθεσμα χαρακτηριστικά των ίδιων των μεταβλητών. Μέσω αυτής της σχετικά απλής στατιστικής ανάλυσης μπορούμε να εξετάσουμε δυο πράγματα. Ανακαλύπτουμε εάν εμφανίζεται συμπεριφορά ομαδοποίησης (clustering) στην μεταβλητότητα και παρατηρούμε κατά πόσο υπάρχουν επιπτώσεις λόγω λεπτοκύρτωσης στην κατανομή των αποδόσεων (Semmler & Youssef, 2009). Οι δύο μονάδες που σημειώνονται μέσα στην παρένθεση υποδηλώνουν πως η εξίσωση της μεθόδου έχει ένα σκέλος αυτοσυσχέτισης και ένα σκέλος κινητού μέσου όρου.

Η εξίσωση που υπολογίζει τη μεταβλητότητα (σ_t) σύμφωνα με τη μέθοδο GARCH είναι η ακόλουθη, έχοντας ορίσει τον εξαρτημένο μέσο και διακύμανση ως $X_t = \mu + \sigma_t \cdot \varepsilon_t$:

$$\sigma_t^2 = \omega + \beta \sigma_{t-1}^2 + \gamma \sigma_{t-1}^2 \varepsilon_{t-1}^2 \quad (3.11)$$

όπου: $\omega > 0$, $\beta \geq 0$, $\gamma > 0$ και $\beta + \gamma < 1$

Στην εξίσωση, η παράμετρος ($\beta + \gamma$) αποτελεί καθοριστικό στοιχείο καθώς υψηλή τιμή της υπονοεί μεγάλη επίδραση της προηγούμενης μεταβλητότητας στην επόμενη, ενώ χαμηλή τιμή σηματοδοτεί αμβλυμμένη εξάρτηση από τη μεταβλητότητα του παρελθόντος (Duffie & Pan, 1997).

Όπως φαίνεται, η εξαρτημένη διακύμανση (σ_t^2) θα μεταβάλλεται μέσα στη χρονοσειρά. Έτσι αν λάβουμε τις ανεξάρτητες αναμενόμενες τιμές για τα στοιχεία της εξίσωσης και υποθέσουμε στατικότητα, μπορούμε να λύσουμε ως προς την

ανεξάρτητη διακύμανση ως εξής: $\overline{\sigma^2} = \frac{\omega}{1} - \beta - \gamma$. Από εδώ βλέπουμε την παραμετρική φύση της μεθόδου GARCH (1,1) (Semmler & Youssef, 2009).

Η εκτίμηση των παραμέτρων GARCH είναι σύνθετη υπόθεση και περιλαμβάνει την μεγιστοποίηση της τιμής της συνάρτησης πιθανότητας. Σκοπός είναι οι παράμετροι να συγκλίνουν σε σταθερές τιμές, γεγονός που συνήθως προϋποθέτει την χρήση δεδομένων τριών ετών (Best, 1998). Μια τυπική εφαρμογή GARCH σημαίνει υπολογισμό των παραμέτρων ανα μήνα. Η ύπαρξη μεγάλων μεταβολών στις τιμές μπορεί να δυσχεράνει τη σύγκλιση των τιμών.

3.5 Συσχέτιση

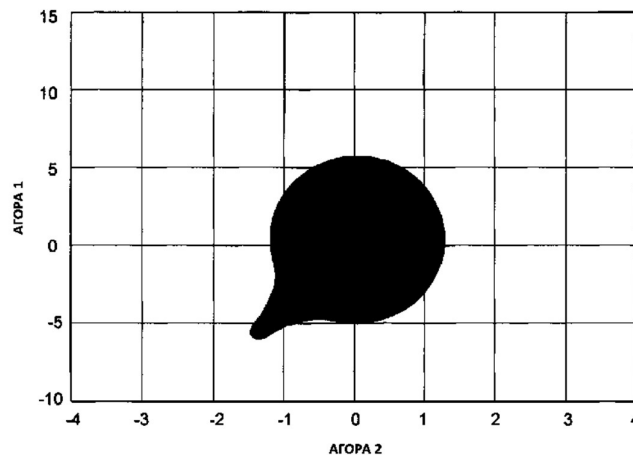
Η συσχέτιση ανάμεσα σε οικονομικά προϊόντα ή τους κινδύνους που αυτά ενέχουν, είναι πάρα πολύ σημαντική αφού η κατανόηση της μπορεί να διευκολύνει την εξαγωγή συμπερασμάτων για τον κίνδυνο ενός χαρτοφυλακίου και τον τρόπο αντιστάθμισης του.

Τα βασικά στοιχεία της συσχέτισης είναι η μορφή, η διεύθυνση και ο βαθμός. Όσο αφορά τη μορφή, αυτή μπορεί να είναι ευθύγραμμη ή καμπυλόγραμμη. Η διεύθυνση μπορεί να παραπέμπει σε θετική συσχέτιση όταν οι μεγαλύτερες τιμές της μίας μεταβλητής αντιστοιχούν στις μεγαλύτερες της άλλης. Αρνητική συσχέτιση έχουμε όταν οι μεγαλύτερες τιμές της μίας μεταβλητής αντιστοιχούν στις μικρότερες της δεύτερης. Τέλος ο βαθμός χαρακτηρίζεται ως απόλυτη συνάφεια όταν έχουμε αντιστοίχιση μια προς μια των μεταβλητών ή ως σχετική συνάφεια σε κάθε λοιπή περίπτωση.

Ο συντελεστής συσχέτισης λαμβάνει τιμές από -1 έως 1. Τιμή ίση με 1 σημαίνει πως δυο προϊόντα ή παράγοντες κινδύνου είναι απόλυτα συσχετισμένα και παρουσιάζουν την ίδια συμπεριφορά, σαν να πρόκειται για ένα προϊόν ή παράγοντα. Στον αντίποδα, τιμή συντελεστή συσχέτισης -1 σημαίνει πως οι μεταβολές του ενός συνοδεύονται από την ακριβώς αντίθετη κίνηση του άλλου. Τέλος, μηδενικός συντελεστής συσχέτισης υπονοεί πως δεν υπάρχει καμία αλληλεπίδραση μεταξύ των δυο μεταβολών.

Είναι σημαντικό να σημειωθεί πως για την ορθή ερμηνεία του συντελεστή συσχέτισης, θα πρέπει να αποτυπωθεί η μεταβολή των μετρούμενων τιμών την ίδια χρονική στιγμή. Αυτό βέβαια για ένα χαρτοφυλάκιο πολλών προϊόντων είναι δύσκολο να εφαρμοστεί και αντιμετωπίζεται υπολογίζοντας συσχετίσεις χρησιμοποιώντας μεταβολές τιμών εύρους πέντε εργάσιμων ημερών. Επειδή η χρονική περίοδος και συνεπώς οι μεταβολές των τιμών είναι τόσο μεγαλύτερες, τα σφάλματα που προκαλούνται από τη λήψη μετρήσεων με μικρή χρονική διαφορά θεωρούνται αμελητέα (Best, 1998).

Τα διαγράμματα σκεδασμού συνήθως σχηματίζουν συμμετρικές ελλείψεις σε περιόδους που οι αγορές συμπεριφέρονται κανονικά. Σε περιόδους κρίσεις όμως τείνουν να σχηματίζουν παραμορφωμένες ελλείψεις, από τις οποίες μπορούμε να εξάγουμε χρήσιμα συμπεράσματα. Εάν θεωρήσουμε ένα υποθετικό διάγραμμα σκεδασμού για δυο αγορές κεφαλαίων, βλέπουμε πως από το σχήμα προκύπτει ότι δεν υπάρχει συσχέτιση μεταξύ των δύο. Παρόλα αυτά υπάρχει μια προεξοχή, η οποία υποδηλώνει πως σε περίοδο κρίσης που θα καταρρεύσει η μία αγορά, θα την ακολουθήσει η δεύτερη. Αυτό μπορεί να επεκταθεί σε οποιαδήποτε συσχέτιση, όπου ανεξάρτητα από τον συντελεστή, σε περίοδο έντονης κρίσης θα υποχωρήσουν όλες οι τιμές.



Εικόνα 3.4:Υποθετική συσχέτιση αγορών κεφαλαίου [πηγή: Best (1998)]

Ο συντελεστής συσχέτισης υπολογίζεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\rho_{x,y} = \frac{COV_{x,y}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} \quad (3.12)$$

όπου: $\rho_{x,y}$ = συσχέτιση ανάμεσα στα στοιχεία x και y

$COV_{x,y}$ = η συνδιακύμανση μεταξύ x και y

σ_x = η μεταβλητότητα του x

σ_y = η μεταβλητότητα του y

Η συνδιακύμανση των x και y είναι το μέσο του αποτελέσματος των αποκλίσεων για κάθε ζευγάρι μεταβολής και προκύπτει από την ακόλουθη σχέση:

$$COV_{x,y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y) \quad (3.13)$$

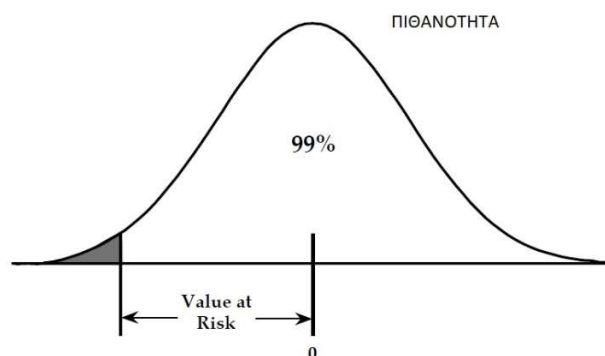
Οι συσχετίσεις μπορούν να υπολογιστούν και μέσω του κινούμενου μέσου όρου ή εκθετικών μεθόδων. Όπως αναφέρθηκε και στην παράγραφο των μεταβλητοτήτων θα χρειαστεί να ληφθούν οι αντίστοιχες αποφάσεις σχετικά με την πηγή των δεδομένων.

4.Αξία σε κίνδυνο

4.1 Ορισμός

Οι τυπικές μέθοδοι εκτίμησης κινδύνου προέρχονται από τις αίθουσες συναλλαγών και ως εκ τούτου έχουν σχεδιαστεί ώστε να είναι κατανοητές από τους επαγγελματίες του χώρου (Best, 1998). Η εφαρμογή κάθε μεθόδου σε μεμονωμένα προϊόντα είναι σχετικά εύκολο να γίνει κατανοητή και να ερμηνευτεί. Το πρόβλημα που εγείρεται όμως είναι ότι τα σύγχρονα χαρτοφυλάκια των χρηματοπιστωτικών ιδρυμάτων περιέχουν εκατοντάδες προϊόντα και κατά επέκταση κινδύνους. Σε αυτόν τον τομέα μειονεκτούν οι κλασικές μέθοδοι καθώς υστερούν στην εκτίμηση της πιθανότητας να υπάρξει απώλεια και παράλληλα δεν μπορούν να περιγράψουν ή να ποσοτικοποιήσουν τις επιπτώσεις της διασποράς κινδύνου.

Τις παραπάνω αδυναμίες έρχεται να υπερβεί η μέθοδος της αξίας σε κίνδυνο (Value at Risk). Η αξία σε κίνδυνο μπορεί να οριστεί ως **η μέγιστη απώλεια που μπορεί να υποστεί ένα χαρτοφυλάκιο σε μια δεδομένη χρονική περίοδο και με μια προαποφασισμένη βεβαιότητα** (Racicot & Théoret, 2009). Θα μπορούσαμε να πούμε πως η VaR είναι μια εκτίμηση για την έκθεση σε κίνδυνο απώλειας μια χρηματικής αξίας. Η μέθοδος στηρίζεται σε πιθανότητες και συνεπώς δεν μπορεί να είναι απόλυτη αλλά το επίπεδο εμπιστοσύνης που ορίζεται από τον χρήστη, του επιτρέπει να έχει κάποια βεβαιότητα (Choudhry, 2013). Μια τυπική έκφραση VaR είναι η ακόλουθη: «*η μέγιστη απώλεια σε βάθος Ψ ημερών είναι περίπου Χ€ με επίπεδο εμπιστοσύνης 99%*».



Εικόνα 4.1:Γραφική απεικόνιση VaR σε τυπική κανονική κατανομή [πηγή:Duffie και Pan (1997)]

Εάν θέλουμε να δώσουμε έναν μαθηματικό ορισμό της VaR, μπορούμε να πούμε πως αν θεωρήσουμε ως F την αθροιστική συνάρτηση κατανομής των αποδόσεων, τότε

$$F(\text{VaR}) = \alpha \quad (4.1)$$

όπου α η αντίστοιχη πιθανότητα για το προεπιλεγμένο επίπεδο εμπιστοσύνης. Εάν δηλαδή έχουμε επίπεδο εμπιστοσύνης 99%, έχουμε $\alpha=0,01$. Εάν εφαρμόσουμε μια συνάρτηση πιθανότητας f , τότε μπορούμε να ορίσουμε τη VaR ως:

$$\alpha = \int_{-\infty}^{\text{VaR}} f(x)dx \quad (4.2)$$

Σε αυτό το σημείο πρέπει να σημειωθεί πως για τον υπολογισμό της μεθόδου αναφερόμαστε σε κανονικές κατανομές αποδόσεων. Αυτό είναι μια παραδοχή που κάνουμε ενώ γνωρίζουμε πως στην πράξη οι αποδόσεις δεν υπακούν στην κανονική κατανομή. Στην πράξη παρουσιάζονται κυρτώσεις, γνωστές και ως «παχιές άκρες» (fat tails), γεγονός που σημαίνει πως διορθώσεις στις τιμές εμφανίζονται πιο συχνά από αυτές που περιγράφει η κανονική κατανομή (Choudhry, 2013). Συνεπώς αυτό είναι κάτι που πρέπει να ληφθεί υπόψη κατά τον υπολογισμό της τιμής VaR.

Προέκταση των παραπάνω είναι πως η VaR βρίσκει εφαρμογή κατά την κανονική λειτουργία της αγοράς. Όταν υπάρχουν περίοδοι κρίσης, όπου η αγορά αντιδρά με απότομο τρόπο, οι υπολογισμοί είναι εσφαλμένοι. Σε αυτές τις περιπτώσεις είναι αναγκαία η εφαρμογή προσομοίωσης ακραίων καταστάσεων (stress tests).

Θα πρέπει να τονιστεί πως ο υπολογισμός VaR δεν αποτελεί διαχείριση κινδύνου από μόνος του. Θα πρέπει να συνυπολογίζεται με άλλες παραμέτρους καθώς περιέχει μόνο όσους κινδύνους μπορούν να ποσοτικοποιηθούν. Συνεπώς αποτελεί ένα ακόμη εργαλείο για την αξιολόγηση των κινδύνων και τη λήψη αποφάσεων.

4.2 Βασικές παράμετροι μεθόδου

4.2.1 Χρονικός ορίζοντας

Όπως αναφέρθηκε και στον ορισμό, η VaR αντιστοιχεί σε συγκεκριμένο χρονικό ορίζοντα. Για τον υπολογισμό VaR βασιζόμαστε στη μεταβλητότητα. Συνήθως είναι διαθέσιμη η ημερήσια μεταβλητότητα ($\sigma_{\text{ημερήσιο}}$) αλλά επιθυμούμε να κάνουμε υπολογισμό για διαφορετικό χρονικό διάστημα. Για να μπορέσουμε να κάνουμε εκτιμήσεις της μεταβλητότητας για διαφορετικά διαστήματα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την τετραγωνική ρίζα του χρόνου. Αυτό σημαίνει βέβαια πως εισέρχεται σφάλμα το οποίο αυξάνει με το χρονικό διάστημα. Εμπειρικά, για μετατροπή έως 10 ημέρες το σφάλμα είναι αμελητέο (Best, 1998).

$$\sigma_{\chi \text{ ημερών}} = \sigma_{\text{ημερήσιο}} \sqrt{T} \quad (4.3)$$

όπου T =ο αριθμός των χ ημερών

Συνεπώς η τιμή VaR αυξάνεται όσο μεγαλώνει το χρονικό διάστημα και μάλιστα με την τετραγωνική ρίζα του χρόνου. Αυτό βέβαια προϋποθέτει πως οι αποδόσεις δεν είναι συσχετιζόμενες σε αυτήν την περίοδο, βάσει της θεωρίας των αποδοτικών αγορών (efficient markets), που ορίζει πως η τιμή ενός προϊόντος εξαρτάται από τις πληροφορίες για αυτό. Επίσης πρέπει οι θέσεις να είναι συνεχείς και οι αποδόσεις ανεξάρτητες και ταυτόσημα κατανεμημένες (i.i.d.) (Jorion, 2007).

Η επιλογή του χρονικού ορίζοντα γίνεται ανάλογα με τον σκοπό του υπολογισμού VaR. Θεωρητικά θα πρέπει να ισούται με τον απαιτούμενο χρόνο για τη ρευστοποίηση μιας θέσης (Best, 1998). Με αυτήν τη λογική οι περισσότερες τράπεζες υπολογίζουν VaR σε ημερήσια βάση, δεχόμενες πως μπορούν να ρευστοποιήσουν τις θέσεις τους μέσα σε αυτόν το χρόνο.

Εναλλακτικά, ως χρονικός ορίζοντας μπορεί να επιλεγεί το απαραίτητο διάστημα ώστε ένας οργανισμός να μπορέσει να αντισταθμίσει τους κινδύνους που αντιμετωπίζει το χαρτοφυλάκιο του εφόσον δεν είναι δυνατή η ρευστοποίηση κάποιων τίτλων ή η τιμή τους θα είναι μηδενική. Βέβαια σε αυτήν την περίπτωση ο κίνδυνος δεν εξαλείφεται αλλά απλώς μειώνεται. Τέλος, ως χρονικός ορίζοντας μπορεί να επιλεγεί το διάστημα που η σύσταση του χαρτοφυλακίου είναι σταθερή.

Με τις πολλαπλές όμως αγοραπωλησίες καθημερινά, αυτό το διάστημα μπορεί να βρει εφαρμογή σε επίπεδο ημέρας. Τα παραπάνω σε συνδυασμό με το γεγονός πως οι τράπεζες υπολογίζουν τα κέρδη και τις απώλειες (profit and loss) σε καθημερινή βάση, καθιστούν τον υπολογισμό VaR με ορίζοντα ημέρας την δημοφιλέστερη πρακτική.

4.2.2 Επίπεδο εμπιστοσύνης

Ο υπολογισμός VaR βασίζεται στην στατιστική και ακολουθεί τους κανόνες της. Σε αυτό το πλαίσιο η πραγματική τιμή του (μ), θα παρουσιάζει απόκλιση από τη μέση (\bar{X}) βάσει της παρακάτω σχέσης:

$$\mu = \bar{X} \pm \text{στατιστικό σφάλμα} \quad (4.4)$$

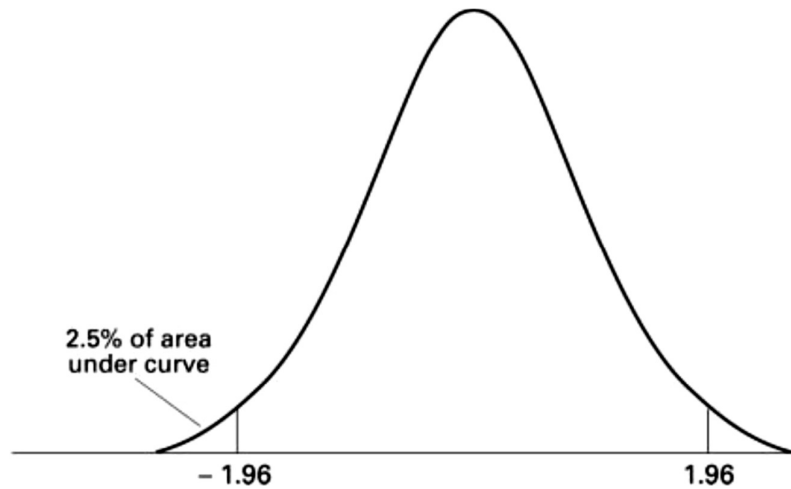
Το εύρος αυτής της απόκλισης ονομάζεται διάστημα εμπιστοσύνης ή επίπεδο εμπιστοσύνης με πιθανότητα $1 - \alpha$, όπου το α επιλέγεται βάσει κριτηρίων του οργανισμού.

Διάφορα μοντέλα κάνουν εκτίμηση της τιμής VaR σε κανονικές συνθήκες της αγοράς. Η παραδοχή που γίνεται είναι πως οι αποδόσεις λαμβάνουν τυχαίες τιμές οι οποίες όμως μακροπρόθεσμα εμπίπτουν σε κανονική κατανομή. Το επίπεδο εμπιστοσύνης που θα επιλεγεί κατά τον υπολογισμό εξαρτάται από τη φύση του χαρτοφυλακίου του οργανισμού καθώς και από το λόγο που υπολογίζεται η τιμή VaR (Choudhry, 2013).

Η επιλογή του επιπέδου εμπιστοσύνης θα πρέπει να αντικατοπτρίζει την πολιτική του οργανισμού σε σχέση με τον κίνδυνο που αυτός είναι διατεθειμένος να εκτεθεί καθώς και το κόστος μιας απώλειας που θα υπερβαίνει την τιμή VaR (Jorion, 2007). Μικρή ανοχή στον κίνδυνο ή μεγάλο κόστος απωλειών οδηγούν στην ανάγκη για υψηλότερο επίπεδο εμπιστοσύνης.

Πρακτικά το επίπεδο εμπιστοσύνης σηματοδοτεί το κατά πόσο σίγουρος είναι ο οργανισμός για την τιμή του VaR. Δηλαδή εάν έχουμε ένα μήνα συναλλαγών (20 εργάσιμες ημέρες) και μπορούμε να δεχτούμε λανθασμένη τιμή του VaR για μια μόνο μέρα τότε πρέπει να ορίσουμε επίπεδο εμπιστοσύνης ίσο με 95%. Το προηγούμενο συμπέρασμα σημαίνει πως $\alpha=5\%$. Συνεπώς σε μια κανονική

κατανομή το 95% των αποτελεσμάτων θα βρίσκεται εντός του διαστήματος $\pm 1,96$ τυπικών αποκλίσεων (z).



Εικόνα 4.2: Επίπεδα εμπιστοσύνης [πηγή:Choudhry (2013)]

Επειδή όμως στα οικονομικά μεγέθη δεν αναμένονται αρνητικές τιμές και για τη διαχείριση κινδύνου δεν μας προβληματίζουν τα μεγαλύτερα κέρδη από το αναμενόμενο, χρησιμοποιούμε μονόπλευρη προσέγγιση της κατανομής. Αυτό σημαίνει πως βάσει πινάκων, το 95% των αποτελεσμάτων θα βρίσκονται σε απόσταση 1,645 τυπικών αποκλίσεων από τη μέση τιμή.

4.3 Μέθοδοι υπολογισμού VaR

Η μέθοδος της αξίας σε κίνδυνο έχει γίνει το βασικό εργαλείο στη διαχείριση κινδύνου διότι παρέχει ένα ποσοτικό μέτρο αξιολόγησης χρησιμοποιώντας τρέχουσες αξίες. Στην πράξη, ο σκοπός είναι η επιλογή μιας μεθόδου με αρκετή ακρίβεια αλλά και λογικό κόστος (Jorion, 2007). Πρακτικά ο υπολογισμός VaR ακολουθεί 4 βήματα:

1. Καθορισμός του χρονικού ορίζοντα
2. Επιλογή του επιπέδου εμπιστοσύνης
3. Δημιουργία μιας κατανομής πιθανοτήτων για τις πιθανές αποδόσεις του χαρτοφυλακίου
4. Υπολογισμός τιμής VaR

Οι βασικές μέθοδοι υπολογισμού VaR είναι της συσχέτισης, της ιστορικής προσομοίωσης και η προσομοίωση Monte Carlo.

4.3.1 Διακύμανση - Συνδιακύμανση

Αυτή η μέθοδος είναι γνωστή και ως παραμετρική ή αναλυτική. Για την εφαρμογή της θεωρούμε πως οι αποδόσεις των παραγόντων κινδύνου ακολουθούν την κανονική κατανομή και οι συσχετίσεις μεταξύ τους είναι συνεχείς. Επίσης η παράμετρος «δέλτα» ή αλλιώς η ευαισθησία σε αλλαγές τιμής του κάθε παράγοντα κινδύνου που περιέχει το χαρτοφυλάκιο είναι συνεχής. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της συσχέτισης, η μεταβλητότητα του κάθε παράγοντα κινδύνου επηρεάζει την τιμή VaR.

4.3.1.1 VaR για ένα προϊόν

Στην περίπτωση που έχουμε χαρτοφυλάκιο με ένα μόνο προϊόν, για να μπορέσουμε υπολογίσουμε την τιμή VaR θα χρειαστούμε τη μεταβλητότητα του προϊόντος και την παρούσα αξία του. Χρησιμοποιώντας την παρακάτω σχέση κάνουμε υπολογισμό σύμφωνα με τον χρονικό ορίζοντα της μεταβλητότητας:

$$VaR = V * P \quad (4.5)$$

όπου: V = η μεταβλητότητα της αξίας

P = η τιμή του προϊόντος

Στην τιμή που υπολογίσαμε όμως, θα πρέπει να εισάγουμε και το επίπεδο εμπιστοσύνης που έχουμε ορίσει. Για να το κάνουμε αυτό θα πρέπει να την πολλαπλασιάσουμε με την τυπική απόκλιση. Η τυπική απόκλιση που χρησιμοποιούμε προκύπτει από το επίπεδο εμπιστοσύνης που επιλέγουμε, τονίζοντας πάντα πως πρόκειται για προσέγγιση μιας πλευράς (one-tail). Δηλαδή για επίπεδο εμπιστοσύνης 95% θα έχουμε τυπική απόκλιση 1,645.

4.3.1.2 VaR για χαρτοφυλάκιο

Υπολογισμός μέσω συνδιακύμανσης

Στην πράξη οι τράπεζες και οι οργανισμοί κατέχουν χαρτοφυλάκια που αποτελούνται από πολλά προϊόντα. Σε αυτήν την περίπτωση για να γίνει ο υπολογισμός VaR θα πρέπει να συνυπολογιστούν οι μεταβλητότητες κάθε προϊόντος και η μεταξύ τους συσχέτιση. Για να καταφέρουμε να κάνουμε τον

επιθυμητό υπολογισμό, πρέπει να μπορέσουμε να συνδυάσουμε τις μεταβολές τιμής του κάθε ξεχωριστού προϊόντος ώστε να καταλήξουμε σε μια κατανομή μεταβολής της συνολικής τιμής του χαρτοφυλακίου. Η σχέση που μας δίνει αυτήν την τιμή είναι:

$$\sigma_p = \sqrt{\alpha^2 \cdot \sigma_A^2 + b^2 \cdot \sigma_B^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot \rho_{AB} \cdot \sigma_A \cdot \sigma_B} \quad (4.6)$$

όπου: σ_p = η μεταβλητότητα του χαρτοφυλακίου

α, b = τα ποσοστά των προϊόντων A και B στο χαρτοφυλάκιο (κλάσμα)

σ_A, σ_B = οι μεταβλητότητες των προϊόντων A και B

ρ_{AB} = η συσχέτιση ανάμεσα στο προϊόν A και το προϊόν B

Από τη σχέση (4.6) προκύπτει ένα ενδιαφέρον στοιχείο σχετικά με τον υπολογισμό VaR χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της συνδιακύμανσης. Αυτό είναι πως ανάλογα με τη συσχέτιση ανάμεσα στα προϊόντα του χαρτοφυλακίου, μεταβάλλεται και η τιμή VaR. Πρακτικά αυτό σημαίνει πως ακολουθώντας μια τακτική διασποράς κινδύνου, όπου χρησιμοποιούμε ένα προϊόν για να μειώσουμε την έκθεση από κάποιο άλλο, μπορούμε να πετύχουμε χαμηλότερη τιμή VaR.

Γενικεύοντας τη σχέση (4.6) για πλήθος προϊόντων (v) ενός χαρτοφυλακίου αξίας P έχουμε:

$$VaR_p = \sqrt{\sum_{i=1}^v P_i^2 \cdot \sigma_i^2 + 2 \cdot \sum_{i=1}^v \sum_{j=1}^v P_i \cdot P_j \cdot \sigma_i \cdot \sigma_j \cdot \rho_{ij}} \quad (4.7)$$

όπου: i και j τα ζεύγη των προϊόντων

$P_{i,j}$ το ποσοστό της αξίας κάθε επιμέρους προϊόντος στο συνολικό χαρτοφυλάκιο

Υπολογισμός με τη χρήση πινάκων

Λόγω της ύπαρξης μεγάλου πλήθους προϊόντων σε ένα χαρτοφυλάκιο, είναι ευκολότερος ο υπολογισμός VaR χρησιμοποιώντας πίνακες. Αρχικά πρέπει να υπολογιστούν οι μεταβλητότητες κάθε προϊόντος χρησιμοποιώντας χρονοσειρές. Σε αυτό το σημείο θα πρέπει να τονιστεί πως οι αποδόσεις είναι μεταβολές των

τιμών των προϊόντων και όχι οι ίδιες οι τιμές. Συγκεκριμένα λαμβάνεται ο λογάριθμος του πηλίκου των τιμών κλεισίματος.

$$\ln \frac{P_t}{P_{t-1}}$$

όπου: P_t = η τελευταία τιμή

P_{t-1} = η προηγούμενη τιμή

Εάν υποθεθεί πως ακολουθούν την κανονική κατανομή, τότε οι αρχικές τιμές τιμών θα ανήκουν την λογαριθμική κανονική κατανομή (Choudhry, 2013). Η χρήση της της λογαριθμικής κανονικής κατανομής εξυπηρετεί διότι δεν λαμβάνει αρνητικές τιμές σε αντίθεση με την κανονική. Η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση υπολογίζονται σύμφωνα με τη στατιστική.

Αρχικά σχηματίζουμε έναν διαγώνιο πίνακα με τις τυπικές αποκλίσεις των επιμέρους προϊόντων στην κύρια διαγώνιο $\begin{bmatrix} \sigma_A & 0 \\ 0 & \sigma_B \end{bmatrix}$, τον οποίο ονομάζουμε διακύμανσης (variance). Έπειτα διαμορφώνουμε τον πίνακα συσχέτισης (correlation), ο οποίος συνδέει τα προϊόντα μέσω των συντελεστών οι οποίοι τοποθετούνται ως εξής: $\begin{bmatrix} 1 & \rho_{AB} \\ \rho_{AB} & 1 \end{bmatrix}$. Βλέπουμε πως συμπληρώνεται μονάδα στις θέσεις που αντιστοιχούν τα προϊόντα. Το γινόμενο των δυο πινάκων μας δίνει τον πίνακα συσχέτισης-διακύμανσης (variance correlation).

Στη συνέχεια ο πίνακας συσχέτισης-διακύμανσης (εφεξής “VC” για συντομογραφία) πολλαπλασιάζεται με τον πίνακα διακύμανσης, ώστε να προκύψει ο πίνακας διακύμανσης-συνδιακύμανσης (variance-covariance ή VCV). Έπειτα σχηματίζουμε πίνακα γραμμή όπου τοποθετούνται τα ποσοστά που αντιστοιχούν σε κάθε προϊόν σε σχέση με το συνολικό χαρτοφυλάκιο $[P_A \ P_B]$, τον οποίο πολλαπλασιάζουμε με τον VCV και λαμβάνουμε ένα πίνακα γραμμή που καλούμε «σταθμισμένο πίνακα διακύμανσης-συνδιακύμανσης» (weighted variance-covariance ή WVCV). Τέλος ο πίνακας WVCV πολλαπλασιάζεται με τον αντίστροφο πίνακα των ποσοστών, δηλαδή τον $\begin{bmatrix} P_A \\ P_B \end{bmatrix}$, ώστε να προκύψει η τυπική απόκλιση του χαρτοφυλακίου.

Η μέθοδος βρίσκει εφαρμογή στα χαρτοφυλάκια, όσα κι αν είναι τα προϊόντα που τα απαρτίζουν. Αυτό που απαιτείται είναι η δημιουργία μεγαλύτερων πινάκων, που έχουν στοιχεία όσα και τα προϊόντα. Δηλαδή για ένα χαρτοφυλάκιο πενήντα προϊόντων, ο αρχικός πίνακας διακύμανσης θα ήταν 50X50

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sigma_{50} \end{bmatrix}.$$

Δύο είναι τα κύρια σημεία που αξίζουν ιδιαίτερης προσοχής. Πρώτον η σειρά που γίνονται οι πολλαπλασιασμοί των πινάκων δεν μπορεί να αλλάξει αφού δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα. Η σειρά αναπαρίσταται σχηματικά στην εικόνα (4.3).

	Variance matrix	Correlation matrix	
		Bond 1 Bond 2	VC matrix
Bond 1	11.83% 0	1 0.647	0.1183 0.07654
Bond 2	0 17.65%	0.647 1	0.114196 0.1765
	VC matrix	Variance matrix	VCV matrix
	0.1183 0.07654	11.83% 0	0.013995 0.013509
	0.114196 0.1765	0 17.65%	0.013509 0.031152
	Weighting matrix	VCV matrix	WVCV
	60% 40%	0.013995 0.013509	0.013801 0.020566
		0.013509 0.031152	
	WVCV	W	WVCW
	0.013801 0.020566	60%	0.016507
		40%	
		Standard deviation	0.12848

Εικόνα 4.3: Υπολογισμός για χαρτοφυλάκιο 2 προϊόντων [πηγή: (Choudhry, 2013)]

Το δεύτερο σημαντικό σημείο, είναι ο σχηματισμός του πίνακα συσχέτισης για πλήθος προϊόντων. Εάν υποθέσουμε πως έχουμε τρία προϊόντα Α, Β και Γ και οι μεταξύ τους συσχετίσεις είναι οι παρακάτω:

Συσχέτιση Α, Β: ρ_{AB}

Συσχέτιση Α, Γ: ρ_{AG}

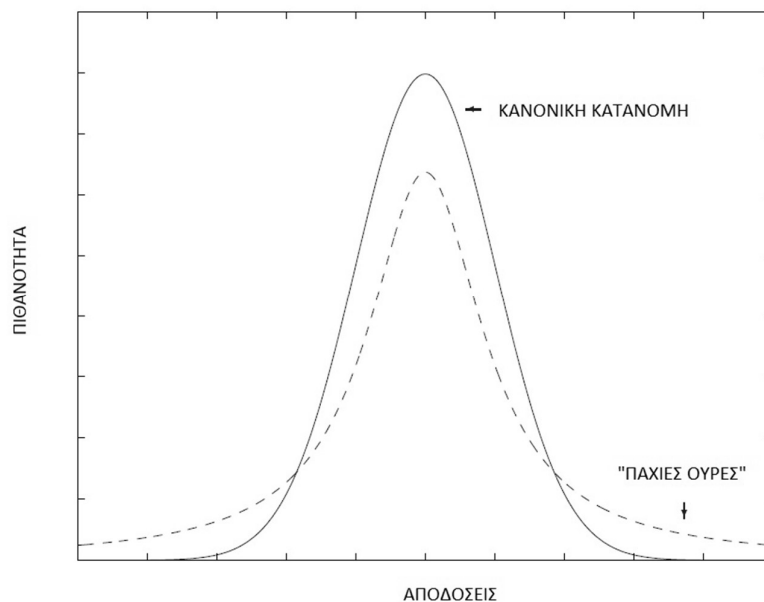
Συσχέτιση Β, Γ: ρ_{BG}

τότε ο πίνακας συσχέτισης θα είναι της μορφής
$$\begin{bmatrix} 1 & \rho_{AB} & \rho_{AG} \\ \rho_{AB} & 1 & \rho_{BG} \\ \rho_{AG} & \rho_{BG} & 1 \end{bmatrix}.$$

4.3.1.3 Πλεονεκτήματα και περιορισμοί μεθόδου

Η μέθοδος είναι από τις πιο δημοφιλείς και χρησιμοποιείται ως μεθοδολογία από το λογισμικό RiskMetrics της J.P.Morgan (Choudhry, 2013). Η διαφοροποίηση του κινδύνου ενός χαρτοφυλακίου που αποτελείται από διαφορετικά προϊόντα εντοπίζεται και αποτυπώνεται από τη διακύμανση/συνδιακύμανση, μέσω του πίνακα συσχέτισης που εισέρχεται. Στα πλεονεκτήματα ανήκουν η σαφής διαδικασία εφαρμογής και η ευκολία στην επεξήγηση. Επίσης τα δεδομένα που απαιτούνται για τον υπολογισμό είναι εύκολα προσβάσιμα και απαλλάσσουν τις τράπεζες από την ανάγκη να διατηρούν αρχεία για αυτά.

Το μεγαλύτερο μειονέκτημα της μεθόδου είναι η παραδοχή πως οι συσχετίσεις θεωρούνται σταθερές και το ότι μετράει μόνο γραμμικούς κινδύνους. Επίσης στηρίζεται στην κανονική κατανομή ενώ είναι δεδομένο πως οι αποδόσεις εμφανίζουν «παχιές ουρές». Αυτό έχει ως αποτέλεσμα πως σε υψηλά επίπεδα εμπιστοσύνης η πραγματική τιμή VaR να είναι μεγαλύτερη (Duffie & Pan, 1997).



Εικόνα 4.4: Αντιπαραβολή κανονικής κατανομής με κατανομή "παχιών ουρών" [πηγή: (Duffie & Pan, 1997)]

Ένα ακόμη μειονέκτημα είναι η ανάγκη για υπολογισμό των ποσοστών των προϊόντων. Αυτό συμβαίνει διότι για να μπορέσουμε να χρησιμοποιήσουμε τους συντελεστές πρέπει να υπολογίσουμε τις χρηματικές τους ροές στα σημεία ωρίμανσης. Αυτό παρουσιάζει βαθμό δυσκολίας καθώς α) τα προϊόντα έχουν διαφορετικά σημεία ωρίμανσης και β) μερικές φορές ο τρόπος λειτουργίας τους δεν επιτρέπει τον ακριβή υπολογισμό της χρηματικής ροής.

4.3.2 Ιστορική προσομοίωση

4.3.2.1 Τρόπος εφαρμογής

Η μέθοδος της ιστορικής προσομοίωσης αποτελεί το δεύτερο τρόπο υπολογισμού VaR. Σε αυτή την μέθοδο λαμβάνονται ιστορικά δεδομένα για τις μεταβολές των τιμών, από τα οποία προκύπτει η ζητούμενη τιμή VaR. Στην πράξη εάν θεωρήσουμε ένα χαρτοφυλάκιο με πλήθος προϊόντων, μπορούμε να δημιουργήσουμε μια σειρά από πιθανές συνολικές αξίες του, χρησιμοποιώντας τις ιστορικές επιμέρους αξίες των μερών του. Τοποθετώντας τις αξίες σε εκατοστημόρια, μπορούμε να πάρουμε την τιμή VaR από το ποσοστό που αντιστοιχεί στο επίπεδο εμπιστοσύνης που επιθυμούμε.

Η διαδικασία που περιγράφηκε παραπάνω αποτελεί την ουσία της ιστορικής προσομοίωσης αλλά περιέχει κάποιες απλουστεύσεις οι οποίες αλλοιώνουν την τιμή του VaR. Το πρώτο λάθος που γίνεται είναι πως καθώς αλλάζει η αξία του χαρτοφυλακίου, οι ποσοστιαίες μεταβολές των επιμέρους μερών του δεν αντιστοιχούν στην αρχική του αξία. Ένα άλλο σημείο είναι πως με την πάροδο του χρόνου οι τιμές των επιμέρους προϊόντων μεταβάλλονται η μια σε σχέση με την άλλη. Αυτό σημαίνει πως η σύσταση του χαρτοφυλακίου μεταβάλλεται μέσα στη χρονική περίοδο που χρησιμοποιείται ως πηγή (Best, 1998).

Συνεπώς η ολοκληρωμένη διαδικασία απαιτεί τη δημιουργία μιας σειράς ιστορικών μεταβολών της αξίας του χαρτοφυλακίου με βάση την τρέχουσα σύσταση και αξία του. Για να επιτευχθεί αυτό εφαρμόζονται τα παρακάτω βήματα:

- Συλλογή χρονοσειράς ποσοστιαίων μεταβολών για κάθε προϊόν ή παράγοντα κινδύνου που απαιτείται για την επαναξιολόγηση του χαρτοφυλακίου

- Εφαρμογή των ποσοστών αλλαγής τιμής στο χαρτοφυλάκιο για τη δημιουργία μιας σειράς χρονικών αλλαγών της συνολικής αξίας του
- Ταξινόμηση των αξιών σε εκατοστημόρια
- Η τιμή VaR που υπολογίζουμε λαμβάνεται από το εκατοστημόριο που αντιστοιχεί στο επίπεδο εμπιστοσύνης που επιλέγουμε.

Με βάση τα παραπάνω θα μπορούσαμε να συνοψίσουμε την τιμή 100α% VaR h-ημερών σε αξία μέσω ιστορικής προσομοίωσης ως το α εκατοστημόριο μιας εμπειρικής κατανομής κερδών και ζημιών παρούσας αξίας των h-ημερών. Εναλλακτικά όταν εκφράζεται ως ποσοστό της αξίας του χαρτοφυλακίου, η τιμή 100α% VaR h-ημερών είναι το α ποσοστημόριο μιας εμπειρικής κατανομής h-ημερών αποδόσεων σε παρούσα αξία (Alexander, 2008).

4.3.2.2 Μέγεθος και συχνότητα χρονοσειράς τιμών

Η χρήση ιστορικών δεδομένων έχει το πλεονέκτημα ότι μας απαλλάσσει από την υποχρέωση να υπολογίσουμε τις συσχετίσεις ανάμεσα στις αποδόσεις των προϊόντων, αφού είναι ενσωματωμένες στις τιμές τους. Αυτό ακριβώς το στοιχείο είναι που καθιστά την επιλογή του μεγέθους και της περιόδου απ' όπου θα αντλήσουμε τα δεδομένα καθοριστικής σημασίας. Εάν επιλέξουμε χρονική περίοδο όπου η αγορά παρουσίαζε έντονες μεταβολές, είναι αναμενόμενο η τιμή VaR που θα προκύψει να είναι διαφορετική από την αντίστοιχη ενός διαστήματος με σταθερή πορεία. Συνεπώς, αυτό είναι ένα κριτήριο που πρέπει να ληφθεί υπόψη κατά την επιλογή της πηγής των δεδομένων.

Ένα δεύτερο στοιχείο είναι η έκταση του δείγματος. Επειδή με τη χρήση των ιστορικών δεδομένων πρέπει να δημιουργηθεί η κατανομή και στη συνέχεια να εξεταστεί η ουρά της, το πλήθος τους έχει καταλυτική επίδραση στην ακρίβεια της εκτίμησης (Alexander, 2008). Η συνήθης πρακτική για υπολογισμό VaR με επίπεδο εμπιστοσύνης 99% είναι η χρήση τουλάχιστον 2000 καθημερινών παρατηρήσεων. Αν αναλογιστούμε πως το 1% των 2000 παρατηρήσεων είναι μόλις 20 τιμές για τη διαμόρφωση της ουράς, κατανοούμε την ανάγκη για δείγματα μεγάλου πλήθους.

Παρόλα αυτά η χρήση τεραστίων ιστορικών δειγμάτων δεν αποτελεί πανάκια. Αυτό συμβαίνει διότι αφενός η συλλογή τους μπορεί να καταστήσει την εφαρμογή

της μεθόδου υπερβολικά δυσχερή και αφετέρου επειδή δεχόμαστε πως σε όλο το μέγεθος του δείγματος οι συντελεστές βαρύτητας ή οι ευαισθησίες των παραγόντων κινδύνου του χαρτοφυλακίου, παραμένουν σταθερές. Αυτό σε πολύ μεγάλο δείγμα που περιέχει δεδομένα από διαδοχικές περιόδους όπου η αγορά παρουσίαζε διαφορετική συμπεριφορά, εισάγει σφάλμα στον υπολογισμό.

Τέλος, η συχνότητα των δεδομένων του δείγματος έχει μεγάλη σημασία. Αυτό γίνεται πρακτικά κατανοητό εάν αναλογιστούμε πως για να καταλήξουμε σε 500 τιμές της εμπειρικής κατανομής θα χρειαζόμασταν ένα δείγμα 20 ετών χρησιμοποιώντας αποδόσεις 10 ημερών ή δείγμα 10 ετών εάν χρησιμοποιούσαμε εβδομαδιαίες αποδόσεις. Όπως γίνεται αντιληπτό ανάλογα με τη συχνότητα των δεδομένων μπορεί να καταλήξουμε να χρησιμοποιούμε δείγμα από μια περίοδο, τα χαρακτηριστικά της οποίας δεν έχουν καμία σύνδεση με αυτήν για την οποία θέλουμε να υπολογίσουμε τη τιμή VaR.

4.3.2.3 Πλεονεκτήματα και περιορισμοί μεθόδου

Η μέθοδος της ιστορικής προσομοίωσης είναι απλούστερη από αυτή της διακύμανσης/συνδιακύμανσης αφού δεν απαιτεί τις παραδοχές της κανονικής κατανομής των αποδόσεων και των συνεχών συσχετίσεων μεταξύ των προϊόντων. Επειδή η μέθοδος χρησιμοποιεί πραγματικά ιστορικά δεδομένα, μπορεί και αποτυπώνει τη μη-κανονική κατανομή των αποδόσεων των παραγόντων κινδύνου (Choudhry, 2013). Αυτό έχει ως συνέπεια να συμπεριλαμβάνει σπάνιες συμπεριφορές αποδόσεων ή τιμές σε περιόδους κρίσης. Επίσης, όσον αφορά τις συσχετίσεις, εμπεριέχονται στα ιστορικά δεδομένα και δεν χρειάζεται να υπολογιστούν.

Ένα ακόμη πλεονέκτημα της μεθόδου είναι πως δεν χρειάζεται να υπακούει στο προσθετικό θεώρημα (subadditivity) (Alexander, 2008). Το θεώρημα προβλέπει πως ο κίνδυνος που σχετίζεται με δυο συνδυασμένες θέσεις δεν μπορεί να υπερβαίνει το άθροισμα του κινδύνου των ξεχωριστών θέσεων.

Ο κυριότερος περιορισμός της μεθόδου είναι πως επειδή χρησιμοποιεί ιστορικά δεδομένα, δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε ανάλυση σεναρίων (Choudhry, 2013). Δηλαδή στην παραμετρική μέθοδο, έχουμε τη δυνατότητα να μεταβάλλουμε τις διακυμάνσεις και τις συσχετίσεις ώστε να εξετάσουμε την

επίπτωση τους στην τιμή του VaR. Επίσης η περίοδος από την οποία θα αντληθούν τα δεδομένα μπορεί να προκαλέσει μεροληψία στο τελικό αποτέλεσμα.

4.3.3 Μέθοδος Monte Carlo

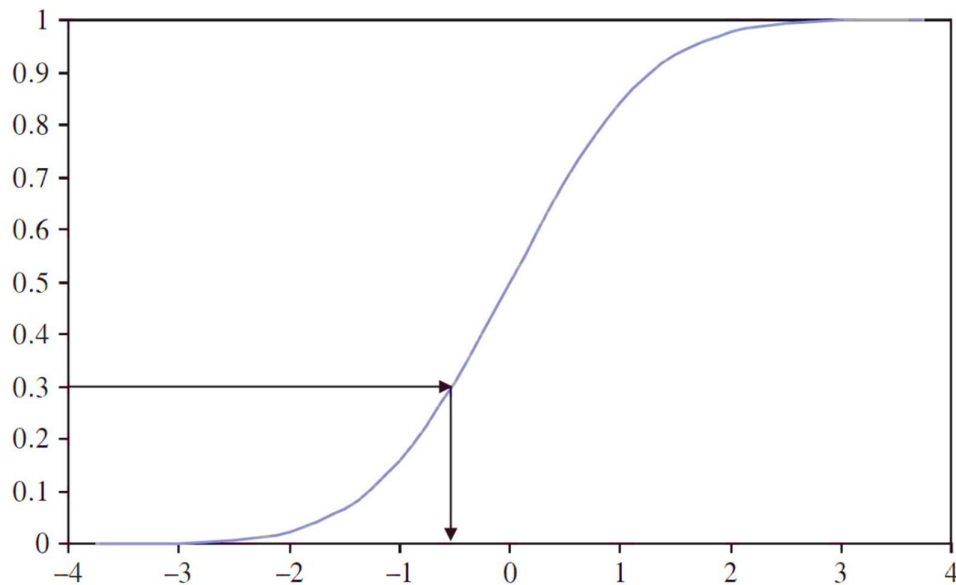
Η προσομοίωση Monte Carlo είναι ένα εξαιρετικά ευέλικτο εργαλείο που βρίσκει πλήθος εφαρμογών στις οικονομικές επιστήμες. Συχνά χρησιμοποιείται ως τελική λύση όταν δεν υπάρχουν αναλυτικές λύσεις ή όταν οι αριθμητικές μέθοδοι αποτυγχάνουν (Alexander, 2008). Ένα από τα κύρια προβλήματα κατά την προσπάθεια επίλυσης μοντέλων προκύπτει από την *κατάρα της διαστασιολόγησης*. Συγκεκριμένα η δυσκολία που εγείρεται, έγκειται στο γεγονός πως για την επίλυση ενός συστήματος χ αγνώστων, απαιτούνται χ εξισώσεις. Συνεπώς όσο αυξάνονται οι παράγοντες κινδύνου σε ένα χαρτοφυλάκιο, ο υπολογισμός VaR δυσχεραίνει.

Σε αυτό το σημείο πλεονεκτεί η μέθοδος της προσομοίωσης Monte Carlo. Αντί να επιδιώξει την επίλυση όλων των μεταβλητών, δημιουργεί μια σειρά K δειγμάτων για τη συνισταμένη μεταβλητή. Σύμφωνα με το κεντρικό οριακό θεώρημα, η μέθοδος δημιουργεί εκτιμήσεις των οποίων το τυπικό σφάλμα ελαττώνεται με ρυθμό $\frac{1}{\sqrt{K}}$, που δεν εξαρτάται από το μέγεθος του δείγματος (Jorion, 2007). Στην ουσία η μέθοδος Monte Carlo εφαρμόζει την ίδια διαδικασία με την ιστορική προσομοίωση, με τη διαφορά ότι αντί για ιστορικά δεδομένα αποδόσεων χρησιμοποιεί τις τιμές που έχει δημιουργήσει τυχαία.

Η μέθοδος αποτελείται από δυο εξίσου σημαντικά τμήματα: τον αλγόριθμο δημιουργίας του δείγματος και το μοντέλο στο οποίο αυτός θα εφαρμοστεί. Το πρώτο βήμα για την εφαρμογή της μεθόδου είναι η δημιουργία μιας σειράς αριθμών από το 0 έως το 1, οι οποίοι θα είναι ομοιόμορφα κατανομημένοι, ανεξάρτητοι και μη περιοδικοί. Δηλαδή ο κάθε αριθμός του διαστήματος $[0,1]$ έχει την ίδια πιθανότητα να εμφανιστεί, είναι ανεξάρτητος από τους υπολοίπους της σειράς και η ακολουθία δεν επαναλαμβάνεται ανεξάρτητα από το μέγεθος της.

4.3.3.1 Προσομοίωση Monte Carlo για μια θέση

Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, για την εφαρμογή της μεθόδου πρέπει πρώτα να δημιουργηθεί μια σειρά από τυχαία νούμερα. Χρησιμοποιώντας ειδικό λογισμικό, το οποίο ονομάζεται γεννήτρια τυχαίων αριθμών, δημιουργούμε (n) αριθμούς X στο διάστημα $[0,1]$, έτσι ώστε κάθε διάστημα ίσου μήκους στο πεδίο να έχει την ίδια πιθανότητα να περιέχει τον αριθμό X (Ζαχαροπούλου, 2015). Αυτοί οι αριθμοί ακολουθούν την ομοιόμορφη κατανομή και συμβολίζονται ως: $X \sim U(0,1)$. Το πλήθος των τυχαίων αριθμών μετατρέπεται στη συνέχεια σε ένα κανονικά κατανεμημένο σύνολο τυχαίων αριθμών εφαρμόζοντας στον καθένα ξεχωριστά την αντίστροφη συγκεντρωτική συνάρτηση κανονικής κατανομής (Best, 1998). Η παραπάνω διαδικασία γίνεται ευκολότερα αντιληπτή μέσω της εικόνας 4.5.

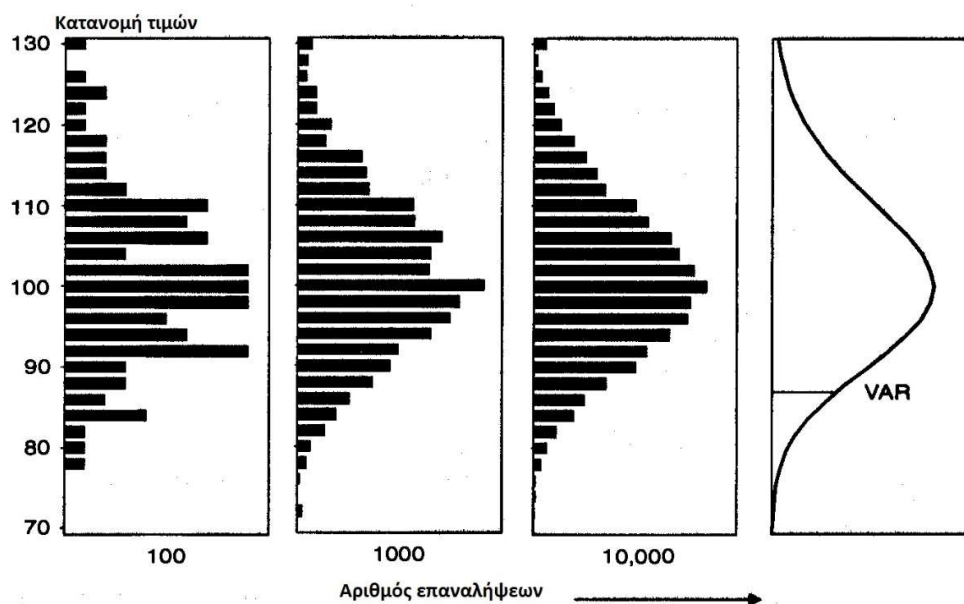


Εικόνα 4.5: Μετατροπή από συγκεντρωτική κανονική κατανομή για τυχαίο αριθμό 0,3 [πηγή: (Alexander, Value-at-Risk Models, 2008)]

Η διαδικασία που περιγράφηκε υποθέτει μια τυπική κανονική κατανομή. Ως εκ τούτου οι αποδόσεις που λαμβάνονται θα έχουν μια τυπική απόκλιση ίση με 1. Επειδή όμως οι αποδόσεις που δημιουργούνται θα πρέπει να έχουν την ίδια μεταβλητότητα με αυτές του προϊόντος υπό εξέταση, θα πρέπει να πολλαπλασιαστούν με την τυπική του απόκλιση.

Για τον υπολογισμό της τιμής VaR ακολουθείται ίδια διαδικασία με τη μέθοδο της ιστορικής προσομοίωσης. Δηλαδή οι αποδόσεις που υπολογίστηκαν κατατάσσονται σε εκατοστημόρια και ανάλογα με το επιθυμητό επίπεδο εμπιστοσύνης, λαμβάνεται η τιμή. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται για κάθε ομάδα τυχαίων τιμών που λάβαμε από τη γεννήτρια τιμών. Προφανώς σε κάθε προσομοίωση που γίνεται το αποτέλεσμα που προκύπτει είναι διαφορετικό ώστε κατά την ολοκλήρωση της διαδικασίας να έχουμε μια μέγιστη, μια ελάχιστη και μια μέση τιμή VaR.

Από τα παραπάνω προκύπτει πως όσο αυξάνεται ο αριθμός των προσομοιώσεων, η τιμή του VaR θα συγκλίνει σε έναν αριθμό. Στις 1000 επαναλήψεις η μορφή της κατανομής αρχίζει να εξομαλύνεται, ενώ με 10000 πλησιάζει πολύ στην κανονική. Εάν εξετάσουμε το θέμα από την σκοπιά του σχετικού σφάλματος, για την κανονική κατανομή χρειαζόμαστε πάνω από 20000 επαναλήψεις ώστε αυτό να πέσει κάτω από το 1% (Jorion, 2007).



Εικόνα 4.6: Σύγκλιση στην πραγματική κατανομή [πηγή: Jorion (2007)]

4.3.3.2 Προσομοίωση Monte Carlo για χαρτοφυλάκιο

Σε χαρτοφυλάκια που περιέχουν πλήθος προϊόντων, θα πρέπει να γίνει συσχέτιση των μεταβολών των τιμών τους ώστε να είναι δυνατός ο υπολογισμός της τιμής VaR. Οι συσχετισμένες μεταβολές τιμών δημιουργούνται

χρησιμοποιώντας μια μαθηματική τεχνική που βασίζεται σε ιδιο-διανύσματα (eigenvectors) και ιδιο-τιμές (eigenvalues). Το πρώτο βήμα είναι ο υπολογισμός των ιδιο-διανυσμάτων και ιδιο-τιμών και στη συνέχεια ο υπολογισμός των μεταβολών των τιμών (Best, 1998).

Contract	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	7th	8th	9th	10th	11th
1st	1	0.86	0.69	0.56	0.49	0.42	0.37	0.33	0.29	0.27	0.28
2nd	0.86	1	0.94	0.85	0.78	0.71	0.64	0.59	0.51	0.48	0.47
3rd	0.69	0.94	1	0.97	0.91	0.87	0.81	0.74	0.67	0.63	0.6
4th	0.56	0.85	0.97	1	0.98	0.94	0.9	0.84	0.77	0.73	0.7
5th	0.49	0.78	0.91	0.98	1	0.98	0.96	0.91	0.86	0.82	0.89
6th	0.42	0.71	0.87	0.94	0.98	1	0.99	0.96	0.92	0.89	0.86
7th	0.37	0.64	0.81	0.9	0.96	0.99	1	0.99	0.96	0.93	0.91
8th	0.33	0.59	0.74	0.84	0.91	0.96	0.99	1	0.98	0.97	0.95
9th	0.29	0.51	0.67	0.77	0.86	0.92	0.96	0.98	1	0.99	0.97
10th	0.27	0.48	0.63	0.73	0.82	0.89	0.93	0.97	0.99	1	0.99
11th	0.28	0.47	0.6	0.7	0.89	0.86	0.91	0.95	0.97	0.99	1

Πίνακας 4.1: Πίνακας συσχετίσεων για 11 προϊόντα τυχαίου χαρτοφυλακίου [πηγή: Best (1998)]

Τα ιδιο-διανύσματα και οι ιδιο-τιμές περιγράφουν πως θα επηρεαστούν οι μεταβολές των τιμών όσο αλλάζουν οι παράγοντες κινδύνου. Σε έναν πίνακα συσχέτισης, τα ιδιο-διανύσματα μπορούν να παραλληλιστούν με τα κύρια στοιχεία του ενώ οι ιδιο-τιμές με τη σχετική βαρύτητα του κάθε ιδιο-διανύσματος. Μια τυπική τεχνική που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό είναι η μέθοδος Jacobi που περιγράφεται από Press et. al (1992). Ο τρόπος υπολογισμού των ιδιο-διανυσμάτων και ιδιο-τιμών ξεφεύγει από το σκοπό της παρούσας εργασίας αλλά πρέπει να αναφερθεί πως υπάρχει πλήθος λογισμικού υπολογιστών, το οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί. Πρέπει να τονιστεί πάντως πως μηδενικές ή αρνητικές ιδιο-τιμές υποδεικνύουν πως ο πίνακας δεν ορίστηκε ορθά (Jorion, 2007).

Ο υπολογισμός της συσχετισμένης τιμής γίνεται χρησιμοποιώντας την παρακάτω σχέση:

$$x_k = \sum_i^Z \sqrt{\lambda_i} \cdot x_{norm} \cdot v_{ki} \cdot \sigma_k \quad (4.8)$$

όπου:

χ_k = η συσχετισμένη τυχαία μεταβολή τιμής για το προϊόν κ με κανονική κατανομή και τη μεταβλητότητα του προϊόντος κ

$\sqrt{\lambda_i}$ = η τετραγωνική ρίζα της ιδιο-τιμής για το προϊόν i

X_{norm} = η τελική τυχαία μεταβολή τιμής που υπολογίστηκε από τη γεννήτρια αριθμών

V_{ki} = το κ στοιχείο του ιδιο-διανύσματος για το i προϊόν

σ_k = η μεταβλητότητα του κ προϊόντος

Οι συσχετισμένες τυχαίες μεταβολές που προκύπτουν εφαρμόζονται στο χαρτοφυλάκιο ώστε να δημιουργηθεί η κατανομή. Οι αποδόσεις έπειτα κατατάσσονται σε εκατοστημόρια και λαμβάνεται η τιμή VaR ανάλογα με το επίπεδο εμπιστοσύνης. Όπως και στον υπολογισμό για μια θέση, η προσομοίωση πρέπει να επαναληφθεί πλήθος φορών ώστε να καταλήξουμε σε μια μέση τιμή VaR.

Σε αυτό το σημείο θα πρέπει να σημειωθεί πως η τιμή VaR που υπολογίζεται μέσω της μεθόδου Monte Carlo για γραμμικό χαρτοφυλάκιο (δεν περιέχει δηλαδή προϊόντα δικαιωμάτων προαίρεσης) θα πρέπει να είναι σχεδόν ίδια με αυτή της παραμετρικής μεθόδου. Εάν οι δυο μέθοδοι καταλήγουν σε διαφορετική τιμή θα πρέπει να γίνει έλεγχος για σφάλμα στην εφαρμογή της μίας ή και των δύο (Best, 1998)

4.3.3.3 Πλεονεκτήματα και περιορισμοί μεθόδου Monte Carlo

Το μεγαλύτερο πλεονέκτημα της μεθόδου, είναι η ευελιξία της. Μπορεί να εφαρμοστεί θεωρώντας οποιαδήποτε κατανομή αποδόσεων παραγόντων κινδύνου (Alexander, 2008). Έτσι ακόμη και σε γραμμικά χαρτοφυλάκια, μπορεί να αποδώσει καλύτερα από την παραμετρική μέθοδο.

Σε σχέση με την ιστορική μέθοδο, το γεγονός πως δεν περιορίζεται από το μέγεθος των ιστορικών στοιχείων της δίνει τη δυνατότητα να δώσει καλύτερα αποτελέσματα. Το πλεονέκτημα της έγκειται στο ότι το πλήθος των δεδομένων και κατά επέκταση το τελικό σφάλμα εξαρτάται από τις φορές που θα επιλέξει ο χρήστης να παράγει τυχαίες σειρές αποδόσεων.

Ένα μειονέκτημα της μεθόδου είναι η τυχαία δημιουργία των γεγονότων που χρησιμοποιούνται ως δεδομένα από την άποψη ότι δεν είναι εγγυημένο πως είναι τα απαραίτητα για τον ακριβή υπολογισμό VaR. Φυσικά αυτό το μειονέκτημα θεωρείται αμελητέο επειδή έχουμε τη δυνατότητα να δημιουργήσουμε όσο μεγάλο πλήθος δεδομένων επιθυμούμε, καθιστώντας την πιθανότητα μη δημιουργίας των αναγκαίων γεγονότων ελάχιστη (Best, 1998).

Τέλος, είναι επιρρεπής σε κίνδυνο μοντέλου από την άποψη πως χρειάζεται να προκαθοριστεί η κατανομή και ταυτόχρονα πιο χρονοβόρα και λιγότερο διαφανής από την αναλυτική μέθοδο (Jorion, 2007). Βέβαια το θέμα του χρόνου εφαρμογής αντιμετωπίζεται ικανοποιητικά από την αύξηση της υπολογιστικής ισχύς καθώς και από το πλήθος των λογισμικών που μπορούν να χρησιμοποιηθούν.

4.3.4 Σύγκριση μεθόδων

Οι τρεις κύριες μέθοδοι υπολογισμού της αξίας σε κίνδυνου που έχουν περιγραφεί ως τώρα έχουν τα πλεονεκτήματα και τις δυσκολίες τους. Ο κύριος παράγοντας επιλογής μεθόδου αποτελεί η σύσταση του χαρτοφυλακίου. Συνήθως σε περιπτώσεις που δεν υπάρχουν δικαιώματα προαίρεσης, η καταλληλότερη μέθοδος είναι η παραμετρική, καθώς είναι γρήγορη. Τα παραπάνω σε συνδυασμό με το λογισμικό RiskMetrics που έχει αναπτυχθεί από τη JPMorgan την καθιστούν την πιο δημοφιλή και ευρέως εφαρμόσιμη. Η μέθοδος της συνδιακύμανσης για να μπορέσει να εφαρμοστεί χρειάζεται να υποτεθεί πως οι αποδόσεις ανήκουν σε κανονική κατανομή και οι συσχετίσεις μεταξύ τους είναι συνεχείς.

Τους περιορισμούς της παραμετρικής μεθόδου όσο αφορά τη μορφή της κατανομής, τις σχέσεις ανάμεσα στις μεταβλητότητες και τις συσχετίσεις των αποδόσεων έρχεται να αντιμετωπίσει η ιστορική προσομοίωση. Σε αυτήν την περίπτωση επειδή χρησιμοποιούμε πραγματικά δεδομένα, όλες οι μεταβολές και οι συσχετίσεις εμπεριέχονται μέσα σε αυτά και κατά επέκταση αποτυπώνονται στην τιμή του VaR. Η ιστορική προσομοίωση έχει τη δυνατότητα να εφαρμοστεί σε χαρτοφυλάκια που περιέχουν δικαιώματα προαίρεσης αλλά πρέπει να δοθεί

μεγάλη έμφαση στην πηγή των δεδομένων, τόσο για την έκταση όσο και για την περίοδο από την οποία θα αντληθούν.

Τέλος στη μέθοδο Monte Carlo χρειάζεται να κάνουμε παραδοχή για τη μορφή της κατανομής των αποδόσεων αλλά η δυνατότητα που μας δίνει να αυξήσουμε τον αριθμό των προσομοιώσεων, επιτρέπει στα αποτελέσματα να τείνουν στην κανονική. Χρειάζεται μεγάλη προσοχή στην αποτύπωση του μοντέλου και στις ιδιο-τιμές αλλά μπορεί να μας προσφέρει αξιόπιστα αποτελέσματα.

5.VaR σε προϊόντα

5.1 Ομόλογα

Για την εφαρμογή VaR σε χαρτοφυλάκια ομολόγων, θα πρέπει να τα αναλύσουμε ως μια σειρά από χρηματικές ροές. Για την καλύτερη κατανόηση θα πρέπει πρώτα να αναφερθούμε στη διαδικασία αξιολόγησης των ομολόγων και της διάρκειας τους.

Ένα ομόλογο αποδίδει ένα ποσό (κουπόνι) κάθε έτος ή σε μερικές περιπτώσεις κάθε εξάμηνο. Η δίκαιη αξία (fair price) ενός τέτοιου ομολόγου προκύπτει από το άθροισμα των σημερινών αξιών των χρηματικών ροών του, χρησιμοποιώντας ένα προκαθορισμένο από την αγορά επιτόκιο (Choudhry, 2013).

Η απόδοση μέχρι την ωρίμανση (yield to maturity), που στην ουσία ισοδυναμεί με το εσωτερικό ποσοστό απόδοσης εξισώνει την αξία των τρεχουσών αξιών των χρηματικών ροών με την παρούσα αξία του. Η εξίσωση για ένα ομόλογο με εξαμηνιαία κουπόνια είναι:

$$P = \sum_{t=1}^{2T} \frac{C/2}{(1+\frac{1}{2}r)^t} + \frac{M}{(1+\frac{1}{2}r)^{2T}} \quad (5.1)$$

όπου: P = η δίκαιη τιμή του ομολόγου

C = το κουπόνι

M = η τιμή εξαγοράς

T = αριθμός ετών ως την ωρίμανση

r = απαιτούμενο ποσοστό απόδοσης

Το κριτήριο του κινδύνου επιτοκίου χρησιμοποιείται από τους αναλυτές ομολόγων και ονομάζεται διάρκεια. Στην ουσία πρόκειται για τον σταθμισμένο μέσο χρόνο μέχρι την παραλαβή των χρηματικών ροών από μια επένδυση, όπου οι συντελεστές βαρύτητας είναι οι παρούσες αξίες τους. Ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$P = \frac{\sum_{t=1}^n \frac{t \cdot C_t}{(1+r)^t}}{P} \quad (5.2)$$

όπου: D = διάρκεια

P = Αξία ομολόγου

C_t = χρηματική ροή στο χρόνο t

r = απόδοση μέχρι την ωρίμανση

5.2 Προθεσμιακά συμβόλαια

Μια προθεσμιακή συναλλαγή (forward rate agreement) επιβάλλει την υποχρέωση σε δυο συναλλασσόμενους να εκπληρώσουν μια συμφωνία αγοροπωλησίας σε μια προκαθορισμένη μελλοντική χρονική στιγμή και τιμή (Αγοραστός & Ελευθεριάδης, 2007). Η αποτίμηση μιας τέτοιας συναλλαγής προκύπτει στην ουσία από το κόστος που θα είχε μια τράπεζα για να το αντισταθμίσει.

Αν υποθέσουμε πως μια τράπεζα έχει συνάψει μια τέτοια συμφωνία, σύμφωνα με την οποία δανείζεται κεφάλαιο για 3 μήνες το οποίο καταθέτει για 6 μήνες, τότε η θέση αγοράς σε δικαίωμα (long position) θα προκύψει εάν θεωρήσουμε την παρούσα αξία της χρηματικής ροής των 3 μηνών ως κέρδος και την αντίστοιχη των 6 μηνών ως κίνδυνο. Ο υπολογισμός VaR και για τις δυο θέσεις γίνεται σύμφωνα με τις μεθόδους που έχουν αναλυθεί ως τώρα. Η τιμή VaR χωρίς να έχει συνυπολογιστεί η διασπορά κινδύνου θα προκύψει από το άθροισμα των επιμέρους τιμών.

Η πιο ορθή προσέγγιση είναι να γίνει υπολογισμός VaR συνυπολογίζοντας πως τα επιτόκια στους 3 και τους 6 μήνες παρουσιάζουν συσχέτιση. Συγκεκριμένα από βάσεις δεδομένων όπως της RiskMetrics μπορούμε να λάβουμε τιμή συσχέτισης για τα δυο επιτόκια και να χρησιμοποιήσουμε προσέγγιση πινάκων για τον υπολογισμό VaR. Τα βήματα είναι τα εξής:

- Χρησιμοποιούμε τις τιμές VaR που έχουμε υπολογίσει ως πίνακα 2x1
- Πολλαπλασιάζουμε με τον πίνακα συσχετίσεων

- Πολλαπλασιάζουμε το αποτέλεσμα με τον αρχικό 1x2 πίνακα συντελεστών βαρύτητας
- Το τελικό αποτέλεσμα είναι η τιμή της διακύμανσης, η τετραγωνική ρίζα της οποίας είναι η ζητούμε τιμή VaR

5.3 VaR σε δικαιώματα προαίρεσης

Τα δικαιώματα προαίρεσης (options) είναι συμβάσεις μεταξύ δυο αντισυμβαλλόμενων μερών, του πωλητή και του αγοραστή. Υπάρχουν δυο είδη δικαιωμάτων προαίρεσης: αγοράς και πώλησης. Το δικαίωμα αγοράς (call option) δίνει το δικαίωμα στον αγοραστή του να αγοράσει από τον πωλητή τον υποκείμενο τίτλο σε μια προκαθορισμένη τιμή και ημερομηνία στο μέλλον (δικαίωμα Ευρωπαϊκού τύπου) ή σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή μέχρι τη λήξη (Αμερικάνικου τύπου) (Αγοραστός & Ελευθεριάδης, 2007). Τα δικαιώματα πώλησης (put options) δίνουν το δικαίωμα στον αγοραστή να πουλήσει τον συμφωνημένο τίτλο υπο τις ίδιες συνθήκες που αναφέρθηκαν προηγουμένως.

Οι πιο σημαντικοί παράγοντες κινδύνου σε ένα δικαίωμα προαίρεσης είναι η μεταβολή της τιμής του τίτλου, το τετράγωνο αυτής της μεταβολής και η αλλαγή στην προσδοκώμενη μεταβλητότητα. Το τετράγωνο της μεταβολής της τιμής απαιτείται διότι η τιμή ενός δικαιώματος προαίρεσης συνδέεται μη-γραμμικά με τον τίτλο (Alexander, 2008).

Είναι σημαντικό να τονιστεί πως όταν στο τέλος της ημέρας γίνεται ανακατανομή του χαρτοφυλακίου αναφερόμαστε σε δυναμική τιμή VaR. Αντιθέτως εάν θεωρήσουμε πως το χαρτοφυλάκιο δεν θα αλλάξει μέσα στον ορίζοντα που εξετάζουμε, έχουμε στατική τιμή VaR.

5.3.1 Υπολογισμός αξίας δικαιώματος προαίρεσης

Το πρώτο μοντέλο που χρησιμοποιήθηκε και το οποίο ακόμη βρίσκει εφαρμογή στην αγορά για την αποτίμηση των δικαιωμάτων προαίρεσης ονομάζεται Black-Scholes. Σύμφωνα με αυτό, η τιμή δικαιώματος αγοράς (call option) προκύπτει από την ακόλουθη σχέση:

$$C = S \cdot N(d_1) - e^{-rt} \cdot X \cdot N(d_2) \quad (5.3)$$

όπου:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot t}{\sigma \cdot \sqrt{t}} \quad \text{και} \quad d_2 = d_1 - \sigma \cdot \sqrt{t}$$

με: C = η τιμή δικαιώματος αγοράς

S = η τρέχουσα τιμή του υποκείμενου τίτλου

X = η τιμή εξάσκησης δικαιώματος (strike price)

r = το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου

t = ο χρόνος μέχρι τη λήξη

N(.) = η αθροιστική συνάρτηση κανονικής κατανομής

σ = η μεταβλητότητα των αποδόσεων του υποκείμενου τίτλου

Μέσω αυτού του μοντέλου μπορούμε να υπολογίσουμε με μεγάλη ακρίβεια την τιμή ενός δικαιώματος προαίρεσης (Semmler & Youssef, 2009). Επίσης μπορούμε να εξάγουμε μια σειρά συσχετίσεων που προκύπτουν από αυτό, οι οποίες περιγράφονται χρησιμοποιώντας γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου (the greeks). Η βασικότερη συσχέτιση που περιγράφει την ευαισθησία της τιμής του δικαιώματος προαίρεσης σε σχέση με τη μεταβολή της τιμής της υποκείμενης μετοχής συμβολίζεται με το γράμμα δέλτα (Δ) και δίνεται από το N(d₁). Αποτελεί το κύριο μέτρο κινδύνου αγοράς και η τιμή του καθορίζει το μέγεθος της απαιτούμενης αντιστάθμισης. Η λογική πίσω από το μοντέλο Black-Scholes είναι ενός χαρτοφυλακίου μηδενικού κινδύνου που αντικατοπτρίζει το δικαίωμα προαίρεσης. Το μέγεθος αυτού του χαρτοφυλακίου προσδιορίζεται από την τιμή του δέλτα (Choudhry, 2013).

5.3.2 Παράγοντες κινδύνου (the Greeks)

Όπως αναφέρθηκε ο κυριότερος παράγοντας κινδύνου καθορίζεται από την τιμή δέλτα. Οι υπόλοιποι βασικοί παράγοντες είναι οι γάμα (Γ), vega (ν), θήτα (Θ) και ρο (Rho). Αυτοί οι δείκτες ευαισθησίας μας επιτρέπουν να εξετάσουμε πως οι

μεταβολές της τιμής της υποκείμενης μετοχής επηρεάζουν την τιμή του δικαιώματος προαίρεσης.

Ο δείκτης Γ αποτυπώνει τον τρόπο με τον οποίο αλλάζει η τιμή του Δ για κάθε μεταβολή μιας μονάδας στην τιμή του δικαιώματος. Είναι θετικό για θέσεις αγοράς και αρνητικό για θέσεις πώλησης (Αγοραστός & Ελευθεριάδης, 2007). Δίνεται από τη σχέση:

$$\Gamma = \frac{N'(d_1)}{S\sigma\sqrt{t}} \quad (5.4)$$

Η φυσική σημασία του Γ είναι πως ένα χαρτοφυλάκιο δικαιωμάτων προαίρεσης πρέπει να αντισταθμίζεται βάσει του Δ μονίμως, δηλαδή να είναι δυναμικά αντισταθμισμένο, αφού αυτό συνέχεια μεταβάλλεται. Μια μεγάλη τιμή Γ σημαίνει πως απαιτείται να διατηρούμε υψηλό ρυθμό ανανέωσης του Δ ενώ χαμηλή τιμή του δηλώνει πως οι μεταβολές του Δ εμφανίζονται σε χαμηλότερο ρυθμό και ως εκ τούτου ο ρυθμός αναπροσαρμογής του χαρτοφυλακίου δεν χρειάζεται να είναι συχνός (Semmler & Youssef, 2009).

Ο δείκτης *vega* απεικονίζει τη μεταβολή στην αξία ενός δικαιώματος για κάθε μονάδα ποσοστιαίας αύξησης στη μεταβλητότητα του υποκείμενου (Αγοραστός & Ελευθεριάδης, 2007). Μερικές φορές συναντάται στη βιβλιογραφία και με ως δείκτης κάππα (κ). Δίνεται από τη σχέση:

$$vega = S\sqrt{\Delta t}N(d_1) \quad (5.5)$$

Η τιμή του *vega* μετράει την ευαισθησία του δικαιώματος στη μεταβλητότητα και πρόκειται για την πρώτη παράγωγο της αξίας της θέσης ως προς αυτή. Έχει θετική τιμή για θέσεις αγοράς και αρνητική για θέσεις πώλησης. Ακόμη είναι μεγαλύτερο για τα δικαιώματα που βρίσκονται στην χρηματική τους αξία (*at-the-money*) ενώ μειώνεται προς το μηδέν όταν είμαστε εντός (*in-the-money*) ή εκτός της αξίας (*out-of-the-money*).

Ο δείκτης θήτα (Θ) αντικατοπτρίζει τη μεταβολή της τιμής ενός δικαιώματος για την αντίστοιχη μείωση μιας μέρας από τον εναπομείναντα χρόνο για τη λήξη του δικαιώματος (Αγοραστός & Ελευθεριάδης, 2007). Μαθηματικά εκφράζεται ως η πρώτη παράγωγος της αξίας της θέσης προς το χρόνο. Τα δικαιώματα που βρίσκονται στη χρηματική τους αξία (*at-the-money*) παρουσιάζουν τη μεγαλύτερη

αξία χρόνου και συνεπώς το μεγαλύτερο Θ . Επίσης μείωση του χρόνου ζωής του δικαιώματος αυξάνει το Θ εάν βρίσκεται στη χρηματική αξία και το ελαττώνει όταν είναι εντός ή εκτός αυτής.

Τέλος ο δείκτης Rho εκφράζει την ευαισθησία της τιμής του δικαιώματος σε μεταβολή του επιτοκίου χωρίς κίνδυνο (Best, 1998). Τις περισσότερες φορές η τιμή του είναι θετική και πολύ μικρή. Πρακτικά μια τιμή Rho της τάξης του 0,4 συνεπάγεται πως η αξία της θέσης θα αυξηθεί κατά 0,4 μονάδες για μείωση των επιτοκίων 1%.

Όταν το:	Ο επενδυτής θέλει:
Δέλτα = Θετικό	Η τιμή του υποκειμένου να αυξηθεί
Δέλτα = Αρνητικό	Η τιμή του υποκειμένου να μειωθεί
Γάμμα = Θετικό	Το υποκείμενο να κινηθεί με ταχύτητα
Γάμμα = Αρνητικό	Το υποκείμενο να κινηθεί αργά
Θήτα = Θετικό	Να περνάει ο χρόνος γρήγορα καθώς αυξάνεται η αξία της θέσης
Θήτα = Αρνητικό	Να περνάει ο χρόνος αργά καθώς μειώνεται η αξία της θέσης
Βέγκα = Θετικό	Η μεταβλητότητα να αυξηθεί
Βέγκα = Αρνητικό	Η μεταβλητότητα να μειωθεί
Pο = Θετικό	Το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο να αυξηθεί
Pο = Αρνητικό	Το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο να μειωθεί

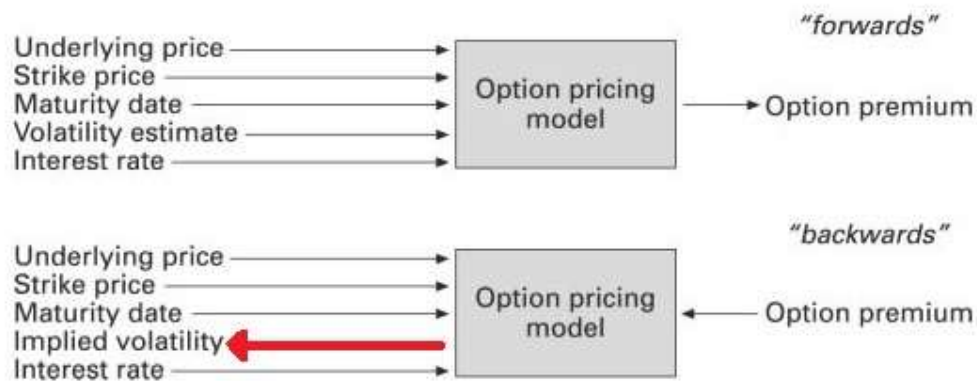
Πίνακας 5.1: Προσδοκίες επενδυτών ανάλογα με τις τιμές δεικτών ευαισθησίας [πηγή: Αγοραστός και Ελευθεριάδης (2007)]

5.3.3 Μεταβλητότητα στον υπολογισμό αξίας

Από τα δεδομένα που χρησιμοποιούνται στο μοντέλο Black-Scholes, η αστάθεια του υποκειμένου τίτλου ή αλλιώς η μεταβλητότητα του, παρουσιάζει τη μεγαλύτερη δυσκολία (Choudhry, 2013). Όπως έχει αναφερθεί και σε προηγούμενο κεφάλαιο, οι αποδόσεις υπολογίζονται ως ο λογάριθμος της μεταβολής της τιμής διότι έτσι εξασφαλίζεται πως δεν θα υπάρχουν αρνητικές τιμές. Επίσης δεχόμαστε πως ακολουθούν την κανονική κατανομή και συνεπώς σημειώνουμε: $\ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right) \sim N(\mu t, \sigma\sqrt{t})$, όπου: S_0 η τιμή στο χρόνο μηδέν, S_t η τιμή στο χρόνο t , $N(m,s)$ τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή m και τυπική απόκλιση s , μ ετήσια απόδοση και σ ετήσια τυπική απόκλιση αποδόσεων. Για τον υπολογισμό της ετήσιας μεταβλητότητας, πολλαπλασιάζουμε την ημερήσια με την τετραγωνική ρίζα του 250, δεχόμενοι πως το έτος έχει τόσες εργάσιμες ημέρες.

Με όσα αναφέρθηκαν προηγουμένως μπορούμε να υπολογίσουμε την ιστορική μεταβλητότητα. Παρόλα αυτά απαιτείται η μελλοντική μεταβλητότητα για

τον προσδιορισμό της τιμής των δικαιωμάτων προαίρεσης στο μέλλον, η οποία δεν είναι δυνατόν να υπολογιστεί με άμεσο τρόπο. Για την αντιμετώπιση αυτής της δυσκολίας, εφαρμόζεται μια τεχνική αντίστροφης ιχνηλάτησης κατά την οποία υπολογίζεται η τιμή του δικαιώματος και στη συνέχεια χρησιμοποιείται για την εύρεση της προσδοκώμενης μεταβλητότητας. Η αξιολόγηση της προσδοκώμενης μεταβλητότητας είναι πιο εύκολη και η χρήσης της έναντι της ιστορικής, πιο ενδεδειγμένη.

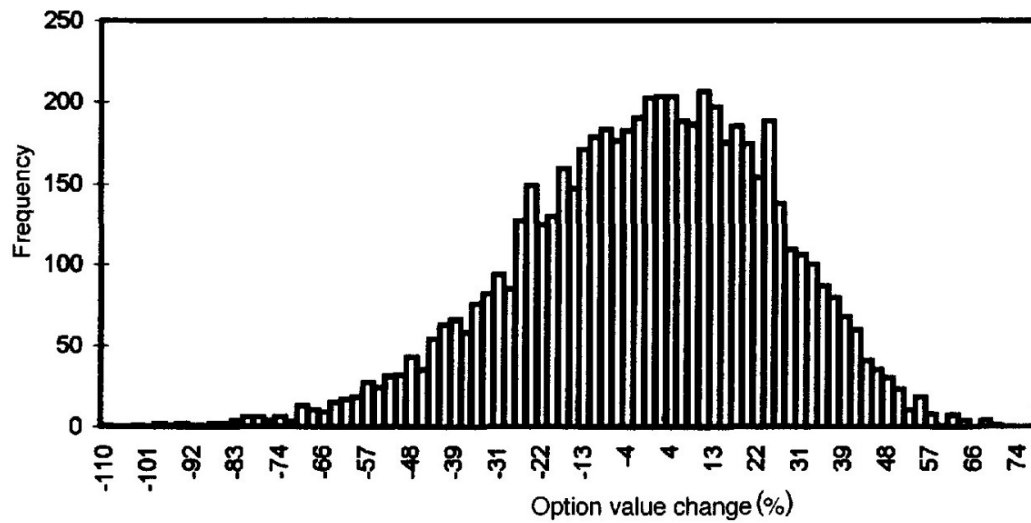


Εικόνα 5.1: Σχηματική αναπαράσταση τεχνικής υπολογισμού προσδοκώμενης μεταβλητότητας [πηγή: Choudhry (2013)]

5.3.4 Εφαρμογή VaR σε δικαιώματα προαίρεσης

Τα δικαιώματα προαίρεσης, σε αντίθεση με τα υπόλοιπα οικονομικά προϊόντα περιέχουν πολλούς παράγοντες κινδύνου, γεγονός που καθιστά τον υπολογισμό VaR για τα χαρτοφυλάκια που τα περιέχουν, με τη μέθοδο της συνδιακύμανσης δύσκολο. Για να προσπεραστεί αυτό το εμπόδιο, οι δείκτες κάθε δικαιώματος θεωρούνται ως εικονικά προϊόντα και εισέρχονται με αυτή τη μορφή στον υπολογισμό μέσω συνδιακύμανσης (Best, 1998).

Ένα δεύτερο πρόβλημα που εμφανίζεται κατά τον υπολογισμό VaR για δικαιώματα προαίρεσης είναι το γεγονός ότι παρουσιάζουν λοξότητα στην κατανομή τους σε σχέση με την αξία του υποκείμενου προϊόντος. Αν θεωρήσουμε ένα δικαίωμα προαίρεσης, το οποίο βρίσκεται ένα μήνα πριν τη λήξη του, όσο αυτό παραμένει στη χρηματική του αξία, ο δείκτης Γ θα αυξάνεται όσο πλησιάζει προς το τέλος. Αυτό θα έχει ως αποτέλεσμα να αυξάνεται η λοξότητα της κατανομής και συνεπώς να επηρεάζεται η τιμή VaR.



Εικόνα 5.2: Κατανομή δικαιώματος προαίρεσης ένα μήνα πριν τη λήξη του [πηγή: Best (1998)]

Παρόμοια προσέγγιση εφαρμόζεται και για τον υπολογισμό VaR μέσω προσομοίωσης. Η χρήση των δεικτών ευαισθησίας δίνει τη δυνατότητα να μειωθούν χιλιάδες δικαιώματα προαίρεσης με τα ίδια χαρακτηριστικά και για το ίδιο υποκείμενο προϊόν, σε τρεις ή τέσσερις παράγοντες κινδύνου που χρησιμοποιούνται για τους υπολογισμούς.

Δημιουργείται μια σειρά ποσοστιαίων μεταβολών τιμών για κάθε έναν από τους παράγοντες κινδύνου. Η μεταβολή στην τιμή του δικαιώματος μπορεί να προσεγγιστεί από την ακόλουθη εξίσωση, η οποία είναι επέκταση σειράς Taylor:

$$\Delta P_o = \delta \Delta u + \frac{\gamma}{2} \Delta u^2 + V \Delta v + \rho \Delta r + \theta \Delta t \quad (5.6)$$

όπου: ΔP_o = μεταβολή στην αξία του δικαιώματος

$\delta \Delta u$ = δείκτης δ επί την μεταβολή της αξίας του υποκείμενου προϊόντος

$\frac{\gamma}{2} \Delta u^2$ = το ήμισυ του δείκτη γ επί το τετράγωνο της μεταβολής της αξίας του υποκείμενου προϊόντος

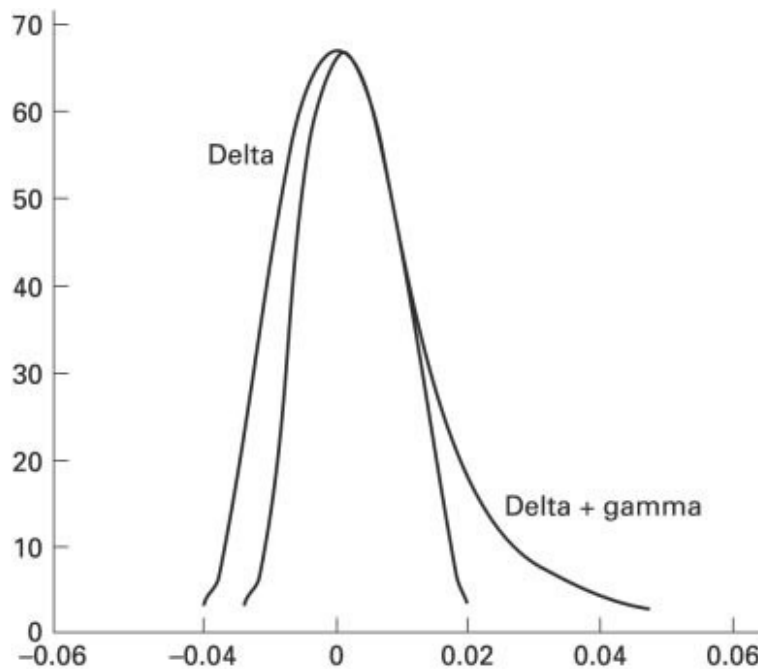
$V \Delta v$ = γινόμενο δείκτη vega με τη μεταβολή της προσδοκώμενης μεταβλητότητας του υποκείμενου προϊόντος

$\rho \Delta r$ = δείκτης Rho επί τη μεταβολή του επιτοκίου μηδενικού κινδύνου

$\theta\Delta t$ = δείκτης θ επί τη μεταβολή του χρόνου υπο εξέταση (για VaR μιας ημέρας η μεταβολή είναι 1)

Σε αυτό το σημείο πρέπει να τονίσουμε πως η επιλογή των δεικτών που θα χρησιμοποιηθούν είναι καθοριστικής σημασίας. Εάν εφαρμοστεί μέθοδος Monte Carlo χωρίς να συμπεριληφθεί ο δείκτης Γ , τα αποτελέσματα VaR θα είναι σχεδόν τα ίδια με τη μέθοδο συνδιακύμανσης. Επίσης η χρονική περίοδος του δικαιώματος, αν δηλαδή είναι στη χρηματική του αξία ή όχι, επηρεάζει τον υπολογισμό.

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, εάν οι επιπτώσεις του κινδύνου Γ ληφθούν υπόψη κατά τον υπολογισμό των πιθανών αποδόσεων σε ένα χαρτοφυλάκιο, η κατανομή γίνεται ασυμμετρική (Choudhry, 2013). Για την αντιμετώπιση αυτής της συμπεριφοράς υπάρχουν τρεις εναλλακτικές: α) προσέγγιση ασυμμετρικής κατανομής ως παραμορφωμένη κανονική κατανομή β) το 5^ο και το 95^ο ποσοστημόριο μπορούν να υπολογιστούν για τη λοξή κατανομή γ) η ασυμμετρική κατανομή να ταυτοποιηθεί σε μια γενικότερη κατηγορία κατανομών, των οποίων τα στατιστικά χαρακτηριστικά είναι γνωστά.



Εικόνα 5.3: Επίπτωση συνυπολογισμού κινδύνου Γ στην κατανομή χαρτοφυλακίου [πηγή: Choudhry (2013)]

6. Έλεγχος αποτελεσμάτων

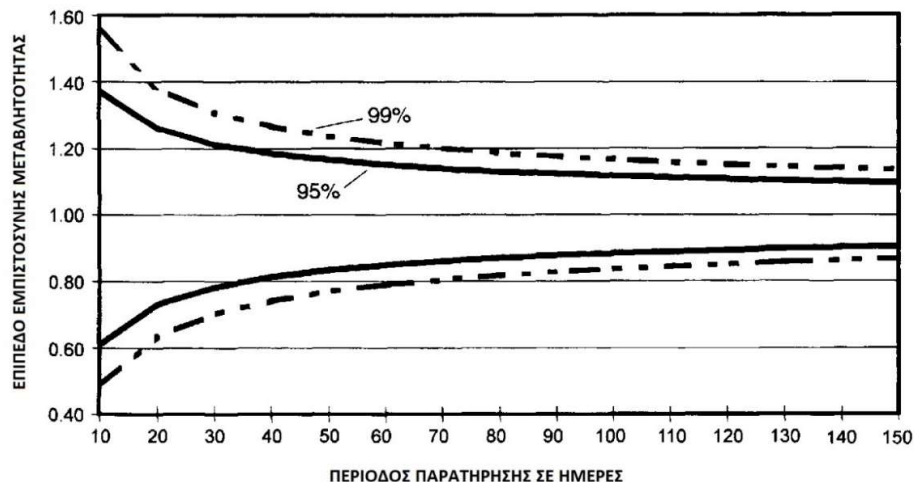
6.1 Τυπικό σφάλμα και μέγεθος δείγματος

Η πραγματική τιμή πολλών στατιστικών μεγεθών εμπίπτει μέσα σε ένα εύρος τιμών. Υπολογίζοντας τη μέση τιμή μιας σειράς αριθμών, το αποτέλεσμα θα μεταβάλλεται ανάλογα με την ομάδα τιμών που λαμβάνουμε καθώς και το μέγεθος της. Θεωρώντας μικρές ομάδες τιμών έχουμε μεγάλη αυξομείωση ενώ όσο μεγαλώνει το μέγεθος, ο υπολογιζόμενος μέσος θα εμφανίζει μικρότερες μεταβολές. Συνεπώς η μέση τιμή μιας κατανομής μπορεί να θεωρηθεί πως ανήκει μέσα σε ένα εύρος, το μέγεθος του οποίου θα εξαρτάται από το πλήθος της ομάδας τιμών που θα επιλεγεί (Best, 1998).

Το εύρος των τιμών μπορεί να θεωρηθεί πως ανήκει σε μια κατανομή, η τυπική απόκλιση της οποίας ονομάζεται τυπικό σφάλμα. Αν η μορφή της κατανομής είναι γνωστή, μπορεί να υπολογιστεί μέσα σε ποιο εύρος τιμών μπορεί να βρίσκεται η μέση τιμή με δεδομένο επίπεδο εμπιστοσύνης.

6.2 Εκτίμηση διαστημάτων εμπιστοσύνης και μεταβλητότητα

Το διάστημα εμπιστοσύνης μέσα στο οποίο βρίσκεται μια εκτίμηση μεταβλητότητας ορίζεται από $\sigma\sqrt{F(n-1, \infty)}$ έως $\frac{\sigma}{\sqrt{F(\infty, n-1)}}$, όπου $F(\cdot)$ είναι η



Εικόνα 6.1: Μεταβλητότητα με επίπεδο εμπιστοσύνης 95% και 99% [πηγή: Best (1998)]

αντίστροφη της F αθροιστικής συνάρτησης πιθανότητας και n ο αριθμός των ημερών της παρατήρησης. Για μεταβλητότητα ίση με τη μονάδα, το εύρος μέσα

στο οποίο αυτή θα βρίσκεται, εάν θέλουμε να είμαστε 99% βέβαιοι, θα είναι μεγαλύτερο από το αντίστοιχο για βεβαιότητα 95%. Επίσης η ακρίβεια της εκτίμησης είναι ανάλογη με το μήκος της περιόδου παρατήρησης και συγκεκριμένα με την τετραγωνική ρίζα των ημερών της (Best, 1998).

6.3 Εκτίμηση διαστημάτων εμπιστοσύνης και συσχέτιση

Οι δοκιμές σημαντικότητας και επιπέδων εμπιστοσύνης για τον συντελεστή συσχέτισης (ρ) μπορούν να πραγματοποιηθούν χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό Fisher (Z) σύμφωνα με τη σχέση:

$$Z = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+\rho}{1-\rho}\right) \quad (6.1)$$

όπου: ρ = ο συντελεστής συσχέτισης

Z = ο μετασχηματισμός Fisher: ο κανονικά κατανομημένος μετασχηματισμός του συντελεστή συσχέτισης (γνωστό και ως Z -τιμές)

Η διακύμανση ισούται με $\frac{1}{n-3}$ και το επίπεδο εμπιστοσύνης του Z για 95%, δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$Z_{CI} = Z \pm \frac{1,95}{\sqrt{(n-3)}} \quad (6.2)$$

όπου: Z_{CI} είναι το προκαθορισμένο διάστημα εμπιστοσύνης για τον μετασχηματισμό Fisher

Επειδή απαιτείται το διάστημα εμπιστοσύνης για το συντελεστή συσχέτισης αντί του Z , μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fisher σύμφωνα με την ακόλουθη σχέση:

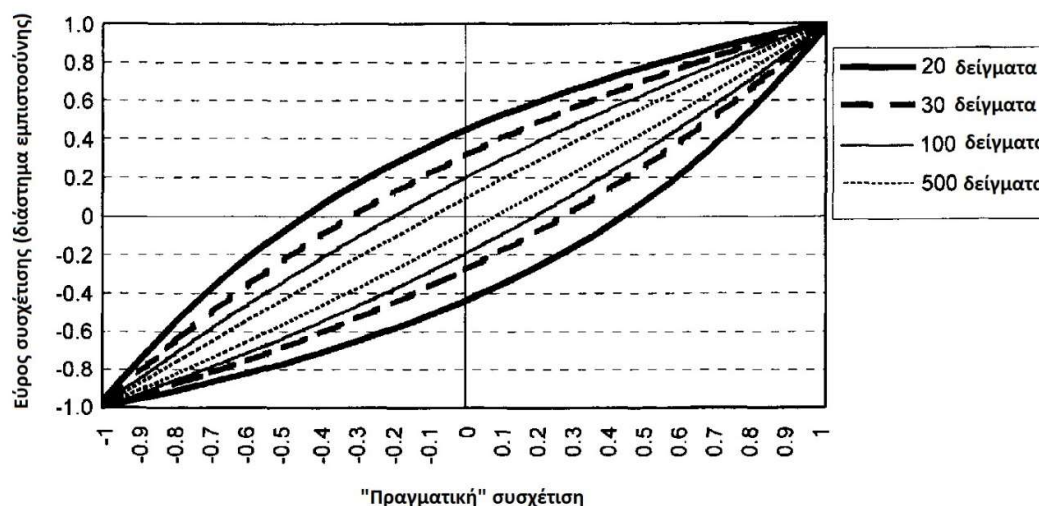
$$\rho_{CI} = \frac{e^{2Z'} - 1}{1 + e^{2Z'}} \quad (6.3)$$

όπου: ρ_{CI} = το καθοριζόμενο διάστημα εμπιστοσύνης για το συντελεστή συσχέτισης

Z' = ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fisher

Το διάστημα εμπιστοσύνης είναι αρκετά ευρύτερο για μικρές τιμές συντελεστή συσχέτισης, ενώ στενεύει όταν αυτές αυξάνονται. Για πολύ υψηλές

τιμές πάνω από 0,9 η πιθανότητα σφάλματος κατά τον υπολογισμό του συντελεστή συσχέτισης ελαχιστοποιείται. Παρατηρείται πως όσο αυξάνεται ο αριθμός των δειγμάτων που χρησιμοποιούνται, το διάστημα εμπιστοσύνης στενεύει με αποτέλεσμα να μπορεί να γίνει ακριβέστερη εκτίμηση.



Εικόνα 6.2: Συντελεστές συσχέτισης με διάστημα εμπιστοσύνης 95% και για διάφορους αριθμούς δειγμάτων [πηγή: Best (1998)]

Συνήθως οι υπολογισμοί για τους συντελεστές συσχέτισης χρησιμοποιούν δεδομένα πέντε εργάσιμων ημερών για πρακτικούς λόγους. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα πως ένα πλήθος 20 διαδοχικών μη αλληλοκαλυπτόμενων διαστημάτων, μπορεί να προκύψει από μια χρονοσειρά τιμών ενός εξαμήνου. Η σημασία των παραπάνω αντικατοπτρίζεται και στην εικόνα 6.2, όπου φαίνεται πως το διάστημα εμπιστοσύνης αλλάζει άμεσα όταν περνάμε από τα 20 στα 30 δείγματα, αλλά για να στενέψει ικανοποιητικά πρέπει να φτάσουμε στα 500 δείγματα. Αριθμός 500 δειγμάτων προϋποθέτει δεδομένα περίπου δέκα ετών.

Για να ξεπεραστεί το εμπόδιο του υπερβολικά μεγάλου πλήθους δεδομένων, μπορεί να εφαρμοστεί η τεχνική του bootstrapping. Σύμφωνα με αυτήν την τεχνική, μπορούν να δημιουργηθούν ομάδες δειγμάτων των 5 ημερών από διάφορα σημεία του συνόλου των δεδομένων. Συνεπώς μπορεί να δημιουργηθεί μεγαλύτερο σύνολο δειγμάτων από τα διαθέσιμα δεδομένα. Είναι σημαντικό να σημειωθεί πως αυτή η τεχνική δεν μπορεί να εφαρμοστεί για μεγαλύτερες περιόδους επειδή οι επιπτώσεις της παλινδρόμησης προς τον μέσο χάνονται κατά τη διαδικασία του bootstrapping.

Συμπερασματικά από τα παραπάνω μπορούμε να πούμε πως οι συσχετίσεις ανάμεσα σε 0,4 και -0,4 στατιστικά πλησιάζουν το μηδέν. Αυτό μπορεί να μας απαλλάξει από το φόρτο να υπολογίσουμε χαμηλές συσχετίσεις ενώ στην πραγματικότητα θα πρέπει να στρέψουμε την προσοχή μας στον ακριβή υπολογισμό των υψηλών συσχετίσεων με δεδομένο πως ακόμη και μια ελάχιστη μεταβολή σε αυτές μπορεί να επηρεάσει σημαντικά την υπολογιζόμενη τιμή του VaR (Best, 1998).

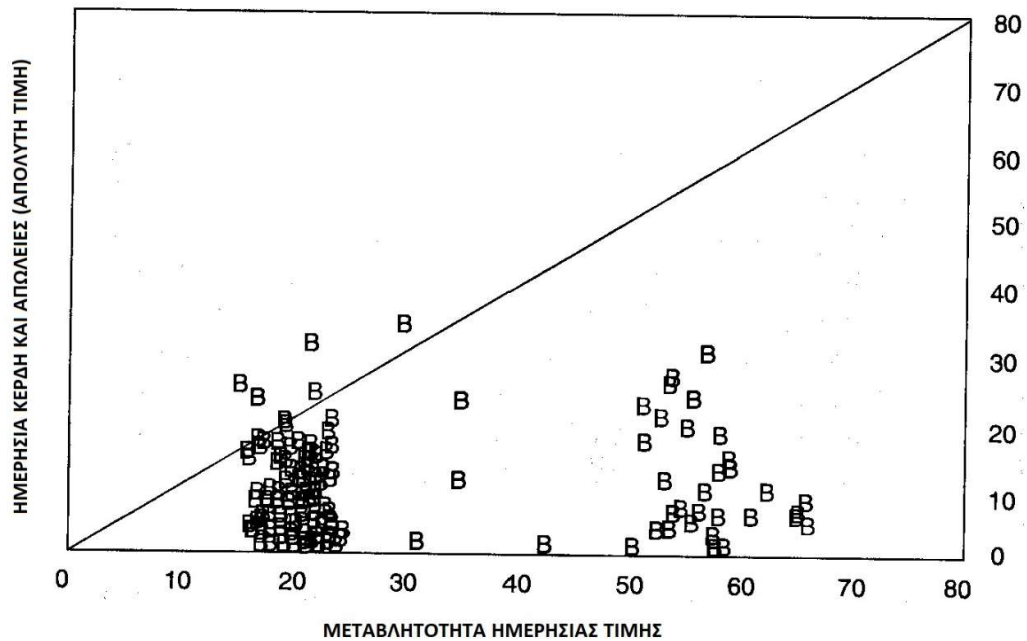
6.4 Δοκιμή μοντέλων

Η εξάρτηση του κινδύνου από τις πληροφορίες που είναι διαθέσιμες στον παρατηρητή προσδίδει στους υπολογισμούς του ένα στοιχείο υποκειμενικότητας (Schaller, 2009). Για να μπορέσει να αξιολογηθεί η απόδοση μιας διαδικασίας μέτρησης κινδύνου, οι προβλέψεις της συγκρίνονται με τις πραγματικές απώλειες που παρουσιάστηκαν μέσα σε μια συγκεκριμένη περίοδο και υλοποιείται στατιστικός έλεγχος της (Nolde & Ziegler, 2017). Αυτή η διαδικασία ονομάζεται δοκιμή μοντέλου (backtest).

Η βάση της παραδοσιακής προσέγγισης της δοκιμής μοντέλων βρίσκεται στη σύγκριση του πλήθους των περιπτώσεων που η τιμή VaR ήταν μικρότερη από τις απώλειες που υπήρξαν. Κάθε φορά που το μοντέλο υπο εξέταση παρήγαγε τιμή απώλειας μικρότερη από την πραγματική, λέμε πως υπήρξε μια εξαίρεση (exceprtion). Ο αριθμός των αναμενόμενων εξαιρέσεων εξαρτάται από το επίπεδο εμπιστοσύνης που έχουμε θέσει για το μοντέλο. Για να είναι το μοντέλο αξιόπιστο, πρέπει ο αριθμός των εξαιρέσεων να μην υπερβαίνει μια συγκεκριμένη τιμή. Όταν ο αριθμός των εξαιρέσεων είναι μεγάλος, το μοντέλο παρουσιάζει την τάση να υποτιμά τον κίνδυνο, με συνέπεια να μην εξασφαλίζεται επαρκές κεφάλαιο για την αντιμετώπιση των κινδύνων. Στον αντίποδα, η εμφάνιση πολύ λιγότερων εξαιρέσεων από τις αναμενόμενες μπορεί δυνητικά να οδηγήσει στη δέσμευση υπερβολικού κεφαλαίου ή την λανθασμένη κατανομή του στις επιχειρηματικές μονάδες (Jorion, 2007).

Αν λάβουμε τα κέρδη και τις απώλειες ενός χαρτοφυλακίου κατά απόλυτη τιμή και τα αντιπαραβάλουμε με τις αναμενόμενες τιμές VaR σε δεδομένο επίπεδο εμπιστοσύνης, μπορούμε γραφικά να εξετάσουμε την αξιοπιστία του

μοντέλου. Οι παρατηρήσεις που βρίσκονται πάνω από τη διαγώνιο στην εικόνα 6.3 υποδεικνύουν τις ημέρες που η απόλυτη τιμή κέρδους/απώλειας υπερέβη τη VaR.



Εικόνα 6.3: Τιμή VaR οριζόμενη ως μεταβλητότητα ημερήσιας τιμής σε σχέση με τα ημερήσια κέρδη και απώλειες [πηγή: Jorion (2007)]

Όπως γίνεται αντιληπτό, η αξιοπιστία του μοντέλου εξαρτάται από το ρυθμό των αποτυχιών του και υπολογίζεται από το ποσοστό των περιπτώσεων που η τιμή VaR ξεπεράστηκε μέσα σε δεδομένο δείγμα. Αν θεωρήσουμε ένα μοντέλο VaR το οποίο μας δίνει αποτέλεσμα με επίπεδο εμπιστοσύνης 99% ($p=0,01$) για πλήθος ημερών (T) και αριθμό εξαιρέσεων (N), τότε ο ρυθμός αποτυχίας θα είναι $\frac{N}{T}$. Αυτός ο ρυθμός θα πρέπει για το συγκεκριμένο μοντέλο να συγκλίνει στο 1% όσο αυξάνει το μέγεθος του δείγματος.

Η απόφαση για την αποδοχή ή την απόρριψη του μοντέλου θα πρέπει να ληφθεί με κάποιο επίπεδο εμπιστοσύνης το οποίο δεν ταυτίζεται με αυτό του μοντέλου. Τα παραδοσιακά μοντέλα δοκιμής εφαρμόζουν στατιστικό έλεγχο για την μηδενική υπόθεση (H_0) πως η διαδικασία μέτρησης κινδύνου είναι σωστή. Το πλήθος των εξαιρέσεων (χ) ακολουθεί διωνυμική κατανομή πιθανοτήτων:

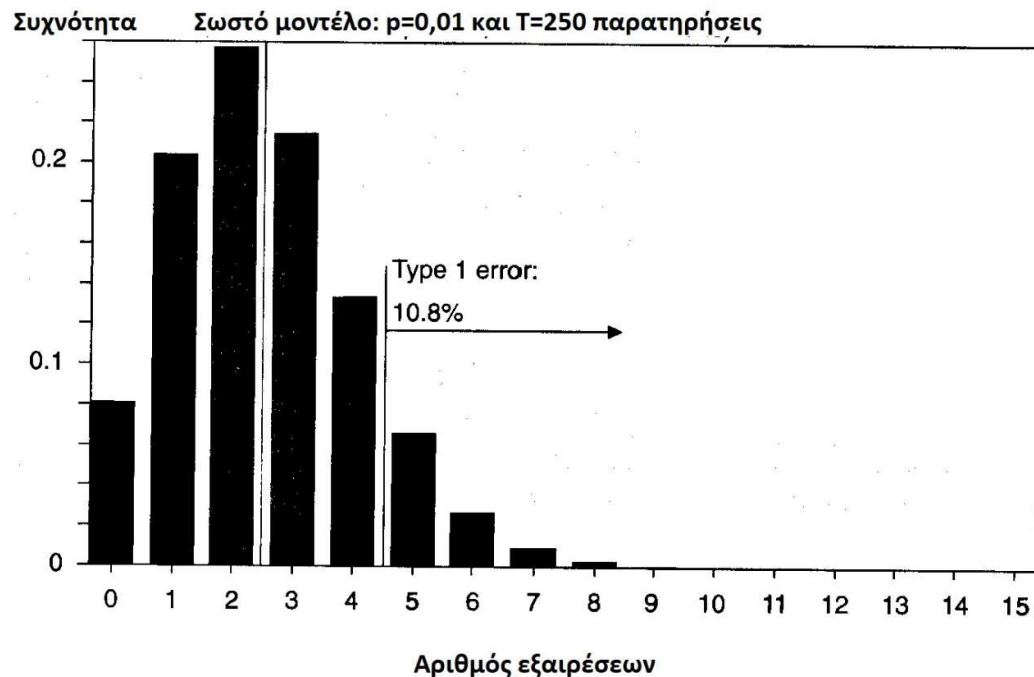
$$f(x) = \binom{T}{x} p^x (1 - p)^{T-x} \quad (6.4)$$

Το x έχει αναμενόμενη τιμή $E(x) = pT$ και διακύμανση $V(x) = p(1 - p)T$.

Για μεγάλες τιμές του T και βάσει του κεντρικού οριακού θεωρήματος μπορούμε να προσομοιάσουμε την διωνυμική κατανομή με την κανονική. Οπότε έχουμε:

$$z = \frac{x - pT}{\sqrt{p(1-p)T}} \approx N(0,1) \quad (6.5)$$

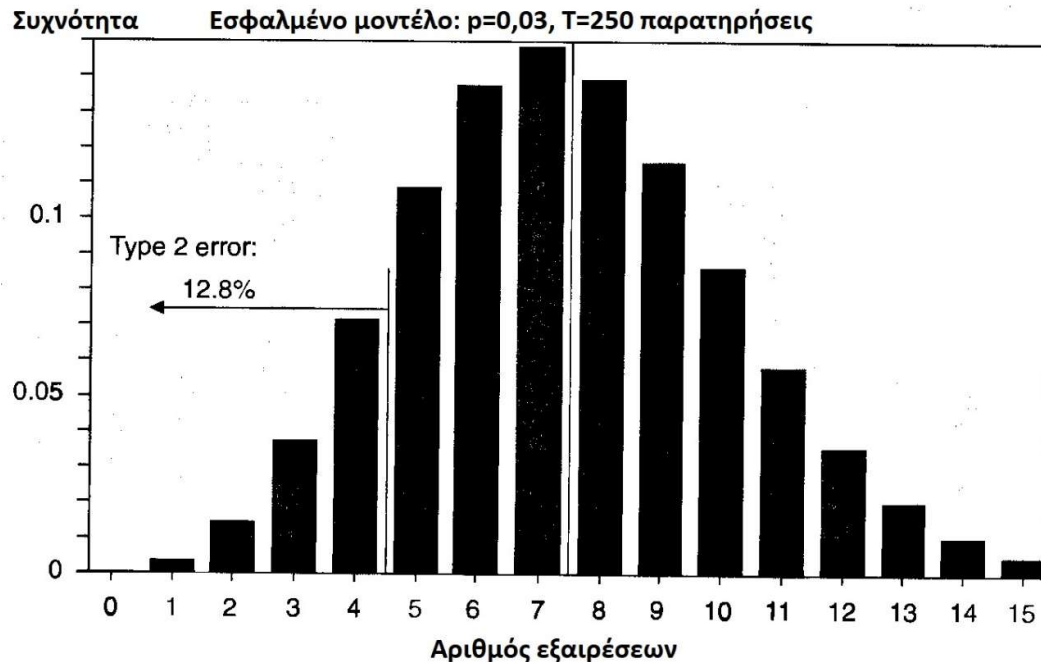
Με βάση την διωνυμική κατανομή μπορεί να ελεγχθεί εάν το πλήθος των εξαιρέσεων είναι αποδεκτό ή το μοντέλο θα πρέπει να απορριφθεί. Για επίπεδο εμπιστοσύνης 99% (δηλαδή $p=0,01$) και $T=250$ (δεδομένα ενός έτους) θα παρατηρήσουμε πάνω από τέσσερις εξαιρέσεις στο 10,8% των περιπτώσεων. Συνεπώς η πιθανότητα να γίνει σφάλμα τύπου 1, να απορριφθεί δηλαδή ένα σωστό μοντέλο, ισούται με 10,8%.



Εικόνα 6.4:Κατανομή εξαιρέσεων σε σωστό μοντέλο [πηγή: Jorion (2007)]

Αντίστοιχα υπάρχει και η πιθανότητα να γίνει σφάλμα τύπου 2, δηλαδή να γίνει δεκτό ένα εσφαλμένο μοντέλο. Αν θεωρήσουμε μια τέτοια περίπτωση όπου

$p=0,03$ και $T=250$, η πιθανότητα του σφάλματος ανέρχεται στο 12,8%. Η κατανομή φαίνεται στην εικόνα 6.5. Για μικρές τιμές του p , η ανίχνευση απόκλισης γίνεται δυσκολότερη επειδή το πλήθος των αναμενόμενων εξαιρέσεων είναι περιορισμένο. Για αυτόν το λόγο πολλές τράπεζες επιλέγουν επίπεδο εμπιστοσύνης τέτοιο ώστε να υπάρχει επαρκές πλήθος εξαιρέσεων για την δοκιμή του μοντέλου.



Εικόνα 6.5:Κατανομή εξαιρέσεων σε λανθασμένο μοντέλο [πηγή: Jorion (2007)]

Βάσει της αποδοχής πως η μηδενική υπόθεση επιβεβαιώνεται, η τράπεζα Διεθνών διακανονισμών (Bank for International Settlements) έχει ορίσει τρεις κατηγορίες εξαιρέσεων (Basel Committee on Banking Supervision, 2013). Στην πρώτη κατηγορία, η οποία ονομάζεται πράσινη ζώνη, εμπίπτουν τα μοντέλα που σύμφωνα με τα αποτελέσματα του ελέγχου δεν υποδηλώνουν κάποιο πρόβλημα σχετικά με την ακρίβεια του μοντέλου. Στην επόμενη ζώνη, που ονομάζεται κίτρινη, τα αποτελέσματα του ελέγχου εγείρουν κάποιους προβληματισμούς αλλά χωρίς να υπάρχουν σαφή συμπεράσματα. Τέλος στην κόκκινη ζώνη, έχουμε σχεδόν βέβαιο πρόβλημα με το μοντέλο υπο εξέταση.

Η κατάταξη των μοντέλων σε κατηγορίες προκύπτει από το πλήθος των εξαιρέσεων που αυτά εμφανίζουν. Ο γενικός κανόνας είναι πως για ένα δείγμα 250 μετρήσεων, από μηδέν μέχρι τέσσερις εξαιρέσεις εντάσσουν το μοντέλο στην

πράσινη ζώνη. Στην ίδια λογική από πέντε έως εννέα εξαιρέσεις οδηγούν στην κίτρινη ζώνη ενώ πάνω από δέκα σηματοδοτούν την ένταξη στην κόκκινη ζώνη. Ανάλογα με το μέγεθος του δείγματος η πιθανότητα να παρουσιαστεί ένας συγκεκριμένος αριθμός εξαιρέσεων μεταβάλλεται και ως εκ τούτου και οι κατηγορίες.

Zone	Number of exceptions	Increase in scaling factor	Cumulative probability
Green zone	0	0.00	8.11%
	1	0.00	28.58%
	2	0.00	54.32%
	3	0.00	75.81%
	4	0.00	89.22%
Yellow zone	5	0.40	95.88%
	6	0.50	98.63%
	7	0.65	99.60%
	8	0.75	99.89%
	9	0.85	99.97%
Red zone	10 or more	1.00	99.99%

Πίνακας 6.1: Ζώνες κατάταξης μοντέλων σύμφωνα με το πλήθος των εξαιρέσεων για δείγμα 250 περιπτώσεων [πηγή: Basel committee on Banking supervision(2013)]

Μέσα στην κίτρινη ζώνη έχουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις, σύμφωνα με την επιτροπή Basel (2013) που εξηγούν τις εξαιρέσεις:

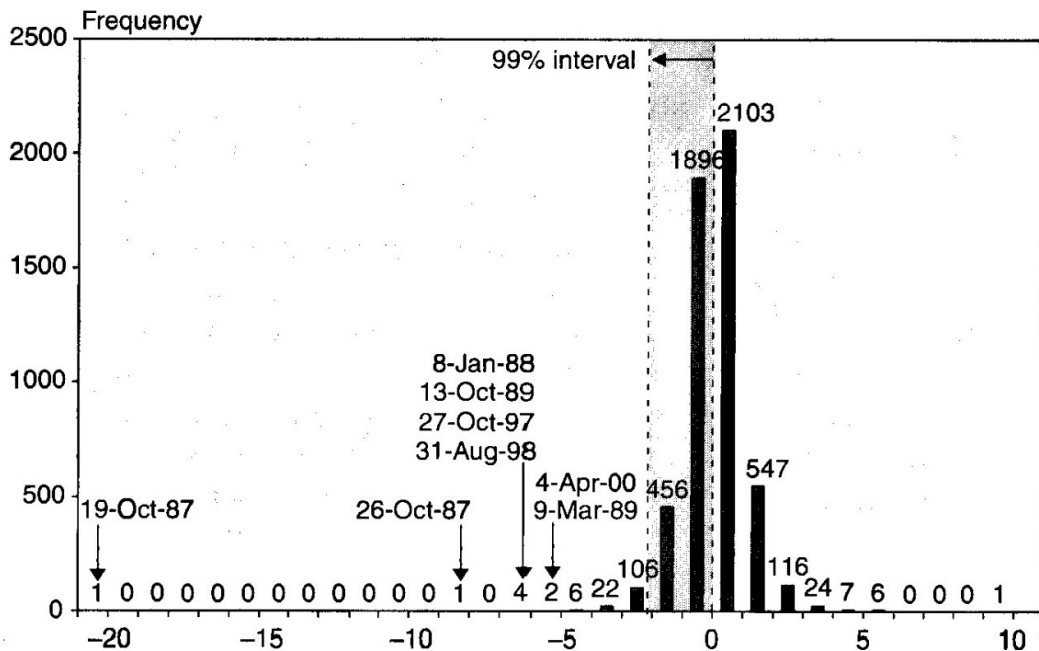
1. Βασική ακεραιότητα του μοντέλου
 - Τα συστήματα της τράπεζας δεν είναι σε θέση να συλλάβουν τον κίνδυνο
 - Οι μεταβλητότητες και οι συσχετίσεις υπολογίστηκαν εσφαλμένα
2. Η ακρίβεια του μοντέλου μπορεί να βελτιωθεί
 - Το μοντέλο δεν συλλαμβάνει τον κίνδυνο με επαρκή ακρίβεια
3. “Κακή τύχη” ή οι αγορές συμπεριφέρθηκαν με τρόπο που δεν μπορούσε να προβλέψει το μοντέλο
 - Τυχαίο γεγονός
 - Οι αγορές παρουσίασαν κινήσεις που ήταν εκτός των ορίων του μοντέλου

- Οι αγορές συμπεριφέρθηκαν αντίθετα η μία σε σχέση με την άλλη
4. Ενδοημερήσιες συναλλαγές
- Υπήρξε μια μεγάλη μεταβολή (απώλεια) στις θέσεις της τράπεζας μεταξύ το τέλος της πρώτης μέρας (όπου υπολογίστηκε ο κίνδυνος) και το τέλος της δεύτερης μέρας (όπου τα αποτελέσματα ανακοινώθηκαν)

Οι παραδοσιακές δοκιμές δίνουν τη δυνατότητα να δειχθεί πως το υπο-εξέταση μοντέλο κάνει εσφαλμένες προβλέψεις εάν η μηδενική υπόθεση απορριφθεί. Η παραπλανητική ορολογία πως μια παραδοσιακή δοκιμή είναι πετυχημένη όταν η μηδενική υπόθεση δεν απορρίπτεται, δεν σημαίνει απαραίτητα πως αυτή είναι σωστή, αφού αυτό θα σήμαινε πως έχουμε τον απόλυτο έλεγχο των αποτελεσμάτων (Nolde & Ziegler, 2017).

7. Προσομοιώσεις ακραίων καταστάσεων

Η μέθοδος VaR είναι μια πολύ διαδεδομένη μέθοδος για την εκτίμηση του κινδύνου μιας επένδυσης αλλά έχει κάποιους περιορισμούς όπως έχει ήδη αναφερθεί. Ο κυριότερος από αυτούς είναι το γεγονός ότι μας δίνει μια εκτίμηση των μέγιστων απωλειών με κάποιον βαθμό βεβαιότητας αλλά μόνο όταν η συμπεριφορά των αγορών είναι κανονική. Όπως είναι ευρέως γνωστό οι αγορές σε πολλές περιπτώσεις δεν αντιδρούν με αναμενόμενο τρόπο με αποτέλεσμα οι μεταβλητότητες να ξεφεύγουν από τις συνηθισμένες τιμές τους. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η κρίση της Δευτέρας 19 Οκτωβρίου 1987, όπου ο δείκτης S&P έχασε το 20% της αξίας του, που μεταφράζεται σε είκοσι τυπικές αποκλίσεις, νούμερο που ακόμη και υπολογισμός VaR με βεβαιότητα 99% δεν θα μπορούσε να συλλάβει πλήρως.



Εικόνα 7.1: Κατανομή αποδόσεων από 1984 έως 2004 [πηγή: Jorion (2007)]

Ο γενικός όρος “προσομοίωση ακραίων καταστάσεων” (stress testing) συμπεριλαμβάνει διάφορες τεχνικές για την αξιολόγηση της αντοχής σε εξαιρετικά γεγονότα. Αυτές οι προσομοιώσεις χρησιμοποιούνται ώστε να καθοριστεί η σταθερότητα ενός δεδομένου συστήματος ή οντότητας. Μέρος της διαδικασίας τους είναι η δοκιμή πέρα από κανονικές συνθήκες λειτουργίας ώστε να

διαπιστωθούν τα αποτελέσματα (Čihák, 2007). Παραδοσιακά εφαρμόζονται σε χαρτοφυλάκια αλλά η χρήση τους έχει επεκταθεί σε τράπεζες, τραπεζικά και οικονομικά συστήματα.

Ο σκοπός της προσομοίωσης είναι να εξεταστούν κρίσεις που έχουν χαμηλή αλλά όχι μηδενική πιθανότητα εμφάνισης όπως μια μεγάλη αύξηση επιτοκίων, μια σοβαρή ύφεση της οικονομίας, μια σοβαρή αύξηση των τιμών πετρελαίου ή μια κρίση σε κάποιο μεγάλο χρηματιστήριο. Ένα μεγάλο μειονέκτημα αυτών των προσομοιώσεων είναι πως έχουν μηχανιστικό χαρακτήρα και δεν λαμβάνουν υπόψη τις επιπτώσεις των χρηματιστηριακών ιδρυμάτων στην πραγματική οικονομία (De Bandt, Bruneau, & El Amri, 2008).

Για τη δημιουργία των προσομοιώσεων, απαραίτητη είναι η δημιουργία πιθανών σεναρίων και στη συνέχεια η ανάπτυξη μαθηματικών μοντέλων για την εφαρμογή τους. Σκοπός είναι η εξέταση των πιθανών γεγονότων υπο τη μορφή των πιθανοτήτων για την εξαγωγή μετρήσιμων και συγκρίσιμων αποτελεσμάτων.

7.1 Κατηγορίες σεναρίων

Η κατάταξη των σεναρίων σε κατηγορίες γίνεται με δύο τρόπους: α) τον τύπο των αλλαγών που εξετάζουμε πιθανόν να συμβούν στους παράγοντες κινδύνου και β) τα δεδομένα που χρησιμοποιούνται για την μελέτη τους.

7.1.1 Τύποι αλλαγών

Όσον αφορά τον τύπο των αλλαγών διακρίνουμε τα σενάρια μιας περίπτωσης και αυτά που περιγράφονται από κατανομή περιπτώσεων. Στην πρώτη περίπτωση, όπου έχουμε σενάριο μιας περίπτωσης, μελετούμε έναν μοναδικό παράγοντα κινδύνου για τις αποδόσεις. Αυτός μπορεί να είναι οποιοσδήποτε, όπως μια παράλληλη μετατόπιση στην καμπύλη απόδοσης. Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να εξαγάγουμε συμπεράσματα για τα κέρδη ή τις απώλειες που θα είχε ως αποτέλεσμα αυτό το συμβάν για το χαρτοφυλάκιο μας (Alexander, 2008).

Στα σενάρια μιας περίπτωσης ανήκουν αυτά που χαρακτηρίζονται ως “η χειρότερη περίπτωση”, τα “αναφοράς” και κάθε περίπτωση ανάμεσα σε αυτές τις

ακραίες καταστάσεις. Το πρώτο αναφέρεται στην κατάσταση όπου χάνεται ολόκληρη η αξία της επένδυσης ή οι απώλειες φτάνουν σε τέτοιο σημείο που δεν είναι δυνατή η ρευστοποίηση. Τα σενάρια αναφοράς χρησιμοποιούνται στην ανάλυση αποφάσεων όταν οι τρέχουσες συνθήκες της αγοράς συνεχίζουν να υπάρχουν μέσα στο φάσμα του ορίζοντα κινδύνου. Τέλος, οι υπόλοιπες περιπτώσεις εμπίπτουν ανάμεσα σε αυτές τις δυο καταστάσεις.

Στα σενάρια κατανομών, οι υποθέσεις που κάνουμε περιγράφονται από μια συνεχή, πολλαπλών μεταβολών κατανομή αποδόσεων των παραγόντων κινδύνου. Με αυτόν τον τρόπο είμαστε σε θέση να εξάγουμε ολόκληρη κατανομή αποδόσεων για το σύνολο του χαρτοφυλακίου και κατά επέκταση εκτιμώμενων τιμών VaR για αυτό. Είναι δυνατή η δημιουργία σύνθετων σεναρίων κατανομών μέσω της εφαρμογής διακριτών περιπτώσεων.

7.1.2 Τύποι δεδομένων

Η πρώτη περίπτωση σε αυτή τη διάκριση είναι τα ιστορικά σενάρια. Αυτά αναφέρονται στην επανάληψη κρίσεων που έχουν συμβεί σε παλαιότερα έτη. Στην ουσία γίνεται χρήση των δεδομένων της περιόδου κρίσης και εφαρμογή τους στη τρέχουσα σύσταση του χαρτοφυλακίου. Με αυτόν τον τρόπο είμαστε σε θέση να εξετάσουμε τη συμπεριφορά της θέσης μας υπο αυτές τις συνθήκες.

Στη συνέχεια έχουμε τα υποθετικά σενάρια. Εδώ μελετώνται τυχαίες μεταβολές στους παράγοντες κινδύνου χωρίς να είναι απαραίτητο να υπάρχει κάποια ιστορική βάση. Για να υπάρχει μια λογική στη δημιουργία υποθετικών σεναρίων, προτείνεται η υιοθέτηση στοιχείων που έχουν άμεση σχέση με τα χαρακτηριστικά του χαρτοφυλακίου υπο μελέτη (Alexander, 2008). Είναι δυνατή η μεμονωμένη ή η ταυτόχρονη εφαρμογή υποθετικών σεναρίων αλλά το κύριο στοιχείο είναι ο αναλυτής να είναι σε θέση να εξετάσει τις επιπτώσεις των γεγονότων που εικάζει σε όλους τους υπολοίπους παράγοντες κινδύνου.

Αν θεωρήσουμε ένα χαρτοφυλάκιο για h -ημέρες, γνωρίζουμε πως η κανονική γραμμική τιμή VaR εξαρτάται από τις παραμέτρους της αναμενόμενης τιμής (μ_h) και της τυπικής απόκλισης (σ_h) που προκύπτουν από την κατανομή των αποδόσεων σε τρέχουσες τιμές. Για τον υπολογισμό των παραμέτρων στηριζόμαστε σε ιστορικά δεδομένα. Η τυπική απόκλιση εκφράζει την

αβεβαιότητα για την αναμενόμενη τιμή και μόνο για αυτή. Συνεπώς για να μπορέσει ο αναλυτής να εκτιμήσει τις αναμενόμενες αποδόσεις σε τρέχουσες αξίες θα πρέπει να εκφράσει την πρόβλεψη του καθώς και την αβεβαιότητα για αυτήν μέσω μιας τυπικής απόκλισης (Alexander, 2008).

Για τον υπολογισμό σε σενάρια σύνθετων κατανομών, θα πρέπει ο αναλυτής να είναι της άποψης πως υπάρχουν πάνω από μια κατανομή για την εξέλιξη της αξίας του χαρτοφυλακίου του. Επιπρόσθετα θα πρέπει να έχει μια υποκειμενική εκτίμηση για την πιθανότητα του σεναρίου κάθε κατανομής.

7.2 Stress Tests

Τα stress-tests είναι σχεδιασμένα ώστε να μελετούν τις ουρές των κατανομών των απωλειών πέρα από το όριο (συνήθως 99%) που χρησιμοποιείται από την ανάλυση VaR. Παρέχουν δύο βασικές πληροφορίες: την έκταση των απωλειών σε καταστροφικές συνθήκες και τα σενάρια μέσα από τα οποία αυτές μπορεί να συμβούν (Alexander & Sheedy, 2008). Αυτές οι πληροφορίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη λήψη αποφάσεων αναφορικά με την αντιστάθμιση των κινδύνων, τη θέσπιση ορίων, την ανακατανομή χαρτοφυλακίου και την επάρκεια κεφαλαίου. Συνήθως γίνεται διάκριση μεταξύ της ανάλυσης ευαισθησίας, η οποία εξετάζει τις επιπτώσεις της μεταβολής της λειτουργικής μορφής του μοντέλου και τις δοκιμές stress-test στις παραμέτρους του μοντέλου, οι οποίες είναι και τα δεδομένα που εισάγουμε σε αυτό (Jorion, 2007).

Μία από τις κύριες αποφάσεις κατά το σχεδιασμό των stress-tests, είναι η εκτίμηση του μεγέθους της κρίσης. Θέτοντας τον πήχη πολύ χαμηλά ή πολύ υψηλά μπορεί να καταστεί η δοκιμή ανούσια. Γενικά οι μεταβολές θα πρέπει να οριστούν με βάση τις παλαιότερες μέγιστες αυξομειώσεις των σχετικών παραγόντων κινδύνου σε δεδομένο ορίζοντα χρόνου ή να βασιστούν στην ιστορική διακύμανση. Εναλλακτικά, έχοντας επαρκή δεδομένα, μπορεί να γίνει προσπάθεια εκτίμησης της κοινής εμπειρικής κατανομής παλαιότερων αποκλίσεων από την τάση των σχετικών παραγόντων κινδύνου και χρήση των ποσοστημορίων της για προσομοίωση του σεναρίου κρίσης (Sorge, 2004).

7.3 Παράγοντες κινδύνου και αδυναμίες συστήματος

Μετά τον καθορισμό του χαρτοφυλακίου που θα εξεταστεί και το σχεδιασμό του stress-test, θα πρέπει να εξεταστεί η ανθεκτικότητα του σε κρίσεις, χρησιμοποιώντας πλήθος διαφορετικών δεικτών. Τέτοιοι δείκτες, οι οποίοι ονομάζονται δείκτες οικονομικής σταθερότητας (financial soundness indicators), χρησιμοποιούνται για να ποσοτικοποιήσουν ξεχωριστά τη συστημική σπουδαιότητα διαφόρων πηγών κινδύνου. Οι βασικές κατηγορίες τους, βάσει του Διεθνούς Νομισματικού Ταμείου για την αξιολόγηση της πορείας των χωρών είναι οι εξής (International Monetary Fund, 2006): επάρκεια κεφαλαίου, ποιότητα θέσεων, κερδοφορία και κέρδη, ρευστότητα και ευαισθησία στον κίνδυνο αγοράς.

Όπως έχει προαναφερθεί η ευαισθησία αυτών των κινδύνων σε αλλαγές μπορεί να εκτιμηθεί χρησιμοποιώντας ιστορικά δεδομένα μέσω χρονοσειρών ή αξιολογώντας διατμηματικές επιδράσεις. Κάθε δείκτης οικονομικής σταθερότητας έχει σχεδιαστεί κατά τέτοιο τρόπο ώστε να αντιστοιχεί σε παράγοντα κινδύνου με συνέπεια να είναι δυνατή η αξιολόγηση της έκθεσης του χαρτοφυλακίου.

7.4 Μεταβλητότητα και περίοδος διάρκειας σε stress tests

Η περίοδος διάρκειας αντιστοιχεί στην περίοδο για την οποία μετρείται η μεταβλητότητα. Η συνήθης τακτική είναι να γίνεται υπολογισμός VaR για μια ημέρα, συνεπώς και η περίοδος διάρκειας είναι η ίδια. Επειδή η μεταβλητότητα είναι ανάλογη με την τετραγωνική ρίζα του χρόνου, η δοκιμή προσομοίωσης για την περίοδο διάρκειας αντιστοιχεί στην ουσία με έλεγχο της μεταβλητότητας (Best, 1998). Επίσης αφού το κόστος ρευστοποίησης ενός χαρτοφυλακίου μέσα στην περίοδο διάρκειας δεν αντιστοιχεί στην τιμή VaR, δεν υπάρχει νόημα χωριστής προσομοίωσης μεταβλητότητας και χρονικού διαστήματος.

Η επίδραση ενός δεδομένου σεναρίου κρίσης στο οικονομικό σύστημα θα πρέπει να εξεταστεί σε βάθος χρόνου και τουλάχιστον για το απαιτούμενο διάστημα που οι ρυθμιστικοί θεσμοί θα χρειαστούν ώστε να επέμβουν. Εμπειρικά δεδομένα φαίνεται να συγκλίνουν πως ιδίως σε περιόδους γενικευμένης αναταραχής, η ανακεφαλαιοποίηση τραπεζών σε κρίση μπορεί να χρειαστεί πάνω από το ένα έτος που συνήθως χρησιμοποιείται ως βάση αναφοράς από τα τμήματα διαχείρισης κινδύνου (Sorge, 2004).

7.5 Συσχετίσεις σε stress tests

Σε περιόδους κρίσης, οι συσχετίσεις συχνά λαμβάνουν ακραίες τιμές και οι απώλειες μπορούν να είναι πολύ μεγαλύτερες από τις εκτιμήσεις VaR, που έχουν γίνει βάσει υποθέσεων «κανονικών» συσχετίσεων (Dowd, 2005). Η διαδικασία υποβολής των συσχετίσεων σε δοκιμή ισοδυναμεί με το να ληφθεί η μεταβολή τιμής και να εφαρμοστεί απευθείας με την μορφή stress-test σε ένα χαρτοφυλάκιο (Best, 1998).

Μια χαρακτηριστική μορφή δοκιμής συσχετίσεων είναι η μελέτη 2 προϊόντων που έχουν υψηλή συσχέτιση και η επίπτωση που θα υπήρχε εάν αυτή λάβει μηδενική τιμή. Απόρροια των προηγούμενων είναι πως σε κάθε πίνακα συσχετίσεων όπου γίνονται αλλαγές με σκοπό την διεξαγωγή stress-test, θα πρέπει να γίνεται έλεγχος πως οι ιδιοτιμές έχουν θετικό πρόσημο. Ένας άμεσος τρόπος για να γίνει μια τέτοια δοκιμή είναι να υποβληθεί η τιμή ενός προϊόντος σε μείωση ενώ ταυτόχρονα να διατηρηθεί η τιμή του δευτέρου σταθερή.

8. Πρακτικές εφαρμογές

8.1 Εισαγωγή

Για την καλύτερη κατανόηση των μεθόδων υπολογισμού VaR, μπορεί να χρησιμοποιηθεί το Excel εισάγοντας τιμές μετοχών, τις οποίες μπορούμε να λάβουμε άμεσα από το διαδίκτυο. Συγκεκριμένα μπορούμε να εφαρμόσουμε τις μεθόδους που αναλύσαμε θεωρητικά στα προηγούμενα κεφάλαια τόσο σε επίπεδο ξεχωριστών τιμών μετοχών αλλά και σε μορφή χαρτοφυλακίου.

Η χρήση του excel κρίνεται ως η πλέον ενδεδειγμένη καθώς διαθέτει μεγάλο πλήθος συναρτήσεων και είναι εύκολο στη χρήση. Επιπλέον, τα εναλλακτικά προγράμματα που κυκλοφορούν στο διαδίκτυο όπως το open office δίνουν τη δυνατότητα σε χρήστες να ανοίγουν και να επεξεργάζονται αρχεία του excel ακόμη κι αν δεν έχουν προμηθευτεί το πρόγραμμα.

Για τη λήψη ιστορικών δεδομένων όσον αφορά την αξία των μετοχών υπάρχει πλήθος ιστοσελίδων στο διαδίκτυο, οι οποίες παρέχουν αξιόπιστα δεδομένα. Μια από τις ευρέως χρησιμοποιούμενες είναι η Yahoo finance, στην οποία μπορεί να οριστεί το όνομα της μετοχής, το αντίστοιχο πεδίο ημερομηνιών και να ληφθεί αρχείο των μεταβολών.

8.2 Αξιολόγηση δεδομένων και κανονικότητα

Για τους υπολογισμούς μας, επιλέξαμε την αξία της μετοχής της Daimler AG, ενός κολοσσού στην αυτοκινητοβιομηχανία. Ως πηγή δεδομένων επιλέξαμε το διάστημα από τη 1^η Ιανουαρίου 2019 ως την 31^η Δεκεμβρίου 2019. Η πρώτη εργασία που γίνεται κατά τη λήψη των δεδομένων είναι ο έλεγχος τους για την ύπαρξη διπλών εισαγωγών ή κενών κελίων. Μας ενδιαφέρει η τιμή κλεισίματος κάθε ημέρας για την μετοχή, η οποία θα αποτελεί και την τιμή έναρξης για την επομένη. Από τις τιμές μπορούμε να υπολογίσουμε την απόδοση χρησιμοποιώντας το πηλίκο $\frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$, όπου P_t είναι η τιμή κλεισίματος της ημέρας t και P_{t-1} η αντίστοιχη της προηγούμενης. Οι αποδόσεις που προκύπτουν,

φαίνονται στον πίνακα 1 του παραρτήματος. Για την ευκολότερη ερμηνεία των τιμών, τα κελιά των αποδόσεων ορίστηκαν ως ποσοστά. Επίσης η ύπαρξη αρνητικής τιμής σημαίνει πως πρόκειται για πτώση στην αξία της μετοχής.

	A	B	C	D
1	ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ	ΚΛΕΙΣΙΜΟ (€)	ΑΠΟΔΟΣΗ	
2	Dec 30, 2019	49,37	-0,94%	
3	Dec 27, 2019	49,84	0,12%	
4	Dec 23, 2019	49,78	-0,38%	
5	Dec 20, 2019	49,97	0,12%	
6	Dec 19, 2019	49,91	-0,80%	
7	Dec 18, 2019	50,31	-1,45%	
8	Dec 17, 2019	51,05	0,37%	
9	Dec 16, 2019	50,86	0,45%	
10	Dec 13, 2019	50,63	1,42%	
11	Dec 12, 2019	49,92	0,87%	
12	Dec 11, 2019	49,49	1,50%	
13	Dec 10, 2019	48,76	-0,61%	
14	Dec 09, 2019	49,06	-0,81%	
15	Dec 06, 2019	49,46	0,41%	
16	Dec 05, 2019	49,26	-0,69%	
17	Dec 04, 2019	49,6	0,73%	
18	Dec 03, 2019	49,24	-1,22%	
19	Dec 02, 2019	49,85	-2,64%	

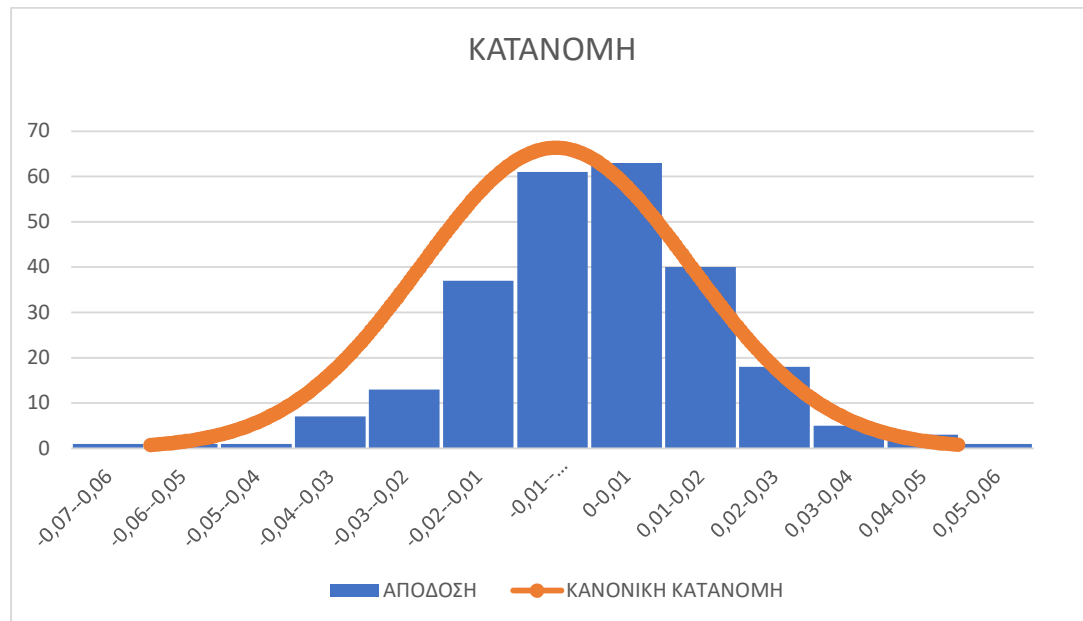
Εικόνα 8.1:Μορφή πίνακα υπολογισμού απόδοσης

Στη συνέχεια μπορούμε να αξιοποιήσουμε τις δυνατότητες του Excel ώστε να εξάγουμε άμεσα περιγραφικά στατιστικά στοιχεία μέσω της ανάλυσης δεδομένων. Με αυτόν τον τρόπο παίρνουμε άμεσα πληροφορίες για τη μέση τιμή, την τυπική απόκλιση, τη λοξότητα και την κυρτότητα των τιμών μας. Οι τιμές που βλέπουμε στον πίνακα 2 του παραρτήματος, δηλαδή κύρτωση ίση με 1,23 και ασυμμετρία -0,21, μας δείχνουν έντονα πως οι τιμές μας προσεγγίζουν πολύ ικανοποιητικά την κανονική κατανομή.

Στο ίδιο συμπέρασμα για την κανονικότητα καταλήγουμε και απεικονίζοντας γραφικά τα δεδομένα μας με την κανονική κατανομή σε αντιπαραβολή. Για να το επιτύχουμε αυτό θα πρέπει πρώτα να κατατάξουμε τα δεδομένα μας σε ομάδες μέσω των συγκεντρωτικών πινάκων του Excel. Το αποτέλεσμα που παίρνουμε από αυτήν την ενέργεια φαίνεται στον πίνακα 3 του παραρτήματος.

Τέλος για τη γραφική αναπαράσταση της κανονικής κατανομής των δεδομένων, ορίζουμε ως ελάχιστη τιμή της το αποτέλεσμα της μέσης τιμής μείον το γινόμενο τριών αποκλίσεων. Η υποδιαίρεση που θέτουμε για την κλίμακα μας είναι το πηλίκο έξι αποκλίσεων δια 250. Έτσι η ελάχιστη τιμή που προκύπτει είναι -0,050076403 και η μέγιστη, αθροίζοντας 250 υποδιαίρεσεις στην ελάχιστη τιμή, 0,050534406. Εφαρμόζοντας τη συνάρτηση normal.dist ώστε να βρούμε την

πιθανότητα κάθε τιμής, προκύπτει ο πίνακας 4 του παραρτήματος. Από τη γραφική αναπαράσταση των δεδομένων μας σε σχέση με την κανονική κατανομή, βλέπουμε πως αυτά την ακολουθούν σε πολύ ικανοποιητικό βαθμό και ως εκ τούτου μπορούν να εφαρμοστούν οι μέθοδοι που έχουμε περιγράψει θεωρητικά.



Διάγραμμα 8.1: Κατανομή αποδόσεων σε σχέση με την κανονική κατανομή

8.3 Μοναδική θέση

8.3.1 Ιστορική προσομοίωση

Για την εφαρμογή της μεθόδου της ιστορικής προσομοίωσης, θα πρέπει να αντιγράψουμε τη στήλη των αποδόσεων και να εφαρμόσουμε ταξινόμηση από την μικρότερη στη μεγαλύτερη τιμή. Στη συνέχεια θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση “COUNT” ώστε να μετρήσουμε το πλήθος των τιμών μας ή εναλλακτικά να ορίσουμε αύξοντα αριθμό δίπλα από κάθε απόδοση.

Με αυτόν τον τρόπο δημιουργούμε μια κατανομή από την οποία μπορούμε να κάνουμε υπολογισμό της τιμής VaR, αφού πρώτα επιλέξουμε το επίπεδο εμπιστοσύνης (α). Για να βρούμε το σημείο που υπολογίζεται η τιμή VaR, πολλαπλασιάζουμε το πλήθος των αποδόσεων με το $(1-\alpha)$. Έτσι βλέπουμε πως

για την μετοχή που εξετάζουμε και για επίπεδο εμπιστοσύνης 95%, χρειαζόμαστε την τιμή ανάμεσα στη 12^η και τη 13^η θέση οπότε επιλέγουμε τη δεύτερη.

	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
		A/A	ΑΠΟΔΟΣΗ (SORTED)							
1		1	-6,89%							
2		2	-5,26%				ΠΛΗΘΟΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΩΝ:	250		
3		3	-4,48%						ΘΕΣΗ	
4		4	-3,75%				VAR (95%) :	-2,83%	12,5	
5		5	-3,38%				VAR (99%) :	-4,48%	2,5	
6		6	-3,37%							
7		7	-3,28%							
8		8	-3,16%							
9		9	-3,09%							
10		10	-3,08%							
11		11	-2,90%							
12		12	-2,88%							
13		13	-2,83%							
14		14	-2,64%							
15		15	-2,54%							
16		16	-2,51%							
17		17	-2,48%							
18										

Εικόνα 8.2: Μορφή αποδόσεων σε αύξουσα ταξινόμηση και σημείο υπολογισμού VaR με επίπεδο εμπιστοσύνης 95% και 99%

Αντίστοιχα για επίπεδο εμπιστοσύνης 99%, προκύπτει η θέση ανάμεσα στη 2^η και την 3^η, οπότε επιλέγουμε την τελευταία. Αυτό σημαίνει πως στην περίπτωση του 95%, η τιμή VaR ισούται με 2,83% της συνολικής αξίας της επένδυσής μας. Εάν επιθυμούμε να έχουμε επίπεδο εμπιστοσύνης 99%, η τιμή VaR διαμορφώνεται σε 4,48% της συνολικής επένδυσής μας. Φυσικά οφείλουμε να τονίσουμε πως η τιμή VaR και στις δύο περιπτώσεις αναφέρεται σε 250 ημέρες συναλλαγών ή συμβατικά σε ένα έτος.

8.3.2 Αναλυτική μέθοδος

Για τον υπολογισμό της τιμής VaR με την αναλυτική μέθοδο θα πρέπει να υπολογίσουμε το γινόμενο της μεταβλητότητας της μετοχής επί την αντίστροφη τιμή της αθροιστικής κανονικής κατανομής για το επιθυμητό επίπεδο εμπιστοσύνης. Φυσικά για τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση, αναφερόμαστε πάντοτε σε κανονική κατανομή. Αρχικά υπολογίζουμε τη διακύμανση της μετοχής μέσω της συνάρτησης var.s για το σύνολο των αποδόσεων μας. Για να έχουμε

την ετήσια διακύμανση, πολλαπλασιάζουμε με το 252, τον αριθμό των ημερών των συναλλαγών του έτους. Η μεταβλητότητα (ετήσια) είναι προφανώς η τετραγωνική ρίζα του προηγούμενου αποτελέσματος και υπολογίστηκε σε 0,26738. Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση `normsinv` για να λάβουμε την αντίστροφη τιμή της τυπικής κανονικής κατανομής για το επίπεδο εμπιστοσύνης που επιθυμούμε. Όπως ήταν αναμενόμενο από τη θεωρία, για 95% ισούται με 1,644 (περίπου 1,65) και για 99% είναι 2,326 (περίπου 2,33).

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1	ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ	ΚΛΕΙΣΙΜΟ (€)	ΑΠΟΔΟΣΗ												
2	Dec 30, 2019	49,37	-0,94%			ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ									
3	Dec 27, 2019	49,84	0,12%			0,00049026									
4	Dec 23, 2019	49,78	-0,38%												
5	Dec 20, 2019	49,97	0,12%												
6	Dec 19, 2019	49,91	-0,80%			ΠΛΗΘΟΣ ΗΜΕΡΩΝ ΠΡΟΒΛΕΨΗΣ									
7	Dec 18, 2019	50,31	-1,45%			1									
8	Dec 17, 2019	51,05	0,37%												
9	Dec 16, 2019	50,86	0,45%												
10	Dec 13, 2019	50,63	1,42%												
11	Dec 12, 2019	49,92	0,87%												
12	Dec 11, 2019	49,49	1,50%			ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗ (ΕΤΗΣΙΑ)									
13	Dec 10, 2019	48,76	-0,61%			0,071492108									
14	Dec 09, 2019	49,06	-0,81%												
15	Dec 06, 2019	49,46	0,41%			ΜΕΤΑΒΛΗΤΟΤΗΤΑ (ΕΤΗΣΙΑ)									
16	Dec 05, 2019	49,26	-0,69%			0,267380082									
17	Dec 04, 2019	49,6	0,73%												
18	Dec 03, 2019	49,24	-1,22%			ΕΠΙΠΕΔΟ ΕΜΠΙΣΤΟΣΥΝΗΣ				ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΤΙΜΗ ΚΑΝΟΝΙΚΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ		VAR			
19	Dec 02, 2019	49,85	-2,64%			95%				1,644854		0,027705			
20	Nov 29, 2019	51,2	-1,46%			99%				2,326348		0,039184			
21	Nov 28, 2019	51,96	-0,90%												
22	Nov 27, 2019	52,43	-0,17%												
23	Nov 26, 2019	52,52	-0,44%												
24	Nov 25, 2019	52,75	1,38%												
25	Nov 22, 2019	52,03	1,96%												
26	Nov 21, 2019	51,03	1,86%												
27	Nov 20, 2019	50,1	-0,12%												
28	Nov 19, 2019	50,16	-0,14%												
29	Nov 18, 2019	50,23	-0,89%												
30	Nov 15, 2019	50,68	-0,90%												

Εικόνα 8.3: Υπολογισμός VaR μέσω της αναλυτικής μεθόδου με επίπεδο εμπιστοσύνης 95% και 99%

Η τιμή VaR ισούται με το γινόμενο της μεταβλητότητας με την αντίστροφη τιμή της τυπικής κανονικής κατανομής. Αυτή είναι η ετήσια τιμή VaR, η οποία μπορεί να αναχθεί στον επιθυμητό χρονικό ορίζοντα πολλαπλασιαζόμενη με την τετραγωνική ρίζα του πηλίκου των επιθυμητών ημερών προς τις συμβατικές ημέρες συναλλαγών του έτους (252). Έτσι από τα δεδομένα μας, για επίπεδο εμπιστοσύνης 95% και χρονικό ορίζοντα μίας ημέρας η τιμή VaR ισούται με 0,0277 ή 2,77% της αξίας του χαρτοφυλακίου. Αντίστοιχα για επίπεδο εμπιστοσύνης 99% και τον ίδιο χρονικό ορίζοντα, η τιμή ανέρχεται σε 0,03918 ή 3,92%.

8.3.3 Monte Carlo

Για την εφαρμογή της μεθόδου Monte Carlo, στην ουσία πρέπει να προσομοιώσουμε μια σειρά από πιθανές αποδόσεις για τη μετοχή μας. Αυτό μπορούμε να το επιτύχουμε χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `norm.inv` του `excel`, η οποία μας παράγει τυχαίες αποδόσεις αφού της ορίσουμε την επιθυμητή πιθανότητα, τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση της κατανομής μας. Όσον αφορά την πιθανότητα, ζητούμε από το πρόγραμμα να παράγει τυχαίους αριθμούς θέτοντας τιμή `rand()`. Η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση έχουν υπολογιστεί στα προηγούμενα βήματα.

Με αυτόν τον τρόπο δημιουργούμε μια σειρά 250 τιμών, η οποία περιέχει πιθανές αλλά τυχαίες αποδόσεις. Κάθε φορά που ζητούμε από το πρόγραμμα να κάνει υπολογισμό των συναρτήσεων στην καρτέλα, παίρνουμε μια νέα σειρά τιμών. Μια τυχαία περίπτωση απεικονίζεται στον πίνακα 5 του παραρτήματος. Στη συνέχεια θα πρέπει να κατατάξουμε αυτές τις τιμές σε αύξουσα διάταξη και να υπολογίσουμε τη θέση που μας ενδιαφέρει ανάλογα με το ποσοστό εμπιστοσύνης ή εναλλακτικά να επισπεύσουμε τη διαδικασία χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `percentile` του `excel`. Αυτή η συνάρτηση μας δίνει τη δυνατότητα να ορίσουμε ένα σύνολο τιμών και το επιθυμητό εκατοστημόριο, ώστε να μας δώσει τη ζητούμενη τιμή. Τα επιθυμητά εκατοστημόρια που ορίζουμε είναι 95% και 99% για τα αντίστοιχα επίπεδα εμπιστοσύνης. Έτσι καταλήγουμε στις τιμές $VaR_{95\%}$ και $VaR_{99\%}$, οι οποίες αναφέρονται στις 250 τυχαίες αποδόσεις.

Όπως έχει αναφερθεί και στη θεωρητική παρουσίαση της μεθόδου, η ακρίβεια της αυξάνεται όσο περισσότερες φορές επαναληφθεί ο υπολογισμός. Σε αυτήν την περίπτωση, ο μέσος όρος τείνει να σταθεροποιηθεί γύρω από μια τιμή, την οποία και δεχόμαστε ως τιμή VaR . Για τον υπολογισμό μας, έγινε χρήση των πινάκων δεδομένων του `excel`, ώστε να γίνει 1000 φορές επανάληψη της διαδικασίας. Ο μέσος όρος που προέκυψε για επίπεδο εμπιστοσύνης 95% ήταν της τάξης του 0,027708371, ενώ για 99% ήταν 0,038276899.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ	ΚΛΕΙΣΙΜΟ (€)	ΑΠΟΔΟΣΗ	Monte Carlo		ΑΞΙΑ ΕΠΕΝΔΥΣΗΣ:	#####			1000 ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΙΣ		
2	Dec 30, 2019	49,37	-0,0094301766	0,003950396						95%		99%
3	Dec 27, 2019	49,84	0,0012053033	0,011944437	ΠΛΗΘΟΣ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ:	250				0,0279606898		0,033444687
4	Dec 23, 2019	49,78	-0,0038022814	0,000502543						0,025692519	1	0,035809801
5	Dec 20, 2019	49,97	0,0012021639	0,009593446						0,025336708	2	0,03914983
6	Dec 19, 2019	49,91	-0,0079507056	0,027729198						0,027445073	3	0,043569318
7	Dec 18, 2019	50,31	-0,0144955926	-0,010969713						0,029681129	4	0,043663414
8	Dec 17, 2019	51,05	0,0037357452	0,029981404						0,027601835	5	0,037013255
9	Dec 16, 2019	50,86	0,0045427612	-0,006621374						0,029540578	6	0,03833638
10	Dec 13, 2019	50,63	0,0142227564	0,001227333						0,029521306	7	0,034642304
11	Dec 12, 2019	49,92	0,0086886240	0,006158527						0,024460064	8	0,044972825
12	Dec 11, 2019	49,49	0,0149712879	-0,015232042						0,027781488	9	0,030011967
13	Dec 10, 2019	48,76	-0,0061149613	0,0080197						0,025879152	10	0,035500897
14	Dec 09, 2019	49,06	-0,0080873433	-0,015625352						0,025770029	11	0,039228432
15	Dec 06, 2019	49,46	0,0040600893	-0,013795646						0,033393294	12	0,040408149
16	Dec 05, 2019	49,26	-0,0068548387	-0,007730561						0,027049735	13	0,037226995
17	Dec 04, 2019	49,6	0,0073111292	-0,005319856						0,030142921	14	0,044497276
18	Dec 03, 2019	49,24	-0,0122367101	-0,005422599						0,028944484	15	0,037681625
19	Dec 02, 2019	49,85	-0,0263671875	-0,009754282						0,026023126	16	0,038412839
20	Nov 29, 2019	51,2	-0,0146266359	0,001410757						0,026119285	17	0,034691841
21	Nov 28, 2019	51,96	-0,0089643334	-0,004041492						0,031154582	18	0,032417036
22	Nov 27, 2019	52,43	-0,0017136329	0,018720515						0,029235945	19	0,039467682
23	Nov 26, 2019	52,52	-0,0043601896	0,002652048						0,026865412	20	0,039709267
24	Nov 25, 2019	52,75	0,0138381703	-0,002481585						0,026897692	21	0,038003971
25	Nov 22, 2019	52,03	0,0195963159	-0,008266308						0,023994395	22	0,035893498
26	Nov 21, 2019	51,03	0,0185628743	0,003010127						0,032245779	23	0,042140463
27	Nov 20, 2019	50,1	-0,0011961722	-0,033110629						0,028475959	24	0,040447039
28	Nov 19, 2019	50,16	-0,0013935895	-0,022477503						0,025715675	25	0,039528518

Εικόνα 8.4:Μορφή φύλλου υπολογισμού με τη μέθοδο Monte Carlo

8.4 Χαρτοφυλάκιο

Για τον υπολογισμό VaR σε χαρτοφυλάκιο διατηρήθηκαν οι τιμές της μετοχής της Daimler AG και προστέθηκαν οι τιμές της Toyota Motor Company, της Nissan Motor Company, της Marriott Vacations και της Advanced Micro Devices (AMD). Συνεπώς το χαρτοφυλάκιο διαθέτει μετοχές 3 αυτοκινητοβιομηχανιών, μιας αλυσίδας ξενοδοχείων και μιας εταιρείας που ειδικεύεται σε τεχνολογία ηλεκτρονικών υπολογιστών. Έτσι το μείγμα κρίνεται ετερόκλητο και καλύπτει ευρύ φάσμα εφαρμογών και συμφερόντων. Το χρονικό διάστημα των δεδομένων είναι το ίδιο για όλες τις μετοχές.

Όπως και στην περίπτωση της μοναδικής θέσης, η πρώτη εργασία είναι ο έλεγχος των δεδομένων και η εξασφάλιση πως δεν υπάρχουν κενά πεδία ή διπλές εγγραφές. Στη συνέχεια υπολογίζονται οι αποδόσεις όλων των μετοχών, οι οποίες εκφράζονται ως ποσοστά. Προφανώς οι αρνητικές τιμές σηματοδοτούν πτώση στην απόδοση της μετοχής ενώ οι θετικές αύξηση. Για το χαρτοφυλάκιο θεωρούμε την υποθετική σύσταση αξιών: 50% Daimler, 15% Toyota, 5% Nissan, 20% Marriott και 10% AMD.

8.4.1 Ιστορική προσομοίωση

Για τον υπολογισμό VaR μέσω της ιστορικής προσομοίωσης, αρχικά υπολογίζουμε για κάθε ημέρα το γινόμενο της κάθε απόδοσης επί το ποσοστό της μετοχής στο σύνολο της αξίας του χαρτοφυλακίου. Το άθροισμα των γινομένων μας δίνει την απόδοση του χαρτοφυλακίου για την ημέρα. Εφαρμόζοντας τη συνάρτηση percentile στο σύνολο των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου και ορίζοντας ως όριο το επίπεδο εμπιστοσύνης, λαμβάνουμε την τιμή VaR. Για επίπεδο εμπιστοσύνης 95% υπολογίζεται σε 0,02054 ή 2,05% της αξίας του χαρτοφυλακίου και για 99% ισούται με 0,3063 ή 3,06%.

H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
	TOYOTA MOTOR COMPANY	NISSAN MOTOR COMPANY	MARRIOTT VACATIONS	ADVANCED MICRO DEVICES (AMD)						
DAIMLER AG										
	ΑΠΟΔΟΣΗ					ΑΠΟΔΟΣΗ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ				
	-0,94%	-0,47%	-0,43%	-0,71%	-1,43%		-0,85%			ΣΥΣΤΑΣΗ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ
	0,12%	-0,18%	0,00%	0,19%	-0,97%		-0,02%			DAIMLER: 50%
	-0,38%	0,13%	-2,36%	1,07%	0,19%		-0,05%			TOYOTA: 15%
	0,12%	-0,44%	-0,67%	-0,14%	2,38%		0,17%			NISSAN: 5%
	-0,80%	-0,01%	-0,83%	-0,02%	2,97%		-0,15%			MARRIOTT: 20%
	-1,45%	-0,55%	-1,15%	0,40%	3,08%		-0,48%			AMD: 10%
	0,37%	0,26%	-1,06%	0,54%	1,25%		0,41%			
	0,45%	-0,27%	0,65%	0,95%	-1,10%		0,30%			
	1,42%	0,17%	-1,21%	0,36%	0,99%		0,85%			
	0,87%	0,30%	0,24%	0,02%	2,92%		0,79%			VAR (95%) 0,020546
	1,50%	0,35%	0,08%	0,10%	-3,38%		0,49%			VAR(99%) 0,30631
	-0,61%	-0,01%	0,32%	0,32%	7,90%		0,56%			
	-0,81%	0,31%	-0,97%	0,59%	0,08%		-0,28%			
	0,41%	-0,50%	-1,27%	1,07%	1,31%		0,41%			
	-0,69%	-0,62%	1,21%	-0,15%	-1,77%		-0,58%			

Εικόνα 8.5: Φύλλο υπολογισμού VaR χαρτοφυλακίου μέσω ιστορικής προσομοίωσης

Για την εφαρμογή αυτής της μεθόδου θα πρέπει να σημειωθούν κάποια στοιχεία. Πρώτον δεν έγινε υπολογισμός των συσχετίσεων μεταξύ των μετοχών διότι εμπεριέχονται στις χρονοσειρές των δεδομένων. Δηλαδή η μεταβολή της κάθε μετοχής έχει ήδη επηρεάσει την απόδοση των υπολοίπων. Δεύτερον, έγινε η παραδοχή πως η σύσταση του χαρτοφυλακίου παραμένει σταθερή σε ολόκληρο το φάσμα της περιόδου, ενώ πρακτικά γνωρίζουμε ότι όταν αλλάζει η τιμή μιας μετοχής, μεταβάλλεται το ποσοστό της αξίας στο συνολικό χαρτοφυλάκιο. Η έκταση της επίπτωσης αυτών των παραδοχών μπορεί να αξιολογηθεί εάν συγκριθούν τα αποτελέσματα με τα αντίστοιχα των επομένων μεθόδων.

8.4.2 Αναλυτική μέθοδος

Για την εφαρμογή της αναλυτικής μεθόδου υπολογισμού VaR χαρτοφυλακίου θα χρησιμοποιήσουμε πίνακες. Αρχικά δημιουργούμε τον πίνακα διακύμανσης, οποίος είναι ένας πέντε επί πέντε διαγώνιος πίνακας με τις τυπικές αποκλίσεις στη διαγώνιο. Έπειτα δημιουργούμε τον πίνακα συσχέτισης, ο οποίος είναι διπλής εισόδου και προκύπτει από τις συσχετίσεις των μετοχών. Για τον υπολογισμό των συσχετισμών χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση correl στα δεδομένα των αποδόσεων. Πολλαπλασιάζοντας τον πρώτο με τον δεύτερο πίνακα προκύπτει ο πίνακας συσχέτισης-διακύμανσης.

DAIMLER	0,016835811	0	0	0	0
TOYOTA	0	0,008518432	0	0	0
NISSAN	0	0	0,013437153	0	0
MARRIOTT	0	0	0	0,019712616	0
AMD	0	0	0	0	0,033985256

Πίνακας 8.1: Πίνακας διακύμανσης

	DAIMLER	TOYOTA	NISSAN	MARRIOTT	AMD
DAIMLER	1	0,168137427	0,142367963	0,292363656	0,148446273
TOYOTA	0,168137427	1	0,36767054	0,377630235	0,370520713
NISSAN	0,142367963	0,36767054	1	0,252654661	0,212476774
MARRIOTT	0,292363656	0,377630235	0,252654661	1	0,372438905
AMD	0,148446273	0,370520713	0,212476774	0,372438905	1

Πίνακας 8.2: Πίνακας συσχέτισης

0,016835811	0,00283073	0,00239688	0,004922179	0,002499213
0,001432267	0,008518432	0,003131976	0,003216817	0,003156256
0,00191302	0,004940445	0,013437153	0,003394959	0,002855083
0,005763253	0,00744408	0,004980484	0,019712616	0,007341745
0,005044985	0,012592241	0,007221078	0,012657432	0,033985256

Πίνακας 8.3: Πίνακας συσχέτισης-διακύμανσης

Το επόμενο βήμα είναι η δημιουργία του πίνακα διακύμανσης-συνδιακύμανσης. Για να επιτευχθεί αυτό πολλαπλασιάζουμε τον πίνακα συσχέτισης-διακύμανσης με τον πίνακα διακύμανσης. Το αποτέλεσμα φαίνεται στον πίνακα 8.4.

0,000283445	2,41134E-05	3,22072E-05	9,7029E-05	8,49364E-05
2,41134E-05	7,25637E-05	4,20848E-05	6,34119E-05	0,000107266
3,22072E-05	4,20848E-05	0,000180557	6,69235E-05	9,70307E-05
9,7029E-05	6,34119E-05	6,69235E-05	0,000388587	0,000249511
8,49364E-05	0,000107266	9,70307E-05	0,000249511	0,001154998

Πίνακας 8.4: Πίνακας διακύμανσης-συνδιακύμανσης

Για να συνυπολογίσουμε τη σύσταση του χαρτοφυλακίου, δημιουργούμε έναν πίνακα γραμμή (1x5), όπου εισάγουμε τα ποσοστά της κάθε μετοχής στην αξία του χαρτοφυλακίου. Αυτόν τον πίνακα γραμμή πολλαπλασιάζουμε με τον πίνακα διακύμανσης-συνδιακύμανσης ώστε να προκύψει ο σταθμισμένος πίνακας διακύμανσης-συνδιακύμανσης. Προφανώς από τις ιδιότητες πολλαπλασιασμού των πινάκων, ο τελευταίος θα είναι πίνακας γραμμή (1x5).

0,000174849	4,84545E-05	5,4532E-05	0,000164041	0,000228812
-------------	-------------	------------	-------------	-------------

Πίνακας 8.5: Σταθμισμένος πίνακας διακύμανσης-συνδιακύμανσης

Η τελευταία πράξη με πίνακες είναι ο πολλαπλασιασμός του σταθμισμένου πίνακα διακύμανσης-συνδιακύμανσης με τη σύσταση του χαρτοφυλακίου αλλά εκφρασμένη σε πίνακα στήλη (5x1). Με αυτόν τον τρόπο καταλήγουμε στη διακύμανση του χαρτοφυλακίου μας, η οποία ισούται με 0,000153109. Για να λάβουμε την τυπικά απόκλιση του χαρτοφυλακίου μας υπολογίσουμε την τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης, η οποία είναι 0,012373709. Όπως και προηγουμένως, για να υπολογίσουμε την τιμή VaR με το επιθυμητό επίπεδο εμπιστοσύνης πολλαπλασιάζουμε την αντίστροφη τιμή της κατανομής με την τυπική απόκλιση. Με αυτόν τον τρόπο καταλήγουμε πως για επίπεδο εμπιστοσύνης 95% η τιμή VaR είναι 0,02035 ή 2,04%, ενώ για 99% είναι 0,02878 ή 2,88%. Η πρώτη τιμή παρατηρούμε πως είναι σχεδόν ίδια με το αποτέλεσμα της ιστορικής προσομοίωσης ενώ η δεύτερη είναι ελαφρώς μικρότερη από την αντίστοιχη της προηγούμενης μεθόδου.

8.4.3 Monte Carlo

Η εύρεση της τιμής VaR με τη μέθοδο Monte Carlo ξεκινάει με τον υπολογισμό των συνδιακυμάνσεων των μετοχών. Για να το επιτύχουμε αυτό χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση covariance.s του excel. Η τιμή που βρίσκεται πολλαπλασιάζεται με 252. Ο υπολογισμός γίνεται ανά ζεύγος μετοχών μέχρι να εξαντληθούν οι πιθανοί συνδυασμοί. Το ενδιαφέρον εύρημα από αυτήν τη

διαδικασία είναι πως η μετοχή της Daimler και της Toyota παρουσιάζουν αρνητική συνδιακύμανση. Όλες οι τιμές παρατίθενται στον πίνακα 8.6.

	DAIMLER	TOYOTA	NISSAN	MARRIOTT	AMD
DAIMLER	1				
TOYOTA	-0,00597329	1			
NISSAN	0,008083561	0,01061977	1		
MARRIOTT	0,024334224	0,01577758	0,016882245	1	
AMD	0,021107071	0,02665675	0,024203431	0,062148	1

Πίνακας 8.6: Συνδιακυμάνσεις μετοχών χαρτοφυλακίου

Η διακύμανση της κάθε μετοχής για ολόκληρο το έτος προκύπτει από τη συνάρτηση var.s για τις αποδόσεις της επί 252 και η τυπική της απόκλιση ισούται με την τετραγωνική της ρίζα. Οι τυπικές αποκλίσεις για όλες τις μετοχές του χαρτοφυλακίου φαίνονται στον πίνακα 8.7. Για να υπολογίσουμε την αναμενόμενη μεταβλητότητα του χαρτοφυλακίου θα χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση:

$$\sigma_x = \sqrt{\sum P_i^2 \cdot \sigma_i^2 + 2 \cdot \sum_i \sum_j P_i \cdot P_j \cdot \rho_{ij}} \quad (8.1)$$

όπου: P το ποσοστό της κάθε μετοχής, σ η τυπική της απόκλιση και ρ η τιμή της συνδιακύμανσης της μετοχής i και j. Με αυτήν τη μέθοδο καταλήγουμε σε τιμή αναμενόμενης μεταβλητότητας ίση με 0,183887062 για το σύνολο του χαρτοφυλακίου.

DAIMLER	0,267759079
TOYOTA	0,134937896
NISSAN	0,214824879
MARRIOTT	0,312154756
AMD	0,033226772

Πίνακας 8.7: Τυπικές αποκλίσεις μετοχών χαρτοφυλακίου

Για να εφαρμόσουμε τη μέθοδο Monte Carlo θα χρειαστούμε μια τιμή εκκίνησης, βάσει της οποίας θα πάρουμε μια τυχαία σειρά τελικών συνολικών αξιών του χαρτοφυλακίου. Για να το επιτύχουμε αυτό θα εφαρμόσουμε μια μορφή της εξίσωσης Black-Scholes, όπου εισάγουμε την απόδοση μηδενικού κινδύνου, το χρονικό ορίζοντα που θέλουμε να αξιολογήσουμε, την αναμενόμενη μεταβλητότητα και την αντίστροφη μιας τυχαίας τιμής της αθροιστικής κανονικής

κατανομής. Μια τυχαία τελική αξία του χαρτοφυλακίου ισούται με 0,99917. Επαναλαμβάνουμε τον υπολογισμό χίλιες φορές και για λάβουμε την τιμή VaR, αφαιρούμε από τη μονάδα το αποτέλεσμα της συνάρτησης `percentile.inc` με πίνακα ορισμού τα αποτελέσματα των χιλίων επαναλήψεων και σημείο διακοπής το επίπεδο εμπιστοσύνης. Η ημερήσια τιμή VaR για επίπεδο εμπιστοσύνης 95% προκύπτει 0,01938 ή 1,94%, ενώ για 99% λαμβάνουμε 0,02721 ή 2,72%.

9. Συμπεράσματα και προτάσεις

9.1 Αξιολόγηση αποτελεσμάτων

9.1.1 Μοναδική θέση

Από τις τρεις μεθόδους που χρησιμοποιήθηκαν για την τιμή VaR επένδυσης μιας μετοχής προκύπτει πως τα αποτελέσματα αναλυτικής μεθόδου και Monte Carlo είναι αρκετά κοντά. Στην περίπτωση του επιπέδου εμπιστοσύνης 95% μάλιστα, ταυτίζονται. Αυτό προβλέπεται και από την θεωρία όταν δεν έχουμε δικαιώματα προαίρεσης. Μάλιστα σε αυτού του είδους τις περιπτώσεις προτείνεται η σύγκριση των αποτελεσμάτων ως τρόπος ελέγχου ορθότητας τους, αφού εάν δεν συγκλίνουν οι τιμές έχει γίνει λάθος στην εφαρμογή της μίας ή και των δύο μεθόδων (Best, 1998).

Το αποτέλεσμα της ιστορικής προσομοίωσης για επίπεδο εμπιστοσύνης 95% αλλά και 99% είναι υψηλότερο από το αντίστοιχο των υπολοίπων μεθόδων. Αυτό ήταν αναμενόμενο από την παρατήρηση των περιγραφικών στατιστικών στοιχείων που προέκυψαν για τα δεδομένα μας αλλά και την γραφική αναπαράσταση της κατανομής, όπου ήταν εμφανές πως παρουσιάζονταν αρνητική λοξότητα. Συνεπώς ήταν αναμενόμενο να υπάρχουν περισσότερες τιμές στην αριστερή ουρά της κατανομής και ως εκ τούτου να εμφανίζεται υψηλότερη τιμή VaR. Για επίπεδο εμπιστοσύνης 99% αυτό το φαινόμενο παίζει ακόμη μεγαλύτερη σημασία, οπότε και εμφανίζεται η υψηλότερη τιμή VaR για όλες τις μεθόδους και για τα δύο επίπεδα εμπιστοσύνης, ίση με 4,48%.

9.1.2 Χαρτοφυλάκιο

Στην περίπτωση του χαρτοφυλακίου βλέπουμε πρώτα πως η ένταξη στην επένδυση άλλων μετοχών οδήγησε σε μείωση της τιμής VaR. Πετύχαμε δηλαδή διασπορά του κινδύνου. Αυτό συνέβη διότι οι συσχετίσεις των μετοχών μας ήταν χαμηλότερες της μονάδας (Best, 1998).

Αυτό που πρέπει να σημειωθεί, είναι πως αποδεικνύεται ότι κατά την εφαρμογή της ιστορικής μεθόδου, οι συσχετίσεις μεταξύ των μετοχών αποτυπώνονται, αφού τα αποτελέσματα για επίπεδο εμπιστοσύνης 95%

συγκλίνουν με αυτά της παραμετρικής μεθόδου. Αναφερόμαστε στα αποτελέσματα της παραμετρικής μεθόδου διότι σε αυτήν οι συσχετίσεις παίζουν μεγάλο ρόλο στον υπολογισμό μέσω του πίνακα συσχετίσεων που χρησιμοποιείται. Μάλιστα σύμφωνα με τη θεωρία, το πλεονέκτημα της μεθόδου της συνδιακύμανσης είναι πως μπορεί και αποτυπώνει τις θετικές επιπτώσεις της διαφοροποίησης του χαρτοφυλακίου (Choudhry, 2013). Η διαφορά μεταξύ των αποτελεσμάτων των δύο μεθόδων για επίπεδο εμπιστοσύνης 99%, ανέρχεται μόλις σε 6,25% γεγονός που συγκρινόμενο με την πολυπλοκότητα και τον όγκο υπολογισμών που παρουσιάζει η αναλυτική μέθοδος, κρίνεται αμελητέα.

Η μέθοδος Monte Carlo στην περίπτωση του χαρτοφυλακίου μας δίνει τις χαμηλότερες τιμές και για τα δύο επίπεδα εμπιστοσύνης από όλες τις μεθόδους, χωρίς όμως να απέχουν τόσο ώστε να αμφισβητείται η ορθότητα τους. Το γεγονός πως λαμβάνει υπόψη τις συνδιακυμάνσεις των μετοχών αλλά και πως επαναλαμβάνεται 1000 φορές ο υπολογισμός, μας οδηγεί στο συμπέρασμα πως είναι η ασφαλέστερη προσέγγιση αν και η πιο χρονοβόρα και απαιτητική από πλευρά υπολογιστικής ισχύος.

9.2 Προτάσεις

Σε αυτήν την εργασία έγινε μια εκτενής παρουσίαση και επεξήγηση της θεωρίας της αξίας σε κίνδυνο. Επίσης παρουσιάστηκαν οι τρεις βασικές μέθοδοι υπολογισμού της και έγινε προσπάθεια πρακτικών υπολογισμών πάνω σε υποθετικό χαρτοφυλάκιο. Μια ενδιαφέρουσα προσέγγιση για μελλοντική εργασία θα ήταν η επέκταση των πρακτικών υπολογισμών ώστε να περιέχονται στο χαρτοφυλάκιο δικαιώματα προαίρεσης (options) και η σύγκριση των τιμών VaR.

Μια δεύτερη προσέγγιση θα ήταν να γίνουν περισσότεροι υπολογισμοί αλλάζοντας τη σύσταση του χαρτοφυλακίου. Με αυτόν τον τρόπο θα μπορούσαμε να δούμε τις επιπτώσεις της διαφοροποίησης του χαρτοφυλακίου στην τιμή VaR και κατ' επέκταση στη διασπορά του κινδύνου. Ιδίως η εύρεση μετοχών που έχουν μεταξύ τους αρνητική συσχέτιση θα μπορούσε να επαληθεύσει τη θεωρία που προβλέπει πως για τιμή -1 έχουμε την μικρότερη VaR (Best, 1998).

Επίσης από καθαρά πρακτικής απόψεως θα μπορούσε να αυξηθεί το πλήθος των επαναλήψεων των υπολογισμών στη μέθοδο Monte Carlo. Σύμφωνα με τη θεωρία 1000 επαναλήψεις οδηγούν στην ομαλοποίηση των αποτελεσμάτων ενώ από τις 10000 και πάνω έχουμε πολύ καλή σύγκλιση στην συνεχή κατανομή (Jorion, 2007). Συνεπώς θα είχε αρκετό ενδιαφέρον ο υπολογισμός με 10000 επαναλήψεις και στη συνέχεια σύγκριση των αποτελεσμάτων.

Ακόμη θα είχε ενδιαφέρον η εφαρμογή stress tests πάνω στα υποθετικά χαρτοφυλάκια και η εξέταση των αποτελεσμάτων. Με αυτόν τον τρόπο θα μπορούσαμε να κάνουμε μια πληρέστερη αξιολόγηση του κινδύνου που αντιμετωπίζει ένα χαρτοφυλάκιο. Όπως είναι γνωστό η μέθοδος VaR μπορεί με δεδομένο βαθμό βεβαιότητας να μας πληροφορήσει για τις μέγιστες απώλειες μέχρι ενός σημείου. Ως εκ τούτου έχει ενδιαφέρον να δημιουργηθούν σενάρια που θα εξετάσουν τις επιπτώσεις πέραν αυτού του σημείου.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ	ΚΛΕΙΣΙΜΟ (€)	ΑΠΟΔΟΣΗ
Dec 30, 2019	49,37	-0,94%
Dec 27, 2019	49,84	0,12%
Dec 23, 2019	49,78	-0,38%
Dec 20, 2019	49,97	0,12%
Dec 19, 2019	49,91	-0,80%
Dec 18, 2019	50,31	-1,45%
Dec 17, 2019	51,05	0,37%
Dec 16, 2019	50,86	0,45%
Dec 13, 2019	50,63	1,42%
Dec 12, 2019	49,92	0,87%
Dec 11, 2019	49,49	1,50%
Dec 10, 2019	48,76	-0,61%
Dec 09, 2019	49,06	-0,81%
Dec 06, 2019	49,46	0,41%
Dec 05, 2019	49,26	-0,69%
Dec 04, 2019	49,6	0,73%
Dec 03, 2019	49,24	-1,22%
Dec 02, 2019	49,85	-2,64%
Nov 29, 2019	51,2	-1,46%
Nov 28, 2019	51,96	-0,90%
Nov 27, 2019	52,43	-0,17%
Nov 26, 2019	52,52	-0,44%
Nov 25, 2019	52,75	1,38%
Nov 22, 2019	52,03	1,96%
Nov 21, 2019	51,03	1,86%
Nov 20, 2019	50,1	-0,12%
Nov 19, 2019	50,16	-0,14%
Nov 18, 2019	50,23	-0,89%
Nov 15, 2019	50,68	-0,90%
Nov 14, 2019	51,14	-4,48%
Nov 13, 2019	53,54	-0,70%
Nov 12, 2019	53,92	0,92%
Nov 11, 2019	53,43	-0,04%
Nov 08, 2019	53,45	-0,63%
Nov 07, 2019	53,79	2,24%
Nov 06, 2019	52,61	-1,33%
Nov 05, 2019	53,32	0,32%
Nov 04, 2019	53,15	0,85%
Nov 01, 2019	52,7	0,55%
Oct 31, 2019	52,41	-1,30%
Oct 30, 2019	53,1	-0,65%
Oct 29, 2019	53,45	-0,19%

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ	ΚΛΕΙΣΙΜΟ (€)	ΑΠΟΔΟΣΗ
Oct 28, 2019	53,55	1,27%
Oct 25, 2019	52,88	1,58%
Oct 24, 2019	52,06	3,25%
Oct 23, 2019	50,42	1,55%
Oct 22, 2019	49,65	0,91%
Oct 21, 2019	49,2	1,61%
Oct 18, 2019	48,42	-1,45%
Oct 17, 2019	49,13	0,68%
Oct 16, 2019	48,8	1,56%
Oct 15, 2019	48,05	2,10%
Oct 14, 2019	47,06	0,00%
Oct 11, 2019	47,06	3,34%
Oct 10, 2019	45,54	2,57%
Oct 09, 2019	44,4	1,93%
Oct 08, 2019	43,56	-0,57%
Oct 07, 2019	43,81	0,00%
Oct 04, 2019	43,81	-0,57%
Oct 02, 2019	44,06	-2,46%
Oct 01, 2019	45,17	-0,99%
Sep 30, 2019	45,62	0,53%
Sep 27, 2019	45,38	1,14%
Sep 26, 2019	44,87	-1,17%
Sep 25, 2019	45,4	-0,15%
Sep 24, 2019	45,47	-1,67%
Sep 23, 2019	46,24	-2,34%
Sep 20, 2019	47,35	-0,15%
Sep 19, 2019	47,42	0,13%
Sep 18, 2019	47,36	0,30%
Sep 17, 2019	47,22	-1,73%
Sep 16, 2019	48,05	-1,01%
Sep 13, 2019	48,54	1,63%
Sep 12, 2019	47,76	1,23%
Sep 11, 2019	47,18	0,70%
Sep 10, 2019	46,85	0,86%
Sep 09, 2019	46,45	2,31%
Sep 06, 2019	45,4	0,11%
Sep 05, 2019	45,35	3,14%
Sep 04, 2019	43,97	2,18%
Sep 03, 2019	43,03	1,01%
Sep 02, 2019	42,6	-0,26%
Aug 30, 2019	42,71	1,71%
Aug 29, 2019	41,99	0,67%

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ	ΚΛΕΙΣΙΜΟ (€)	ΑΠΟΔΟΣΗ
Aug 28, 2019	41,71	0,41%
Aug 27, 2019	41,54	0,51%
Aug 26, 2019	41,33	1,50%
Aug 23, 2019	40,72	-3,09%
Aug 22, 2019	42,02	0,14%
Aug 21, 2019	41,96	1,52%
Aug 20, 2019	41,33	-1,52%
Aug 19, 2019	41,97	1,77%
Aug 16, 2019	41,24	1,75%
Aug 15, 2019	40,53	-2,41%
Aug 14, 2019	41,53	-3,08%
Aug 13, 2019	42,85	1,18%
Aug 12, 2019	42,35	-0,54%
Aug 09, 2019	42,58	-2,90%
Aug 08, 2019	43,85	1,25%
Aug 07, 2019	43,31	0,07%
Aug 06, 2019	43,28	-1,50%
Aug 05, 2019	43,94	-2,83%
Aug 02, 2019	45,22	-3,38%
Aug 01, 2019	46,8	-0,21%
Jul 31, 2019	46,9	-0,72%
Jul 30, 2019	47,24	-2,54%
Jul 29, 2019	48,47	0,19%
Jul 26, 2019	48,38	0,25%
Jul 25, 2019	48,26	-1,95%
Jul 24, 2019	49,22	2,46%
Jul 23, 2019	48,04	4,34%
Jul 22, 2019	46,04	1,32%
Jul 19, 2019	45,44	0,13%
Jul 18, 2019	45,38	-1,63%
Jul 17, 2019	46,13	-1,47%
Jul 16, 2019	46,82	0,64%
Jul 15, 2019	46,52	0,39%
Jul 12, 2019	46,34	-0,66%
Jul 11, 2019	46,65	-0,79%
Jul 10, 2019	47,02	-1,57%
Jul 09, 2019	47,77	-1,67%
Jul 08, 2019	48,58	-1,10%
Jul 05, 2019	49,12	0,18%
Jul 04, 2019	49,03	0,02%
Jul 03, 2019	49,02	0,76%
Jul 02, 2019	48,65	-0,33%

Jul 01, 2019	48,81	-0,22%
Jun 28, 2019	48,92	1,30%
Jun 27, 2019	48,29	0,35%
Jun 26, 2019	48,12	1,11%
Jun 25, 2019	47,59	-0,36%
Jun 24, 2019	47,76	-3,75%
Jun 21, 2019	49,62	0,51%
Jun 20, 2019	49,37	0,35%
Jun 19, 2019	49,2	1,11%
Jun 18, 2019	48,66	2,85%
Jun 17, 2019	47,31	-0,23%
Jun 14, 2019	47,42	-1,56%
Jun 13, 2019	48,17	0,17%
Jun 12, 2019	48,09	-0,78%
Jun 11, 2019	48,47	1,83%
Jun 07, 2019	47,6	0,61%
Jun 06, 2019	47,31	-1,54%
Jun 05, 2019	48,05	-1,09%
Jun 04, 2019	48,58	4,14%
Jun 03, 2019	46,65	0,45%
May 31, 2019	46,44	-1,82%
May 30, 2019	47,3	0,15%
May 29, 2019	47,23	-0,94%
May 28, 2019	47,68	-0,04%
May 27, 2019	47,7	0,57%
May 24, 2019	47,43	0,21%
May 23, 2019	47,33	-6,89%
May 22, 2019	50,83	-2,48%
May 21, 2019	52,12	0,19%
May 20, 2019	52,02	-2,51%
May 17, 2019	53,36	-1,19%
May 16, 2019	54	-0,55%
May 15, 2019	54,3	2,94%
May 14, 2019	52,75	1,21%
May 13, 2019	52,12	-3,28%
May 10, 2019	53,89	-3,16%
May 09, 2019	55,65	-2,88%
May 08, 2019	57,3	1,20%
May 07, 2019	56,62	-1,26%
May 06, 2019	57,34	-2,05%
May 03, 2019	58,54	-0,12%
May 02, 2019	58,61	0,46%
Apr 30, 2019	58,34	0,34%

Apr 29, 2019	58,14	-0,27%
Apr 26, 2019	58,3	1,04%
Apr 25, 2019	57,7	-1,27%
Apr 24, 2019	58,44	-1,13%
Apr 23, 2019	59,11	-0,34%
Apr 18, 2019	59,31	2,12%
Apr 17, 2019	58,08	1,98%
Apr 16, 2019	56,95	0,81%
Apr 15, 2019	56,49	-0,32%
Apr 12, 2019	56,67	2,20%
Apr 11, 2019	55,45	0,71%
Apr 10, 2019	55,06	-0,31%
Apr 09, 2019	55,23	-1,32%
Apr 08, 2019	55,97	-0,07%
Apr 05, 2019	56,01	-0,37%
Apr 04, 2019	56,22	1,32%
Apr 03, 2019	55,49	0,98%
Apr 02, 2019	54,95	1,01%
Apr 01, 2019	54,4	4,11%
Mar 29, 2019	52,25	2,27%
Mar 28, 2019	51,09	-0,51%
Mar 27, 2019	51,35	1,91%
Mar 26, 2019	50,39	-0,71%
Mar 25, 2019	50,75	0,50%
Mar 22, 2019	50,5	-1,94%
Mar 21, 2019	51,5	-0,43%
Mar 20, 2019	51,72	-2,16%
Mar 19, 2019	52,86	3,44%
Mar 18, 2019	51,1	-1,10%
Mar 15, 2019	51,67	1,37%
Mar 14, 2019	50,97	0,18%
Mar 13, 2019	50,88	0,63%
Mar 12, 2019	50,56	-0,37%
Mar 11, 2019	50,75	1,34%
Mar 08, 2019	50,08	-0,71%
Mar 07, 2019	50,44	-3,37%
Mar 06, 2019	52,2	-1,34%
Mar 05, 2019	52,91	-1,07%
Mar 04, 2019	53,48	0,38%
Mar 01, 2019	53,28	1,18%
Feb 28, 2019	52,66	-0,42%
Feb 27, 2019	52,88	-0,51%
Feb 26, 2019	53,15	-0,54%
Feb 25, 2019	53,44	2,38%

Feb 22, 2019	52,2	0,17%
Feb 21, 2019	52,11	0,68%
Feb 20, 2019	51,76	2,58%
Feb 19, 2019	50,46	0,12%
Feb 18, 2019	50,4	-0,41%
Feb 15, 2019	50,61	2,66%
Feb 14, 2019	49,3	-1,83%
Feb 13, 2019	50,22	1,70%
Feb 12, 2019	49,38	2,53%
Feb 11, 2019	48,16	0,31%
Feb 08, 2019	48,01	-2,46%
Feb 07, 2019	49,22	-5,26%
Feb 06, 2019	51,95	-1,81%
Feb 05, 2019	52,91	1,42%
Feb 04, 2019	52,17	-1,62%
Feb 01, 2019	53,03	2,65%
Jan 31, 2019	51,66	-0,21%
Jan 30, 2019	51,77	-0,44%
Jan 29, 2019	52	-0,36%
Jan 28, 2019	52,19	-0,72%
Jan 25, 2019	52,57	2,90%
Jan 24, 2019	51,09	1,61%
Jan 23, 2019	50,28	-0,57%
Jan 22, 2019	50,57	-0,30%
Jan 21, 2019	50,72	-0,33%
Jan 18, 2019	50,89	3,98%
Jan 17, 2019	48,94	-1,83%
Jan 16, 2019	49,85	0,83%
Jan 15, 2019	49,44	0,32%
Jan 14, 2019	49,28	0,78%
Jan 11, 2019	48,9	-0,79%
Jan 10, 2019	49,29	0,76%
Jan 09, 2019	48,92	2,99%
Jan 08, 2019	47,5	0,72%
Jan 07, 2019	47,16	0,19%
Jan 04, 2019	47,07	5,11%
Jan 03, 2019	44,78	-1,04%
Jan 02, 2019	45,25	-1,44%
Dec 28, 2018	45,91	

Πίνακας 1: Υπολογισμός αποδόσεων μετοχής

Μέσος	0,000431031
Τυπικό σφάλμα	0,001062667
Διάμεσος	0,001102536
Επικρατούσα τιμή	0
Μέση απόκλιση τετραγώνου	0,016835811
Διακύμανση	0,000283445
Κύρτωση	1,239703844
Ασυμμετρία	-0,213783003
Εύρος	0,119995876
Ελάχιστο	-0,068856974
Μέγιστο	0,051138901
Άθροισμα	0,108188844
Πλήθος	251

Πίνακας 2: Περιγραφικά στατιστικά στοιχεία από την ανάλυση δεδομένων του Excel

ΟΜΑΔΕΣ ΑΠΟΔΟΣΕΩΝ	ΠΛΗΘΟΣ ΚΑΤΑΧΩΡΗΣΕΩΝ
-0,07--0,06	1
-0,06--0,05	1
-0,05--0,04	1
-0,04--0,03	7
-0,03--0,02	13
-0,02--0,01	37
-0,01--8,67361737988404E-18	61
0-0,01	63
0,01-0,02	40
0,02-0,03	18
0,03-0,04	5
0,04-0,05	3
0,05-0,06	1

Πίνακας 31: Δημιουργία συγκεντρωτικού πίνακα ομάδων αποδόσεων

ΤΙΜΗ	ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ
-0,050076403	0,263239373
-0,049672343	0,282810138
-0,049268284	0,303660949
-0,048864224	0,325861284
-0,048460165	0,349483301
-0,048056105	0,37460187
-0,047652046	0,401294584
-0,047247986	0,429641775
-0,046843927	0,459726516
-0,046439867	0,491634612
-0,046035808	0,525454594
-0,045631749	0,561277694
-0,045227689	0,599197812
-0,04482363	0,639311478
-0,04441957	0,681717795
-0,044015511	0,726518379
-0,043611451	0,773817286
-0,043207392	0,823720918
-0,042803332	0,87633793
-0,042399273	0,931779111
-0,041995213	0,990157262
-0,041591154	1,051587053
-0,041187094	1,116184868
-0,040783035	1,184068633
-0,040378975	1,255357638
-0,039974916	1,330172326
-0,039570856	1,408634087
-0,039166797	1,490865021
-0,038762737	1,57698769
-0,038358678	1,66712486
-0,037954619	1,761399216
-0,037550559	1,859933068
-0,0371465	1,962848044
-0,03674244	2,07026476
-0,036338381	2,182302479
-0,035934321	2,299078757
-0,035530262	2,420709072
-0,035126202	2,547306438
-0,034722143	2,67898101
-0,034318083	2,815839673
-0,033914024	2,957985618
-0,033509964	3,105517916
-0,033105905	3,258531071

-0,032701845	3,417114571
ΤΙΜΗ	ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ
-0,032297786	3,581352428
-0,031893726	3,751322717
-0,031489667	3,927097103
-0,031085608	4,10874037
-0,030681548	4,296309946
-0,030277489	4,489855427
-0,029873429	4,6894181
-0,02946937	4,895030478
-0,02906531	5,106715827
-0,028661251	5,32448771
-0,028257191	5,548349534
-0,027853132	5,778294109
-0,027449072	6,01430322
-0,027045013	6,256347211
-0,026640953	6,504384593
-0,026236894	6,758361657
-0,025832834	7,018212123
-0,025428775	7,283856801
-0,025024715	7,555203282
-0,024620656	7,832145653
-0,024216597	8,114564247
-0,023812537	8,402325412
-0,023408478	8,695281326
-0,023004418	8,993269842
-0,022600359	9,296114361
-0,022196299	9,60362376
-0,02179224	9,915592343
-0,02138818	10,23179984
-0,020984121	10,55201147
-0,020580061	10,87597798
-0,020176002	11,20343584
-0,019771942	11,53410735
-0,019367883	11,86770093
-0,018963823	12,20391134
-0,018559764	12,54242004
-0,018155704	12,88289551
-0,017751645	13,22499371
-0,017347585	13,56835851
-0,016943526	13,91262223
-0,016539467	14,25740616
-0,016135407	14,6023212
-0,015731348	14,94696848

-0,015327288	15,29094009
-0,014923229	15,63381978
ΤΙΜΗ	ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ
-0,014519169	15,97518375
-0,01411511	16,31460147
-0,013711105	16,65163654
-0,013306991	16,98584758
-0,012902931	17,31678915
-0,012498872	17,6440127
-0,012094812	17,96706756
-0,011690753	18,28550194
-0,011286693	18,59886398
-0,010882634	18,90670275
-0,010478574	19,2085694
-0,010074515	19,50401813
-0,009670456	19,79260736
-0,009266396	20,07390077
-0,008862337	20,34746842
-0,008458277	20,61288781
-0,008054218	20,86974499
-0,007650158	21,11763561
-0,007246099	21,35616597
-0,006842039	21,58495409
-0,00643798	21,80363071
-0,00603392	22,01184026
-0,005629861	22,20924186
-0,005225801	22,39551022
-0,004821742	22,57033655
-0,004417682	22,73342941
-0,004013623	22,88451549
-0,003609563	23,02334042
-0,003205504	23,14966946
-0,002801445	23,26328815
-0,002397385	23,36400295
-0,001993326	23,45164173
-0,001589266	23,52605434
-0,001185207	23,58711297
-0,000781147	23,63471255
-0,000377088	23,66877106
2,69718E-05	23,68922971
0,000431031	23,69605319
0,000835091	23,68922971
0,00123915	23,66877106
0,00164321	23,63471255

0,002047269	23,58711297
0,002451329	23,52605434
0,002855388	23,45164173
TIMH	ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ
0,003259448	23,36400295
0,003663507	23,26328815
0,004067566	23,14966946
0,004471626	23,02334042
0,004875685	22,88451549
0,005279745	22,73342941
0,005683804	22,57033655
0,006087864	22,39551022
0,006491923	22,20924186
0,006895983	22,01184026
0,007300042	21,80363071
0,007704102	21,58495409
0,008108161	21,35616597
0,008512221	21,11763561
0,00891628	20,86974499
0,00932034	20,61288781
0,009724399	20,34746842
0,010128459	20,07390077
0,010532518	19,79260736
0,010936578	19,50401813
0,011340637	19,2085694
0,011744696	18,90670275
0,012148756	18,59886398
0,012552815	18,28550194
0,012956875	17,96706756
0,013360934	17,6440127
0,013764994	17,31678915
0,014169053	16,98584758
0,014573113	16,65163654
0,014977172	16,31460147
0,015381232	15,97518375
0,015785291	15,63381978
0,016189351	15,29094009
0,01659341	14,94696848
0,01699747	14,6023212
0,017401529	14,25740616
0,017805589	13,91262223
0,018209648	13,56835851
0,018613707	13,22499371

0,019017767	12,88289551
TIMH	ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ
0,019421826	12,54242004
0,019825886	12,20391134
0,020229945	11,86770093
0,020634005	11,53410735
0,021038064	11,20343584
0,021442124	10,87597798
0,021846183	10,55201147
0,022250243	10,23179984
0,022654302	9,915592343
0,023058362	9,60362376
0,023462421	9,296114361
0,023866481	8,993269842
0,02427054	8,695281326
0,0246746	8,402325412
0,025078659	8,114564247
0,025482718	7,832145653
0,025886778	7,555203282
0,026290837	7,283856801
0,026694897	7,018212123
0,027098956	6,758361657
0,027503016	6,504384593
0,027907075	6,256347211
0,028311135	6,01430322
0,028715194	5,778294109
0,029119254	5,548349534
0,029523313	5,32448771
0,029927373	5,106715827
0,030331432	4,895030478
0,030735492	4,6894181
0,031139551	4,489855427
0,031543611	4,296309946
0,03194767	4,10874037
0,03235173	3,927097103
0,032755789	3,751322717
0,033159848	3,581352428
0,033563908	3,417114571
0,033967967	3,258531071
0,034372027	3,105517916
0,034776086	2,957985618
0,035180146	2,815839673

0,035584205	2,67898101
TIMH	ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ
0,035988265	2,547306438
0,036392324	2,420709072
0,036796384	2,299078757
0,037200443	2,182302479
0,037604503	2,07026476
0,038008562	1,962848044
0,038412622	1,859933068
0,038816681	1,761399216
0,039220741	1,66712486
0,0396248	1,57698769
0,040028859	1,490865021
0,040432919	1,408634087
0,040836978	1,330172326
0,041241038	1,255357638
0,041645097	1,184068633
0,042049157	1,116184868
0,042453216	1,051587053
0,042857276	0,990157262
0,043261335	0,931779111
0,043665395	0,87633793
0,044069454	0,823720918
0,044473514	0,773817286
0,044877573	0,726518379
0,045281633	0,681717795
0,045685692	0,639311478
0,046089752	0,599197812
0,046493811	0,561277694
0,04689787	0,525454594
0,04730193	0,491634612
0,047705989	0,459726516
0,048110049	0,429641775
0,048514108	0,401294584
0,048918168	0,37460187
0,049322227	0,349483301
0,049726287	0,325861284
0,050130346	0,303660949
0,050534406	0,282810138

Πίνακας 4: Τιμές και πιθανότητες τιμών κανονικής κατανομής

Monte Carlo Απόδοση	0,00535934	-0,007672955	-0,015520714	-0,02503517	0,019294527
-0,0169032	-0,014156895	-0,019874889	0,008318003	-0,000628444	-0,01411699
0,011984101	0,029280811	-0,002533526	0,022380534	0,00914372	-0,018835466
0,003851671	0,012298213	0,011213625	0,009946165	-0,013277341	0,014205271
-0,001832233	0,025638777	-0,01585996	0,026273807	-0,005006719	0,024559607
0,027241354	-0,004198261	-0,012520447	0,023600242	-0,016735721	0,034795582
-0,020346543	-0,006695667	-0,002487469	0,007352243	-0,008771241	0,004679118
-0,021341832	0,030734978	0,005891373	0,002733308	-0,002036733	0,012760893
0,004776062	-0,037061911	-0,002549633	-0,001063873	0,01420646	-0,004800428
0,010136398	-0,007857528	-0,020586268	-0,013807451	0,007763289	-0,009045756
-0,051213032	-0,005068559	-0,022071835	0,009555309	0,014549979	0,007468603
-0,002030955	-0,029367684	-0,009127505	-0,015894476	0,001857794	-0,025475581
-0,006820336	0,013149852	0,020013367	-0,000440767	-0,017635446	0,019475616
-0,014793535	-0,013091367	0,02119755	0,011556994	-0,046274861	-0,01980518
-0,013137498	-0,019667523	0,009182916	-0,015107687	0,015777419	0,013904762
-0,027635617	8,05656E-06	0,03761215	0,009121301	-0,017312451	-0,021138952
0,029717827	-0,000435374	0,014611692	0,0117838	-0,009283715	-0,011512482
-0,00229495	-0,029479331	0,001838188	0,005436808	-0,013974274	0,013242463
-0,012153921	0,009933093	0,009133569	-0,01460849	0,024669954	-0,004309017
-0,010389368	0,021456119	0,027401008	-0,004257834	0,024895627	-0,01983422
0,005922833	-0,035484625	-0,026405513	0,016842659	0,032210049	0,015439003
-0,003955929	-0,019052054	0,007061818	0,004209203	-0,011472018	0,021753963
0,035381948	0,004530965	0,006183363	0,012049636	0,016471061	-0,018167579
-0,012774138	0,001077069	0,029543054	0,003820023	0,018134893	0,0061079
-0,011088839	-0,001573746	0,007246357	0,015131154	0,006325795	0,010170665
-0,016689856	-0,005884572	0,022461591	-0,033254226	-0,014738538	0,022808232
-0,016341812	-0,013749006	0,00227357	0,012640402	0,022493297	0,016662349
-0,004715317	0,003182206	-0,007099469	-0,008862278	-0,007409829	-0,003845269
-0,02874308	-0,026344631	0,007688531	-0,014351825	0,003700764	-0,0035888
-0,023441471	-0,002603056	-0,00182519	-0,004915513	0,012695878	-0,003732282
-0,011395689	0,012100939	-0,003596291	-0,00340916	-0,00982836	0,006115959
0,000689048	0,001794834	0,000622089	0,024130227	-0,022710186	0,025174695
0,033163775	0,039699639	-0,013580532	-0,020384293	0,009800674	-0,01105599
0,020058585	-0,003173023	-0,012097801	0,003240185	0,029333805	-0,020957715
0,001993001	-0,008243141	-0,026047771	-0,004659931	8,47933E-05	0,005957441
-0,009108146	-0,009144841	-0,001132727	-0,011507361	-0,033562482	0,036789252
0,003737374	0,005383783	0,008202738	-0,015214328	0,008456991	0,026019194
0,001232068	0,037751808	-0,007725225	0,001525871	-0,010025177	0,019412995
-0,01365033	-0,002169324	0,003036057	0,004936842	0,015393858	
0,000198558	0,012065149	-0,024164097	0,001619022	-0,006565727	
-0,011435501	0,029401512	-0,001455242	0,045418849	0,01751966	
-0,013635158	-0,015192564	-0,004517897	0,015638344	-0,013375811	
	0,016251997	0,027394144	0,008235069	-0,012606678	

Πίνακας 5:
Υπολογισμ
ός 250
τυχαίων
τιμών
απόδοσης

		37	1,018743	81	1,01576	125	1,00438
		38	0,999565	82	0,993252	126	1,01213
		39	0,993628	83	0,968164	127	1,012858
		40	1,011553	84	0,996795	128	1,015115
ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΙΣ	0,99917	41	1,003334	85	1,002308	129	0,987814
1	0,97792	42	0,987479	86	1,015005	130	0,993074
2	0,998449	43	1,009042	87	0,998152	131	0,980503
3	0,980346	44	1,011463	88	0,998984	132	0,977555
4	1,008785	45	0,99078	89	1,005702	133	0,988435
5	0,992844	46	1,005286	90	1,002607	134	0,990267
6	0,988996	47	0,996442	91	1,005913	135	1,002741
7	0,996278	48	0,989759	92	0,985057	136	0,990274
8	1,001701	49	0,995262	93	0,992974	137	1,016385
9	1,012599	50	1,00275	94	0,985733	138	0,987363
10	0,978201	51	0,977754	95	0,997806	139	0,997407
11	0,996001	52	1,008933	96	1,010368	140	0,992895
12	0,98386	53	1,01747	97	1,001985	141	0,983158
13	1,001742	54	1,006709	98	1,008533	142	0,998146
14	1,006976	55	1,006266	99	1,009108	143	1,003416
15	0,988352	56	0,995911	100	0,99725	144	1,023899
16	1,0149	57	1,000734	101	0,992764	145	0,98373
17	1,005941	58	0,991936	102	0,984131	146	1,007288
18	0,99609	59	0,994182	103	0,998325	147	1,01092
19	1,001329	60	1,012314	104	0,991632	148	1,002662
20	1,005071	61	0,995626	105	0,994144	149	1,01133
21	0,997115	62	1,000778	106	1,015476	150	0,993563
22	0,997202	63	1,013963	107	0,985823	151	0,996023
23	0,980171	64	1,001038	108	1,003566	152	1,018546
24	1,000111	65	1,013979	109	0,989988	153	1,002867
25	0,965699	66	0,991477	110	0,989412	154	1,013013
26	0,981648	67	0,981631	111	0,987668	155	1,000247
27	0,998834	68	0,993879	112	0,995459	156	0,988613
28	0,98875	69	0,999907	113	0,992938	157	0,998871
29	1,009633	70	0,984404	114	0,991365	158	1,004647
30	1,002614	71	0,996745	115	0,989329	159	1,007588
31	0,99729	72	0,993413	116	1,011762	160	1,003727
32	1,005374	73	1,000709	117	1,007457	161	0,999445
33	0,984036	74	0,996101	118	1,015929	162	1,010298
34	1,008538	75	1,002286	119	1,010761	163	1,002498
35	1,009914	76	1,0105	120	0,986307	164	1,010452
36	1,000363	77	0,993656	121	0,98716	165	1,009444
		78	0,996112	122	1,002775	166	0,998886
		79	1,010224	123	1,006016	167	0,993459
		80	0,991473	124	1,002007	168	0,990723

169	0,993121	213	1,00314	257	1,002565	301	1,00505
170	0,989243	214	1,002478	258	1,022054	302	1,00174
171	1,001685	215	1,031004	259	1,016897	303	1,001471
172	1,001732	216	1,033698	260	0,995842	304	1,004157
173	0,989646	217	0,99895	261	1,003363	305	1,00398
174	0,995799	218	1,01343	262	1,020305	306	1,015019
175	1,006962	219	1,004684	263	0,998717	307	1,001327
176	0,99052	220	1,00291	264	0,986948	308	0,999856
177	0,989077	221	1,009212	265	0,970265	309	0,98812
178	1,007337	222	1,005132	266	1,011295	310	1,00127
179	0,993713	223	1,003307	267	1,014138	311	1,007848
180	0,994772	224	0,985984	268	1,021674	312	0,986104
181	1,006335	225	0,988315	269	1,004935	313	1,001282
182	1,001757	226	1,013484	270	0,997468	314	1,004047
183	1,003103	227	0,9762	271	1,000892	315	1,02044
184	0,991745	228	1,008341	272	1,021313	316	0,987245
185	1,006382	229	1,005063	273	0,999836	317	1,007234
186	0,973133	230	0,995069	274	1,002761	318	1,006473
187	1,017155	231	1,014685	275	1,016278	319	0,994059
188	1,003657	232	1,00703	276	1,012414	320	1,005341
189	1,003301	233	1,021778	277	1,008678	321	1,006464
190	0,991036	234	0,986897	278	1,002134	322	0,993828
191	1,009187	235	1,000324	279	1,013447	323	1,017265
192	1,019247	236	1,008179	280	0,999858	324	1,001457
193	1,007487	237	0,992212	281	0,990133	325	1,004276
194	1,01056	238	0,997425	282	1,010138	326	0,997786
195	1,00213	239	1,008937	283	0,984173	327	1,0122
196	0,9979	240	0,982024	284	1,019969	328	1,000746
197	1,011349	241	1,010925	285	0,994629	329	1,003196
198	0,987363	242	1,00839	286	1,001322	330	1,007457
199	0,987022	243	1,00817	287	1,026602	331	0,994105
200	0,997709	244	0,994014	288	0,973309	332	1,011867
201	1,01216	245	1,002725	289	1,001762	333	0,99335
202	0,990099	246	1,003419	290	1,009157	334	1,012461
203	1,018544	247	1,002749	291	0,997153	335	1,02023
204	0,992881	248	0,984314	292	1,00475	336	1,003849
205	0,995232	249	1,031396	293	1,000089	337	0,998539
206	1,012245	250	1,001888	294	0,995386	338	0,998801
207	0,972014	251	0,996903	295	0,996443	339	1,015856
208	0,985048	252	0,997046	296	1,001665	340	0,974807
209	1,005105	253	0,990868	297	1,025241	341	0,999662
210	0,972052	254	0,994218	298	1,012508	342	1,001246
211	1,017726	255	1,001521	299	1,001812	343	1,00119
212	0,985029	256	0,985413	300	0,998227	344	1,002005

345	1,011364	389	0,986956	433	0,981598	477	0,994714
346	0,995398	390	1,001567	434	0,991571	478	1,009865
347	0,997492	391	1,016415	435	1,009541	479	0,99018
348	0,98353	392	1,01043	436	1,017278	480	0,990365
349	1,027564	393	1,007633	437	1,018928	481	1,002116
350	1,007845	394	0,970467	438	0,992245	482	0,990992
351	0,999971	395	1,008376	439	1,001732	483	1,002554
352	1,001309	396	1,006218	440	0,997976	484	1,00892
353	1,000545	397	0,995787	441	1,007549	485	0,983639
354	1,003848	398	1,012572	442	0,995524	486	0,996175
355	1,015314	399	1,008211	443	1,0166	487	0,99567
356	1,004855	400	0,99934	444	1,013096	488	0,986989
357	1,003167	401	0,989422	445	0,999209	489	0,994958
358	1,000405	402	0,994472	446	0,998749	490	0,989957
359	0,990884	403	1,010812	447	1,004266	491	0,985992
360	0,998236	404	0,997295	448	0,996856	492	0,997253
361	1,019736	405	1,004081	449	0,983299	493	0,993401
362	0,980479	406	1,000061	450	0,990453	494	1,007413
363	0,995004	407	0,98302	451	1,001807	495	0,996812
364	1,005794	408	0,986274	452	0,99575	496	0,98739
365	0,990356	409	1,002266	453	1,004376	497	1,009445
366	0,983567	410	1,018026	454	0,99902	498	1,007355
367	0,99992	411	1,005018	455	0,992234	499	0,996518
368	1,004834	412	0,998044	456	0,996434	500	0,993256
369	0,997938	413	0,997411	457	1,00429	501	0,980619
370	1,008109	414	0,995624	458	1,013255	502	1,013266
371	1,007972	415	1,017279	459	0,983249	503	1,009304
372	1,010592	416	0,994328	460	1,020555	504	1,000393
373	0,996549	417	1,016208	461	1,002061	505	0,977736
374	0,991549	418	1,003747	462	0,991615	506	1,010319
375	1,003695	419	1,009524	463	0,977673	507	1,007108
376	0,996783	420	0,996463	464	0,981	508	1,01394
377	0,979885	421	1,026438	465	0,99848	509	0,998186
378	0,993072	422	1,000184	466	0,997132	510	0,999794
379	1,002899	423	1,009303	467	1,015671	511	1,01929
380	1,013693	424	0,98586	468	1,000649	512	0,992239
381	1,008755	425	1,002154	469	0,990842	513	1,001928
382	0,986536	426	1,010212	470	1,020502	514	1,00376
383	0,98121	427	0,993882	471	0,999999	515	1,007259
384	1,001513	428	0,999109	472	1,019616	516	1,00322
385	0,984404	429	1,025622	473	1,015368	517	1,005214
386	1,008589	430	1,007377	474	1,013244	518	1,012497
387	0,994324	431	1,008869	475	1,00397	519	0,995769
388	0,97824	432	1,028919	476	0,996294	520	0,997565

521	1,00207	565	0,989427	609	0,997438	653	1,002969
522	1,006133	566	0,99019	610	1,009052	654	0,997766
523	0,997459	567	1,004051	611	0,997636	655	1,016135
524	0,996643	568	0,990415	612	0,998346	656	0,996587
525	1,012977	569	1,004075	613	1,005691	657	1,019465
526	1,006666	570	1,00146	614	0,986497	658	1,014175
527	0,98917	571	1,00861	615	0,993834	659	0,993395
528	0,969459	572	0,993413	616	1,013026	660	0,999545
529	1,012156	573	0,990642	617	1,003689	661	1,008676
530	0,995684	574	1,014488	618	1,01213	662	0,9987
531	1,002895	575	0,99357	619	0,986166	663	1,012
532	0,998212	576	0,994835	620	1,003856	664	1,013914
533	1,002891	577	0,98779	621	0,989183	665	1,007113
534	1,005107	578	0,986682	622	0,994126	666	1,007895
535	0,999223	579	0,983583	623	0,977214	667	0,987987
536	0,974782	580	0,998888	624	1,024054	668	1,00551
537	0,999507	581	1,007612	625	1,009024	669	1,002419
538	0,990245	582	0,994733	626	0,997104	670	1,002379
539	1,003717	583	1,016035	627	0,997003	671	1,017689
540	0,999043	584	1,011382	628	0,990025	672	0,989117
541	1,003484	585	1,007239	629	1,009816	673	1,006606
542	0,993461	586	1,007145	630	0,99705	674	0,996286
543	1,017778	587	0,98013	631	1,009241	675	0,994996
544	1,010596	588	1,006208	632	0,97848	676	1,015412
545	1,02062	589	1,006625	633	1,003424	677	1,012341
546	1,002497	590	1,007669	634	1,01735	678	1,00838
547	0,979038	591	1,000324	635	0,985078	679	0,989898
548	1,008672	592	1,010911	636	0,991056	680	0,994874
549	0,978881	593	0,992201	637	0,984567	681	0,985939
550	0,987238	594	1,020689	638	1,007666	682	0,979043
551	1,001259	595	1,018903	639	1,00204	683	0,996362
552	1,003618	596	0,999898	640	0,997234	684	0,989353
553	1,009857	597	0,984675	641	0,990404	685	0,993635
554	0,991998	598	1,006934	642	0,996969	686	1,006302
555	0,991604	599	1,026968	643	0,990326	687	1,008786
556	0,983717	600	0,997156	644	1,004882	688	1,005257
557	1,000865	601	0,980178	645	0,997401	689	0,987068
558	1,022088	602	0,98405	646	0,986595	690	0,996829
559	0,989803	603	1,015338	647	0,983953	691	1,001324
560	0,978246	604	0,975682	648	1,001337	692	0,992043
561	0,988939	605	0,991169	649	0,994105	693	0,999005
562	0,992544	606	0,995025	650	0,992748	694	1,003584
563	0,992221	607	0,98625	651	1,004196	695	1,006346
564	0,983339	608	0,985915	652	0,993105	696	0,991617

697	0,993997	741	1,008974	785	0,993212	829	1,001867
698	0,984572	742	1,015502	786	0,99429	830	0,996653
699	0,997944	743	1,024242	787	1,014093	831	1,008994
700	0,992217	744	0,995448	788	0,973691	832	1,00617
701	0,994167	745	1,01758	789	0,994944	833	1,01167
702	0,990399	746	1,000325	790	0,984109	834	1,018839
703	0,988411	747	1,001778	791	0,993282	835	0,989328
704	1,002289	748	0,994286	792	0,995215	836	1,015577
705	0,999639	749	0,994838	793	1,016245	837	0,973337
706	0,984155	750	1,004196	794	0,99668	838	1,005618
707	1,006592	751	0,993787	795	0,972801	839	1,006985
708	1,000617	752	1,005783	796	0,989906	840	0,990945
709	0,996976	753	1,00636	797	0,996368	841	0,98414
710	0,996402	754	0,977851	798	1,011743	842	1,014701
711	1,003119	755	1,001094	799	0,989928	843	1,014654
712	1,02011	756	1,008448	800	0,999362	844	1,001712
713	1,004768	757	1,020532	801	1,00628	845	0,971848
714	1,020652	758	0,992694	802	0,993507	846	1,006971
715	1,009172	759	0,997658	803	0,974267	847	1,004235
716	0,993601	760	0,996954	804	0,994889	848	0,995619
717	1,01125	761	1,028867	805	1,01122	849	0,980061
718	1,014859	762	0,99381	806	1,011942	850	0,996647
719	0,999585	763	0,991906	807	0,996907	851	0,993038
720	1,009039	764	0,995223	808	1,001352	852	0,984792
721	0,998252	765	0,980169	809	0,990937	853	1,018468
722	0,996591	766	0,983631	810	1,003501	854	1,00336
723	0,99456	767	0,982544	811	1,01357	855	1,013007
724	1,013818	768	1,005615	812	1,00185	856	1,005002
725	1,003193	769	0,988516	813	1,001415	857	0,999591
726	1,022698	770	1,005776	814	1,004349	858	1,004377
727	0,989044	771	0,986504	815	1,014571	859	0,993575
728	0,977352	772	1,0009	816	0,991245	860	0,983645
729	1,00236	773	0,985172	817	1,024067	861	1,003866
730	1,00391	774	1,026663	818	0,993664	862	1,009476
731	0,995656	775	0,98193	819	0,999464	863	0,991356
732	0,989478	776	0,994475	820	1,011177	864	0,999106
733	0,995319	777	1,015345	821	0,988698	865	0,999229
734	1,005168	778	0,981037	822	1,010463	866	1,002752
735	1,001436	779	1,018269	823	0,998798	867	0,999484
736	1,006684	780	0,983122	824	0,980003	868	0,999817
737	1,006398	781	0,998398	825	0,994564	869	1,007962
738	0,987889	782	1,007852	826	0,976719	870	1,002738
739	1,016419	783	0,998947	827	0,980313	871	0,992548
740	1,001122	784	1,002598	828	0,992208	872	1,017196

873	1,011522	917	1,005217	961	0,998078
874	0,987682	918	1,014673	962	1,000491
875	1,001388	919	1,003302	963	0,993812
876	0,982255	920	0,993798	964	0,981253
877	1,01571	921	0,995229	965	0,97878
878	0,997337	922	0,995093	966	1,019846
879	0,995405	923	0,99199	967	1,005602
880	0,999138	924	1,010783	968	1,002438
881	0,992063	925	1,012187	969	1,011766
882	1,011232	926	0,992409	970	0,996341
883	0,980192	927	0,995802	971	1,008691
884	0,997676	928	1,00904	972	0,997012
885	0,987086	929	1,007785	973	0,994687
886	1,009031	930	0,969214	974	1,005459
887	1,024882	931	1,009056	975	0,989973
888	1,001677	932	1,016454	976	0,985439
889	0,99485	933	0,987255	977	0,992887
890	0,971206	934	1,003697	978	0,998462
891	1,001403	935	0,996461	979	0,992801
892	1,011904	936	1,005406	980	0,995963
893	0,995571	937	1,007562	981	1,001913
894	0,983102	938	1,016473	982	1,000178
895	1,000144	939	0,994329	983	1,000757
896	0,992793	940	0,987126	984	1,013534
897	0,98436	941	1,003144	985	1,02119
898	1,006097	942	0,999613	986	1,028051
899	0,991936	943	0,992826	987	0,997698
900	0,998627	944	0,997025	988	1,009555
901	0,993514	945	1,020602	989	0,983077
902	0,98729	946	0,995597	990	1,001145
903	0,99497	947	1,010449	991	0,98828
904	1,01723	948	0,973814	992	0,985409
905	0,997548	949	0,988734	993	0,993645
906	0,999045	950	0,995823	994	0,990042
907	0,988428	951	1,008367	995	0,983653
908	0,996035	952	1,004908	996	0,9935
909	0,993924	953	1,012709	997	0,99104
910	0,98341	954	0,999447	998	1,012752
911	0,98988	955	1,001723	999	1,000843
912	1,016316	956	0,999962	1000	0,997897
913	0,99576	957	1,004096		
914	0,997114	958	1,006344		
915	0,99554	959	1,024391		
916	1,007247	960	1,009928		

Πίνακας
62:Επανάληψη
εξίσωσης
υπολογισμού τελικής
αξίας χαρτοφυλακίου
1000 φορές

DAIMLER AG	TOYOTA MOTOR COMPANY	NISSAN MOTOR COMPANY	MARRIOTT VACATIONS	ADVANCED MICRO DEVICES (AMD)	
ΑΠΟΔΟΣΗ					ΑΠΟΔΟΣΗ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ
-0,94%	-0,47%	-0,43%	-0,71%	-1,43%	-0,85%
0,12%	-0,18%	0,00%	0,19%	-0,97%	-0,02%
-0,38%	0,13%	-2,36%	1,07%	0,19%	-0,05%
0,12%	-0,44%	-0,67%	-0,14%	2,38%	0,17%
-0,80%	-0,01%	-0,83%	-0,02%	2,97%	-0,15%
-1,45%	-0,55%	-1,15%	0,40%	3,08%	-0,48%
0,37%	0,26%	-1,06%	0,54%	1,25%	0,41%
0,45%	-0,27%	0,65%	0,95%	-1,10%	0,30%
1,42%	0,17%	-1,21%	0,36%	0,99%	0,85%
0,87%	0,30%	0,24%	0,02%	2,92%	0,79%
1,50%	0,35%	0,08%	0,10%	-3,38%	0,49%
-0,61%	-0,01%	0,32%	0,32%	7,90%	0,56%
-0,81%	0,31%	-0,97%	0,59%	0,08%	-0,28%
0,41%	-0,50%	-1,27%	1,07%	1,31%	0,41%
-0,69%	-0,62%	1,21%	-0,15%	-1,77%	-0,58%
0,73%	-0,04%	0,32%	0,09%	0,03%	0,40%
-1,22%	-0,38%	0,24%	0,49%	-0,18%	-0,58%
-2,64%	1,88%	0,49%	2,23%	2,03%	-0,36%
-1,46%	0,33%	-0,73%	-1,25%	0,44%	-0,92%
-0,90%	0,04%	0,65%	-0,72%	-1,07%	-0,66%
-0,17%	-1,02%	-0,81%	-1,73%	-0,66%	-0,69%
-0,44%	-0,22%	-0,16%	-0,49%	1,08%	-0,25%

1,38%	-0,40%	0,73%	3,05%	-2,01%	1,08%
1,96%	0,01%	1,06%	1,69%	1,63%	1,53%
1,86%	0,27%	-0,08%	0,34%	-0,94%	0,94%
-0,12%	0,54%	-0,65%	0,18%	-3,56%	-0,33%
-0,14%	-1,04%	-0,81%	-2,85%	-0,75%	-0,91%
-0,89%	-0,52%	-0,32%	0,96%	3,54%	0,01%
-0,90%	-0,46%	-0,64%	0,89%	3,42%	-0,03%
-4,48%	0,28%	-0,56%	0,87%	0,55%	-2,00%
-0,70%	-0,48%	-2,85%	2,09%	2,21%	0,07%
0,92%	0,01%	2,77%	-0,29%	2,21%	0,76%
-0,04%	-0,36%	-2,55%	-0,54%	1,10%	-0,20%
-0,63%	0,46%	-0,31%	0,26%	0,06%	-0,20%
2,24%	1,07%	1,48%	-0,46%	0,03%	1,27%
-1,33%	1,77%	-0,23%	-0,16%	0,97%	-0,35%
0,32%	-0,26%	-0,31%	2,26%	-0,61%	0,50%
0,85%	0,13%	-0,54%	1,39%	-0,39%	0,66%
0,55%	0,52%	0,39%	1,74%	4,01%	1,12%
-1,30%	0,92%	2,71%	2,12%	2,83%	0,33%
-0,65%	-0,34%	-0,08%	0,03%	2,41%	-0,14%
-0,19%	0,25%	-1,64%	-1,25%	0,30%	-0,36%
1,27%	0,25%	1,92%	1,11%	-1,96%	0,79%
1,58%	0,04%	-0,24%	0,63%	3,00%	1,21%
3,25%	0,09%	0,32%	1,01%	3,12%	2,17%
1,55%	0,60%	0,24%	-0,22%	1,15%	0,95%
0,91%	0,71%	-1,26%	-0,25%	-0,48%	0,40%
1,61%	0,02%	0,24%	-0,45%	-1,62%	0,57%
-1,45%	0,41%	1,20%	0,61%	3,42%	-0,14%

0,68%	-0,13%	-0,87%	-0,50%	-0,55%	0,12%
1,56%	-0,59%	-0,24%	0,67%	1,07%	0,92%
2,10%	-0,08%	0,08%	0,37%	0,29%	1,15%
0,00%	1,33%	1,61%	1,52%	0,62%	0,65%
3,34%	-0,28%	0,32%	-1,06%	2,62%	1,69%
2,57%	2,11%	1,48%	5,26%	4,83%	3,21%
1,93%	-0,27%	-0,08%	-0,50%	-0,28%	0,79%
-0,57%	1,20%	-0,73%	2,48%	0,81%	0,44%
0,00%	0,21%	-0,08%	-2,63%	-2,42%	-0,74%
-0,57%	-0,51%	-0,73%	0,07%	-0,28%	-0,41%
-2,46%	0,47%	0,90%	0,88%	1,15%	-0,82%
-0,99%	-0,21%	-1,05%	0,08%	1,31%	-0,43%
0,53%	-1,37%	-2,90%	1,08%	-1,56%	-0,03%
1,14%	-0,89%	2,24%	-2,73%	-0,79%	-0,08%
-1,17%	-1,31%	-1,34%	1,53%	0,94%	-0,45%
-0,15%	-1,47%	-1,86%	-1,15%	-2,54%	-0,88%
-1,67%	1,24%	-1,53%	-3,35%	-0,24%	-1,42%
-2,34%	-0,57%	1,00%	1,57%	0,07%	-0,89%
-0,15%	0,76%	-1,52%	-2,29%	-3,66%	-0,86%
0,13%	-0,14%	0,23%	-0,55%	1,96%	0,14%
0,30%	0,01%	-0,76%	0,87%	-0,79%	0,21%
-1,73%	-0,36%	0,46%	0,08%	-0,43%	-0,92%
-1,01%	-0,56%	-0,83%	-2,24%	-1,84%	-1,26%
1,63%	1,38%	0,68%	-0,21%	0,52%	1,07%
1,23%	-0,53%	-0,38%	-0,45%	0,46%	0,47%
0,70%	0,64%	0,45%	0,34%	1,59%	0,70%
0,86%	0,18%	-0,98%	1,89%	1,51%	0,94%

2,31%	1,44%	2,54%	2,83%	-1,55%	1,91%
0,11%	0,59%	3,18%	2,45%	-0,89%	0,70%
3,14%	0,59%	-0,63%	2,02%	-0,20%	2,01%
2,18%	0,67%	2,18%	-0,56%	-2,98%	0,89%
1,01%	-0,70%	0,90%	3,63%	1,78%	1,35%
-0,26%	0,40%	-0,57%	0,21%	0,16%	-0,04%
1,71%	0,72%	0,32%	-1,30%	-1,75%	0,55%
0,67%	0,10%	0,98%	-1,97%	0,00%	0,01%
0,41%	0,16%	-0,49%	2,99%	2,18%	1,02%
0,51%	-0,13%	0,08%	1,67%	1,92%	0,76%
1,50%	-0,24%	-0,81%	-1,67%	-0,26%	0,31%
-3,09%	2,31%	0,98%	0,33%	2,51%	-0,84%
0,14%	-1,40%	-1,77%	-1,71%	-7,40%	-1,31%
1,52%	-0,18%	0,57%	1,01%	0,63%	1,03%
-1,52%	0,66%	-0,72%	0,86%	3,19%	-0,21%
1,77%	-0,47%	0,24%	7,65%	-2,41%	2,12%
1,75%	0,66%	0,65%	4,28%	0,96%	1,96%
-2,41%	1,12%	1,15%	3,70%	5,09%	0,27%
-3,08%	0,70%	0,08%	-2,86%	-1,88%	-2,19%
1,18%	-2,27%	-2,32%	-3,37%	-5,82%	-1,12%
-0,54%	0,93%	-0,87%	2,77%	-0,99%	0,28%
-2,90%	-0,58%	-0,71%	-2,47%	-5,15%	-2,58%
1,25%	-0,29%	0,00%	-0,80%	0,80%	0,50%
0,07%	0,88%	-0,24%	4,45%	16,20%	2,66%
-1,50%	0,92%	-0,24%	0,01%	1,14%	-0,51%
-2,83%	-0,97%	3,74%	1,37%	3,11%	-0,79%
-3,38%	-0,50%	-4,50%	-6,11%	-4,93%	-3,70%

-0,21%	-0,52%	-0,54%	-6,92%	-1,41%	-1,74%
-0,72%	0,44%	0,08%	-5,42%	-1,94%	-1,57%
-2,54%	-1,59%	-2,27%	-0,33%	-10,10%	-2,70%
0,19%	-0,46%	0,15%	0,02%	1,16%	0,15%
0,25%	-0,17%	-3,36%	1,28%	-1,59%	0,03%
-1,95%	-0,42%	-2,29%	1,13%	1,04%	-0,82%
2,46%	-0,38%	0,57%	-0,77%	-1,29%	0,92%
4,34%	0,95%	-2,79%	3,16%	1,85%	2,99%
1,32%	0,47%	1,34%	1,87%	1,95%	1,37%
0,13%	0,75%	0,21%	0,14%	1,05%	0,32%
-1,63%	0,28%	0,36%	-1,03%	-1,48%	-1,11%
-1,47%	0,35%	-0,28%	0,13%	-1,79%	-0,85%
0,64%	0,58%	-0,98%	-1,97%	-0,74%	-0,11%
0,39%	0,77%	-0,21%	0,85%	-1,57%	0,31%
-0,66%	-0,06%	0,00%	-0,58%	3,55%	-0,10%
-0,79%	0,76%	0,28%	1,14%	0,45%	0,01%
-1,57%	-0,49%	0,14%	1,99%	-2,16%	-0,67%
-1,67%	0,38%	0,07%	-1,37%	1,93%	-0,86%
-1,10%	0,02%	-0,14%	-0,09%	3,46%	-0,23%
0,18%	0,24%	0,00%	-1,87%	1,71%	-0,08%
0,02%	-0,20%	-0,63%	0,03%	0,99%	0,05%
0,76%	-0,13%	-1,45%	0,81%	-0,16%	0,43%
-0,33%	0,96%	-0,07%	0,70%	0,13%	0,13%
-0,22%	1,45%	1,61%	0,82%	2,73%	0,62%
1,30%	0,26%	-0,21%	-0,10%	-1,20%	0,54%
0,35%	0,31%	1,34%	3,72%	2,74%	1,31%
1,11%	-0,52%	-0,42%	0,33%	3,67%	0,89%

-0,36%	-0,69%	-0,28%	-2,41%	-1,37%	-0,91%
-3,75%	-0,03%	-0,42%	-0,39%	0,55%	-1,92%
0,51%	-0,77%	1,13%	-1,85%	-3,03%	-0,48%
0,35%	0,47%	0,43%	0,19%	-1,61%	0,14%
1,11%	-0,13%	1,01%	-1,70%	0,16%	0,26%
2,85%	0,97%	-0,07%	1,46%	4,28%	2,29%
-0,23%	-0,18%	0,72%	-0,49%	-3,82%	-0,59%
-1,56%	-0,32%	-0,93%	0,33%	-3,28%	-1,14%
0,17%	-0,71%	0,00%	-0,28%	-2,45%	-0,32%
-0,78%	0,55%	-0,85%	-0,12%	-0,71%	-0,45%
1,83%	1,21%	0,43%	-0,16%	-2,47%	0,84%
0,61%	0,90%	0,29%	4,86%	2,53%	1,68%
-1,54%	0,90%	1,30%	2,92%	1,85%	0,20%
-1,09%	0,90%	-3,29%	-1,78%	7,86%	-0,15%
4,14%	0,57%	1,28%	-1,40%	-0,24%	1,91%
0,45%	1,19%	2,62%	5,74%	7,22%	2,41%
-1,82%	0,47%	2,46%	-1,38%	0,62%	-0,93%
0,15%	-1,81%	-4,15%	-2,43%	-2,21%	-1,11%
-0,94%	0,17%	-0,71%	0,00%	-0,21%	-0,50%
-0,04%	0,13%	2,40%	-0,39%	-3,30%	-0,29%
0,57%	0,72%	2,23%	-1,70%	9,87%	1,15%
0,21%	0,92%	-0,07%	1,53%	0,30%	0,58%
-6,89%	0,13%	-0,96%	-2,21%	-3,83%	-4,30%
-2,48%	-0,79%	-1,95%	-2,04%	0,22%	-1,84%
0,19%	0,12%	0,07%	1,63%	2,51%	0,69%
-2,51%	-0,24%	-1,91%	-1,39%	-2,98%	-1,96%
-1,19%	-1,25%	-1,67%	-2,27%	-1,82%	-1,50%

-0,55%	-0,61%	0,07%	1,27%	1,56%	0,05%
2,94%	1,32%	-0,14%	0,36%	0,95%	1,83%
1,21%	0,68%	-7,23%	2,32%	4,12%	1,22%
-3,28%	-0,85%	-0,51%	-3,50%	-6,15%	-3,11%
-3,16%	-0,04%	0,00%	-1,98%	2,76%	-1,71%
-2,88%	-2,00%	-1,27%	-1,68%	0,44%	-2,10%
1,20%	-0,60%	0,45%	2,01%	1,61%	1,09%
-1,26%	-0,39%	-2,06%	-5,51%	-2,77%	-2,17%
-2,05%	-0,54%	-0,31%	-1,20%	-2,83%	-1,65%
-0,12%	0,86%	0,75%	2,31%	-0,25%	0,54%
0,46%	-0,27%	-0,13%	-0,96%	5,52%	0,54%
0,34%	-0,55%	-0,31%	0,21%	-2,97%	-0,18%
-0,27%	-0,17%	0,19%	-1,59%	-0,22%	-0,49%
1,04%	0,15%	0,25%	2,06%	-0,68%	0,90%
-1,27%	0,35%	0,19%	0,10%	0,80%	-0,47%
-1,13%	0,25%	-0,13%	-1,32%	-2,81%	-1,08%
-0,34%	-1,65%	-4,32%	-1,40%	1,75%	-0,74%
2,12%	0,63%	-1,24%	1,86%	-0,75%	1,39%
1,98%	-0,80%	-2,14%	1,37%	1,81%	1,22%
0,81%	0,87%	1,17%	-0,34%	0,69%	0,60%
-0,32%	1,91%	2,40%	-0,05%	-1,58%	0,08%
2,20%	-0,18%	0,24%	1,02%	2,20%	1,51%
0,71%	-0,35%	0,06%	0,07%	-1,87%	0,13%
-0,31%	1,12%	0,00%	1,98%	0,22%	0,43%
-1,32%	-0,93%	0,06%	1,67%	-0,14%	-0,48%
-0,07%	0,10%	-0,48%	1,13%	2,17%	0,40%
-0,37%	-0,15%	-0,42%	-1,75%	-4,52%	-1,03%

1,32%	-0,24%	-0,89%	0,40%	-1,55%	0,50%
0,98%	0,38%	-0,24%	2,93%	-0,38%	1,08%
1,01%	0,83%	0,36%	0,55%	0,24%	0,78%
4,11%	0,35%	0,84%	-0,26%	8,49%	2,95%
2,27%	0,64%	0,36%	0,50%	1,48%	1,50%
-0,51%	1,58%	1,58%	3,51%	3,29%	1,09%
1,91%	-0,88%	-0,79%	-1,23%	1,84%	0,72%
-0,71%	-1,62%	-0,36%	1,39%	0,68%	-0,27%
0,50%	-0,61%	-4,04%	0,12%	-3,11%	-0,33%
-1,94%	1,06%	0,64%	0,67%	-1,08%	-0,75%
-0,43%	0,22%	0,64%	-0,16%	-1,52%	-0,33%
-2,16%	-0,18%	-0,52%	-3,92%	-5,45%	-2,46%
3,44%	0,64%	1,12%	2,04%	8,52%	3,13%
-1,10%	-0,05%	-0,47%	-0,99%	-1,15%	-0,90%
1,37%	0,18%	0,12%	-0,50%	11,83%	1,80%
0,18%	0,45%	1,13%	1,08%	-0,17%	0,41%
0,63%	1,08%	0,84%	1,34%	2,06%	0,99%
-0,37%	-1,35%	-1,07%	-0,73%	-2,40%	-0,83%
1,34%	0,46%	1,32%	0,07%	-0,47%	0,77%
-0,71%	-0,31%	-0,12%	-1,07%	2,31%	-0,39%
-3,37%	1,21%	1,77%	-1,32%	4,32%	-1,25%
-1,34%	0,40%	0,12%	0,73%	-0,32%	-0,49%
-1,07%	-0,63%	-1,50%	-2,78%	-1,47%	-1,41%
0,38%	-0,24%	-1,01%	0,02%	-4,64%	-0,36%
1,18%	-0,14%	-1,81%	-2,42%	0,56%	0,05%
-0,42%	-1,60%	-0,70%	0,38%	-1,31%	-0,54%
-0,51%	-0,58%	-0,29%	3,55%	0,64%	0,42%

-0,54%	-1,05%	-0,23%	-0,25%	0,21%	-0,47%
2,38%	-0,74%	0,06%	1,16%	-3,02%	1,01%
0,17%	0,67%	1,17%	-2,41%	-2,02%	-0,44%
0,68%	0,48%	0,59%	0,03%	1,44%	0,59%
2,58%	0,48%	-0,23%	3,26%	1,84%	2,18%
0,12%	-1,26%	0,12%	-1,35%	-0,13%	-0,41%
-0,41%	1,07%	0,18%	1,83%	0,00%	0,33%
2,66%	0,28%	-0,47%	0,72%	1,14%	1,61%
-1,83%	1,59%	0,83%	1,93%	2,38%	-0,01%
1,70%	-0,32%	0,59%	-0,93%	1,23%	0,77%
2,53%	-0,13%	3,31%	0,86%	0,13%	1,60%
0,31%	2,24%	-2,04%	1,83%	-0,61%	0,70%
-2,46%	-0,14%	0,12%	1,30%	-0,39%	-1,02%
-5,26%	-0,68%	-0,83%	-0,08%	1,68%	-2,62%
-1,81%	-2,43%	-0,59%	-1,87%	-2,54%	-1,93%
1,42%	-1,96%	-0,88%	-0,17%	-0,21%	0,31%
-1,62%	0,46%	0,24%	0,49%	-3,40%	-0,97%
2,65%	0,74%	0,41%	1,64%	-1,55%	1,63%
-0,21%	-0,95%	-0,94%	1,69%	0,41%	0,08%
-0,44%	0,11%	1,13%	0,73%	5,72%	0,57%
-0,36%	0,63%	0,60%	-0,08%	19,95%	1,92%
-0,72%	-0,17%	-0,47%	0,87%	-4,61%	-0,70%
2,90%	-1,00%	-0,82%	1,93%	-7,98%	0,84%
1,61%	0,72%	2,72%	2,65%	5,18%	2,10%
-0,57%	0,29%	-0,72%	2,52%	5,30%	0,76%
-0,30%	-0,91%	0,12%	0,31%	0,20%	-0,20%
-0,33%	-1,40%	-1,13%	-3,25%	-4,86%	-1,57%

3,98%	0,34%	0,78%	2,85%	2,57%	2,91%
-1,83%	-0,59%	0,24%	1,81%	2,64%	-0,36%
0,83%	-0,49%	0,18%	2,59%	-3,19%	0,55%
0,32%	0,71%	-0,18%	-0,68%	0,74%	0,20%
0,78%	0,26%	-0,06%	-0,14%	-0,20%	0,38%
-0,79%	0,47%	0,00%	1,08%	2,68%	0,16%
0,76%	1,28%	0,85%	0,97%	-2,23%	0,58%
2,99%	0,50%	0,18%	-1,14%	-2,70%	1,08%
0,72%	0,85%	-0,12%	3,41%	0,88%	1,25%
0,19%	1,29%	1,04%	2,82%	8,26%	1,73%
5,11%	4,43%	1,87%	7,56%	11,44%	5,97%
-1,04%	-1,40%	-0,12%	-2,64%	-9,45%	-2,21%
-1,44%	0,17%	0,88%	-0,75%	2,00%	-0,60%

Πίνακας 7: Αποδόσεις ιστορικής προσομοίωσης χαρτοφυλακίου

[100]

Βιβλιογραφία

- Alexander, C. (2008). *Value-at-Risk Models*. Chichester: John Wiley & Sons Ltd.
- Alexander, C., & Sheedy, E. (2008, June). Model-Based Stress Tests: Linking Stress Tests to VaR for Market Risk. *Macquarie University Applied Finance Centre Research Papers, No.33*.
- Basel Committee on Banking Supervision. (2013). *Consultative document: Fundamental review of the trading book: A revised market risk framework*. Bank for International Settlements.
- Best, P. (1998). *Implementing Value at Risk*. Chichester: John Wiley & Sons.
- Chen, J. (2018). On Exactitude in Financial Regulation: Value at Risk, Expected Shortfall, and Expectiles. *Risks, 6*(2).
- Choudhry, M. (2013). *An Introduction to Value-at-Risk* (5th ed.). Chichester: John Wiley & Sons Ltd.
- Čihák, M. (2007). *Introduction to Applied Stress Testing*. Washington, D.C.: International Monetary Fund.
- De Bandt, O., Bruneau, C., & El Amri, W. (2008). Stress testing and corporate finance. *Journal of Financial Stability, 4*(2008), pp. 258-274.
- Dowd, K. (2005). *Measuring market risk* (2nd ed.). Chichester: John Wiley & Sons Ltd.
- Duffie, D., & Pan, J. (1997). An Overview of Value at Risk. *Journal of Derivatives, Vol.4*(No.3), pp. 7-49.
- International Monetary Fund. (2006). *Financial Soundness Indicators: Compilation guide*. Washington, D.C.: International Monetary Fund.
- Jorion, P. (2007). *Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk* (3rd ed.). New York: McGraw-Hill.
- Nolde, N., & Ziegler, J. F. (2017). Elicitability and Backtesting: Perspectives for Banking Regulation. *Annals of Applied Statistics, 11*(4), pp. 1833-1874.
- Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., & Flannery, B. P. (1992). *NUMERICAL RECIPES IN C* (2nd ed.). Cambridge: Cambridge University Press.
- Racicot, F.-É., & Théoret, R. (2009). Some Advanced Approaches to VaR Calculation. In G. N. Gregoriou, *The VaR Implementation Handbook* (pp. 139-165). New York: McGraw-Hill.
- Schaller, P. (2009). Model Risk in VaR Calculations. In G. N. Gregoriou, *The VaR Implementation Handbook* (pp. 415-437). New York: McGraw-Hill.
- Semmler, W., & Youssef, K. M. (2009). Option Pricing With Constant And Time-Varying Volatility. In G. N. Gregoriou, *The VaR Implementation Handbook* (pp. 439-461). New York: McGraw-Hill.
- Sorge, M. (2004). *Stress-testing financial systems: An overview of current methodologies*. Monetary and Economic Department. Basel: Bank for International Settlements.

Αγοραστός, Κ., & Ελευθεριάδης, Ι. (2007). *Ανάλυση Επιχειρηματικών Κινδύνων* (3η εκδ.). Θεσσαλονίκη: Έκδοση Πανεπιστημίου Μακεδονίας Οικονομικών και Κοινωνικών Επιστημών.

Βασιλείου, Δ., & Ηρειώτης, Ν. (2009). *Ανάλυση επενδύσεων και διαχείριση χαρτοφυλακίου*. Αθήνα: Εκδόσεις Rosili.

Ζαχαροπούλου, Χ. (2015). *Στατιστική: Μέθοδοι-Εφαρμογές* (6η εκδ., Τόμ. Α'). Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Σοφία.